A GEOMETRIA TANÍTÁSA SZÁMÍTÓGÉP ALKALMAZÁSÁVAL

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Ripco Sipos Elvira

Témavezető:

Kosztolányi József

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet
Szegedi Tudományegyetem, TTIK
2011

1. Előzmények

Geometriatanárként 2003 óta dolgozom a zentai Bolyai Tehetséggondozó Gimnáziumban. Módszerem a geometria tanításában a számígógépes vizualizáció, amit 2004 óta használok, mert a számítógép nagy pontossággal ábrázolja az alakzatokat, és a kezdeti, bemeneti elemek mozgatásával végigkísérhető az alakzat változása. Ily módon a szemlélő új kapcsolatokat fedezhet fel az elemek között, és könnyebben belátja az adott probléma megoldását. Ma már létezik több és sokféle geometriai szerkesztőprogram. Az elsősök az Euklides DGS (dinamikus szerkesztőprogram) szoftvert használják, a többiek GeoGebra DGS-ben szerkesztenek, elemeznek, a harmadikosok pedig alkalmazzák bizonyításkor a Mathematica szoftvert. E módszer alkalmazásával növekszik a tanulók motivációja és teljesítménye, kedvelik a számítógépes tanteremben tartott órákat. Elvárásom ezen tanítási módszertől az, hogy a tanulók teljesítménye növekedni fog az érettségi vizsgán is.

Hat év alatt, mióta számítógépes vizualizációval színesítem a geometriaórákat, az a tapasztalatom, hogy a tanulók a középiskolai tanulmányaik során megszerzett tapasztalatot, tudást és a módszerek alkalmazását felhasználják más szakterületeken is, hogy új ötleteket, megoldásokat találjanak a jelen és a jövő elméleti és technikai problémaira. Megtanulják alkalmazni a számítógépes vizualizációt saját, a geometriától, sőt a matematikától távoli területeken, különleges egyedi körülmények között, mert gondolkozásukat bővítve nyitottak a világ újszerű felfedezésére.

Bevezető

A geometria tanítása a középiskolában igen nehéz feladat, ezt több pedagógiai és pszichológai didaktikai kutatás is igazolja, alátámasztja. Különösen az axiomatikusan felépített geometria tanítása és tanulása az érintett (illetve talán fejlesztésre váró) terület a kutatások szempontjából. A tanár szemszögéből izgalmas feladat segíteni a tanulóknak, hogy megértsék, megtanulják és alkalmazzák a geometriai tételeket. Szerbiában, Vajdaságban azt tapasztalom, hogy az óvodások kreatívak, ügyesek, az általános iskola alsósai nagyon okosak, talpraesettek, ám mire a felsősök megérkeznek a középiskolába, a kreativitásuk, ügyességük eltűnik. Talán a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésének hiánya, vagy az oktató-nevelő munka szűkös anyagi és időbeli keretei miatt háttérbe szorított kreativitás csökkenése azt eredményezi, hogy a tanulóifjúság szinte elfelejti megismerni az ókori görög geométerek csodálatos tudományát és világát. Az ábrázolások hiányosságai, a geometria tananyagának elméleti axiomatikus alapokra helyezése, és a tanterv szűkös keretei háttérbe szorították a friss, fiatal elmék ,,rácsodálkozását” a geometriai alakzatokra.
A geometriai alakzatok sokszínűsége, a bennük rejlő szimmetriák, tökéletességük és változatosságuk sokak számára szinte láthatatlanul rejtve maradnak középiskolai tanulmányaik során.
A XXI. század gyermekeinek egyik legfontosabb ,,társa” a számítógép, ezért játszik jelentős szerepet az oktatásban is. Marc Prensky digitális bennszülötteknek nevezei a ma gyermekeit, míg mi, többiek, (a tanárok, a szülők) a XX. századból csak digitális bevándorlók vagyunk módszeres kutatói gondolkodásmódunkkal. A kétféle gondolkodás-

módot kell összehangolni a tanulási-tanítási folyamatban, szükséges fejleszteni a kommunikációt egymás megértésében.
Munkám során, a számítógéppel segített geometriatanítás közben a Balka által megfogalmazott kritériumok a kreatív matematikai potenciál mérésére a következő módon kapnak értelmet:

- A számítógépes vizualizáció tanulása a GeoGebra vagy az Euklides DGS mellett segíti a tanulókat abban, hogy megfogalmazzák különböző matematikai (illetve geometriai) helyzetekben a matematikai feltételezéseket, hipotéziseket.
- A számítógép alkalmas eszköz, hogy a tanulók segítségére legyen felismerni a mintákat, szabályokat és alaptulajdonságokat a matematikai és nem-matmetaikai környezetben.
- A különbözö geometriai axiómarendszerek megismerése és vizsgálata felcsillantja a tanuló elméjében az idegen vagy szokatlan (matematikai) ötletek elfogadásának lehetőségét bizonyos feltételek mellett.
- A hibás feladatok vagy hamis állítások gyors ellenőrizhetősége fejleszti a tanulók kritikai képességeit, hogy intelligens gondolataikkal helyes következtetési eljárással ,,jó" kérdéseket fogalmazzanak meg; valamint felismerjék a feladat esetleges hiányosságait.
- A dinamikus geometriai szoftverek, mint a GeoGebra vagy az Euklides, valamint a gyors műveletek elvégzésére alkalmas Mathematica fejleszti a problémamegoldó gondolkodást, a feladat részekre bontását, felülvizsgálatát.

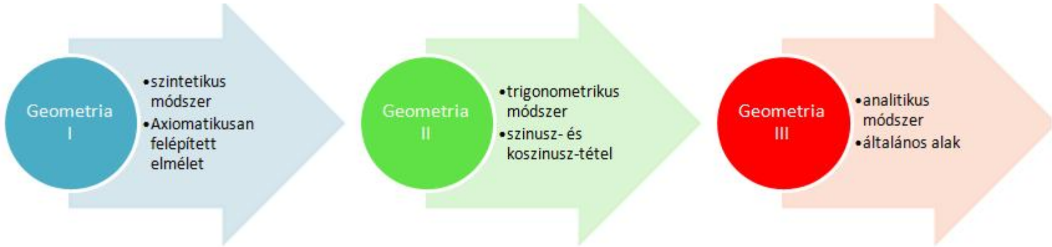
A fent említettek miatt tartom fontosnak, hogy alkalmazzuk a számítógépet a tanulási és tanítási folyamatban a teljesítmény növelése és a tanulók kognitív fejlődése érdekében . Szerencsére a geometriai szerkesztőprogramok megjelenése és exponenciális ütemű fejlődése nagyon gyors fejlődést eredményezett a geometria tanításában is.

2. Kutatási cél és módszer

Kutatásom célja, hogy feltérképezzem, milyen arányban szükséges és elégséges a dinamikus szerkesztőprogramok alkalmazása a tanításban, hiszen a számítógépes vizualizáció nem az egyetlen tanítási segédeszköz a geometriaórákon. A tételek megértése mellett a tanulóknak a ,,jó" (helyes és elegáns) bizonyítást is fel kell ismerniük, de a pszichomotorikus képességek fejlesztése, a körzős-vonalzós klasszikus szerkesztés elsajátítása, begyakorlása is cél a tanítási-tanulási folyamatban. Fontosnak tartom a számbeli és minőségbeli arány felállítását, gyakorlását, a geometriai órák felosztását a számítógépes vizualizáció és az elméleti bizonyítások, szerkesztések között.
Feladatom, hogy végigkövessem a tanulók fejlődését a négyéves középiskola geometria tantárgyának hároméves oktatásán keresztül, a nevezetes tételek segítségével. Úgy gondolom, hogy ha a tételeket, fogalmakat több oldalról megvilágítjuk, különböző aspektusait látjuk, átvizsgáljuk, akkor jobban megmaradnak az emlékeinkben, és a várt eredményt fogjuk kapni.
A dolgozatban a geometria tanításának szintjeit tekintem át, amelyek a spiralitás elvével összhangban a következőek:

1. Planimetria, szintetikus bizonyítások, felfedező tanulás;
2. Trigonometria, trigonometrikus bizonyítások, mérések;

3. Lineáris algebra és analitikus geometria, analitikus bizonyítások.



3. Eredmények

Geometria I. Planimetria

Egy elemi geometriai tétel, az Euler-egyenesre vonatkozó tétel vizsgálata,

$$\overrightarrow{HT} = 2 \cdot \overrightarrow{TO}$$

miközben a H pont jelöli a háromszög magasságpontját, O a háromszög köré írt kör középpontját, T a súlypontját. Ez a feladat mint alapprobléma jelenik meg az elsős tananyagban, ahol nyomon követhető a geometriai gondolkodás fejlődése, fejlesztése számítógépes vizualizációval és elemi bizonyításokkal. A tanulók előtudása: ismerték a háromszög nevezetes pontjait (beírt kör középpontja, körülírt kör középpontja, magasságpont, súlypont) a definíciókat, szerkesztéseket, bizonyításokat. Először az adott definíciók alapján egy hegyes szögű háromszögben szerkesztettünk, azután speciális egyenlő szárú, majd egyenlő oldalú és derékszögű háromszögeket szerkesztettünk. A következő lépésben bizonyítottunk, a kapcsolatokat keresték és fedezték fel a tanulók. A házi feladat a tompaszögű háromszög nevezetes pontjainak megszerkesztése volt, miután pontos utasításokat beszéltünk meg. A következő órán ellenőriztem a szerkesztési munkákat, rámutattam a hibás részletekre, és a nem teljesen pontos rajzokra.

A számonkérés-ellenőrzés (felmérés) három fázisa:

1. Vizualizáció számítógépen;
2. Összehasonlító felmérő feladatok osztályzásra;
3. Ismétlés a téli vakáció után.

Bizonyításaik közben tanulóim Hamilton tételét alkalmazták:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH}$$

és az ,,ismert” vektoregyenletet (azért raktam idézőjelbe, mert sok tapasztalat és gyakorlat kell hozzá, hogy ismert legyen)

$$\overrightarrow{CH} = 2 \cdot \overrightarrow{OC_1}$$

ahol C_1 pont az AB szakasz felezőpontja az ABC háromszögben. Ebben a fázisban bemutattam a tanulók munkáit, alkotásait, az értékeléssel együtt. A számítógépes vizualizáció az első fázisban segített az új fogalmak felfedezésében, ezek tulajdonságainak megértésében és a tételek bizonyításában.

Minden negyedévben 90 perces írásbeli dolgozatot készítünk témazáró összefoglalóként, amely bizonyításokat, szerkesztéseket és számítási feladatokat tartalmaz. Maximálisan 20 pontot lehet rajta elérni általában, ami a következő eloszlás alapján osztályozható:

18-20 pont kitűnő (5)

15-17 pont jeles (4)

12-14 pont jó (3)

9-11 pont elégséges (2)

0-8 pont elégtelen (1)

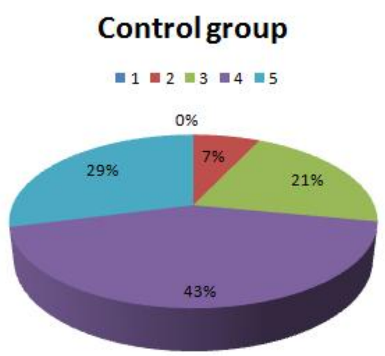
Ebben a kutatási részben két csoport (tagozat) eredményeit vizsgáltam meg.

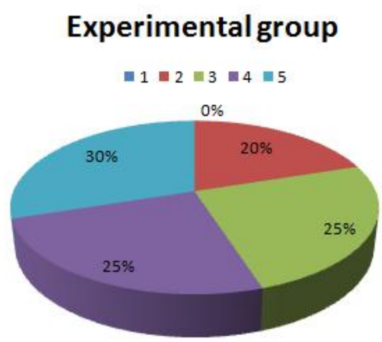
A 2003-beli tagozat 20 tanulójának tanításakor nem volt lehetőség számítógépes vizualizációt alkalmazni, míg a következő, 2004-es kísérleti generáció 14 tanulója az össz óraszám 25 százalékában a számítógépet a bemutatott módon használta. A bemutatott feladatok a második dolgozatban szerepeltek, az eredmények a következő táblázatban olvashatóak, balra a régebbi (kontroll), jobbra az újabb (kísérleti) tagozat osztályzatai:

	0	1	2	3	4
1	0	0	4	6	9
2/a	0	4	6	9	
2/b	0	6	13		
3	0	2	8	4	5
4	1	8	3	7	
5/a	1	10	8		
5/b	4	10	5		

	0	1	2	3	4
1	0	0	1	4	9
2/a	0	1	9	4	
2/b	0	0	14		
3	0	3	2	5	4
4	0	5	1	8	
5/a	0	7	7		
5/b	1	9	4		

Az évvégi eredmények összegezése alapján a kísérleti csoport majd 10 százalékkal magasabb átlagot (3.93) ért el, mint a kontrollcsoport (3.65).





(A kis létszámú minta miatt nem végeztem korrelációs méréseket.)

Geometria II. Trigonometria

A geometria II tantárgyban trigonometria alkalmazását dolgozzuk fel, miközben a geometria nevezetes tételeit (Menelaosz, Ceva, Euler-egyenes) bizonyítjuk.

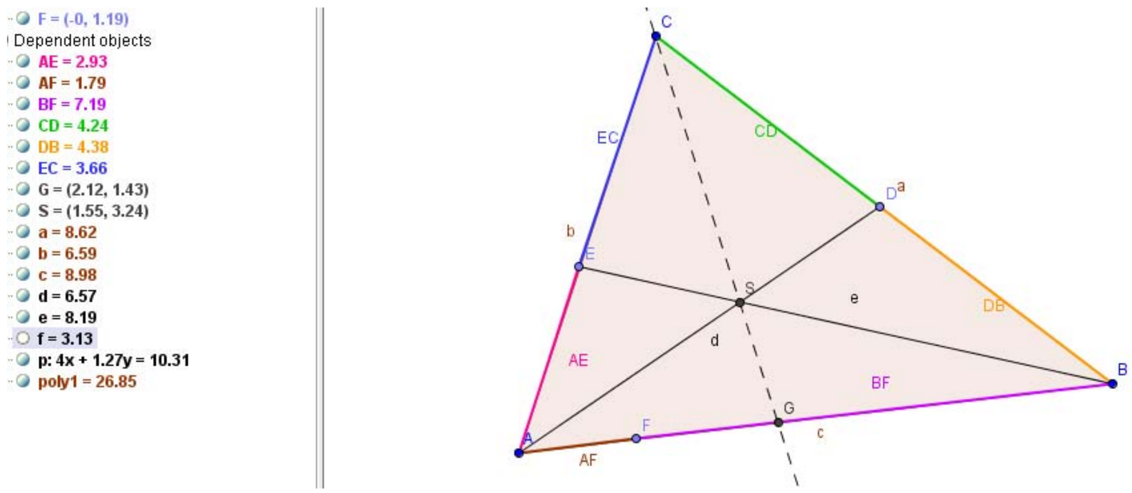
Igazoljuk a szinusz- és koszinusz-tételt, először elemi szintetikus módszerekkel, majd alkalmazzuk a nevezetes tételeknél. Itt a kísérleteken van a hangsúly, a tanulók intuíciójának, ösztönös megérzésének és a kreativitásának fejlesztésén, heurisztikus módszerekkel, amit számítógépes vizualizációval segítünk.

A GeoGebra dinamikus szerkesztőprogramban kísérletezve a Ceva-tétel

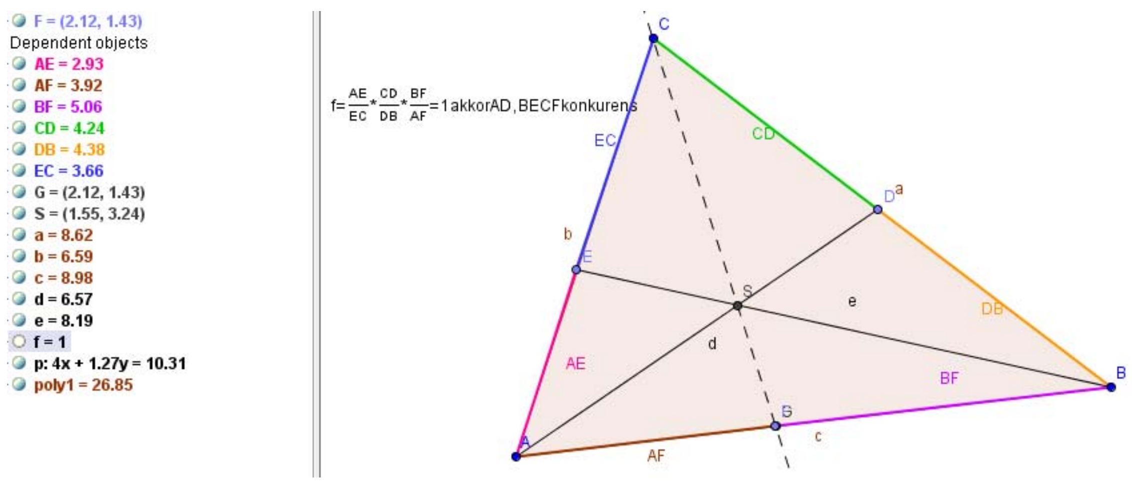
$$f = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}$$

képletét ellenőrizhetik a tanulók az F pont (vagy E pont, illetve D pont) mozgatásával az ABC háromszög oldalain. A tanulság:

- ha $F \neq G$, amíg F pont az AB szakaszon mozog, akkor a képletben $f \neq 1$.



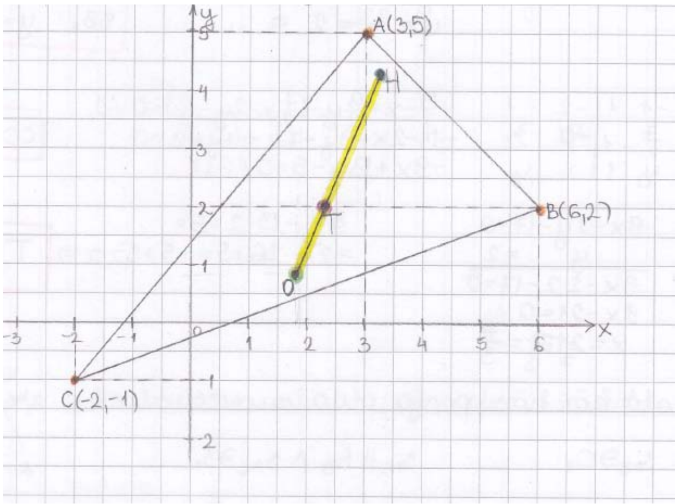
- ha $F = G$, amikor az F pontot beállították a CS és AB egyenesek metszéspontjába, akkor a képletben $f = 1$.



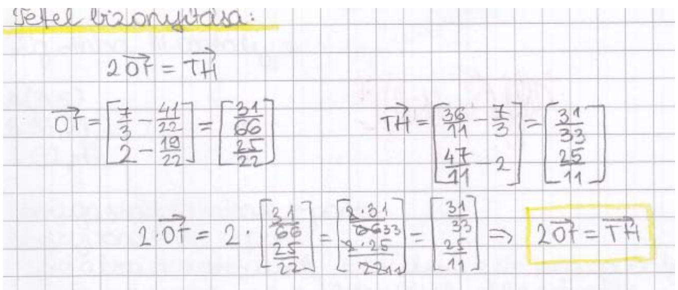
Geometria III. Lineáris algebra és analitikus geometria

A geometria III tantárgyban analitikus geometria szerepel, ahol a pontokat Descartes-féle koordinátáikkal tüntetjük fel, az egyeneseket egyenleteikkel viszgáljuk, és a másodrendű görbék egyeneleteit definiciójuk alapján vezetjük be. Ez utóbbiak ábrázolása számítógépen segít a tanulónak feltérképezni az alakzatokat, megérteni a tételeket, és saját, pontos ábrát rajzolni a négyzethálós (kockás) füzetbe. A legalkalmasabb DGS a GeoGebra, ami már nem ismeretlen számukra, hisz alkalmazták az előző évben, csak az algebrai ablak vizsgálata nélkül. A tanulók ismerik az elemi geometriai szerkesztéseket, az euklideszi axiomatikusan felépített geometria nevezetes tételeit, valamint a nem-euklideszi geometriákat is. Mindemellett a nevezetes tételek bizonyításában általános alakban hasznos segítség a Mathematica szoftver, amely igen hosszú és komplikált képleteket könnyedén egyszerűsít, kiszámol, az emberi agynál gyorsabban.

Néhány számítógépes kísérletezős óra, illetve számítógép nélküli gyakorló óra után a témazáró dolgozatban fogaltuk össze, számítógép nélkül négyzethálós $A4$ lapon ábrázolva. Az ABC háromszög csúcsai adottak: $A(3,5)$, $B(6,2)$ és $C(-2,-1)$, a háromszög oldalait, magasságvonalait, magasságpontját (H), körülírt kör középpontját (O), súlypontját (T) kellett kiszámítani. Az egyik legszebb rajz, pontos számításokkal az alábbi:



A munka végén ellenőrizni kellett az Euler-egyenesre vonatkozó tételt:

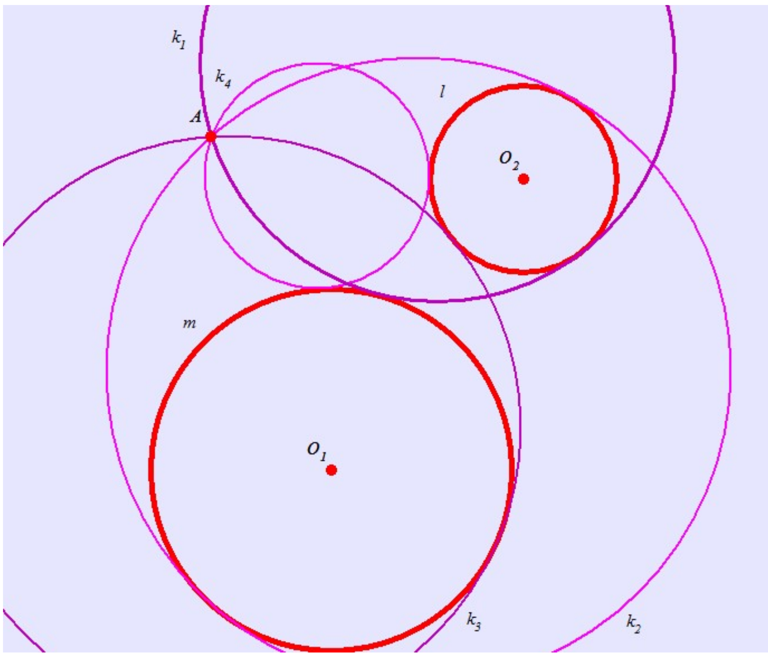


A kutatás eredménye szerint a 2008-as évfolyam 20 tanulójának 40 százaléka; valamint a a 2009-es évfolyam 18 tanulójának 56 százaléka kitűnő vagy jeles osztályzatot ért el.

Apolloniosz problémái

A geometria I tananyag felépítése az elemi geometriai tudáson túl tartalmazza az izometrikus transzformációkat, a hasonlósági leképezéseket és a körre vonatkozó inverziót. Példaként bemutatom Apolloniosz problémáit, a tíz lehetséges esetet. Mindegyiknek része a megfogalmazás, szerkesztés, elemzés, disszkúszió, bizonyítás. Akinek már volt tapasztalata fehér krétával fekete (zöld) táblára fakörzővel és -vonalzóval megszerkeszteni a háromszög nevezetes pontjait és vonalait, érti a probléma nehézségét. Tudja, milyen súlyú feladat pontosan megszerkeszteni, bemutatni és bebizonyítani ezeket az izgalmas, de nehéz tételeket a tanulóknak. A hangsúly most a szerkesztésen van és nem a bizonyításon. Több tucat egyedi papíron elkészített szerkesztés helyett (mellett) elég egy megfelelő segítség, valamely DGS-beli rajz. Ez utóbbi ábrát a számítógépen lehet módosítani alapelemeinek mozgatásával, amely hatalmas előny a kézi rajzokhoz képest.
Az általános és legnehezebb eset nyilván a három kört érintő kör, amelyet Apolloniosz ”On Tangencies-Az érintőkről” II. könyvében találunk meg. Az alapprobléma:
Adott három objektumhoz, amelyek bármelyike pont, egyenes vagy kör, szerkeszd meg azt a kört, amely mindegyiket érinti.
Munkámban mind a tíz esetet bemutatom, amit a tanulókkal együtt feldolgoztunk. Közben megjelennek a tanulók felfedezései, és szerepelnek saját szerkesztéseik is.

Példaként a hatodik probléma (Adott A pontot tartalmazó és adott l, m köröket érintő kör szerkesztése) számítógépes ábrával:



A tanév során a tanulók megtanulják a körző, vonalzó és technikai ceruza használatát ezekben a szerkesztésekben. Az órák negyven százalékát az informatikai teremben, számítógépek mellett tartjuk, míg a többin, az órák hatvan százalékában a szerkesztéseket gyakoroljuk, a pszichomotorikus képességek fejleszése céljából. A geometriatanítás néhány pszichomotorikus célja [1]:

- a feladatok megoldásának tiszta, világos áttekinthető rögzítése;
- körző, vonalzó és egyéb eszközök ügyes használata;

- szabadkézi rajz- és vázlatkészítés;
- matematikai, illetve geometriai modell készítése;
- számológépek, komputerek kezelése.

Házi feladatnak a tanulók megszerkesztik az ötödik vagy hatodik probléma rajzát, amelyeket a következő módon értékelünk:

pontos szerkesztés kitűnő (5)

egy kisebb hiba jeles (4)

két-három pontatlanság jó (3)

rossz rajz elégséges (2)

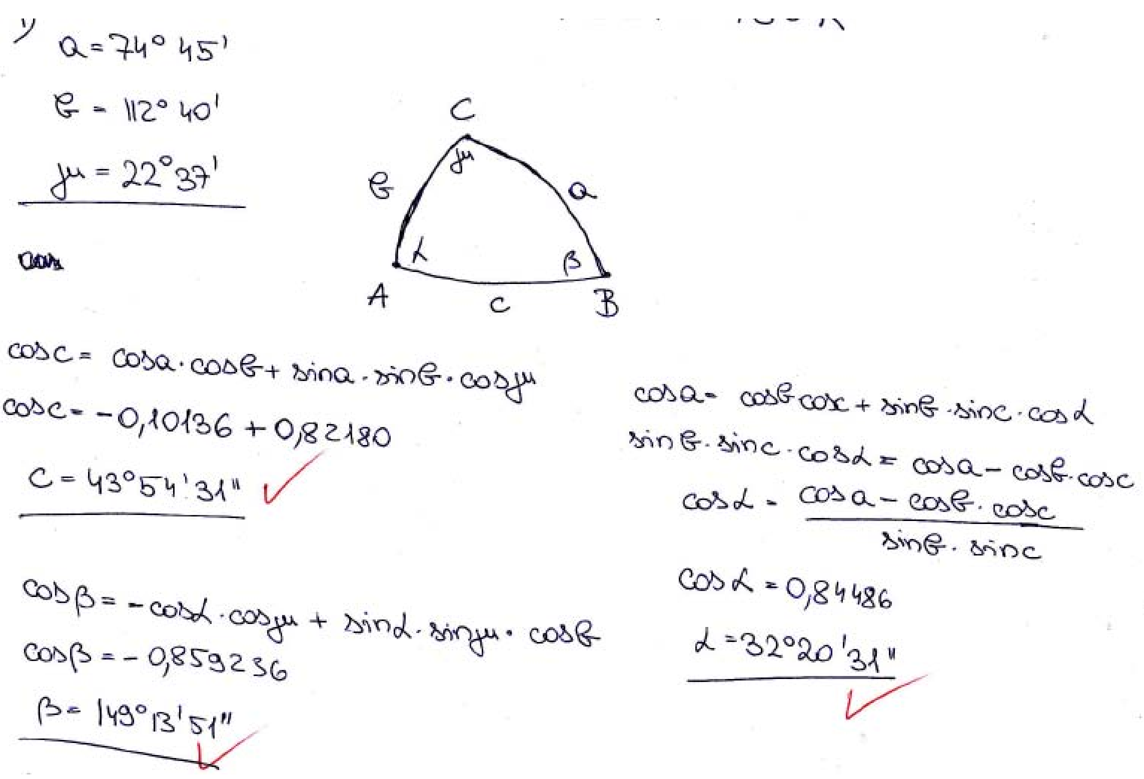
nem rajzolt elégtelen (1)

Van-e más geometria az euklideszi geometrián kívül?

Amíg az axiomatikusan felépített geometriát tanulmányoztuk, Hilbert 21 axiómájával ismerkedtünk meg. Hilbert a Grundlagen der Geometrie című könyvében meghatározta és öt csoportba sorolta az axiómákat: az illeszkedési, a rendezési, az egybevágósági, a folytonossági, valamint a páratlan párhuzamossági axióma, amely Eukleidész Elemek című könyvének ötödik posztulátumával egyenértékű, ekvivalens kijelentés. Mindeközben a tanár küldetése (manapság a feladata), hogy megmutassa a párhuzamossági axióma különböző változatait, amelyek a matematika történelme során fejlődtek ki. Ezen a ponton bemutatom a három axiómarendszert, a Playfair-, a Bolyai-Lobacsevszkij- és a Riemann-féle párhuzamossági axiómákat, míg a projektív geometriát a Desarques-, illetve Papposz-tétellel. Szükségesnek tartom a tanulók kognitív attitűdjének fejlesztését, hogy elősegítsük a gondolkodási készségek, a tér érzékelésének fejlődését, az intelligenciaszint emelkedését, a divergens gondolkodás megjelenését, valamint a modern tudományokhoz való hozzáférést. A 15 éves tanulóifjúság matematikai gondolkodása még nem teljesen fejlődött ki, mivel még nem szerezhettek tapasztalatot problémamegoldó gondolkodást igénylő feladatokban. Viszont a geometriai problémák alkalmat adnak effektiv fejlesztésekre.

A gömbi geometria szinusz- és koszinusz-tételeit alkalmazzuk, és kipróbáljuk a Lénárt-gömbön. Néhány tanulói munka is bemutatásra kerül.

Álljon itt egy szép példa, pontos számításokkal és a gömbháromszög jó ábrázolásával. A tanuló a harmadik szög meghatározására a koszinusz-tételt használta, tehát nem tévedhetett, mert a szög koszinuszának előjele megmutatja, vajon hegyes- vagy tompaszögű-e a háromszög.



$a = 74° 45'$

$b = 112° 40'$

$\gamma = 22° 37'$

$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma$

$\cos c = -0{,}10136 + 0{,}82180$

$c = 43°54'31''$

$\cos\beta = -\cos\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \cos b$

$\cos\beta = -0{,}859236$

$\beta = 149°13'51''$

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$

$\sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha = \cos a - \cos b \cdot \cos c$

$\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$

$\cos\alpha = 0{,}84486$

$\alpha = 32°20'31''$

Összegzésként elmondhatom, hogy az értékelt feladatok jó eredményt adtak, gyönyörű rajzokkal, szép számításokkal és izgalmas, meglepő, meghökkentő hibákkal: a diákok csodálatos ötletekkel álltak elő.

Összegezés

Ez a dolgozat a geometria mint tudomány és tantárgy tanítási és tanulási folyamatait vizsgálja számítógép alkalmazása mellett. A kutatás fő kérdéseit a tananyag megértése, feldolgozása, továbbfejlesztése képezi, és a következő két alapkérdésre keresi és adja meg a választ:

1. Hogyan segítette elő a számítógép alkalmazása a tanulót a jó eredmény elérésében?

2. Melyik szoftvert milyen feladatokban használják a tanulók?

A kezdeti síkgeometriai feladatokban Euklidész DGS alkalmazása célszerű, mert ahogy Szilassi Lajos tanár úr megfogalmazta,

„Egyszerűségében nagyszerű szoftver."

A későbbiekben a GeoGebra DGS használata segít, először csak a geometriai ablakkal, majd kinyitjuk az algebrai ablakot is. A hosszadalmas levezetések precíz, pontos felírására és bizonyítására a Mathematica alkalmas.

A geometria tanítása számítógépes vizualizációval a jövő tudósait felkészíti a különböző problémák megoldásainak megkeresésére, váratlan helyzetek és pillanatok gyors megoldására, hogy felfedezzék a még ismeretlent környező világunkban.

4. Publications and Conferences

List of publications:

1. **Ripco Sipos Elvira**: ***Apollóniosz problémái - tanítás, szerkesztés, vizualizáció***, ÚJ KÉP, XI évfolyam, 4-5 szám, 2007 április-május, 63-74, ISSN 1450-5010

2. **Ripco Sipos Elvira**: ***A geometria tanátása számítógép segétségével***, ÚJ KÉP, XI évfolyam, 1-2 szám, 2007 január-február, 51-60, ISSN 1450-5010

3. **Ripco Sipos Elvira**: ***Euklides - a geometriai szerkesztőprogram***, ÚJ KÉP, IX évfolyam, 1-2 szám, 2005 január-február, 30-33, ISSN1450-5010

4. **Ripco Sipos Elvira**: ***Hogyan alkalmazom a szmítógépet a matematikaórán (geometriaórán)?***, ÚJ KÉP, XI. évfolyam, 2007 október-november, 19-35, ISSN 1450-5010

5. **Ripco Sipos Elvira**: ***Geometria tanítása a zentai Bolyaiban***, ÚJ KÉP, XII. évfolyam, 2008 október-november, 32-36, ISSN 1450-5010

6. **Ripco Sipos Elvira**: ***Apollóniosz problémái***, TAVASZI SZÉL Konferenciakiadvány, 2007, 284-289, ISBN 978-963-87569-1-6

7. **Ripco Sipos Elvira**: ***Problémamegoldás és tehetségfejlesztés a számítógép segítségével a geometriaórán***, A TEHETSÉGEK SZOLGÁLATÁBAN I. NEMZETKÖZI TEHETSÉGGONDOZÓ KONFERENCIA, Magyarkanizsa, 2009. március 23, Konferenciakiadvány, 83-88, ISBN 978-86-84699-42-0

8. **Ripco Sipos Elvira**: ***Teaching geometry using computer visualizations***, TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE, (2009), 1-19, ISSN 1589-7389

9. **Ripco Sipos Elvira**: ***Apollonius' problems in grammar school***, TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE, (2009), 7/1, 69-85, ISSN 1589-7389

10. **Ripco Sipos Elvira**: ***A geometria tanításának útjai***, MAGYAR SZÓ, ÜVEGGOLYÓ, 2010. március 1-8

11. **Ripco Sipos Elvira**: ***Alkalmazzuk a számítógépet a geometriaórán!***, A MATEMATIKA TANÍTÁSA, MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT, XVIII évfolyam, 2 szám, 2010, MOZAIK Kiadó Kft, Szeged, ISSN 1216-6650

12. **Ripco Sipos Elvira**: ***Matematika érettségi vizsgák a zentai "Bolyai" gimnáziumban***, 169-177, KUTATÓ TANÁROK TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI, 2007-2008, ISBN 963 87225 1 7

13. **Ripco Sipos Elvira**: ***Tehetséggondozás a zentai Bolyaiban***, 340-347, KUTATÓ TANÁROK TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI, 2007-2008, ISBN 963 87225 1 7
14. **Ripco Sipos Elvira**: ***Tehetségfejlesztés a számítógép segítségével***, A MATEMATIKA TANÍTÁSA, MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT, XVIII évfolyam, 3 szám, 2010, MOZAIK Kiadó Kft, Szeged, ISSN 1216-6650
15. **Ripco Sipos Elvira**: ***Hyperbolic geometry and tiling***, ISIS-Symmetry congress-festival, 342-345, Gmuend, ISSN 1447-607X

Konferenciákon tartott előadások

1. Miskolc: History of Mathematics and Teaching of Mathematics, 2006 május 19-21, "Teaching Geometry using Computers"
2. Karcag: Kutató Tanárok I konferenciája, 2006 október 6-7, "A geometria tanítása számítógép segítségével"
3. Budapest: DOSz konferencia, 2007 május 18-21, "Apollóniosz problémái- tanítás, szerkesztés, vizualizáció"
4. Szabadkai Nyári Akadémia, 2007 augusztus 6-10, " Hogyan alkalmazom a számítógépet a matematikaórákon?"
5. Novi Sad: Međunarodna Konferencija za Nastavu Matematike, 2007 augusztus 22-23, "Problemsko rešavanje zadataka iz geometrije pomoću računara"
6. Győr: Kutató Tanárok II konferenciája, 2007. október 12-13, " Matematikai érettségi vizsgák a zentai Bolyaiban"
7. Budapest: Varga Tamás Módszertani napok, 2007. november 9-10 , "Hogyan alkalmazom a számítógépet a geometriaórákon?"
8. Zenta: T-day, 2008. április 4-5, "Nastava geometrije u gimnaziji Bolyai"
9. Novi Sad: XII Kongres Matematičara Srbije, 2008. augusztus 28-szeptember 2, "Apolonijevi problemi/ nastava u srednjoj školi Boljai"
10. Budapest: Vraga Tamás Módszertani Napok, 2008. november 7-8, "Geometrical Transformations Using Computer"
11. Győr: Kutató Tanárok II konferenciája, 2008. október 10-11, "Tehetséggondozás a zentai Bolyaiban"
12. Magyarkanizsa: III Tehetség Nap, 2009. március 23, "Problémamegoldás és tehetségfejlesztés a számítógép segítségével a geometriaórán"
13. Szeged: History of Mathematics and Teaching of Mathematics, 2010. május 20-23, "Important Theorems in geometry"
14. Szeged: Szakmódszertani kutatások a természettudományos, illetve a matematika és az informatika tantárgyhoz kapcsolódóan, 2010. május 20-21, "A geometriák alapjai"

15. Gmuend: ISIS-Symmetry:Art and Science 8th Interdisciplinary Study of Symmetry congress-festival, 2010. augusztus 23-28, "Hyperbolic geometry and tiling, learn and teach using computer"

16. Zenta: I. Vajdasági Tehetségpont Konferencia, 2010. október 1-2, "Nevezetes tételek a GeoGebrában"

17. Budapest: Varga Tamás Módszertani napok, 2010. november 6

18. Novi Sad: GeoGebra Conference for Southeast Europe 2011, január 15,16, "Izometrijske transformacije u GeoGebra DGS"

References

[1] Ambrus András: ***Bevezetés a matematikadidaktikába***, ELTE Eötvös kiadó, Budapest, 1995

[2] Balka, D. S. (1974): ***Creative ability in mathematics.*** Arithmetic Teacher, 21, 633-636.

[3] Anton Bilimović: ***Apolonijevi problemi***, www.matf.bg.ac.yu, (2007-03-21)

[4] Johanne Bolyai: ***Scientiam Spatii***, Polygon, Szeged, 2002

[5] Cofman, Judita: ***What to Solve?*** –Problems and Suggestions for Young Mathematicians, Clarenden Press, Oxford, 1994

[6] Cofman, Judita: ***Numbers and Shapes Revisited***–More problems and Suggestions for Young Mathematicians, Clarenden Press, Oxford, 1995

[7] H.S.M. Coxeter: ***A geometriák alapjai***, Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987, ISBN 963 10 6843 9

[8] H.S.M. Coxeter: ***Projektív geometria***, Gondolat, Budapest, 1986, ISBN 963 281 678 1

[9] Euclid, ***Elements***, Gondolat, Budapest, 1983

[10] Hajós György: ***Bevezetés a geometriába***, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984

[11] David Hilbert: ***Grundlagen der Geometrie***, ***Osnovi geometrije***, Matematicki Institut, Beograd, 1957

[12] Jovan D. Kečkić: ***Matematika za treći razred gimnazije***, Naučna knjiga, Beograd, 1990

[13] Lénárt István, ***Nem-euklideszi kalandok***, Key Curriculum Press , 2009

[14] Rosa Massa, Ftima Romero, Iolanda Guevara: ***Teaching mathematics through history: Some trigonometric concepts***, The Global and the Local: The History of Science and the Cultural Integration of Europe. Proceedings of the 2nd ICESHS (Cracow, Poland, September 69, 2006)

[15] Eric Louis Mann: ***Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students***, Ph.D. dissertation, University of Connecticut, 2005

[16] Milan Mitrović, Srdjan Ognjanović, Mihailo Veljković, Ljubinka Petković, Nenad Lazarević: ***Geometrija I za matematičke gimnazije***, Krug Beograd, 2003

[17] Munkácsy Katalin: ***A matematikai bizonyításfogalom változásának hatása a tanításra***, http://tandem.lauder.hu/ujsag/cikkek/20000209.html

[18] Presnky Marc: ***Digital Natives, Digital Immigrants,*** On the Horizon , MCB University Press, Vol. 9 No. 5, October 2001

[19] Pólya György: ***A gondolkodás iskolája***, Bibliotheca Kiadó, Budapest, 1957

[20] Pólya György: ***Mathematical Discovery on understanding, learning and teaching problem solving***, John Wiley and Sons Inc., New York, 1962

[21] Ripco Sipos Elvira: ***Teaching geometry using computer visualization***, Teaching Mathematics and Computer Science, TMCS 7 (2009)2, ISSN 1589-7389

[22] Ripco Sipos Elvira: ***Apollonius' problems in grammar school***, Teaching Mathematics and Computer Science, TMCS 7 (2009)1, ISSN 1589-7389

[23] Ripco Sipos Elvira: ***Matematika érettségi vizsgák a zentai "Bolyai" gimnáziumban***, 169-177, Kutató Tanárok Tudományos Közleményei, 2007-2008, ISBN 963 87225 1 7

[24] Alan H. Schoenfeld: ***Mathematical Problem Solving***, Academic Press, INC., New York, 1985

[25] Alan H. Schoenfeld: ***Mathematical Thinking and Problem Solving***, Lawernce Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, New Jersey, 1994

[26] Richard R. Skemp: ***The Psychology of Learning Mathematics***, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, U.S.A, Hungarian Translation ©1975 Klein Sándor, pages: 42-44, 138, 152

[27] Szilasi Lajos: http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/Bolyai/index.html, 05.06.2009

[28] Patrick Suppes: ***The Aims of Education***, from Suppes, P. (1968). Can there be a normative philosophy of education? In G.L. Newsome, Jr. (Ed.), Philosophy of Education. Studies in Philosophy and Education series, Proceedings of the 24th annual meeting of the Philosophy of Education Society–Santa Monica, April 7-l0, 1968, Edwardsville, IL: Southern Illinois University, 1–12. Reprinted in J.P. Strain (Ed.), Modern Philosophies of Education. New York: Random House, 1971, 277–288.

[29] David Tall: ***The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical proof For All or For Some?***, Conference of the University of Chicago Scholl Mathematics Project, August 1998

[30] David Tall: ***Computers and the Link Between Intuition and Formalism***, Published in Proceedings of the Annual International Conference on technoogy in Collegiate Mathematics, Addson-Wesley Longman., pp.417-421

[31] David Tall: ***Advanced Mathematical Thinking and The Computer***,Published in Proceedings of the 20th University Mathematics Teaching Conference, Shell Centre, Nottingham, pp. 1-8 (1996)

[32] David Tall: ***The Psychology of Advanced Mathematical Thinking: Biological Brain and Mathematical Mind***, Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, July 1994

[33] David Tall: ***Interrelationships between mind and computer: pro- cesses, images symbols***,Advanced Technologies in the Teaching of Math- ematics and Science, New York: Springer-Verlag, 385-413, 1993

[34] David Tall: ***Enviroments for enactive and visual manipulation***, The Psychology of Advanced Mathematical Thinking: Biological Brain and Math- ematical Mind, Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education, Lisbon, July, 1994

Internetes oldalak

[35] www.en.wikipedia.org, History of General Relativity, (07.10.2008)

[36] Internet:***MathWorld***,Wolfram Research, http://www.mathworld.wolfram.com, (2007-03-21)

[37] Wolfram Mathematica homepage, http://demonstrations.wolfram.com/-PtolemysTheorem/, (25.03.2010)

[38] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies, (02.03.2011)