Az utódeloszlás várható értékének becslése kritikus 2-típusos bevándorlásos Galton–Watson folyamatokban

Doktori értekezés tézisei

Körmendi Kristóf

Témavezető: Dr. Pap Gyula

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
2018

Bevezetés

Jelen dolgozat célja egy olyan eszköztár kifejlesztése, mely lehetővé teszi különböző becslések aszimptotikus viselkedésének vizsgálatát kritikus 2-típusos Galton–Watson folyamatok esetén. A felépítést a modell bevezetésével kezdjük, majd az utódeloszlás várható érték mátrixának spektrálsugarát kritikussági paraméterként tekintve klasszifikáljuk a folyamatokat a szubkritikus, kritikus illetve szuperkritikus kategóriák valamelyikébe. Ezután kimondunk egy funkcionális határeloszlás tételt (Ispány és Pap [6]) a folyamatra kritikus esetben. Az ezen tételben megjelenő határeloszlás érdekessége, hogy elfajult, ugyanis olyan kétdimenziós eloszlás, mely egyetlen, az utódeloszlás várható érték mátrixának jobboldali Perron vektora által meghatározott egyenesre koncentrálódik.

Ezután hozzálátunk az eszköztár felépítésének. Ez előbb említett tulajdonságot kihasználva bevezetünk egy felbontását a sorozatnak. A felbontás tagjaiból szeretnénk később a becsléseket felépíteni, éppen ezért meg kell vizsgálnunk az aszimptotikus tulajdonságaikat. Elsőként megbecsüljük a növekedésük ütemét, amennyiben a mögöttes folyamatban elengedjük a generációk számát a végtelenbe. Az első becsléseinken speciális esetekben javítunk, majd adunk egy együttes határeloszlás tételt az építőelemeinkre.

Végül demonstráljuk a módszer alkalmazhatóságát. Több esetben is kimondjuk a becslésekre adható határeloszlás tételeket. Az utódeloszlás várható érték mátrixának és a bevándorlás várható értékének együttes becslésére adott tétel új eredmény, míg a másik két eset az alábbi cikkekben került közlésre.

Ispány, M., Körmendi, K. and Pap, G. (2014).
Asymptotic behavior of CLS estimators for 2-type doubly symmetric critical Galton–Watson processes with immigration.
Bernoulli **20(4)** 2247–2277.

Körmendi, K. and Pap, G. (2018). Statistical inference of 2-type critical Galton–Watson processes with immigration.
Statistical Inference for Stochastic Processes **21(1)** 169–190.

1. Szükséges előismeretek

Minden $k, j \in \mathbb{Z}_+$ és $i, \ell \in \{1, 2\}$, esetén jelölje $X_{k,i}$ az i típusú egyedek számát a k-adik generációban, $\xi_{k,j,i,\ell}$ pedig azt, hogy a $(k-1)$-edik generáció j-edik i típusú egyedének hány ℓ típusú utóda születik. A k-adik generációban érkező i típusú bevándorlók száma legyen $\varepsilon_{k,i}$. Ekkor

$$\begin{bmatrix} X_{k,1} \\ X_{k,2} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{X_{k-1,1}} \begin{bmatrix} \xi_{k,j,1,1} \\ \xi_{k,j,1,2} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{X_{k-1,2}} \begin{bmatrix} \xi_{k,j,2,1} \\ \xi_{k,j,2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{k,1} \\ \varepsilon_{k,2} \end{bmatrix}, \qquad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Megköveteljük, hogy az $\big\{\boldsymbol{X}_0,\, \boldsymbol{\xi}_{k,j,i},\, \boldsymbol{\varepsilon}_k : k, j \in \mathbb{N},\, i \in \{1, 2\}\big\}$ véletlen vektorváltozók függetlenek, ahol

$$\boldsymbol{X}_k := \begin{bmatrix} X_{k,1} \\ X_{k,2} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}_{k,j,i} := \begin{bmatrix} \xi_{k,j,i,1} \\ \xi_{k,j,i,2} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_k := \begin{bmatrix} \varepsilon_{k,1} \\ \varepsilon_{k,2} \end{bmatrix}.$$

Továbbá legyenek $\{\boldsymbol{\xi}_{k,j,1} : k, j \in \mathbb{N}\}$, $\{\boldsymbol{\xi}_{k,j,2} : k, j \in \mathbb{N}\}$ és $\{\boldsymbol{\varepsilon}_k : k \in \mathbb{N}\}$ azonos eloszlásúak.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{\xi}_{1,1,1}\|^2) < \infty$, $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{\xi}_{1,1,2}\|^2) < \infty$ valamint $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^2) < \infty$. Vezessük be a következő jelöléseket

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}_i} := \mathbb{E}\big(\boldsymbol{\xi}_{1,1,i}\big) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}} := [\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}_1} \quad \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}_2}] \in \mathbb{R}_+^{2\times 2}, \\ &\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} := \mathbb{E}\big(\boldsymbol{\varepsilon}_1\big) \in \mathbb{R}_+^2, \end{aligned}$$

és

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\xi}_i} := \operatorname{Var}\big(\boldsymbol{\xi}_{1,1,i}\big) \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}} := \operatorname{Var}\big(\boldsymbol{\varepsilon}_1\big) \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad i \in \{1, 2\}.$$

Minden $k \in \mathbb{Z}_+$, esetén legyen $\mathcal{F}_k := \sigma\big(\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k\big)$. Ekkor az (1) egyenlet átírható a következő alakba

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

A rekurziót iterálva kapjuk, hogy,

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k) = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}^k \, \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}^j \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Tehát az $(\mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ sorozat aszimptotikus viselkedése az $(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat viselkedésétől függ, ami a mátrix spektrálsugara, $r(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}) =: \varrho \in \mathbb{R}_+$ segítségével jellemezhető. Az $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 2-típusos Galton-Watson folyamatot bevándorlással a szubkritikus, kritikus, illetve szuperkritikus kategóriák valamelyikébe soroljuk aszerint, hogy rendre $\varrho < 1$, $\varrho = 1$ vagy $\varrho > 1$. Az utódeloszlás várható érték mátrixával a továbbiakban a következő alakban dolgozunk

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}} := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Csak a pozitív *reguláris esettel* foglalkozunk, tehát azzal az esettel, amikor létezik $k \in \mathbb{N}$ pozitív egész szám, hogy a $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}^k$ mátrix minden eleme pozitív (lásd Kesten and Stigum [7]). Ez pontosan akkor teljesül, ha $\beta, \gamma \in (0, \infty)$, $\alpha, \delta \in \mathbb{R}_+$ és $\alpha + \delta > 0$. Ebben az esetben az $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}$ mátrix sajátértékei

$$\lambda_+ := \frac{\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2},$$
$$\lambda_- := \frac{\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2},$$

melyekre teljesül, hogy $\lambda_+ > 0$ és $-\lambda_+ < \lambda_- < \lambda_+$, következésképpen $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}$ spektrálsugara $\varrho = r(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}) = \lambda_+$. A Perron-tétel értelmében,

$$\lambda_+^{-k} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}^k \to \boldsymbol{u}_{\mathrm{right}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}^\top \qquad \text{ha } k \to \infty,$$

ahol $\boldsymbol{u}_{\mathrm{right}}$ az $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}$ mátrix jobb oldali Perron-vektora, az λ_+ sajátértékhez tartozó azon jobb oldali sajátvektor mely koordinátáinak összege 1, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}$ pedig a bal oldali Perron-vektora, mely az a λ_+ sajátértékhez tartozó bal oldali sajátvektor, melyre $\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{right}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}} \rangle = 1$. Ezek a vektorokat a következők

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{right}} = \frac{1}{\beta + \lambda_+ - \alpha} \begin{bmatrix} \beta \\ \lambda_+ - \alpha \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{left}} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{bmatrix} \gamma + \lambda_+ - \delta \\ \beta + \lambda_+ - \alpha \end{bmatrix}.$$

A Putzer-formula segítségével [8] felírhatjuk az $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}$ hatványait

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}^k = \lambda_+^k \boldsymbol{u}_{\mathrm{right}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}^\top + \lambda_-^k \boldsymbol{v}_{\mathrm{right}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}^\top, \qquad k \in \mathbb{N}$$

alakban, ahol $\boldsymbol{v}_{\mathrm{right}}$ és $\boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}$ alkalmasan választott a λ_- sajátértékhez tartozó sajátvektorok, például

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{right}} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{bmatrix} -\beta - \lambda_+ + \alpha \\ \gamma + \lambda_+ - \delta \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{left}} = \frac{1}{\beta + \lambda_+ - \alpha} \begin{bmatrix} -\lambda_+ + \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Az $(\boldsymbol{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ folyamat pontosan akkor kritikus és pozitív reguláris, ha $\alpha, \delta \in [0,1)$ és $\beta, \gamma \in (0, \infty)$, valamint $\alpha + \delta > 0$ és $\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\delta)$. Ez esetben az $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}$ mátrix sajátértékei $\lambda_+ = 1$ és

$$\lambda_- = \alpha + \delta - 1 \in (-1, 1).$$

Szükségünk lesz az alábbi kritikus, 2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamatokra vonatkozó funkcionális határeloszlás tételre. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_t^{(n)} := n^{-1} \boldsymbol{X}_{\lfloor nt \rfloor}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

A következő tétel Ispány és Pap tételének ([6, Theorem 3.1]) speciális esete

1.1. Tétel. *Legyen $(\boldsymbol{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ 2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamat, melyre $\alpha, \delta \in [0,1)$ és $\beta, \gamma \in (0, \infty)$, valamint $\alpha + \delta > 0$ és $\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\delta)$ (tehát a folyamat kritikus és pozitív reguláris), $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0}$, $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{\xi}_{1,1,1}\|^2) < \infty$, $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{\xi}_{1,1,2}\|^2) < \infty$ és $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^2) < \infty$. Ekkor*

$$\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_t^{(n)}\right)_{t \in \mathbb{R}_+} \xrightarrow{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\mathcal{X}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+} := (\mathcal{Y}_t \boldsymbol{u}_{\mathrm{right}})_{t \in \mathbb{R}_+}$$

ha $n \to \infty$ a $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ téren, ahol $(\mathcal{Y}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ a következő sztochasztikus differenciálegyenlet egyértelmű erős megoldása

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{Y}_t &= \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \, \mathrm{d}t + \sqrt{\langle \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}} \rangle \mathcal{Y}_t^+} \, \mathrm{d}\mathcal{W}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \mathcal{Y}_0 &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $(\mathcal{W}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *standard Wiener-folyamat, továbbá*

$$\overline{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\xi}}} := \sum_{i=1}^{2} \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{u}_{\mathrm{right}} \rangle \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\xi}_i} = \frac{\beta \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\xi}_1} + (1-\alpha)\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\xi}_2}}{\beta + 1 - \alpha}.$$

Ispány és Pap cikkében [6, Theorem 3.1], a fenti eredmény a következő magasabb momentumfeltételek esetén került bizonyításra

$$\mathbb{E}(\|\boldsymbol{\xi}_{1,1,1}\|^4) < \infty, \quad \mathbb{E}(\|\boldsymbol{\xi}_{1,1,2}\|^4) < \infty, \quad \mathbb{E}(\|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^4) < \infty,$$

azonban ezt a feltételt Danka és Pap [3, Theorem 3.1] gyengítette.

Ebben a részben több feltételt is bevezettünk az $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ folyamatra. Az egyszerűbb hivatkozás érdekében ezek most itt gyűjtjük össze. Elsőként egy a folyamat struktúrájára vonatkozó feltétel, mely garantálja, hogy a folyamat kritikus és pozitív reguláris

$$\alpha, \delta \in [0,1), \ \beta, \gamma \in (0,\infty), \ \alpha + \delta > 0, \ \beta\gamma = (1-\alpha)(1-\delta). \quad \text{(CPR)}$$

Azt is egy feltételbe foglaljuk össze, hogy 0 kezdeti populációból indul a folyamatunk és a bevándorlás nem degenerált 0

$$\boldsymbol{X}_0 = 0, \qquad \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq \boldsymbol{0}. \quad \text{(ZS)}$$

A momentumokra is kell tennünk egy feltételt. Ha mind az utódeloszlásnak, mind a bevándorlásnak létezik a ℓ-edik momentuma, akkor magának a folyamatnak is. Azt mondjuk, hogy a folyamat kielégíti a momentumfeltételt valamely $\ell \in \mathbb{N}$ esetén, ha

$$\mathbb{E}\left(\|\boldsymbol{\xi}_{1,1,1}\|^\ell\right) < \infty, \qquad \mathbb{E}\left(\|\boldsymbol{\xi}_{1,1,2}\|^\ell\right) < \infty, \qquad \mathbb{E}\left(\|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^\ell\right) < \infty. \quad \text{(M)}$$

Végül egy olyan feltétel, amely ebben részben még nem szükséges, később azonban gyakran hivatkozunk rá. A folyamat teljesíti a nemdegeneráltsági feltételt, ha

$$\langle \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}} \rangle \neq 0. \quad \text{(ND)}$$

Ezen feltételre először a 2.5 Lemmában lesz szükségünk.

2. Eszköztár a becslések aszimptotikus vizsgálatához

2.1. 2-típusos Galton–Watson folyamatok felbontása

Az eddigiekben láttuk, hogy az $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}$ mátrix sajátvektorai fontos szerepet játszanak a folyamat aszimptotikus viselkedésének leírásában. Érdekes jelenség, hogy a 1.1 Tételben szereplő 2-dimenziós határeloszlás degenerált abban az értelemben, hogy egy az $\boldsymbol{u}_{\text{right}}$ vektor által meghatározott egyenesre koncentrálódik. Ezen észrevétel alapján vezetünk be egy felbontást a folyamatra magára.

Az (1) egyenlet alapján vezessük be az

$$\boldsymbol{M}_k := \boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{X}_{k-1} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

martingálkülönbségeket az $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ filtrációra nézve. Segítségükkel a folyamatra a következő rekurziót kapjuk

$$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{M}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

A felbontás egyik tagja legyen

$$U_k := \langle \boldsymbol{u}_{\text{left}}, \boldsymbol{X}_k \rangle = \frac{(\gamma + 1 - \delta)X_{k,1} + (\beta + 1 - \alpha)X_{k,2}}{1 - \lambda_-}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Ekkor $U_k \geq 0$ bármely $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén, valamint

$$U_k = U_{k-1} + \langle \boldsymbol{u}_{\text{left}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle + \langle \boldsymbol{u}_{\text{left}}, \boldsymbol{M}_k \rangle, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Tehát $(U_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ egy nemnegatív, instabil AR(1) folyamat $\langle \boldsymbol{u}_{\text{left}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$ pozitív drifttel és $(\langle \boldsymbol{u}_{\text{left}}, \boldsymbol{M}_k \rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ heteroszkedasztikus innovációval. A rekurzió megoldása

$$U_k = \sum_{j=1}^{k} \langle \boldsymbol{u}_{\text{left}}, \boldsymbol{M}_j + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle, \qquad k \in \mathbb{N},$$

Az 1.1 Tételből a folytonos leképezések tételével kapjuk, hogy

$$(n^{-1}U_{\lfloor nt \rfloor})_{t\in\mathbb{R}_+} = (\langle \boldsymbol{u}_{\text{left}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_t^{(n)} \rangle)_{t\in\mathbb{R}_+} \xrightarrow{\mathcal{D}} (\langle \boldsymbol{u}_{\text{left}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_t \rangle)_{t\in\mathbb{R}_+} = (\mathcal{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

ha $n \to \infty$, ahol $(\mathcal{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ az (2) egyenlet egyértelmű erős megoldása.

Gondolhatunk úgy az $(U_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ változókra, mint a felbontás *jól viselkedő* tagjára, hiszen segítségükkel eljuthatunk az 1.1 Tételben szereplő mögöttes 1-dimenziós folyamathoz. Továbbá legyen

$$V_k := \langle \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{X}_k\rangle = \frac{-(1-\alpha)X_{k,1} + \beta X_{k,2}}{\beta + 1 - \alpha}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Ekkor

$$V_k = \lambda_- V_{k-1} + \langle \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle + \langle \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{M}_k\rangle, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Következésképpen $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy stabil AR(1) folyamat $\langle \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle$ drifttel és $(\langle \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{M}_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ heteroszkedasztikus innovációval. A rekurzió megoldása

$$V_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_-^{k-j} \langle \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{M}_j + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle, \qquad k \in \mathbb{N},$$

Az 1.1 Tételből a folytonos leképezések tételének alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(n^{-1}V_{\lfloor nt\rfloor})_{t\in\mathbb{R}_+} = (\langle \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_t^{(n)}\rangle)_{t\in\mathbb{R}_+} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} (\langle \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_t\rangle)_{t\in\mathbb{R}_+} = 0.$$

A $(V_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ változókra úgy tekintünk, mint a felbontás *problémás* tagjaira, ugyanis a folytonos leképezések tétele nem adja meg a hozzájuk tartozó nemnulla határeloszlást. A (3) rekurzió megoldása

$$\boldsymbol{X}_k = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}^{k-j}(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{M}_j), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Következésképpen az (1) formula felhasználásával adódik, hogy

$$\boldsymbol{X}_k = U_k \boldsymbol{u}_{\mathrm{right}} + V_k \boldsymbol{v}_{\mathrm{right}} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\beta+1-\alpha} U_k - \frac{\beta+1-\alpha}{1-\lambda_-} V_k \\ \frac{1-\alpha}{\beta+1-\alpha} U_k + \frac{\gamma+1-\delta}{1-\lambda_-} V_k \end{bmatrix},$$

bármely $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén.

Ezen felbontás alapján az $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ mintából képzett becslések (elméletben) felírhatóak a $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ változók segítségével. Ha feltárjuk ezen változók aszimptotikus viselkedését, akkor az alkalmas lehet arra, hogy a becslésekre vezessünk le határeloszlás tételeket.

2.2. Felső korlát a momentumok növekedésére

Ezen fejezetben az $(\boldsymbol{M}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $(U_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ és $(V_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ változók illetve belőlük kialakított más kifejezések várható értékének növekedésének nagyságrendjét vizsgáljuk ha $k \to \infty$. Az itt található állítások segítségével azonosíthatjuk egy-egy kifejezés elhanyagolható tagjait, tehát azokat, melyek alkalmas skálázás esetén eltűnnek ha $k \to \infty$. A tényleges nemnulla határeloszlásokat a következő fejezetben fogjuk megállapítani.

Elsőként figyeljük meg, hogy $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(\boldsymbol{M}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \boldsymbol{0}$ következésképpen $\mathbb{E}(\boldsymbol{M}_k) = \boldsymbol{0}$, hiszen $\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$.

2.1. Lemma. *Legyen* $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamat, amely teljesíti a* (CPR) *és* (M) *feltételeket valamely* $\ell \in \mathbb{N}$ *esetén, tegyük fel továbbá, hogy* $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0}$. *Ekkor* $\mathbb{E}(\|\boldsymbol{X}_k\|^i) = \mathrm{O}(k^i)$ *valamint*

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{M}_k^{\otimes i}) = \mathrm{O}(k^{\lfloor i/2 \rfloor}), \quad \mathbb{E}(U_k^i) = \mathrm{O}(k^i), \quad \mathbb{E}(V_k^{2j}) = \mathrm{O}(k^j)$$

minden $i, j \in \mathbb{Z}_+$ *esetén, melyekre* $i \leq \ell$ *és* $2j \leq \ell$.

2.2. Következmény. *Legyen* $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamat, amely teljesíti a* (CPR) *és* (M) *feltételeket valamely* $\ell \in \mathbb{N}$ *esetén, tegyük fel továbbá, hogy* $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0}$. *Ekkor*

(i) *bármely* $i, j \in \mathbb{Z}_+$ *esetén, melyekre* $\max\{i, j\} \leq \lfloor \ell/2 \rfloor$, *és bármely* $\kappa > i + \frac{j}{2} + 1$, *esetén*

$$n^{-\kappa} \sum_{k=1}^{n} \left| U_k^i V_k^j \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

(ii) *bármely* $i, j \in \mathbb{Z}_+$ *esetén, melyekre* $\max\{i, j\} \leq \ell$, *bármely* $T > 0$, *és bármely* $\kappa > i + \frac{j}{2} + \frac{i+j}{\ell}$, *esetén*

$$n^{-\kappa} \sup_{t\in[0,T]} \left| U_{\lfloor nt \rfloor}^i V_{\lfloor nt \rfloor}^j \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

(iii) *bármely* $i, j \in \mathbb{Z}_+$ *esetén, melyekre* $\max\{i, j\} \leq \lfloor \ell/4 \rfloor$, *bármely* $T > 0$, *és bármely* $\kappa > i + \frac{j}{2} + \frac{1}{2}$, *esetén*

$$n^{-\kappa} \sup_{t\in[0,T]} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} [U_k^i V_k^j - \mathbb{E}(U_k^i V_k^j \mid \mathcal{F}_{k-1})] \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ } ha \text{ } n \to \infty.$$

Sajnos a fenti következmény nem ad éles korlátokat, ezért néhány speciális esetben erősebb eredményeket kell igazolnunk.

2.3. Megjegyzés. *Az* $(\ell, i, j) = (2, 1, 0)$, *speciális esetben az is megmutatható, hogy bármely* $\kappa > 1$ *esetén*

$$n^{-\kappa} \sup_{t\in[0,T]} U_{\lfloor nt \rfloor} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \qquad ha \quad n \to \infty.$$

A bizonyításhoz lásd Barczy et al. [2].

2.4. Lemma. *Legyen* $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamat, amely teljesíti a* (CPR), (ZS) *és* (M) *feltételeket, ahol* $\ell = 4$. *Ekkor bármely* $T > 0$ *esetén*

$$n^{-3/2} \sup_{t\in[0,T]} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} V_{k-1} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n^{-5/2} \sup_{t\in[0,T]} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} U_{k-1} V_{k-1} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

ha $n \to \infty$. *Ha továbbá a folyamat kielégíti az* $\ell = 8$ *értékhez tartozó* (M) *momentum feltételt is, akkor bármely* $T > 0$ *esetén*

$$n^{-7/2} \sup_{t\in[0,T]} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} U_{k-1}^2 V_{k-1} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \qquad ha \quad n \to \infty.$$

2.3. Az építőelemek határeloszlása

Ebben a fejezetben bevezetjük az építőelemek nemnulla határeloszlását, ezzel le is zárul az eszköztár felépítése. Elsőként összekapcsoljuk a V_k változók négyzetösszegeinek viselkedését az U_k változók összegével. Ha az $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ folyamat kielégíti az (ND) feltételt, akkor ezzel meg is találtuk ezen négyzetösszegek nemnulla határeloszlását.

2.5. Lemma. *Legyen* $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamat, amely teljesíti a* (CPR), (ZS) *és* (M) *feltételeket, ahol* $\ell = 8$. *Ekkor bármely* $T > 0$, *esetén*

$$n^{-2} \sup_{t\in[0,T]} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} V_k^2 - \frac{\langle \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}}\, \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}\rangle}{1-\lambda_-^2} \sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} U_{k-1} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \qquad \textit{ha} \;\; n \to \infty.$$

Az alábbi következmény eszköztárunk legfontosabb eleme, ennek alkalmazásával kapjuk a becsléseinkre vonatkozó aszimptotikus eredményeket.

2.6. Következmény. *Legyen* $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamat, amely teljesíti a* (CPR), (ZS) *és* (M) *feltételeket, ahol* $\ell = 8$. *Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n^{-3}U_{k-1}^2 \\ n^{-2}V_{k-1}^2 \\ n^{-1}\boldsymbol{M}_k \\ n^{-2}\boldsymbol{M}_k U_{k-1} \\ n^{-3/2}\boldsymbol{M}_k V_{k-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} \int_0^1 \mathcal{Y}_t^2\,\mathrm{d}t \\ \frac{\langle \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}\rangle}{1-\lambda_-^2} \int_0^1 \mathcal{Y}_t\,\mathrm{d}t \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}_1 \\ \int_0^1 \mathcal{Y}_t\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{M}}_t \\ \frac{\langle \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}\rangle^{1/2}}{(1-\lambda_-^2)^{1/2}} \int_0^1 \mathcal{Y}_t \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}}^{1/2}\,\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_t \end{bmatrix}$$

ha $n \to \infty$.

3. Az utódeloszlás várható érték mátrixának becslései

Ebben a fejezetben az eszköztárunk alkalmazhatóságát demonstráljuk. Három különböző esetben adunk határeloszlás tételt az utódeloszlás várható érték mátrixának becslésére. Felhívjuk az olvasó figyelmét, hogy az alábbi fejezetekben bevezetett jelölések csak az adott alfejezetre vonatkoznak.

3.1. A duplán szimmetrikus folyamat

Elsőként egy a duplán szimmetrikus folyamatra vonatkozó eredményt mutatunk be (lásd [4, Theorem 3.1.]). Azt mondjuk, hogy a folyamat duplán szimmetrikus, ha az $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}$ mátrix a következő alakú

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Ebben az esetben $\gamma = \beta$, $\delta = \alpha$, így a (CPR) feltétel egyszerűsödik

$$\alpha \in (0,1), \qquad \beta = 1 - \alpha \in (0,1) \tag{CPR*}$$

A sajátértékek $\lambda_+ = 1$, $\lambda_- = 1 - 2\beta$, és sajátvektorok

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{right}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{\mathrm{right}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Végül a felbontásunk alakja

$$U_k = X_{k,1} + X_{k,2}, \quad V_k = \frac{1}{2}(X_{k,2} - X_{k,1})$$

3.1. Lemma. *Az α és β paraméterek együttes feltételes legkisebb négyzetes becslése*

$$\begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_n \\ \widehat{\beta}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_n^{-1}\boldsymbol{B}_n,$$

alakú az $\Omega_n := \{\omega \in \Omega\colon \det(\boldsymbol{A}_n) > 0\}$ halmazon, ahol

$$\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} X_{k-1,1} & X_{k-1,2} \\ X_{k-1,2} & X_{k-1,1} \end{bmatrix}^2$$

$$\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} X_{k-1,1} & X_{k-1,2} \\ X_{k-1,2} & X_{k-1,1} \end{bmatrix} (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}).$$

A kritikussági paraméter becslése $\widehat{\varrho}_n := \widehat{\alpha}_n + \widehat{\beta}_n$.

3.2. Tétel. *Legyen $(\boldsymbol{X}_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ 2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamat, amely teljesíti a* (CPR*), (ZS), (ND) *és* (M) *feltételeket, ahol $\ell = 8$. Ekkor az $\widehat{\alpha}_n$, $\widehat{\beta}_n$ és $\widehat{\varrho}_n$ becslések létezésének* *valószínűsége tart 1-hez ha $n \to \infty$, valamint*

$$n^{1/2}\begin{bmatrix}\widehat{\alpha}_n - \alpha\\ \widehat{\beta}_n - \beta\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sqrt{\alpha\beta}\,\frac{\int_0^1 \mathcal{Y}_t\,\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\int_0^1 \mathcal{Y}_t\,\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$n\,(\widehat{\varrho}_n - 1) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\int_0^1 \mathcal{Y}_t\,\mathrm{d}\,(\mathcal{Y}_t - \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle t)}{\int_0^1 \mathcal{Y}_t^2\,\mathrm{d}t}$$

ha $n \to \infty$, ahol az $(\mathcal{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ folyamat az (2) egyenlet egyértelmű erős megoldása.

3.2. A bevándorlás várható értéke ismert

3.3. Lemma. *Az $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}$ mátrix feltételes legkisebb négyzetes becslése $\widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}}^{(n)} = \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{A}_n^{-1}$ alakú az $\Omega_n := \{\omega \in \Omega\colon \det(\boldsymbol{A}_n) > 0\}$ halmazon, ahol*

$$\boldsymbol{A}_n = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_{k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}^\top, \qquad \boldsymbol{B}_n = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\boldsymbol{X}_{k-1}^\top.$$

3.4. Tétel. *Legyen $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamat, amely teljesíti a* (CPR), (ZS), (ND) *és* (M) *feltételeket, ahol $\ell = 8$. Ekkor az $\widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}}^{(n)}$ és $\widehat{\varrho}_n$ becslések létezésének valószínűsége tart 1-hez ha $n \to \infty$, valamint*

$$n^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}}^{(n)} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{(1-\lambda_-^2)^{1/2}}{\langle \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}\rangle^{1/2}}\,\frac{\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}}^{1/2}\int_0^1 \mathcal{Y}_t\,\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_t}{\int_0^1 \mathcal{Y}_t\,\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}^\top$$

$$n(\widehat{\varrho}_n - 1) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\int_0^1 \mathcal{Y}_t\,\mathrm{d}(\mathcal{Y}_t - \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle t)}{\int_0^1 \mathcal{Y}_t^2\,\mathrm{d}t}$$

ha $n \to \infty$, ahol $\mathcal{Y}_t := \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{\mathcal{M}}_t + t\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle$, $t \in \mathbb{R}_+$, és $(\boldsymbol{\mathcal{M}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ az alábbi egyenlet egyértelmű erős megoldása

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{M}}_t &= (\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{\mathcal{M}}_t + t\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle^+)^{1/2}\,\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}}^{1/2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{W}}_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+,\\ \boldsymbol{\mathcal{M}}_0 &= \boldsymbol{0},\end{aligned}$$

ahol $(\boldsymbol{\mathcal{W}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és $(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ független 2-dimenziós standard Wiener-folyamatok.

3.3. A bevándorlás várható értéke ismeretlen

3.5. Lemma. *Az $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}$ és $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ paraméterek együttes becslése*

$$\widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}}^{(n)} = \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{A}_n^{-1}$$

$$\widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}}^{(n)} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_{k-1},$$

alakú az $\Omega_n := \{\omega \in \Omega\colon \det(\boldsymbol{A}_n) > 0\}$ *halmazon, ahol*

$$\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_{k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}^\top - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_{k-1} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_{k-1}^\top,$$

$$\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_{k}\boldsymbol{X}_{k-1}^\top - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_{k} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_{k-1}^\top.$$

3.6. Tétel. *Legyen* $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *2-típusos, bevándorlásos Galton–Watson folyamat, amely teljesíti a* (CPR), (ZS), (ND) *és* (M) *feltételeket, ahol* $\ell = 8$. *Ekkor az* $\widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}}^{(n)}$, $\widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(n)}$ *és* $\widehat{\varrho}_n$ *becslések létezésének valószínűsége tart 1-hez ha* $n \to \infty$, *valamint*

$$n^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}}^{(n)} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\xi}}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{(1-\lambda_-^2)^{1/2}}{\langle \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}\rangle^{1/2}} \frac{\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}}^{1/2} \int_0^1 \mathcal{Y}_t \,\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_t}{\int_0^1 \mathcal{Y}_t \,\mathrm{d}t} \boldsymbol{v}_{\mathrm{left}}^\top,$$

$$\widehat{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(n)} - \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \boldsymbol{\mathcal{M}}_1,$$

továbbá

$$n(\widehat{\varrho}_n - 1) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\int_0^1 \mathcal{Y}_t \,\mathrm{d}(\mathcal{Y}_t - \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle t) - (\mathcal{Y}_1 - \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle) \int_0^1 \mathcal{Y}_t \,\mathrm{d}t}{\int_0^1 \mathcal{Y}_t^2 \,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \mathcal{Y}_t \,\mathrm{d}t\right)^2}$$

ha $n \to \infty$, *ahol* $\mathcal{Y}_t := \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{\mathcal{M}}_t + t\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle$, $t \in \mathbb{R}_+$, *és* $(\boldsymbol{\mathcal{M}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *az alábbi egyenlet egyértelmű erős megoldása*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{M}}_t &= (\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}, \boldsymbol{\mathcal{M}}_t + t\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle^+)^{1/2}\, \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\xi}}^{1/2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{W}}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}_0 &= \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

ahol $(\boldsymbol{\mathcal{W}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *és* $(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *független 2-dimenziós standard Wiener-folyamatok.*

3.4. A becslésekre vonatkozó eredmények összegzése

Az eszköztár alkalmazásaként láttunk három határeloszlás tételt, melyek különböző esetekben írják le az utódeloszlás várható érték mátrixára illetve a kritikussági paraméterre vonatkozó becslések aszimptotikus viselkedését.

A tételekben megjelenő határeloszlások meglehetősen bonyolultak sztochasztikus integrálok hányadosaként állnak elő. Sajnálatosan az integrálokban megjelenő sztochasztikus folyamatok az $\boldsymbol{u}_{\mathrm{left}}$ vektoron keresztül még a becsülni kívánt paraméterektől is függenek. Ez a függés reménytelenné teszi konfidencia intervallumok vagy próbák konstruálását ezen tételek segítségével.

Azonban a tételek nem értéktelenek statisztikai szempontból. Az $\boldsymbol{m}_\xi$ mátrix és a ϱ kritikussági paraméter becslése mindhárom esetben gyengén konzisztens. Az $\boldsymbol{m}_\varepsilon$ vektor becslése nem konzisztens, ez azonban az egytípusos Galton–watson folyamatokra vonatkozó eredmények ismeretében nem meglepő, abban a modellben sem teljesül a konzisztencia. A konzisztencián túl a tételekből a konvergencia sebessége is kiolvasható.

Hivatkozások

[1] Barczy, M., Ispány, M. and Pap, G. (2011). Asymptotic behavior of unstable INAR(p) processes. *Stochastic Processes and their Applications* **121(3)** 583–608.

[2] Barczy, M., Ispány, M. and Pap, G. (2014). Asymptotic behavior of conditional least squares estimators for unstable integer-valued autoregressive models of order 2. *Scandinavian Journal of Statistics* **41(4)** 866–892.

[3] Danka, T. and Pap, G. (2016). Asymptotic behavior of critical indecomposable multi-type branching processes with immigration. *European Series in Applied and Industrial Mathematics (ESAIM). Probability and Statistics.* **20** 238–260.

[4] Ispány, M., Körmendi, K. and Pap, G. (2014). Asymptotic behavior of CLS estimators for 2-type doubly symmetric critical Galton–Watson processes with immigration. *Bernoulli* **20(4)** 2247–2277.

[5] Ispány, M. and Pap, G. (2010). A note on weak convergence of step processes. *Acta Mathematica Hungarica* **126(4)** 381–395.

[6] Ispány, M. and Pap, G. (2014). Asymptotic behavior of critical primitive multi-type branching processes with immigration. *Stochastic Analysis and Applications* **32(5)** 727–741.

[7] Kesten, H. and Stigum, B. P. (1966). A limit theorem for multidimensional Galton–Watson processes. *The Annals of Mathematical Statistics* **37(5)** 1211–1223.

[8] Putzer, E. J. (1966). Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients. *The American Mathematical Monthly* **73(1)** 2–7.