E-tömör lokálisan inverz félcsoportok, mint bővítések

Doktori értekezés tézisei

Dékány Tamás

Témavezető:

Bálintné Dr. Szendrei Mária

Matematika- és Számítástudományok
Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Szeged
2018

1. Bevezetés

A csoportbővítések alapvető szerepet játszanak mind a csoportok struktúraelméletében, mind a csoportok varietásainak elméletében. Kaloujnine és Krasner ([6]) 1950-ben bebizonyította, hogy egy N csoport H-val vett bővítése beágyazható N-nek H-val vett koszorúszorzatába. Megjegyezzük, hogy a koszorúszorzat egy speciális szemidirekt szorzat.

A félcsoportok a csoportok természetes általánosításai. Az egyik olyan félcsoportosztály, ahol a Kaloujnine–Krasner-tételnek jelentős hatása volt, a reguláris félcsoportok osztálya.

Az inverz félcsoportok az egyik legtermészetesebb általánosításai a csoportoknak. A Cayley-tétel alapján a csoportokra (izomorfiától eltekintve) úgy tekinthetünk, mint adott halmaz permutációinak olyan halmazaira, melyek zártak a kompozícióra és az inverzképzésre. Egy hasonló eredmény, a Wagner–Preston-tétel azt állítja, hogy az inverz félcsoportok (izomorfizmus erejéig) éppen egy adott X halmaz parciális permutációinak (azaz X részhalmazai közötti permutációinak) halmazai, melyek zártak a parciális leképezések szorzására és az inverzképzésre.

Egy félcsoportot *teljesen egyszerűnek* nevezünk, ha előáll, mint maximális részcsoportjainak egyesítése, és egyetlen $\mathcal{D}$-osztályból áll. Egy teljesen egyszerű félcsoportban a maximális részcsoportok izomorfak egymással. A teljesen egyszerű félcsoportok is a csoportok általánosításai, csak más irányban.

Legyenek K,T félcsoportok. A K-nak T-vel vett szemidirekt és koszorúszorzatait a csoportok esetéhez hasonlóan definiálhatjuk, és $K \rtimes T$-vel, valamint $K \wr T$-vel jelöljük. Ha K félcsoport, T pedig csoport, akkor $K \rtimes T$ és $K \wr T$ pontosan akkor reguláris [inverz, teljesen egyszerű] félcsoport, ha K is az. Általában viszont $K \rtimes T$ nem reguláris félcsoport még akkor sem, ha K és T is inverz félcsoport. Ez vezette el Billhardtot [2] a konstrukció inverz félcsoportokra történő adaptálásához. Ezt a konstrukciót K-nak T-vel vett λ-szemidirekt szorzatának nevezzük.

Egy S inverz félcsoport kongruenciáját idempotens-szétválasztónak nevezzük, ha minden kongruenciaosztály legfeljebb egy idempotenst tartalmaz, azaz minden részfélcsoport kongruenciaosztály részcsoport S-ben. Billhardt és Szittyai bebizonyították, hogy ha S inverz félcsoport és ϱ idempotens-szétválasztó kongruencia S-en, melyre minden idempotens ϱ-osztály egy $\mathcal{V}$ csoportvarietásból származik, akkor S beágyazható egy $\mathcal{V}$-beli csoport S/ϱ-val vett λ-szemidirekt szorzatába.

A disszertáció E-tömör lokálisan inverz félcsoportokkal foglalkozik, melyek olyan inverz félcsoporttal vett bővítések, ahol a részfélcsoportosztályok teljesen egyszerű félcsoportok. A fő probléma, amelyre választ adunk, az, hogy beágyazható-e minden ilyen bővítés teljesen egyszerű félcsoportnak inverz félcsoporttal vett λ-szemidirekt szorzatába. Ez az eredmény Billhardt és Szittyai tételének általánosítása.

2. Előismeretek

Egy ϱ kongruenciát csoportkongruenciának [félháló-kongruenciának, ...] nevezünk, ha S/ϱ csoport [félháló, ...]. A kongruencia magja, melyet $\operatorname{Ker}\varrho$-val jelölünk, S/ϱ egységelemének inverzképe. Ha ϱ félháló-kongruencia és $\varphi\colon S \to Y$ szürjektív homomorfizmus, mely ϱ-t indukálja S-en (azaz $Y \cong S/\varrho$), akkor S-et az S_α $(\alpha \in Y)$ *részfélcsoportok félhálójának* nevezzük, ahol S_α az α elem inverzképe. Ha léteznek bizonyos tulajdonságokkal rendelkező homomorfizmusok ezen osztályok között, melyeket struktúrahomomorfizmusoknak nevezünk, és az S-beli szorzás kifejezhető az S_α-beli szorzásokkal és a struktúra-homomorfizmusokkal, akkor S-et az S_α $(\alpha \in Y)$ *részfélcsoportok erős félhálójának* nevezzük.

Egy félcsoportot *teljesen regulárisnak* nevezünk, ha előáll a részfélcsoportjai egyesítéseként. Jegyezzük meg, hogy S *teljesen egyszerű*, ha teljesen reguláris és egyetlen $\mathcal{D}$-osztályt tartalmaz. Minden teljesen reguláris félcsoport teljesen egyszerű félcsoportok félhálója.

Rees-mátrix félcsoportnak egy olyan $S = \mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ félcsoportot nevezünk, ahol G csoport, I, Λ nemüres halmazok és $P = (p_{\lambda i})$ egy $\Lambda \times I$ típusú mátrix G elemeiből, melyet *szendvicsmátrixnak* nevezünk. Az S félcsoport alaphalmaza $I \times G \times \Lambda$, melyen a szorzást a

$$(i, g, \lambda)(j, h, \mu) = (i, gp_{\lambda j}h, \mu)$$

képlet definiálja. Minden Rees-mátrix félcsoport teljesen egyszerű, és fordítva, a Rees–Suschkewitsch-tétel értelmében minden teljesen egyszerű félcsoport izomorf egy Rees-mátrix félcsoporttal. Azt mondjuk, hogy P *normalizált*, ha létezik olyan $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$, melyekre $p_{\mu i} = p_{\lambda j} = 1_G$ minden $j \in I$-re és $\mu \in \Lambda$-ra. Minden Rees-mátrix félcsoport izomorf egy olyannal, melyben a szendvicsmátrix normalizált.

Egy teljesen egyszerű félcsoportot *centrálisnak* nevezünk, ha bármely két idempotens elem szorzata, az őket tartalmazó legbővebb részfélcsoport centrumában található. Jól ismert tény, hogy az $\mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ Rees-mátrix félcsoport a P normalizált szendvicsmátrixszal pontosan akkor centrális, ha P minden eleme G centrumában van.

A normalizált szendvicsmátrixú Rees-mátrix félcsoportok kongruenciáit a következő állítás karakterizálja.

2.1. Állítás. *Legyen $S = \mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ olyan Rees-mátrix félcsoport, melyre P normalizált. Tegyük fel, hogy N olyan normálosztó G-ben, melyre P minden eleme N-beli. Definiáljuk a ϱ relációt a következőképpen: minden (i, g, λ), $(j, h, \mu) \in S$-re*

$$(i, g, \lambda)\,\varrho\,(j, h, \mu) \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad gh^{-1} \in N.$$

Ekkor ϱ csoportkongruencia S-en, melyre S/ϱ izomorf G/N-nel és $\mathrm{Ker}\,\varrho = \mathcal{M}[N; I, \Lambda; P]$.

Fordítva, az S félcsoport összes csoportkongruenciája ilyen alakú G valamely N normálosztójára, ahol P összes eleme N-beli.

Egy S félcsoportot *inverz félcsoportnak* nevezünk, ha S minden a elemének pontosan egy inverze létezik, és ezt a^{-1}-zel jelöljük. Ekvivalens módon, egy félcsoport inverz, ha reguláris, és az idempotensek részfélhálót alkotnak. Egy S inverz félcsoport pontosan akkor csoport, ha $|E_S| = 1$.

Legyen S félcsoport, $\mathcal{K}$ pedig félcsoportok egy osztálya. Ha ϱ inverz félcsoport kongruencia S-en (azaz S/ϱ inverz félcsoport), akkor azt mondjuk, hogy *ϱ kongruencia $\mathcal{K}$ felett*, ha minden idempotens ϱ-osztály, mint S részfélcsoportja, $\mathcal{K}$-beli. Ebben az esetben az idempotens ϱ-osztályok egyesítése, melyet ϱ magjának nevezünk, és $\mathrm{Ker}\,\varrho$-val jelölünk, $\mathcal{K}$-beli részfélcsoportok félhálója. Ha S reguláris, akkor minden idempotens ϱ-osztály és $\mathrm{Ker}\,\varrho$ is reguláris.

Egy S reguláris félcsoportot *lokálisan inverznek* nevezünk, ha minden eSe ($e \in E_S$) alakú lokális részmonoidja inverz félcsoport. Jegyezzük meg, hogy minden inverz félcsoport és minden teljesen egyszerű félcsoport is lokálisan inverz.

A lokálisan inverz félcsoportokon bevezethetünk egy új kétváltozós műveletet, a $\wedge$-et, melyet az S félcsoport *szendvicsműveletének* nevezzük. Jól ismert tulajdonsága, hogy $s \wedge t$ idempotens minden $(s, t) \in S \times S$-re, valamint $s \wedge t = ss^* \wedge t^*t$ minden $s, t \in S$ és minden $s^* \in V(s)$ és $t^* \in V(t)$ esetén.

Egy S reguláris félcsoportot *E-tömör félcsoportnak* hívunk, ha az S idempotensei által generált részfélcsoport teljesen reguláris. Speciálisan az inverz és a teljesen reguláris félcsoportok E-tömör félcsoportok. Ismert, hogy egy reguláris félcsoport pontosan akkor E-tömör, ha a legkisebb inverz félcsoport kongruenciájának részfélcsoportosztályai teljesen egyszerűek, lásd Yamada (és Hall) [8]. Ebből következik, hogy egy E-tömör lokálisan inverz félcsoport legkisebb inverz félcsoport kongruenciájának magja teljesen egyszerű félcsoportok erős félhálója.

Legyen K félcsoport, T pedig inverz félcsoport. Ha S olyan félcsoport, melyen van olyan ϱ kongruencia, melyre S/ϱ izomorf T-vel és $\operatorname{Ker}\varrho$ izomorf K-val, akkor az (S,ϱ) párt *K-nak T-vel vett bővítésének* nevezzük.

Legyenek K,T tetszőleges félcsoportok, és jelöljük K endomorfizmusmonoidját $\operatorname{End}K$-val. Azt mondjuk, hogy T hat K-n, ha adott egy $\varepsilon\colon T \to \operatorname{End}K$, $t \mapsto \varepsilon_t$ antihomomorfizmus, azaz olyan leképezés, melyre $\varepsilon_u\varepsilon_t = \varepsilon_{tu}$ bármely $t,u \in T$-re. Az egyszerűség kedvéért a szokásos ${}^t a$ jelölést fogjuk használni $a\varepsilon_t$ $(a \in K, t \in T)$ helyett. A $K \times T$ halmazt az

$$(a,t)(b,u) = (a \cdot {}^t b, tu)$$

egyenlőséggel definiált szorzással így nevezzük: *K szemidirekt szorzata T-vel*, jelölése: $K \rtimes T$.

Ehhez kapcsolódó konstrukció a következő. Tetszőleges K,T félcsoportok esetén T hat a K^T direkt hatványon a következő módon: minden $f \in K^T$ és $t \in T$ esetén ${}^t f$ az az elem K^T-ben, melyre $u({}^t f) = (ut)f$ minden $u \in T$ esetén. Az ennek segítségével definiált szemidirekt szorzatot *K-nak T-vel vett koszorúszorzatának* nevezzük, és $K \wr T$-vel jelöljük. Abban az esetben, ha K és T csoportok, az előző két definíció a csoportok szokásos szemidirekt és koszorúszorzatának definíciójával azonos.

Ha K félcsoport, T pedig csoport, akkor $K \rtimes T$ és $K \wr T$ pontosan akkor reguláris [inverz, teljesen egyszerű] félcsoport, ha K is az. Általában viszont $K \rtimes T$ nem reguláris félcsoport még akkor sem, ha K és T is inverz félcsoport. Ez vezette el Billhardtot [2] a konstrukció inverz félcsoportokra történő következő adaptálásához. Legyen K félcsoport és T olyan inverz félcsoport, amely hat K-n. A *K-nak T-vel vett λ-szemidirekt szorzatán* azt a félcsoportot értjük, melynek alaphalmaza

$$\{(a,t) \in K \times T \colon {}^{tt^{-1}}a = a\},$$

és amelyen a szorzás így van definiálva:

$$(a,t)(b,u) = ({}^{(tu)(tu)^{-1}}a \cdot {}^t b, tu)$$

minden $a,b \in K$, $t,u \in T$ esetén.

Reguláris félcsoportok egy osztályát *egzisztenciavarietásnak*, vagy röviden e-varietásnak nevezünk, ha zártak a direkt szorzásra, homomorfkép képzésre és a reguláris részfélcsoport képzésre. Például $\mathcal{LI}$, $\mathcal{ES}$ és $\mathcal{CS}$ e-varietást alkotnak. Jegyezzük meg, hogy inverz félcsoportok vagy teljesen egyszerű félcsoportok egy osztálya pontosan akkor alkot e-varitást, ha varitást alkotnak a $^{-1}$ hozzáadott művelet segítségével.

Ha S reguláris félcsoport, akkor †-t *unér inverz műveletnek* nevezzük, ha adott egy $^{\dagger}\colon S \to S$ leképezés, melyre $s^{\dagger} \in V(s)$ minden $s \in S$ esetén.

Bináris félcsoportnak nevezünk egy félcsoportot, ha adott egy extra kétváltozós művelet, melyet $\wedge$-tel jelölünk. Bináris félcsoportok homomorfizmusai és kongruenciái megőrzik a szorzás művelet mellett a $\wedge$ műveletet is. Ahogy fentebb megjegyeztük, minden lokálisan inverz félcsoport bináris félcsoport a szendvics művelettel, és lokálisan inverz félcsoportok esetén a homomorfizmusok és kongruenciák ugyanazok a bináris és a szokásos esetben.

Legyen X nemüres halmaz. Az X halmazon vett szabad félcsoportot X^+-szal jelöljük. Az X halmaz „megduplázásán” olyan $\overline{X} = X \cup X'$ halmazt értünk, ahol x' „formális” inverze x-nek minden $x \in X$ esetén, és amelyre $'$-t így definiáljuk x'-re: $(x')' = x$.

Legyen S reguláris félcsoport. Egy $\nu\colon \overline{X} \to S$ leképezést *kapcsoltnak* nevezünk, ha $x'\nu$ inverze $x\nu$-nek S-ben minden $x \in X$ esetén. Legyen $\mathcal{K}$ reguláris félcsoportok egy osztálya. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{K}$-beli B félcsoport a $\xi\colon \overline{X} \to B$ kapcsolt leképezéssel együtt *szabad objektum $\mathcal{K}$-ban X felett*, ha minden $S \in \mathcal{K}$ félcsoport és minden $\nu\colon \overline{X} \to S$ kapcsolt leképezés esetén létezik egyetlen olyan $\varphi\colon B \to S$ homomorfizmus, mely ν kiterjesztése, azaz $\xi\varphi = \nu$. Yeh [9]-ban bizonyította, hogy egy e-varietás pontosan akkor tartalmaz szabad objektumot bármely ábécé felett (vagy ekvivalensen egy kételemű ábécé felett), ha $\mathcal{LI}$-beli vagy $\mathcal{ES}$-beli félcsoportokból áll.

A *szabad bináris félcsoport* $F_{\langle 2,2\rangle}(Y)$ *az* Y *ábécé felett* a következőképpen interpretálható. Az alaphalmaza a legszűkebb azok a W halmazok közül, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

(i) $Y \subseteq W \subseteq (Y \cup \{(,\ \wedge,\ )\})^+$,

(ii) ha $u, v \in W$, akkor $uv \in W$,

(iii) ha $u, v \in W$, akkor $(u \wedge v) \in W$.

A $\cdot$ és a $\wedge$ műveletek a konkatenáció és a következő művelet

$$F_{\langle 2,2\rangle}(Y) \times F_{\langle 2,2\rangle}(Y) \to F_{\langle 2,2\rangle}(Y)\,,\ (u, v) \mapsto (u \wedge v)\,.$$

Egy $u \mathrel{\hat{=}} v$ formális egyenlőséget, ahol $u, v \in F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big)$, *$\mathcal{LI}$-beli bi-azonosságnak* nevezünk Azt mondjuk, hogy az *$S \in \mathcal{LI}$ félcsoport kielégíti az $u \mathrel{\hat{=}} v$ bi-azonosságot*, ha $u\overline{\nu} = v\overline{\nu}$ teljesül minden $\nu\colon \overline{X} \to S$ kapcsolt leképezésre. A *bi-azonosság teljesül egy $\mathcal{K}$ lokálisan inverz félcsoportból álló osztályban*, ha minden egyes $\mathcal{K}$-beli félcsoport teljesíti azt. Lokálisan inverz félcsoportok egy $\mathcal{V}$ e-varietására definiáljuk a következő relációt:

$$\begin{aligned}\Theta(\mathcal{V}, X) = \{(u, v) \in F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big) \times F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big) :& \\ \text{az } u \mathrel{\hat{=}} v \text{ bi-azonosság teljesül } \mathcal{V}\text{-ben}\}.&\end{aligned}$$

Ekkor az X feletti biszabad objektum $\mathcal{V}$-ben éppen $F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big)/\Theta(\mathcal{V}, X)$.

A következőkben szükségünk van a $\mathcal{CS}$ e-varietásban teljesülő bi-azonosságok leírására, mely [1]-ben jelent meg.

Minden $w \in F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big)$ kifejezésre, jelölje ιw $[w\tau]$ az első [utolsó] betűt (azaz $\overline{X}$-beli elemet) w-ben; itt w-t mint $\overline{X} \cup \{(, \wedge,)\}$ ábécé feletti szót balról jobbra olvassuk. Hasonlóan a szabad csoportok ismert modelljéhez, redukálási szabályokat lehet definiálni $F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big)$-on. Bebizonyítható, hogy minden $w \in F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big)$ kifejezésnek van egy egyértelműen meghatározott redukált alakja, melyet $\mathbf{s}\,(w)$-vel jelölünk.

Az egyik redukálási szabály $(u \wedge v) \rightsquigarrow (\iota u \wedge v\tau)$ bármely $u, v \in F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big)$-ra. Vegyük észre, hogy ezt alkalmazva minden $F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big)$-beli kifejezésből az $\widetilde{X}^+$ szabad félcsoport egy elemét kapjuk, ahol $\widetilde{X} = \overline{X} \cup (\overline{X} \wedge \overline{X})$ és $(\overline{X} \wedge \overline{X})$ az $\{(x \wedge y) : x, y \in \overline{X}\}$ halmazt jelöli. Ez azt jelenti, hogy elég $\widetilde{X}^+$-beli szavakkal foglalkozni $F_{\langle 2,2\rangle}\big(\overline{X}\big)$-beli kifejezések helyett.

2.2. Állítás. *Bármely nemüres X halmaz esetén teljesül a következő:*

$$\Theta(\mathcal{CS}, X) = \{(u, v) \in \widetilde{X}^+ \times \widetilde{X}^+ : \mathbf{s}\,(u) = \mathbf{s}\,(v)\}.$$

A redukálási szabályok figyelembe vételével a következőt kapjuk:

2.3. Lemma. *Az $\widetilde{X}^+$ halmazon értelmezett $\Theta(\mathcal{CS}, X)$ kongruenciát, mint félcsoport kongruenciát generálja az $\mathrm{I} \cup \Upsilon$ reláció, ahol*

$$\mathrm{I} = \{(xx'x, x) : x \in \overline{X}\},$$

és Υ a következő három reláció egyesítése:

$$\begin{aligned}\Upsilon_3 &= \{\big((x \wedge y)(x \wedge z), (x \wedge z)\big) : x, y, z \in \overline{X}\},\\ \Upsilon_4 &= \{\big((z \wedge x)(y \wedge x), (z \wedge x)\big) : x, y, z \in \overline{X}\},\\ \Upsilon_5 &= \{\big(x'x, (x' \wedge x)\big) : x \in \overline{X}\}.\end{aligned}$$

Egy $\mathcal{X}$ *gráf objektumokból* áll, melyeket $\operatorname{Obj}\mathcal{X}$-val jelölünk, és minden $g, h \in \operatorname{Obj}\mathcal{X}$ pár esetén adott egy g-ből h-ba menő *élhalmaz*, melyet $\mathcal{X}(g, h)$-val jelölünk. A különböző objektumpárokhoz tartozó élhalmazokról feltesszük, hogy diszjunktak, és az összes élek halmazát $\operatorname{Arr}\mathcal{X}$-szel jelöljük. Ha $a \in \mathcal{X}(g, h)$, akkor az $\alpha(a) = g$ és $\omega(a) = h$ jelöléseket használjuk.

Egy $\mathcal{X}$ gráfot *szemigrupoidnak* nevezünk, ha adott rajta egy kompozíció, mely minden egyes $a \in \mathcal{X}(g, h)$, $b \in \mathcal{X}(h, i)$ csatlakozó élpárhoz hozzárendel egy $\mathcal{X}(g, i)$ élet, melyet $a \circ b$-vel jelölünk, és a kompozíció asszociatív, azaz minden $a \in \mathcal{X}(g, h)$, $b \in \mathcal{X}(h, i)$ és $c \in \mathcal{X}(i, j)$ élre, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ teljesül.

Legyen $\mathcal{X}$ szemigrupoid, S pedig félcsoport. Ha $\ell\colon \mathcal{X} \to S$ egy olyan szemigrupoid-homomorfizmus, melyre $\ell(a \circ b) = \ell(a) \cdot \ell(b)$ teljesül minden a, b csatlakozó élpárra, akkor ℓ-et gy hívjuk: *$\mathcal{X}$ címkézése S felett*. Az $a \in \operatorname{Arr}\mathcal{X}$ él esetén $\ell(a)$-t az *a él címkéjének* nevezzük.

3. Teljesen egyszerű félcsoportok bővítései csoportokkal

Ebben a részben a disszertáció 3. Fejezetének eredményeit mutatjuk be, mely [4] alapján készült.

Legyen $T \wr H$ a $T = \mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ Rees-mátrix félcsoport H-val vett koszorúszorzata. Mutatunk egy $T \wr H$-val izomorf Rees-mátrix félcsoportot, melyben a számolások elvégzése egyszerűbb. Ellenőrizhető, hogy a T^H direkt hatvány izomorf $\mathcal{M}[G^H; I^H, \Lambda^H; P^H]$-nal, ahol $P^H = (p^H_{\xi\eta})$ a következő szendvicsmátrix: minden $\xi \in \Lambda^H$ és $\eta \in I^H$ esetén legyen $Ap^H_{\xi\eta} = p_{A\xi, A\eta}$ $(A \in H)$. Továbbá, a koszorúszorzatban használt hatás a következő hatást határozza meg, ha T^H-t lecseréljük $\mathcal{M}[G^H; I^H, \Lambda^H; P^H]$-ra: minden $A \in H$ és $(\eta, f, \xi) \in \mathcal{M}[G^H; I^H, \Lambda^H; P^H]$ esetén ${}^A(\eta, f, \xi) = ({}^A\eta, {}^Af, {}^A\xi)$, ahol az ${}^A\eta \in I^H$, ${}^Af \in G^H$ és ${}^A\xi \in \Lambda^H$ a leképezéseket a $B({}^A\eta) = (BA)\eta$, $B({}^Af) = (BA)f$ és $B({}^A\xi) = (BA)\xi$ egyenlőségek definiálják minden $B \in H$ esetén.

Jegyezzük meg, hogy minden $A \in H$ esetén

$$A({}^Bp^H_{\xi\eta}) = (AB)p^H_{\xi\eta} = p_{(AB)\xi,(AB)\eta} = p_{A({}^B\xi),A({}^B\eta)} = Ap^H_{{}^B\xi,{}^B\eta},$$

és

$${}^Bp^H_{\xi\eta} = p^H_{{}^B\xi,{}^B\eta}$$

minden $B \in H$-ra.

Legyen az $S = \mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ félcsoport az U teljesen egyszerű félcsoport bővítése H-val, ahol P normalizált. A 2.1. Állítás alapján feltehetjük, hogy létezik olyan N normálosztó G-ben, melyre a P szendvicsmátrix minden eleme N-beli és $H = G/N$, valamint $U = \mathcal{M}[N; I, \Lambda; P] \subseteq S$.

Először tegyük fel, hogy S centrális, azaz P minden eleme a G csoport centrumában van. Jegyezzük meg, hogy ekkor U is szükségszerűen centrális. Ebben az esetben a Kaloujnine–Krasner-tétel bizonyításához hasonlót tudunk adni. Rutinfeladat ellenőrizni, hogy a

$$\nu\colon S \to U \wr H = U^H \rtimes H,\ (i, g, \lambda) \mapsto (f_g^{i\lambda}, gN)$$

leképezés, melyre

$$f_g^{i\lambda}\colon H \to U,\ A \mapsto (i, Af_g, \lambda),$$

beágyazás. Így kaptuk a következő tételt.

3.1. Állítás. *Minden centrális teljesen egyszerű félcsoport, mely egy (szükségképpen centrális) U teljesen egyszerű félcsoport bővítése egy H csoporttal, beágyazható U-nak H-val vett koszorúszorzatába.*

Ezután azt az általános esetet vizsgáltuk, ahol S tetszőleges teljesen egyszerű félcsoport. Tegyük fel, hogy létezik egy $S \to U \wr H$ beágyazás, azaz egy

$$\varphi\colon S \to \mathcal{M}[N^H; I^H, \Lambda^H; P^H] \rtimes H$$

beágyazás, ahol $\mathcal{M}[N^H; I^H, \Lambda^H; P^H] \rtimes H$ a fentebb definiált $U \wr H$-val izomorf Rees-mátrix félcsoport. Ebben az esetben φ szükségképpen

$$(i, g, \lambda)\varphi = [(\eta_i, f_g^{i\lambda}, \xi_{gN,\lambda}), gN]$$

alakú, ahol a jobb oldalon lévő indexek jelölik, hogy az egyes komponensek mitől függenek. Megmutattunk több tulajdonságát az ilyen beágyazásoknak. A két legfontosabb közülük

$$f_{p_{\lambda j}}^{i\mu} = f_1^{i\lambda} p_{\xi_\lambda \eta_j}^H f_1^{j\mu},\ \text{teteszőleges } i, j \in I \text{ és } \lambda, \mu \in \Lambda \text{ esetén}$$

és

$$f_{p_{\lambda i}^{-1}}^{i\lambda} = (p_{\xi_\lambda \eta_i}^H)^{-1},\ \text{teteszőleges } i \in I \text{ és } \lambda \in \Lambda \text{ esetén.}$$

Megadtunk egy megfelelő G csoportot, egy G-beli N normálosztót, és egy $S = \mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ Rees-mátrix félcsoportot, amelyekre nem létezik az előzőekben leírt φ beágyazás.

Legyen G a nemkommutatív 21 rendű csoport. A számolások megkönnyítése érdekében G-t $G = \mathbb{Z}_7 \rtimes [\overline{2}]$ alakban reprezentáljuk, ahol $\mathbb{Z}_7$ a modulo 7 maradékosztályok gyűrűjének additív csoportja, $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$ a $\overline{2}$ által generált multiplikatív részcsoportja, és $[\overline{2}]$ a szorzással hat $\mathbb{Z}_7$-en. Ekkor G az $N = \{(a, \overline{1}) : a \in \mathbb{Z}_7\}$-nek $[\overline{2}]$-val vett bővítése. Definiáljuk S-et a következőképpen. Legyen $I = \Lambda = \{1, 2\}$, és jelölje P azt a normalizált szenvicsmátrixot, melyben $p_{11} = p_{12} = p_{21} = (\overline{0}, \overline{1})$ a G csoport egységeleme, és $p_{22} = (\overline{1}, \overline{1}) \in N$ egy 7-edrendű elem.

A fent említett tulajdonságokat alkalmazva az S félcsoport egy megfelelő elemét kifejezzük szendvicselemek segítségével, és ellentmondásra jutunk φ injektivitásával. Ez bizonyítja a következő tételt.

3.2. Tétel. *Létezik olyan teljesen egyszerű félcsoport, mely egy U teljesen egyszerű félcsoport H csoporttal vett bővítése, és nem ágyazható be U-nak H-val vett koszorúszorzatába.*

A következőkben bemutatjuk a Kaloujnine–Krasner-tétel egy módosítását, mely teljesen egyszerű félcsoportok csoporttal vett bővítéseire is fenn áll.

Legyen S egy U teljesen egyszerű félcsoport H csoporttal vett bővítése. A célunk, hogy megadjunk S-nek olyan beágyazását valamely V teljesen egyszerű félcsoport H-val vett $V \rtimes H$ szemidirekt szorzatába, amelyre abban a speciális esetben, ha S csoport (azaz I és Λ egyelemű halmazok), visszakapjuk a Kaloujnine–Krasner-tétel bizonyításában szereplő beágyazást. Az $U \wr H$ koszorúszorzattal ellentétben, a $V \rtimes H$ szemidirekt szorzatban szabadon megválaszthatjuk az $\mathcal{R}$- és $\mathcal{L}$-osztályokat V-ben, a szendvicsmátrixot, és H-nak a hatását V-n.

3.3. Tétel. *Bármely U teljesen egyszerű félcsoportnak H-val vett bővítése beágyazható egy V teljesen egyszerű félcsoport H-val vett szemidirekt szorzatába, ahol a V-beli maximális részcsoportok az U-beli maximális részcsoportok direkt hatványai.*

Pontosabban, legyen S az U-nak H-val vett bővítése. Ahogy korábban is, most is feltesszük, hogy $S = \mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ és a P szendvicsmátrix normalizált, továbbá a 2.1. Állítás értelmében adott egy olyan N normálosztó G-ben, mely tartalmazza P elemeit, valamint $H = G/N$, $U = \mathcal{M}[N; I, \Lambda; P] \subseteq S$. Vegyük H-nak azt a hatását N^H-n, amely a koszorúszorzatot definiálja, és tetszőleges $g \in G$ esetén legyen $f_g \in N^H$ a Kaloujnine–Krasner-tétel bizonyításakor definiált leképezés.

Az S félcsoport segítségével, definiálunk egy megfelelő V félcsoportot, H-nak egy hatását V-n és S-nek egy beágyazását V-nek H-val vett szemidirekt szorzatába. Legyen $V = \mathcal{M}[N^H; I, H \times \Lambda; Q]$, melyre a Q-beli elemek N^H-ból valók, és $q_{(B,\lambda),j} = {}^B f_{p_{\lambda j}}$ teljesül tetszőleges $(B, \lambda) \in H \times \Lambda$ és $j \in I$ esetén.

Definiáljuk H hatását $H \times \Lambda$-n a következőképpen: ${}^A(B, \lambda) = (AB, \lambda)$ $((B, \lambda) \in H \times \Lambda,\ A \in H)$. Ezek után H hatása V-n a következő módon adható meg: legyen ${}^A(i, f, (B, \lambda)) = (i, {}^A f, {}^A(B, \lambda))$ tetszőleges $A \in H$ és $(i, f, (B, \lambda)) \in V$ esetén. Bebizonyítottuk, hogy a

$$\psi \colon S \to \mathcal{M}[N^H; I, H \times \Lambda; Q] \rtimes H$$

leképezés, ahol

$$(i, g, \lambda)\psi = ((i, f_g, (gN, \lambda)), gN),$$

beágyazás.

4. Teljesen egyszerű félcsoportok bővítései inverz félcsoportokkal

Ebben a részben a disszertáció 4. Fejezetének eredményeit mutatjuk be, mely [5] alapján készült.

A disszertáció fő eredménye a következő:

4.1. Tétel. *Legyen S E-tömör lokálisan inverz félcsoport, ϱ inverz kongruencia S-en, melyre minden idempotens ϱ-osztály teljesen egyszerű részfélcsoport S-ben. Ekkor az (S, ϱ) bővítés beágyazható egy teljesen egyszerű félcsoport S/ϱ-val vett λ-szemidirekt szorzatába.*

Emlékezzünk vissza, hogy ha E-tömör félcsoport legkisebb inverz félcsoport kongruenciája esetén az idempotens osztályok teljesen egyszerű félcsoportok. A [7] eredményeinek figyelembe vételével, valamint abból, hogy az E-tömör és a lokálisan inverz félcsoportok is zártak a reguláris részfélcsoport képzésre, az E-tömör lokálisan inverz félcsoportok következő karakterizációját kapjuk.

4.2. Következmény. *Egy reguláris félcsoport pontosan akkor E-tömör lokálisan inverz félcsoport, ha beágyazható teljesen egyszerű félcsoport inverz félcsoporttal vett λ-szemidirekt szorzatába.*

Lényegében ez az állítás struktúratételt ad E-tömör lokálisan inverz félcsoportok konstruálására teljesen egyszerű félcsoportokból és inverz félcsoportokból két relatíve egyszerű konstrukcióval: λ-szemidirekt szorzat képzéssel és reguláris részfélcsoport képzéssel.

A következőkben összegyűjtjük a tétel bizonyításában használt konstrukció elemeit, és leírjuk a bizonyítás fő ötletét.

Legyen (S,ϱ) olyan inverz félcsoporttal vett bővítés, ahol S E-tömör lokálisan inverz félcsoport és ϱ inverz félcsoport kongruencia S-en, amelyre minden idempotens osztály teljesen egyszerű részfélcsoport S-ben. Az egyszerűség kedvéért jelöljük az S/ϱ félcsoportot T-vel, az elemeit pedig kis görög betűkkel.

Először definiáljuk az (S,ϱ) bővítésből *származtatott* $\mathcal{C}$ *szemigrupoidot.* Legyen $\operatorname{Obj}\mathcal{C}=T$ és minden $\alpha,\beta\in T$ esetén legyen

$$\mathcal{C}(\alpha,\beta)=\big\{(\alpha,s,\beta)\in T\times S\times T:\alpha\cdot s\varrho=\beta \text{ és } \beta\cdot(s\varrho)^{-1}=\alpha\big\}.$$

Továbbá definiáljuk $\ell(a)=s$-t minden $a=(\alpha,s,\beta)\in\operatorname{Arr}\mathcal{C}$ élre, így $\mathcal{C}$ egy címkézését kapjuk S felett.

„Duplázzuk" meg a $\mathcal{C}$ gráfot a $\overline{\mathcal{C}}=\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'$ gráf képzésével, ahol $\mathcal{C}'$ az a' alakú „formális inverzeiből" áll az $a\in\operatorname{Arr}\mathcal{C}$ éleknek. Ekkor $\alpha(a')=\omega(a)$ és $\omega(a')=\alpha(a)$ minden $a\in\operatorname{Arr}\mathcal{C}$ esetén, és legyen $(a')'=a$ ($a\in\operatorname{Arr}\mathcal{C}$). Legyen $A=\operatorname{Arr}\mathcal{C}$, $A'=\operatorname{Arr}\mathcal{C}'$. Ekkor $\overline{A}=A\cup A'=\operatorname{Arr}\overline{\mathcal{C}}$. Tetszőleges olyan $a,b\in\operatorname{Arr}\mathcal{C}$ élekre, ahol $\alpha(a)=\omega(b)$, hozzáadunk $\overline{\mathcal{C}}$-hoz egy $(a\wedge b)$ élt, amelyre $\alpha(a\wedge b)=\omega(a\wedge b)$. Így kapjuk a $\widetilde{\mathcal{C}}$ gráfot. Továbbá $\widetilde{\mathcal{C}}^+$ jelölje a $\widetilde{\mathcal{C}}$ feletti szabad kategóriát, amelynek élei a $\widetilde{\mathcal{C}}$-beli séták, amit így is nevezünk: $\widetilde{\mathcal{C}}$-beli „bináris séták".

Válasszunk és rögzítsünk egy † unér inverz műveletet S-en. Ez meghatároz egy unér inverz műveletet $\mathcal{C}$-n, amit szintén †-tel jelölünk, és amelyre $(\alpha,s,\beta)^\dagger=(\beta,s^\dagger,\alpha)$ minden $(\alpha,s,\beta)\in\operatorname{Arr}\mathcal{C}$ esetén. Vegyük azt a θ kongruenciát a $\widetilde{A}^+$ félcsoporton, amelyet

$$\Theta(\mathcal{CS},A)\cup\Xi_1\cup\Xi_2$$

generál (lásd: 2.2. Állítás), ahol

$$\begin{aligned}\Xi_1&=\big\{(a',a^\dagger):a\in A\big\},\\ \Xi_2&=\{(ab,c):a,b,c\in A \text{ és } a\circ b=c\ \text{ teljesül } \mathcal{C}\text{-ben}\}.\end{aligned}$$

A következő fontos tulajdonság következik [7] fő eredményéből:

4.3. Eredmény. *Legyen S E-tömör lokálisan inverz félcsoport, és legyen ϱ olyan inverz félcsoport kongruencia S-en, amely $\mathcal{CS}$ feletti. Ekkor az (S, ϱ) bővítés pontosan akkor ágyazható be teljesen egyszerű félcsoport inverz félcsoporttal vett λ-szemidirekt szorzatába, ha minden $s, t \in S$-re az $s\,\varrho\,t$ és a $(s\varrho(s\varrho)^{-1}, s, s\varrho)\,\theta\,(t\varrho(t\varrho)^{-1}, t, t\varrho)$ relációkból következik, hogy $s = t$.*

Megmutatjuk, hogy a szemigrupoidban vannak bizonyos speciális élek, melyeket *stabil éleknek* nevezünk. A stabil élek fontos szerepet játszanak a bizonyításban. A stabil élek halamazát $\mathrm{Arr}\,\widehat{\mathcal{C}}$-pal jelöljük. Továbbá bármely $a \in \mathrm{Arr}\,\mathcal{C}$ élhez hozzárendelhetünk egy $\widehat{a}$-pal jelölt stabil élet.

A főtétel bizonyításának lényege tehát, hogy igazoljuk: a θ-osztályokban legfeljebb egy $(s\varrho(s\varrho)^{-1}, s, s\varrho)$ $(s \in S)$ alakú szó van. Ehhez vizsgáljuk az ilyen egybetűs szavak konguenciaosztályaiban lévő szavak kombinatorikus tulajdonságait. A szemigrupoid sétáihoz viszonyítva ezekben a szavakban „szakadások" lépnek fől. Ezeknek a jelölésére zárójelezést vezetünk be a szavakon, és ezek segítségével írjuk le a bizonyításban főszerepet játszó tulajdonságot.

Vegyük a $(\widetilde{A} \cup \{\llbracket, \rfloor, \lceil, \rrbracket\})^*$ szabad monoidot, ahol az üres szót ε jelöli, és legyen $\widetilde{W}$ a legszűkebb olyan részhalmaz, amely teljesíti a következő négy tulajdonságot:

(i) $\varepsilon \in \widetilde{W}$;

(ii) $a \in \widetilde{W}$ minden $a \in \widetilde{A}$-ra;

(iii) $w_1 w_2 \in \widetilde{W}$ minden $w_1, w_2 \in \widetilde{W}$-ra;

(iv) $\llbracket w \rfloor, \lceil w \rrbracket \in \widetilde{W}$ minden $w \in \widetilde{W}$-ra, ahol $w \neq \varepsilon$.

Jegyezzük meg, hogy $\widetilde{A}^+ \subseteq \widetilde{W}$. Hogy meg tudjuk különböztetni $\widetilde{A}^+$ elemeit, amit szavaknak nevezünk $\widetilde{W}$ elemeitől, az utóbbit *zárójelezett szavaknak* fogjuk nevezni.

Definiáljunk három részhalmazt W_n-et, W_n^{right}-ot és W_n^{left}-et $\widetilde{W}$-ben minden $n \in \mathbb{N}_0$-ra. Ezzel egy időben ezen három részhalmaz minden w eleméhez hozzárendelünk egy $\wp(w) \in \mathrm{Arr}\,\widetilde{\mathcal{C}}^+$ „bináris sétát". Ha $\wp(w)$ definiált, akkor $\widehat{\wp}(w)$ jelölést használjuk $\widehat{\wp(w)}$ helyett az egyszerűség kedvéért.

Legyen $W_0 = \mathrm{Arr}\,\widetilde{\mathcal{C}}^+$, $W_0^{\varepsilon} = W_0 \cup \{\varepsilon\}$, és minden $w \in W_0$-ra, legyen $\wp(w) = w$. Továbbá, legyen

$$W_0^{\mathrm{right}} = \{p(y \wedge x) : p \in W_0^{\varepsilon},\ \alpha(y) \neq \omega(x),\ \text{és, ha } p \neq \varepsilon \text{ akkor } \omega(p) = \alpha(y)\},$$

és minden $w = p(y \wedge x) \in W_0^{\text{right}}$-re, legyen $\wp(w) = p(y \wedge y')$. Az eddigiek alapján ez valóban $\operatorname{Arr} \widetilde{\mathcal{C}}^+$ eleme. Hasonlóan, legyen

$$W_0^{\text{left}} = \{(x \wedge y)p : p \in W_0^{\varepsilon},\ \alpha(x) \neq \omega(y),\ \text{és, ha } p \neq \varepsilon \text{ akkor } \omega(y) = \alpha(p)\},$$

és minden $w = (x \wedge y)p \in W_0^{\text{left}}$-re, legyen $\wp(w) = (y' \wedge y)p$. Vegyük észre, hogy $W_0 \cup W_0^{\text{right}} \cup W_0^{\text{left}} \subseteq \widetilde{A}^+$.

Tegyük fel, hogy W_n $[W_n^{\text{right}},\ W_n^{\text{left}}]$ már definiált valamely $n \in \mathbb{N}_0$-ra, és hozzárendeltünk egy $\wp(w) \in \operatorname{Arr} \widetilde{\mathcal{C}}^+$ sétát minden w eleméhez. Az egyszerűség kedvéért jelöljük $\mathcal{C}$ idempotens éleinek halmazát E-vel. Definiáljuk a W_{n+1} $[W_{n+1}^{\text{right}},\ W_{n+1}^{\text{left}}]$ halmazt úgy, hogy álljon az összes olyan zárójelezett W_n-beli $[W_n^{\text{right}},\ W_n^{\text{left}}]$ szóból, továbbá az összes olyan $w \in \widetilde{W}$ szóból, melyek a következő alakúak:

$$w = p_0 B_1 C_1 p_1 B_2 C_2 \cdots B_k C_k p_k \quad (k \in \mathbb{N}), \tag{4.1}$$

ahol a következő feltételek teljesülnek:

(E0)

- (E0a) $p_1, \ldots, p_{k-1} \in W_0$, $p_0 \in W_0^{\varepsilon}$ $[W_0^{\varepsilon},\ W_0^{\text{left}}]$, $p_k \in W_0^{\varepsilon}$ $[W_0^{\text{right}},\ W_0^{\varepsilon}]$, és $\omega(p_{i-1}) = \alpha(p_i)$ minden i-re $(1 \leq i \leq k)$,
- (E0b) $B_1C_1, \ldots, B_kC_k \neq \varepsilon$;

(E1) minden i-re $(1 \leq i \leq k)$ teljesül, hogy

- (E1a) $B_i = \llbracket w_1 \rfloor \llbracket w_2 \rfloor \cdots \llbracket w_s \rfloor$, ahol $s \in \mathbb{N}_0$ és $w_j \in W_n^{\text{right}}$ $(1 \leq j \leq s)$, és
- (E1b) minden j-re $(1 \leq j \leq s)$, ha $w_j\mathrm{T} = (y_j \wedge x_j)$, akkor
  - (E1bi) $\widehat{\wp}(w_j) \in E$ és $\widehat{y_j}\ \mathcal{R}\ \widehat{\wp}(w_j)$, és
  - (E1bii) $\widehat{x_j}\ \mathcal{L}\ \widehat{\wp}(p_{i-1})$ (speciálisan, $p_0 \neq \varepsilon$ ha $B_1 \neq \varepsilon$);

(E2) minden i-re $(1 \leq i \leq k)$, teljesül, hogy

- (E2a) $C_i = \lceil w_1 \rrbracket \lceil w_2 \rrbracket \cdots \lceil w_s \rrbracket$, ahol $s \in \mathbb{N}_0$ és $w_j \in W_n^{\text{left}}$ $(1 \leq j \leq s)$, és
- (E2b) minden j-re $(1 \leq j \leq s)$, ha $\mathrm{I}w_j = (x_j \wedge y_j)$, akkor
  - (E2bi) $\widehat{\wp}(w_j) \in E$ és $\widehat{y_j}\ \mathcal{L}\ \widehat{\wp}(w_j)$, és
  - (E2bii) $\widehat{x_j}\ \mathcal{R}\ \widehat{\wp}(p_i)$ (speciálisan, $p_k \neq \varepsilon$ ha $C_k \neq \varepsilon$).

Bebizonyítjuk, hogy a θ kongruencia alkalmazásával ez a tulajdonság megőrződik. Pontosabban, ha egy $w \in \widetilde{A}^+$ szó „zárójelezhető” úgy, hogy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} W_n$-beli zárójelezett szót kapjunk, akkor a vele egy θ-osztályban lévő összes szó is „zárójelezhető” így, és $\widehat{\wp}$ konstans az egész θ-osztályban. Ez az a fentebb említett tulajdonság, aminek segítségével a 4.3. Eredményben található implikációt igazoltuk.

Hivatkozások

[1] K. Auinger, On the bifree locally inverse semigroup, *J. Algebra* **178** (1995), 581–613.

[2] B. Billhardt, On a wreath product embedding and idempotent pure congruences on inverse semigroups, *Semigroup Forum* **45** (1992), 45–54.

[3] B. Billhardt and I. Szittyai, On embedabbility of idempotent separating extensions of inverse semigroups, *Semigroup Forum* **61** (2000), 26–31.

[4] T. Dékány, On extensions of completely simple semigroups by groups, *Semigroup Forum* **89** (2014), 600–608.

[5] T. Dékány, M. B. Szendrei and I. Szittyai, E-solid locally inverse semigroups, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, submitted.

[6] M. Krasner, L. Kaloujnine, Produit complet des groupes de permutations et problème d'extensions de groupes. II, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **13** (1950), 208-230.

[7] M. Kuřil and M. B. Szendrei, Extensions by inverse semigroups and λ-semidirect products, *Glasgow Math. J.* **41** (1999), 355–367.

[8] M. Yamada, On a certain class of regular semigroups (with a supplement of T. E. Hall), *Proc. Symp. Regular Semigroups*, Northern Illinois University, 1979, 146–179.

[9] Y. T. Yeh, The existence of e-free objects in e-varieties of regular semigroups, *Internat. J. Algebra Comput.* **2** (1992), 471–484.

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Gyenizse Gergő, mint az alább idézett publikációk társszerzője kijelentem, hogy a bennük foglalt eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

T. Dékány, G. Gyenizse and J. Kulin, Permutations assigned to slim rectangular lattices, *Acta Sci. Math.* **82** (2016), 19–28.

A fenti cikkből felhasznált eredményekben a jelölt hozzájárulása meghatározó volt:
Dékány Tamás hozzájárulása ehhez a cikkhez 33%.

Szeged, 2018. november 7.

Gyenizse Gergő
Szegedi Tudományegyetem
tudományos segédmunkatárs

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Kulin Júlia, mint az alább idézett publikációk társszerzője kijelentem, hogy a bennük foglalt eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

> T. Dékány, G. Gyenizse and J. Kulin, Permutations assigned to slim rectangular lattices, *Acta Sci. Math.* **82** (2016), 19–28.

A fenti cikkből felhasznált eredményekben a jelölt hozzájárulása meghatározó volt:
Dékány Tamás hozzájárulása ehhez a cikkhez 33%.

Szeged, 2018. november 7.

Kulin Júlia
Szegedi Tudományegyetem
tudományos segédmunkatárs