S I M P L E X E K R E

V O N A T K O Z Ó

E G Y E N L Ő T L E N S É G E K.

Doktori értekezés.

Irta : B e r k e s J e n ő .

Szeged, 1963. jan. 15.

S I M P L E X E K R E   V O N A T K O Z Ó

E G Y E N L Ő T L E N S É G E K.

B e v e z e t é s.

Jelentse az n-dimenziós euklidesi tér R_n simplexének csucspontjait A_i $(i=1,2,\dots n+1)$, megállapodásszerüen legyen

$$A_k = A_j \quad \text{ha} \quad k \equiv j \mod (n+1).$$

A simplex t_i $(i=1,2,\dots n+1)$ transzverzálisai a $t_i = \overline{OA_i}$ egyenesek, ahol O a tér tetszőleges pontja. Az A_i pontokon átmenő gömb sugara R legyen, a beirható gömbé pedig r.

R_2-ben a simplex egy háromszög, melynek transzverzálisai közül nevezetesek a következők:

w_i	$(i=1,2,3)$	szögfelezők
h_i	"	magasságvonalak
m_i	"	sulyvonalak.

Legyen az A_i-nál levő belső szög α_i, a szemközti oldal a_i.

R_3-ban a simplex tetraéder, ennek is beszélhetünk a magasság és sulyvonalairól. h_i ill. m_i $(i=1,2,3,4)$

A simplexekre vonatkozó egyenlőtlenségek legkényelmesebben és legelegánsabban középértékek segitségével fejezhetők ki. Jelentse:

$A(x_i)$	az aritmetikai
$G(x_i)$	a geometriai
$H(x_i)$	a harmonikus
$Q(x_i)$	a kvadratikus

középértékét az x_i $(i=1,2,\dots n+1)$ mennyiségeknek. Továbbá legyen a k-adik hatványközép:

$$M_k(x_i) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^k}{n+1}\right]^{\frac{1}{k}}$$

közismert, hogy:

$$M_1(x_i) = A(x_i)$$
$$M_{-1}(x_i) = H(x_i)$$
$$M_2(x_i) = Q(x_i)$$

$$\lim_{k\to 0} M_k(x_i) = G(x_i)$$

$$\lim_{k\to \infty} M_k(x_i) = \max (x_i)$$

$$\lim_{k\to -\infty} M_k(x_i) = \min (x_i)$$

$$M_{-k}(x_i) = \frac{1}{M_k\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

és $\quad M_r(x_i) \leqq M_s(x_i) \quad$ ha $r < s$.

I. Az ERDŐS-MORDELL-féle gondolat.

A kutatásokra a legelső ösztönzést az elegáns Erdős-Mordell-féle egyenlőtlenség adta. R_2-ben legyen egy háromszög, tetszőleges belső pontja O /esetleg a határon / és jelölje

$$R_i = \overline{OA_i}$$

r_i pedig az O távolságát az $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ oldaltól. Akkor:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2.(r_1 + r_2 + r_3) \qquad /1/$$

A tételt Erdős Pál tüzte ki feladatként. [12].
Mordell adott rá trigonometriai bizonyitást. [25].
Hosszu ideig nem volt ismeretes a tétel jellegéhez méltó egészen elemi bizonyitás, de ma már van több is. [11]. [26]. [17].

Már Fejes Tóth L. észreveszi, hogy /1/-et átirhatjuk [13]. :

$$A(R_i) \geqq 2A(r_i) \qquad /2/$$

alakba. Ebből egy geometriai transzformációval /polaritás/ következik, hogy fennáll $\quad H(R_i) \geqq 2H(r_i) \qquad /3/$
is. /2/ és /3/ ekvivalens, de nem algebrailag. Fejes Tóth L. bebizonyitja, hogy $\quad G(R_i) \geqq 2G(r_i) \qquad /4/$
szintén érvényes és ezt /2/ és /3/-tól függetlenül bizonyitja, mindjárt R_2-beli konvex n-szögre [13] :

$$G(R_i) \geqq \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} \cdot G(r_i) \qquad /5/$$

Több kérdés merül fel: általánositható-e /2/; /3/; /4/ R_n-re vagy R_2-ben konvex n-szögre, vagy létezik-e olyan egyenlőtlenség, amely mindhármat magában foglalja.

A /4/ egyenlőtlenséggel kapcsolatban sikerült először eredményre jutni. A tétel egyszerüségéhez méltó egészen elemi bizonyitást adtam [3]. Ennek a bizomyitásnak másik előnye az, hogy általánosithatónak bizonyult. Igy sikerült kapni a következő tételt:

1. Tétel:

A bevezetésben emlitett jelölések mellett tetraéderre:

$$G(R_i) \geqq 3G(r_i) \qquad /6/$$

Bizonyitás:

Jelölje V a tetraéder térfogatát, V_i pedig az $OA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ tetraéder térfogatát, továbbá az O-n átmenő transzverzális hosszát R_i+z_i akkor,

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{R_i}{R_i + z_i} = \sum_{i=1}^{4} \left(1 - \frac{z_i}{R_i + z_i}\right) = 4 - \sum_{i=1}^{4} \frac{V_i}{V} = 3 \qquad /61/$$

természetesen $r_i \leqq z_i$ miatt:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{R_i}{R_i + r_i} \geqq 3 \qquad /62/$$

közös nevezőre hozás és kis rendezés után kapjuk:

$$\prod_{i=1}^{4} \frac{R_i}{r_i} \geqq 3 + 2\sum_{i=1}^{4} \frac{R_i}{r_i} + \sum_{i>j} \frac{R_i R_j}{r_i r_j} \qquad /63/$$

a számtani és a mértani középre vonatkozó reláció kétszeri alkalmazásával:

$$G = \prod_{i=1}^{4} \left(\frac{R_i}{r_i}\right)^{1/4} \leqq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \frac{R_i}{r_i} \qquad /64/$$

$$G^2 = \prod_{i=1}^{4} \left(\frac{R_i}{r_i}\right)^{1/2} = \prod_{i>k} \left(\frac{R_i R_k}{r_i r_k}\right)^{1/6} \leqq \frac{1}{6} \cdot \sum_{i>k} \frac{R_i R_k}{r_i r_k} \qquad /65/$$

/65/, /64/ és /63/ alapján következik:

$$G^4 - 6G^2 - 8G - 3 = (G + 1)^3 . (G - 3) \geqq 0 \qquad /66/$$

/66/-ból közvetlen folyik /6/.

Ezután természetesen meg kellett kisérelni a teljes általánositást is, n-dimenzióra. Mindenesetre /66/ analógiájára keresni kellett R_n-ben a

$$(G + 1)^n . (G - n) \geqq 0 \qquad /7/$$

egyenlőtlenséget. Ezt sikerült levezetnem egy tisztán algebrai jellegü segédtétel felhasználásával. Ez a következő:

2. Tétel:

Legyenek a $z_i > o$ (i=1,2,...n+1) mennyiségek adva, akkor

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1 + z_i} \geqq n \rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{z_i} \geqq n^{n+1} \qquad /8/$$

A 2. számu tétel mint kitüzött feladat jelent meg az Elemente der Mathematik c.folyóiratban. [4].Saját megoldásom bizonyos középérték relációk alkalmazásával jutott célhoz,de ez egészében elég hosszadalmas volt.A kitüzött feladatra több megoldás érkezett,a legszellemesebb C.Bindschedler bizonyitása volt,ezért most ezt közlöm.

Bizonyitás:

A feltételi egyenlőtlenség szerint a summa minden tagja egynél kisebb lévén bármely n-l tag összege kisebb mint n-l,a maradó két tag eszerint nagyobb egynál.Tehát

$$\frac{1}{1+z_i}+\frac{1}{1+z_k}>1$$

ebből következik,hogy $z_i z_k<1$.Legyen most z_1 a legkisebb, z_2 pedig a legnagyobb a z_i-k között./Ha mind egyenlő akkor a tétel triviális./Helyettesitsük most a summában z_1-et és z_2-t a geometriai közepükkel,eközben a summa növekszik.T.i. :

$$\frac{1}{1+z_2}+\frac{1}{1+y}<\frac{2}{1+\sqrt{yz_2}}$$

biztosan igaz y=o-ra,ha pedig y növekszik z_1-ig,akkor sem mehet át egyenlőségbe,mert abból következne

$$(y-z_2)^2.(1-z_2y)=o$$

ebből pedig $y\leqq z_1<z_2$ azaz $z_2y\leqq z_2z_1<1$ feltételekkel ellenmondó következtetés folyik.Az emlitett módon változtatott összeget Σ'-vel jelölve következik,hogy $\Sigma'>\Sigma$ és $\Pi'=\Pi$ .Ha viszont z_1 és z_2-őt a következő módon helyettesitjük z_1' ill. z_2'-vel

$$z_1'=z_2'=\lambda.\sqrt{z_1z_2}$$

és λ-t ugy választjuk,hogy $\Sigma'=\Sigma$ ill.$\lambda>1$ miatt ekkor $\Pi'<\Pi$.

Az eljárást ismételve a következő n+l számra $z_1', z_2', z_3\dots z_{n+1}$ a summa marad,a szorzat pedig monoton csökken.A minimumok értéke monoton nő,de $z_iz_k<1$ miatt korlátos maradván konvergál egy z_o értékhez,a maximumok szintén.Végül minden érték ezzel lesz pótolva, ekkor a feltétel szerint $z_o\leqq\frac{1}{n}$ tehát $\Pi_o\geqq n^{n+1}$.Lévén $\Pi>\Pi_o$ ezzel a a bizonyitás kész.

Ezután bizonyithatjuk a következő tételt:

3.Tétel:

Az n-dimenziós tér simplexére fennáll:

$$G(R_i)\geqq nG(r_i) \qquad /9/$$

Bizonyitás:

Legyen a t_i transzverzális metszéspontja az A_i-vel szemközti határsimplexszel B_i, továbbá $\overline{OB_i} = u_i$,akkor:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{R_i + u_i} + \sum_{i=1}^{n+1} \left(1 - \frac{u_i}{R_i + u_i}\right) = n + 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{V_i}{V} = n \qquad /91/$$

ahol V jelenti a simplex térfogatát R_n-ben, V_i pedig a következő részsimplexé $A_1A_2\ldots A_{i-1}OA_{i+1}\ldots A_{n+1}$. Nyilván $\sum V_i = V$. Másrészt triviálisan $r_i \leqq u_i$, ezért

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{R_i + r_i} \geqq n \qquad /92/$$

/92/ $z_i = \frac{r_i}{R_i}$ válsztás mellett épen a 2. tétel feltételi egyenlőtlensége és ebből a 2.tétel miatt folyik /9/.

A 3.tételt később egészen más módszerekkel bebizonyitotta J. Schopp is. [28]. J.Schopp baricentrikus koordinatákat használt és hasonló módszerrel még más egyenlőtlenségeket is vezetett le. [29].

Térjünk át ezekután a /2/ egyenlőtlenség vizsgálatára. Előrebocsájtjuk a következő tételt:

4.Tétel:

Jelentse az n-dimenziós simplex n-1 dimenziós határsimplexeinek térfogatát a_i (i=1,2,...n+1) ,akkor érvényes:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_iR_i \geqq n\sum_{i=1}^{n+1} a_ir_i \qquad /10/$$

Bizonyitás: két dimenzióra megtalálható a bizonyitás [32]-ben. Általánosan:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_iR_i \geqq \sum_{i=1}^{n+1} a_i(m_i - r_i) = (n + 1)nV - nV = n^2V \qquad /101/$$

triviálisan fennáll u.i. $a_im_i = nV = \sum_{i=1}^{n+1} a_ir_i$

/101/-ből közvetlen következik /10/.

/10/ külső formája rendkivül hasonlóvá tehető ahhoz a formához amit /2/ általánositásaként várunk. Várjuk u.i. hogy

$$A(R_i) \geqq nA(r_i)$$

sejtés simplexekre igaznak bizonyul. Mindenesetre a 4.tétel szerint a határsimplexek térfogatával sulyozott számtani közepekre igaz ez. Ha a sulyok egyenlők, azaz a simplex szabályos, akkor nyerjük :

5.Tétel:

Szabályos simplexekre:

$$A(R_i) \geqq nA(r_i) \qquad /11/$$

Bizonyitás: 4.tétel közvetlen folyománya ez $a_i = a$ -t téve.

Nem szabályos tetraéderre azonban a helyzet sokkal komplikáltabb és kiderül, hogy a sejtés már tetraéderre sem igaz.

A nehézséget az okozza,hogy mig /9/ átirható

$$G\left(\frac{R_i}{r_i}\right) \geqq n$$

alakba,ahol az egyik oldal fix és a másik egyetlen középérték,addig $\frac{A(R_i)}{A(r_i)}$ nem hozható kapcsolatba $A\left(\frac{R_i}{r_i}\right)$ -vel vagy valami hasonlóval, legalábbis eddig nem sikerült.De nem is érvényes tetraéderre az $A(R_i) \geqq 3A(r_i)$ sejtés,hanem csak az:

$$A(R_i) \geqq \sqrt{8}A(r_i) \qquad /12/$$

ennek bizonyitását adta N.D.Kazarinoff [17*] ,de ebben a bizonyitásban hiba van.T.i. eredetiled D.Kazarinoff bizonyitotta be a /12/ összefüggést,de annak publikálása előtt meghalt.Az idézett cikkben N.D Kazarinoff próbálja rekonstruálni ezt a bizonyitást,de ebben hiba van./ Erdős Pál közlése./Egy másik sejtést tesz lehetővé,ha /12/-őt átirjuk $A(R_i) \geqq \sqrt{2^3}.A(r_i)$ alakba és ugyanekkor /2/-őt pedig $A(R_i) \geqq \sqrt{2^2}.A(r_i)$ alakba,mert igy n-dimenzióra

$$A(R_i) \geqq \sqrt{2^n}.A(r_i)$$

sejthető,ez azonban nem igaz,ez kiderül [17] végén.

/2/ másirányu általánositásai eredményre vezettek.Konvex n-szögre ugyanis

$$A(R_i) \geqq \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} A(r_i) \quad (i=1,2,\ldots n). \qquad /13/$$

ezt először A.Florián sejtette,de csak n=4-ig tudta bizonyitani [15] Végül aztán Lenhard bebizonyitotta,hogy még

$$A(R_i) \geqq \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}.A(w_i) \quad (i=1,2,\ldots n) \qquad /14/$$

is fenáll,ahol w_i az A_iOA_{i+1} O-nál levő szögfelezője.Természetesen /13/ következik /14/-ből./5/-nek is fennáll az erősebb

$$G(R_i) \geqq \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}.G(w_i) \qquad /15/$$

alakja is,ez már az eredeti bizonyitásból is kiderül,de a baloldalon w_i helyébe már nem irható más,többetmondó.

A felvetett problémák közül az utolsóra ugyancsak A.Florian adta meg a választ,amennyiben bebizonyitott,hogy:

$$M_k(R_i) \quad \begin{matrix} \geqq 2 & \text{ha } |k| \leqq 1 \\ > 2^{1/|k|}.M_k(r_i) & \text{"} \quad |k| > 1 \end{matrix} \qquad /16/$$

A.Florian dolgozata a [15] számu.

Foglaljuk össze az elintézett és a még nyitott problémákat:
/4/ általánositása n-dimenzióra elintézett, ez az 1. és a 3. tétel
/4/ általánositása R_2-ben konvex n-szögre elintézett, ez a /15/ formula.
/2/ általánositása lényegében még nyitott R_3-ra is. Részeredményeket tartalmaz a 4. és az 5. tétel, továbbá a /12/ formula.
/2/ általánositása R_2-ben konvex n-szögre elintézett, lásd /13/.
/3/ geometriailag ekvivalens /2/-vel simplexekre.
További problémák lehetnek: a kérdéskör átvitele gömbháromszögre és a konvex n-szögre vonatkozó formulák általánositása magasabb dimenziókra. Ez utóbbi kérdés komplikált, esetleg uj fogalomkonsrukciókat kiván. Sulyozott közepek használatára is gondolhatunk a 4. tétel mintájára.

A 2. tételnek érdekes algebrai korolláriumai vannak, ezeket /8/ transzformálása közben vettem észre. Ha ugyanis /8/-ban irunk

$$z_i = \frac{x_i}{1 - x_i} \text{-t} \qquad o < x_i < 1 \ (i=1,2,\dots n)$$

akkor a 2. tétel a következőbe megy át:

2*. Tétel:

Legyen adva n valós szám a (o,1) intervallumban, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1 \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - x_i}{x_i} \geqq (n - 1)^n \qquad /17/$$

6. Tétel:

Legyen egy valós együtthatóju n-edfoku algebrai egyenlet

$$P(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + x^n$$

amelynek n valós gyöke van /nem okvetlen különbözők/ a (o,1) intervallumban és $a_{n-1} \geqq -1$, akkor

$$a_o + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + 1 \geqq (-1)^n . a_o . (n-1)^n \qquad /18/$$

Bizonyitás:

Legyenek a gyökök $o < x_i < 1$ $(i=1,2,\dots n)$ akkor

$$-a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1$$

fennáll, tehát a 2. tétel szerint:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)}{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{P(1)}{(-1)^n . a_o} \geqq (n - 1)^n$$

és ez épen a /18/ összefüggés.

Pl. harmadfoku egyenletre a feltételeknek megfelelően és $a_2=-1$ -et véve az érdekes

$$a_1 \geqq 8oa_o \quad \text{adódik.}$$

Hasonló jellegü tételt nyerhetünk Ky Fan-nek egy nem publikált egyenlőtlenségéből is [2],amely igy hangzik:

Legyenek $o < x_i \leqq 1/2$ (i=1,2,...n) mennyiségek,akkor

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)}{\left[\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)\right]^n} \qquad /19/$$

7.Tétel:

Legyen a 6.tételben szereplő P(x) egyenletnek n darab valós gyöke mind a $(o\ ,\ 1/2]$ intervallumban,akkor:

$$(-1)^n.a_o.\left(\frac{n + a_{n-1}}{-a_{n-1}}\right)^n \leqq a_o + a_1 + \dots + a_{n-1} + 1 \qquad /2o/$$

Bizonyitás:

Az algebrai egyenletek elméletéből ismeretes,hogy:

$\prod_{i=1}^{n} x_i=(-1)^n.a_o$; $\sum_{i=1}^{n} x_i = -a_{n-1}$; $\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) =$ P(1) ezeket beirva /19/-be nyerjük /2o/-at.Figyelemreméltó egyébként /18/ és /2o/ szerkezeti hasonlósága és még nyomozni lehet hasonló egyenlőtlenségek után,amelyek ilyen módon átirhatók algebrai egyenletek gyökei és együttható i közötti összefüggésekre.

II. Transzverzálisokra vonatkozó egyenlőtlenségek.

R_2 és R_3-ra vonatkozóan már régen ismeretesek ilyen egyenlőtlenségek,mégis soknak csak most sikerült megadni a legáltalánosabb formáját.

F.Leuenberger közölte,hogy háromszögre:

$$3r \leqq A(h_i) \leqq \frac{3}{2}.R \qquad /1/$$

erre elég nehézkes és nem általánositható bizonyitást adott. [2o].

Nekem sikerült elemibb bizonyitással élesiteni és az általánositás utját is kijelölni.Erre vonatkozik a következő három tétel.

8.Tétel:

Háromszögre fennáll

$$3r \leqq G(h_i) \quad \text{is.} \qquad /2/$$

Bizonyitás:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{r_i}{h_i}=\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i r_i}{a_i h_i}=1 \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{3}=A\left(\frac{r_i}{h_i}\right)\geqq G\left(\frac{r_i}{h_i}\right)$$

ez utóbbiból $r_1=r_2=r_3=r$ esetén következik /2/.Egyenlőség csak egyenlő oldalu háromszögre állhat fenn.A 8.tétel megtalálható [5]-ben.

9.Tétel:

n dimenziós simplexre

$$(n+1).r\leqq G(h_i) \qquad /3/$$

Bizonyitás: Teljesen analog a 8.tétel bizonyitásával,csak az összeg n + 1 tagu.

Az /1/ formula másik oldalát illetően,igaz a

lo.Tétel:

Háromszögre:
$$A(h_i) \leqq \sqrt{3}.Q(\sin\alpha_i).R \qquad /4/$$

Bizonyitás:Közismert,hogy:

$$4m_i^2=2\left(a_{i+1}^2+a_{i+2}^2\right)-a_i^2 \quad (i=1,2,3) \qquad /41/$$

ebből:
$$\sum_{i=1}^{3} m_i^2=\frac{3}{4}.\sum_{i=1}^{3} a_i^2=3r^2\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i \qquad /42/$$

Másrészt a $\sum\sin^2\alpha_i$ maximumának a meghatározása az $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ mellékfeltétel mellett egészen elemi probléma lesz a következő szerencsés azonosság miatt:

$$\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\sin^2\alpha_3=$$
$$=2-\left[\cos{}_1-\frac{1}{2}.\cos(\alpha_2-\alpha_3)\right]^2+\frac{1}{4}.\cos^2(\alpha_2-\alpha_3) \qquad /43/$$

/43/-ból látható,hogy $\cos(\alpha_2-\alpha_3)=1$ és $\cos\alpha_1=\frac{1}{2}.\cos(\alpha_2-\alpha_3)$ esetén biztosan maximum van,ez pedig épen összefér a feltétellel,mert egyenlőoldalu háromszögre bekövetkezik.Egyuttal a maximumérték is leolvasható,az épen 2 + 1/4= 9/4.

/43/-ból:
$$Q(m_i)=\sqrt{3}\ .\ Q(\sin\alpha_i).R \qquad /44/$$

következik,ami még többet állit mint a tétel,mert

$$A(h_i)\leqq Q(h_i)\leqq Q(m_i)$$

Másrészt a kiszámitott maximum behelyettesitésével megkapjuk /1/ másik oldalát is.

A 8. és a lo.tétel bizonyitásai megjelentek [5]. -ben.

Következő probléma volt az n-dimenziós általánositás,amely a 9.tétel szerint az egyik oldalra nézve megoldódott. A másik oldalé már nehezebben ment és először csak a következőt sikerült megállapitani:

11. Tétel:

Tetraéderre, ha a körülirható gömb középpontja a tetraéderen belül van érvényes:

$$A(h_i) \leqq \frac{4+\sqrt{2}}{4} \cdot R \qquad /5/$$

Bizonyitás: A bizonyitásban felhasználom I./12/ összefüggést, de itt nem közlöm, mert a későbbi eredmények ezt jelentékenyen élesitették és a korlátozástól is megszabaditották. Mindenesetre ez az eredmény egy közbeeső láncszem volt a kutatásokban, mint kitüzött feladat jelent meg [6]. Hogy mennyire közbeeső láncszem volt azt az is mutatja, hogy erre nemsokára egymástól függetlenül oldotta meg az általánositást F. Leuenberger [21] és J. Schopp [3o] is, mindketten hivatkoznak a 8-11. tételekben foglalt eredményekre.

Kiderült, hogy R_n-beli simplexekre:

$$(n+1).r = H(t_i) \leqq G(t_i) \leqq A(t_i) \leqq Q(t_i) \leqq \frac{n+1}{n} \cdot R \qquad /6/$$

ahol t_i helyébe irható h_i és m_i is, R_2-ben w_i is.

A baloldal ezzel teljesen elintézett, mert ott egyenlőség van, de a jobboldalon felmerül a további általánositás lehetősége is

$$M_k(t_i) \leqq \frac{n+1}{n} \cdot R \qquad /6\ /$$

biztosan fennáll $k \leqq 2$-re, de kérdés, hogy k felső határa 2-e vagy ennél több. Erre a kérdésre a következő fejezetben visszatérek.

Szólni kell a legfontosabb transzverzálisokról, általánositásaikat illetően. A h_i magasságvonalak definiciója egyszerü, hiszen ez az A_i-n átmenő $A_1A_2\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_n$ n-1 dimenziós határsimplexre merőleges egyenes, ez létezik, mert a simplex definiciója szerint az $A1, A_2 \ldots A_n, A_{n+1}$ pontokból bárhogyan választunk ki k számut $/3 \leqq k \leqq n+1/$ azok egy k-1 dimenziós simplexet határoznak meg. A h_i-k egy ponton mennek keresztül, ennek bizonyitása is közismert.

Ami az m_i sulyvonalakat illeti ezek a S sulyponton átmenő transzverzálisokként definiálhatók $m_i = \overline{A_iS}$. A S pedig például analitikusan, ha

$$S\,(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad ; \quad A_i(a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in})$$

akkor:

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_{ik}}{n+1} \qquad (k=1,2,\ldots n) \qquad /A/$$

Ha s_i jelenti az $\overline{A_iS}$ hosszát,akkor érvényes

$$\frac{s_i}{m_i} = \frac{n}{n+1} \qquad /B/$$

és a körülirható kör O középpontjára vonatkozóan Leibnitz tétele is:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overline{OA_i}^2 = (n+1).\overline{OS}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \overline{SA_i}^2 \qquad /C/$$

/6/ bizonyitásához felhasználható a /B/ és /C/ összefüggés.

R_2-re még igen nevezetes transzverzálisok a belső szögfelezők, ha az eredeti mértani hely definiciót tekintjük,akkor általánositás esetén ez növeli dimenziószámát,viszont definiálhatók ugy is,mint a beirható gömb /ez létezik/középpontján átmenő transzverzálisok.Ebben az esetben például felhasználva az I./91/általános transzverzális formulát

$$R_i + u_i = w_i \quad ; \quad R_i = w_i - u_i$$

szereposztásban,kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{w_i - u_i}{w_i} = n$$

továbbá $u_i \geqq r$ miatt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{w_i - r}{w_i} \geqq n \qquad /7/$$

és ebből kis számolással következik:

$$(n+1).r \leqq H(w_i) \qquad /8/$$

/8/ természetesen következik /6/-ból is,itt csak az I./91/általános transzverzális formula használhatóságát akartuk ujra megmutatni.Ebből sikerült u.i. a legelső eredményeket is nyerni. [3].

R_2-ben érdekes és kevéssé vizsgált transzverzális a szimédián /a sulyvonalnak a szögfelezőre vonatkozó szimmetrikusa/,melynek hossza:

$$\sigma_i = \frac{a_{i+1}a_{i+2}}{a_{i+1}^2+a_{i+2}^2} . \sqrt{2.(a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2) - a_i^2}$$

vagy a sulyvonallal kifejezve:

$$\sigma_i = \frac{a_{i+1}a_{i+2}}{a_{i+1}^2+a_{i+2}^2} . m_i$$

nem igen ismeretesek a szimédiánra vonatkozó transzverzális formulák, például /6/ fennállása is kérdéses illetőleg módosulása.

A háromszögben és a tetraéderben további nevezetes pontok is meretesek,ezekből nevezetes vonalak definiálhatók.A kérdés vizsgálata érdekes algebrai vizsgálatokkal kapcsolható össze, ezekre vonatkozóan Rédei L. közölt érdekes eredményeket. /Algebra, Leipzig 1959. p. 698-713./

Szintén algebrai vizsgálatot igényel a transzverzálisokból illetve ezekből és egyéb adatokból való euklidesi szerkeszthetőség kérdése. Különösen érdekesek a nem szerkeszthető esetek. Ezek számát és elméletét Szőkefalvi Nagy Gyula, P. Buchner, Roth-Desmeules, Van der Waerden, H. Wolff és L. Bieberbach gazdagitották. Erről a témáról egy összefoglaló jellegü dolgozatot közöltem [7]. A dolgozatban uj esetek is szerepelnek, amelyeket én találtam, ezeket az eseteket most közlöm bizonyitás nélkül. Azért bizonyitás nélkül, mert nem tartoznak szorosan a témához.

12. Tétel:

Nem szerkeszthető háromszög, ha adva vannak a magasságvonalaknak a magassági ponttól a csucspontig terjedő darabjai.

13. Tétel:

Nem szerkeszthető háromszög, ha adva van két oldal és a r/R viszony.

14. Tétel:

Nem szerkeszthető háromszög, ha adva van két oldal és a harmadikhoz tartozó magasságvonalnak a csucstól a magassági pontig terjedő része.

Ez a két utóbbi azért különösebben érdekes, mert két oldal is szerepel benne. A továbbiakban jelentse a beirható és a külső érintő körök középpontjait I, I_a, I_b, I_c akkor érvényes a

15. Tétel:

$\overline{I\,I_a}$, $\overline{I\,I_b}$, $\overline{I\,I_c}$ távolságokból nem szerkeszthető háromszög.

16. Tétel:

Nem szerkeszthető $\overline{I\,I_a}$, $\overline{I_a\,I_b}$, $\overline{I_a\,I_c}$ -ből sem.

17. Tétel:

Nem szerkeszthető háromszög, ha adva van egy magasságvonal és az ugyanahhoz a csucshoz tartozó két oldalnak a csucstól a magasságvonal talppontjáig terjedő része.

Ezenkivül sikerült még több régi eset egymással való kapcsotára is rámutatni és néhány érdekes szerkeszthető esetet letárgyalni.

III. Hatványközepes egyenlőtlenségek.

A.Makowski igazolta, hogy R_2-ben:

$$M_k(h_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.M_k(a_i)$$

és $$M_{-k}(h_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.M_{-k}(a_i) \qquad /1/$$

egymással ekvivalens egyenlőtlenségek. [23].Ha ugyanis T a háromszög területe, akkor ez azonnal világos a következő helyettesitések végrehajtása után: $h_i = \frac{2T}{a_i}$; $a_i = \frac{2T}{h_i}$

Kérdés ezekután, hogy az /1/ egyenlőtlenségek valamelyike milyen k-ra áll fenn. Már A.Makowski igazolta, hogy fennáll:

$$M_{-1}(h_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.M_{-1}(a_i) \qquad /2/$$

/2/ következik F.Leuenberger következő egyenlőtlenségének jobboldalából:

$$\frac{\sqrt{3}}{R} \leqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2r} \qquad /3/$$

t.i. $$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

L.Carlitz egyik egyenlőtlenségének átalakitásából az is kiderül [lo], hogy igaz:

$$M_o(h_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.M_o(a_i) \qquad /4/$$

Nekem sikerült igazolni a következőket is:

18.Tétel:

Fennáll háromszögre

$$M_2(h_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.M_2(a_i) \quad \text{is.} \qquad /5/$$

Bizonyitás: I./41/ közismert egyenlőségéből következik:

$$M_2(h_i) \leqq M_2(m_i) = \frac{\sqrt{3}}{2}.M_2(a_i)$$

A következő tételben még a negyedik hatványközépre is sikerül a bizonyitás.

19.Tétel:

Fennáll háromszögre

$$M_4(h_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot M_4(a_i) \quad \text{is.} \qquad /6/$$

Bizonyitás:Ugyancsak I./41/alapján:

$$16m_i^4 = 4\left(a_{i+1}^4 + a_{i+2}^4\right) + a_i^4 + 8a_{i+1}^2a_{i+2}^2 - 4a_i^2\left(a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2\right)$$

azaz:
$$16\sum_{i=1}^{3} m_i^4 = 9\sum_{i=1}^{3} a_i^4$$

és ez utóbbinak közvetlen folyománya a 19.tétel.

A 18.tétel megjelenik [8]-ban,a 19.-es pedig [9]-ben.

Ezekután:

$$M_k(h_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot M_k(a_i) \qquad /7/$$

biztosan fennáll

$k = -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4$ -re

és egészen természetesen merül fel a kérdés,hogy milyen k-ra áll fenn és milyenre nem.Erre vonatkozik a következő

2o.Tétel:

Azon $|k|$ értékek felső határa,melyre /7/ fennáll:

$$\sup|k| = \frac{\log 4}{\log 4 - \log 3} = 4{,}81\ldots$$

Bizonyitás: a 21.tétel bizonyitása után következik.

Régóta ismeretes Kubota egyenlőtlensége [18],amely szintén háromszögre vonatkozik és igy hangzik:

$$M_2(a_i) \leqq \sqrt{3} \cdot R \qquad /8/$$

ez egyébként egyszerü folyománya II./42/ és /43/ összefüggéseinek, mert:

$$M_2(a_i) = 2R \cdot M_2(\sin\alpha_i) \leqq 2R\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \cdot R$$

mármost ebből kiindulva A.Makowski vetette fel azt a problémát,hogy mi lesz azon k-k felső határa,melyekre /8/ fennáll.Mindjárt sejtést is közölt [23]-ban.Sejtése szerint:

$$\overline{k} = \sup k = \frac{\log 9 - \log 4}{\log 4 - \log 3} = 2{,}81\ldots \qquad /9/$$

Ezt a sejtést sikerült igazolnom.Tehát igaz a következő:

21.Tétel:

A /9/ alatti sejtés igaz.

A 21.tétel lényegében ekvivalens a következővel:

22.Tétel:

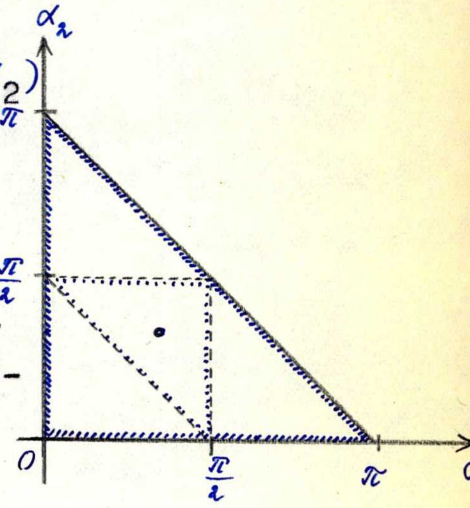
Ha α_i $(i=1,2,3)$ egy háromszög szögei, akkor $k \geqq 2$ -re:

$$M_k(\sin\alpha_i) \leqq \max\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{1/k} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \qquad /10/$$

Bizonyitás: vizsgáljuk meg a következő függvény maximumát az ábra szerinti zárt tartományban /1.ábra/

$$f(\alpha_1,\alpha_2) = \sin^k\alpha_1 + \sin^k\alpha_2 + \sin^k(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$\alpha_1 \geqq 0 \ ; \ \alpha_2 \geqq 0 \ ; \ \alpha_1+\alpha_2 \leqq \pi$$



1. ábra.

A variábilitási tartományunk az (α_1,α_2) sikon egyenlőszáru derékszögü háromszög, a berajzolt kis háromszögön belül vannak a hegyesszögü, rajta a derékszögü és kivüle a tompaszögü háromszögek. Nézzük sorban az egyes eseteket:

a./tompaszögü háromszög esete:

$$\pi \geqq \alpha_1 > \frac{\pi}{2} \ ; \quad \alpha_2 < \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_3 < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^k\alpha_1 + \sin^k\alpha_2 + \sin^k\alpha_3 \leqq \sin^k(\alpha_1-\varepsilon) + \sin^k(\alpha_2+\varepsilon) + \sin^k\alpha_3$$

ha $\varepsilon > 0$ és $\alpha_1 - \varepsilon > \frac{\pi}{2}$; $\alpha_2 + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, de ilyen ε mindig található.
a tompaszögü háromszögre a tartományon belül nem lehet maximum.

Határesetek:

1./ $\alpha_1 = \pi$. $\sum_{i=1}^{3} \sin^k\alpha_i = 0$

2./ $\alpha_1+\alpha_2 = \pi$ $\sum_{i=1}^{3} \sin^k\alpha_i = 2\sin^k\alpha_1 < 2$

tehát tompaszögü háromszögre

$$f(\alpha_1,\alpha_2) < 2$$

b./derékszögü háromszög

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \ , \ \alpha_2 < \frac{\pi}{2} \ , \ \alpha_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$$

most $f(\alpha_1,\alpha_2) = 1 + \sin^k\alpha_2 + \cos^k\alpha_2 \leqq 1 + \sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2 = 2$

mivel $f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2},0) = f(0,\frac{\pi}{2}) = 2$

és $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ -re $f(\alpha_1,\alpha_2) = 2$ azért derékszögü háromszög esetén az elfajult esetre veszi fel a függvény a maximumát,melynek értéke 2.

c./hegyesszögü háromszög esete:

$$\alpha_1 < \frac{\pi}{2}\ ;\ \alpha_2 < \frac{\pi}{2}\ ;\quad \alpha_1 + \alpha_2 > \frac{\pi}{2}$$

a maximum szükséges feltétele:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = k.\sin^{k-1}\alpha_1.\cos\alpha_1 + k.\sin^{k-1}(\alpha_1+\alpha_2).\cos(\alpha_1+\alpha_2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = k.\sin^{k-1}\alpha_2.\cos\alpha_2 + k.\sin^{k-1}(\alpha_1+\alpha_2).\cos(\alpha_1+\alpha_2) = 0$$

---

ebből:

$$\sin^{k-1}\alpha_1.\cos\alpha_1 = \sin^{k-1}\alpha_2.\cos\alpha_2 =$$
$$= \sin^{k-1}[\pi-(\alpha_1+\alpha_2)].\cos[\pi-(\alpha_1+\alpha_2)]$$

következik.Mivel azonban az

$$f(x) = \sin^{k-1}x.\cos x \qquad k \geqq 2$$

függvény $(0,\frac{\pi}{2})$ -ben $(0,z)$ -ig monoton növő,majd $(z,\frac{\pi}{2})$-ig monoton csökkenő $z = \text{arc tg}\sqrt{k-1}$ azért egy függvényértéket csak két helyen vehet fel.Ebből következőleg:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{vagy} \quad \alpha_1 = \pi-(\alpha_1+\alpha_2)$$

mindkettőből következik,hogy a háromszög egyenlőszáru.Erre az esetre felirva a szélsőértékfeltételt kevés számolással

$$1 + (2\cos\alpha)^k = 2.(2\cos\alpha)^{k-2}$$

feltétel adódik a $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ intervallumban.Helyettesitve $2\cos\alpha = x$ -et a következő feltétel adódik

$$1 + x^k = 2\,x^{k-2}$$

a $0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ intervallumban,ez biztosan fennáll x=1-re /egyenlőoldalu háromszög,amire egyébként /7/ mindig fennáll az egyenlőségjellel/ és $2 < k < 3$ -ra mégegy helyen,de nem lehet ez is maximumhely,mert akkor közben kellene lennie még minimumhelynek is,pedig több helyen nem tünik el a differenciálhányados.

Végeredményben tehát $f(\alpha_1,\alpha_2)$ maximuma vagy egyenlőoldalu háromszögre vagy pedig elfajult derékszögü háromszögre áll elő.Ebből viszont a 22.tételben foglalt állitás igazolódott,mert egyenlőoldalu háromszögre a középérték $\sqrt{3}/2$,az emlitett elfajult esetben pedig$(2/3)^{1/k}$.

A 21.tétel állitása akkor a következő kis egyenlőtlenségből adódik:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1/k} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

illetőleg
$$\frac{9}{4} \geqq \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

ez utóbbi logaritmálás után a 21.tétel állitását adja.
A 21 és 22.-ik tétel megjelenik a [8] számu cikkben.
A /8/ alatti Kubota-féle egyenlőtlenség ilyenmódon a következő kiterjesztett alakot nyerte:

$$M_k(a_i) \leqq \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2R & \text{ha } k \leqq \overline{k} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{1/k}\cdot 2R & \text{ha } k \geqq \overline{k} \end{cases} \qquad /11/$$

Adósak vagyunk még a 2o.tétel bizonyitásával.Ez következik most.Végezzük el /7/-ben a következő helyettesitéseket:

$$a_i = 2R\sin\alpha_i \; ; \; h_i = \frac{2T}{a_i} = a_{i+1}\cdot\sin\alpha_{i+2} = 2R\sin\alpha_{i+1}\sin\alpha_{i+2}$$

ekkor nyerjük a /7/-tel ekvivalens:

$$M_k(\sin\alpha_i\sin\alpha_{i+1}) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot M_k(\sin\alpha_i) \qquad /12\ /$$

egyenlőtlenséget és ebből k-adik hatványra emelve:

$$\frac{\sin^k\alpha_1\sin^k\alpha_2 + \sin^k\alpha_2\sin^k(\alpha_1+\alpha_2) + \sin^k(\alpha_1+\alpha_2)\sin^k\alpha_1}{\sin^k\alpha_1 + \sin^k\alpha_2 + \sin^k(\alpha_1+\alpha_2)} \leqq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \qquad /13/$$

egyenlőtlenséget,amelynek bizonyitása ismét szélsőértékvizsgálatot kiván.Alaptartományunk pontosan megegyezik a 22.tételben szereplő és az 1.ábra által mutatott tartománnyal.A függvény:

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sin^k\alpha_1\sin^k\alpha_2 + \sin^k\alpha_2\sin^k(\alpha_1+\alpha_2) + \sin^k(\alpha_1+\alpha_2)\sin^k\alpha_1}{\sin^k\alpha_1 + \sin^k\alpha_2 + \sin^k(\alpha_1+\alpha_2)}$$

A határon ez a függvény nem nagyobb 1/2-nél,mert pl.

$$F(0, \alpha_2) = \frac{\sin^{2k}\alpha_2}{2\sin^k\alpha_2} = \frac{1}{2}\cdot\sin^k\alpha_2 \leqq \frac{1}{2}$$

ha belül van helyi szélsőérték ott biztosan:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 0$$

A feltétel most a következőkre vezet:

$$\sin^{k-1}\alpha_1 . \cos\alpha_1 . \left[\sin^{2k}\alpha_2 + \sin^k(\alpha_1+\alpha_2)\sin^k\alpha_2 + \sin^{2k}(\alpha_1+\alpha_2)\right] +$$
$$+ \sin^{k-1}(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2) . \left[\sin^{2k}\alpha_1 + \sin^k\alpha_1 \sin^k\alpha_2 + \sin^{2k}\alpha_2\right] = 0$$

$$\sin^{k-1}\alpha_2 . \cos\alpha_2 . \left[\sin^{2k}\alpha_1 + \sin^k(\alpha_1+\alpha_2)\sin^k\alpha_1 + \sin^k(\alpha_1+\alpha_2)\right] +$$
$$+ \sin^{k-1}(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2) . \left[\sin^{2k}\alpha_1 + \sin^k\alpha_1 \sin^k\alpha_2 + \sin^{2k}\alpha_2\right] = 0$$

---

ez tompaszögü háromszögre nem állhat fenn az előjelek miatt. Derékszögüre

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = \alpha \quad \text{-ra}$$

$$\sin^{k-1}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) . \left[1 + \sin^k\alpha + \sin^{2k}\alpha\right] = 0$$

ebből a már vizsgált határesetek adódnak. Hegyesszögüre a feltételi egyenletek direkt vizsgálata nem könnyü. Mindenesetre egyenlőoldalu háromszögre teljesül, de ekkor /7/ magától értetődően fennáll épen az egyenlőségjellel, másrészt a 19. tétel következménye az, hogy $|k|=4$-ig az egyenlőoldalu háromszög képviseli a maximumot, a feltételi egyenletek szerkezete arra enged következtetni, hogy a $k=4$ érték nem okozhat lényeges változást. Lényeges változást okoz az a k érték, amelynél a határon felvett érték a nagyobb erre nézve:

$$\frac{1^k}{2} \leqq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$$

illetőleg

$$4 \geqq \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

egyenlőtlenség a döntő, amelynek logaritmálása szolgáltatja a 2o. tétel állitását.

Valószinüleg igaz /7/-re is egy /11/-hez hasonló általánositás de ez igényelne kissé mélyebb vizsgálatot is.

A 2o. tétel publikációját illetően lásd [9].

Ezekután érdemes visszatérni a II./6/ alatt emlitett problémára. Az eddigi vizsgálatok sugallatára sikerül is valamit megállapitani. A probléma az:

$$M_k(m_i) \leqq \frac{3}{2} . R$$

milyen k-ra áll fenn háromszögre.

A közismert $a_i = 2R\sin\alpha_i$ helyettesitést alkalmazva:

$$M_k(m_i) = M_k\left[\left(\frac{a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2}{2} - \frac{a_i^2}{4}\right)^{1/2}\right] =$$

$$= 2R.M_k\left[\left(\frac{\sin^2\alpha_{i+1} + \sin^2\alpha_{i+2}}{2} - \frac{\sin^2\alpha_i}{4}\right)^{1/2}\right] \leqq \frac{3}{2}.R$$

ismét hasonló függvényre vonatkozó szélsőértékvizsgálat kellene,mint az előbbiekben,de a függvény alakja sokkal komklikáltabb.Ezért most csak annak megállapitására szoritkozunk,hogy az elfajult háromszög $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ esetével próbálkozva kapjuk:

$$1 + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^k \leqq 3.\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

ez azonban k=4-re biztosan nem áll fenn,mert behelyettesitve:

$$256 + 32 \leqq 243 \quad \text{nem igaz.}$$

tehát mindenesetre a keresett k értékre $2 \leqq k < 4$.

Sejtés:Mivel az előbbi egyenlőtlenség 3-ra még fennáll,valószinü,hogy k valamivel háromnál nagyobb.

Térjünk át most a többdimenziós általánositások kérdésére. II./6/ általánositása magasabb dimenziókra nyitott kérdés,lehet,hogy k felső határa a dimenziószám függvénye,hiszen a jobboldal

$$\frac{n+1}{n}.R \longrightarrow R$$

$$\text{ha} \quad n \longrightarrow \infty$$

A /8/ Kubota-féle egyenlőtlenség általánositása kétféleképen is elképzelhető.Az egyik szerint:

$$M_2(v_i) \leqq c.R^{n-1}$$

ahol v_i az A_i-vel szemközti határsimplex n-1 dimenziós térfogata.Ilyenfajta eredményről még nincs tudomásom.

A másik lehetőség,hogy a_i a simplex egydimenziós éleit jelenti és ekkor

$$M_2(a_i) \leqq c.R \quad \left(i = 1,2,\ldots \binom{n+1}{2}\right)$$

ezt az egyenlőtlenséget már sikerült megtalálnia J.Schopp-nak,ez a következő: [3o]

$$M_2(a_i) \leqq \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} \cdot R \quad \left(i=1,2\ldots\binom{n+1}{2}\right) \qquad /14/$$

/8/ és /14/ kapcsolatát én vettem észre és felmerül a kérdés,hogy /14/ esetleg 2-nél nagyobb hatványközepekre is fennáll,ha igen meddig./14/-ből következik a szabályos simplexekre jólismert:

$$a = \sqrt{\frac{2.(n+1)}{n}} \cdot R \qquad /15/$$

összefüggés,abból pedig a minden dimenzióra érvényes:

$$\sqrt{2} < \frac{a}{R} \leqq \sqrt{3} \qquad /16/$$

/16/ szerint a/R-nek két dimenzióban van maximuma! Amennyiben a simplex elfajulását is megengedjük /15/ egydimenzióra az a=2R trivialitást is magában foglalja.

A /7/ összefüggés többdimenziós általánositása is sok érdekes lehetőséggel kecsegtet.Nehézséget jelent azonban,hogy vagy növeli a dimenziószámát az $M_k(a_i)$,a baloldal nem vagy pedig a középérték tagjainak száma nem lesz egyenlő a két oldalon.R_2-ben szerencsés volt a helyzet ebből a szempontból.Az általánositás persze ezek után annál szebb lehet.

Simplexekkel kezdett foglalkozni és eléggé általános tételt vezetett le a fiatalon elhunyt Molnár Ferenc.Tétele a háromszögekre jól ismert Stewart tétel általánositásának tekinthető és szoros kapcsolatban áll az általunk ismertetett problémakörrel is.Legyen O a simplex tetszőleges belső pontja és továbbá

$$x_k = \overline{OA_k} \quad ; \quad a_{ik} = \overline{A_iA_k} \quad (i=1,2,\ldots n+1)$$

O baricentrikus koordinátái az A_i-kre vonatkozóan β_i $(i=1,2,\ldots n+1)$

akkor,amint az [24] -ben megtalálható:

$$x_k^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i a_{ik}^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n+1} \beta_i \beta_j \cdot a_{ij}^2 \qquad (k=1,2,\ldots n+1) \qquad /17/$$

/17/-ből nyerhető eddigi jelöléseinknek megfelelően $x_k = R_k$

$$A(R_i) \leqq M_2(R_i) = \left[\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i,k=1}^{n+1} \beta_i a_{ik}^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n+1} \beta_i \beta_j \cdot a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad /18/$$

ez esetleg kapcsolatba hozható I./2/általánositásával.

Ha bevonjuk a vizsgálatokba a háromszög külső érintő köreit is további érdekes megállapitásokat tehetünk.Legyenek a külső érintő körök sugarai ϱ_1, ϱ_2 ill. ϱ_3,akkor közismert az

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}=\frac{1}{r}$$

egyenlőtlenség.Ez a primitiv egyenlet igy is megfogalmazható:

$$M_k(\varrho_i) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 3r \quad \text{ha} \quad \begin{matrix} k < -1 \\ k = -1 \\ k > -1 \end{matrix} \qquad /19/$$

egészen elemi számitások szerint fennáll:

$$M_k(h_i) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 3r \quad \text{ha} \quad \begin{matrix} k < -1 \\ k = -1 \\ k > -1 \end{matrix} \qquad /2o/$$

is.Érdekes probléma /19/ és /2o/ sugallatára az

$M_k(\varrho_i) - M_k(h_i)$ vizsgálata.

/19/ és /2o/ érvényes tetraéderre is,a baloldalon 4r áll,sőt n-dimenzióra is$(n + 1)$.r értékkel.Bizonyitásuk egészen elemi és ismeretes is.

Sokkal nehezebb probléma a Fejes Tóth L. által kitüzött egyenlőtlenség,amely [14] -ben található:
R_2-ben bizonyitandó,hogy:

$$\frac{4}{3}\cdot R < M_1(\varrho_i) \leqq \frac{3}{2}\cdot R \leqq M_4(\varrho_i)$$

ez egyuttal élesitése a Baron-féle $3/2.R \leqq \max(\varrho_i)$ egyenlőtlenségnek.

Hajós György bizonyitásában még tovább élesitette is a problémát,amennyiben megmutatta hogy:

$$\frac{4}{3}\cdot R < M_1(\varrho_i) \leqq \frac{3}{2}\cdot R \leqq M_2(\varrho_i) \qquad /21/$$

/2o/bizonyitása hasonlit a 21 és 22.tétel bizonyitásához,lényegében szélsőértékvizsgálat [16].A bizonyitásban nyitott kérdés marad,hogy az M_2 középnél nem lehet-e kisebb indexüt használni,ennek kideritéséhez bizonyos numerikus számitási módszerek biztosan elégségesek, másrészt érdekes lehet /21/ általánositása magasabb dimenziókra,erre való felhivás már [13] -ban megvan.

IV. Egyéb problémák és összefüggések.

Fejes Tóth L.adott egyszerü bizonyitást a következő M. Schreibertől származó egyenlőtlenségre:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 6r \qquad /1/$$

az egyenlőtlenség háromszögre vonatkozik és némi analogiát mutat az Erdős-Mordell-féle egyenlőtlenséghez.Bizonyitása [13]-ban p.12 az izoperimetrikus egyenlőtlenségen alapul.Az eredeti problémát [27]-ben találhatjuk meg.

Sikerült /1/-et kapcsolatba hozni az Erdős-Mordell-féle egyenlőtlenséggel és a 8.tétellel és egészen meglepő bizonyitást találtam /1/-re.Ez a következő:

$$3r \leqq G(h_i) \leqq G(R_i + r_i) \leqq A(R_i + r_i) = A(R_i) + A(r_i) \leqq \frac{3}{2} \cdot A(R_i)$$

Az utolsó lépésben használtuk ki az Erdős-Mordell-féle tételt.A láncolat elejét és végét tekintve kapjuk:

$$A(R_i) \geqq 2r$$

és ez azonos /1/-gyel.Még nevezetesebb azonban az,hogy az előbbi bizonyitás több dimenzióra is megy és igy uj tételeket nyerünk pl.

23.Tétel:

Tetraéderre:

$$A(R_i) \geqq \frac{8.(4-\sqrt{2})}{7} . r = r.\ 2{,}9552\ldots \qquad /2/$$

Bizonyitás: A 9.tételt és I./12/-t felhasználva:

$$4r \leqq G(h_i) \leqq G(R_i + r_i) \leqq A(R_i + r_i) = A(R_i) + A(r_i) \leqq \frac{4+\sqrt{2}}{4} . A(R_i)$$

Az n-dimenziós általánositás egyetlen akadálya az,hogy az Erdős-Mordell-féle tétel csak háromdimenzióig van kiterjesztve,de mindenesetre léteznie kell n-dimenzióra is egy I./2/ ill.I./12/-vel analóg

$$A(R_i) \geqq c . A(r_i)$$

összefüggésnek,ahol $c > 1$.Ekkor kimondhatjuk a következőt is:

24.Tétel:

n-dimenziós simplexre:

$$A(R_i) \geqq \frac{c.(n+1)}{c+1} \cdot r \qquad /3/$$

ahol c az előző oldal alján szereplő állandó.

Bizonyitás:teljesen analog a 23.tétel bizonyitásával.

25.Tétel:

Szabályos n-dimenziós simplexre:

$$A(R_i) \geqq n.r \qquad /4/$$

Bizonyitás:az 5.tétel alapján c = n szabályos simplex esetén és ekkor a 24.tételből következik a 25.-ös.

Sulyozott számtani közepeket alkalmazva igaz a következő:

26.Tétel:

Minden n-dimenziós simplexre:

$$A_{a_i}(R_i) \geqq n.r \qquad /5/$$

ahol A_{a_i} jelenti az a_i sulyokkal képzett számtani közepet,az a_i pedig$(i = 1,2,\ldots n+1)$az A_i-vel szemközti n-1 dimenziós határsimplex térfogatát jelentik,V a simplex térfogata.

Bizonyitás:A 4.tétel alapján:

$$A_{a_i}(R_i) \geqq n.\, A_{a_i}(r_i) = n.\, \frac{a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_{n+1} r_{n+1}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}} =$$

$$= n.\, r\, \frac{n.V}{a_1 r + a_2 r + \ldots + a_{n+1} r} = n.r$$

Az R_2-ben ismeretes háromszögterületre vonatkozó Heron-féle tétel poligonokra vonatkozó analogonját Szőkefalvi Nagy Béla és Rédei L. találták meg [33] .Az itt közölt gondolatmenet R_3-ra is átvihető és nyerjük:

27.Tétel:

Ha a háromdimenziós poliéder csucsait $A_i (i=1,2,\ldots n)$ jelenti,akkor térfogatára fennáll :

$$288.V^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} s_{ik}^2 & s_{i\,k+1}^2 & s_{i\,k+2}^2 \\ s_{i+1\,k}^2 & s_{i+1\,k+1}^2 & s_{i+1\,k+2}^2 \\ s_{i+2\,k}^2 & s_{i+2\,k+1}^2 & s_{i+2\,k+2}^2 \end{vmatrix} \qquad /6/$$

ahol $s_{ik} = \overline{A_i A_k}$ és természetesen $s_{ik} = s_{ki}$, $s_{ii} = 0$.

Bizonyitás: A [33] -as cikkben található gondolatmenet mintájára történik, egészen szoros az analógia, ezért csak a különbözőségeket emlitve, ha két poliéder csucsait és koordinátáit a következőképen jelöljük:

$$A_i \; ; \; (a_i) = (x_i, y_i, z_i) \qquad (i = 1,2,\dots m)$$

$$B_k \; ; \; (b_k) = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \qquad (k = 1,2,\dots n)$$

a két poliéder térfogata V, ill. W legyen. Közismert, hogy tetszőleges O kezdőpont felhasználásával irányitásdefinició után a poliéder előjeles térfogatu tetraéderek összegére bontható pl.

$$V = v(0,A_1,A_2,A_3) + v(0,A_2,A_3,A_4) + \dots + v(0,A_{m-1},A_m,A_1) + v(0,A_m,A_1,A_2)$$

a tetraéder térfogatára közismert:

$$6.v\,(0,A_i,A_{i+1},A_{i+2}) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} \\ x_{i+2} & y_{i+2} & z_{i+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i \\ a_{i+1} \\ a_{i+2} \end{vmatrix}$$

képlet alapján 36V.W felirható mint két determináns szorzatából alkotott kétszeres összeg $a_i . b_k$ tipusu determinánselemekkel, ezekre fennáll a cos tétel szerint:

$$2\, a_i . b_k = a_i^2 + b_k^2 - r_{ik}^2$$

ahol $r_{ik} = \overline{A_i B_k}$, a determinánsból 1/8-ot kiemelve, a 0 értékü determinánsokat elhagyva és végül a két poliédert azonosnak tekintve kapjuk a $288.V^2$-re vonatkozó 27. tétel képletét.

/6/ többdimenziós általánositása simplexekre már régen ismert és megtalálható pl. [31]-ben, e szerint az n-dimenziós simplex térfogata:

$$v^2 = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n . n!} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & s_{12}^2 & \dots & s_{1n}^2 \\ 1 & s_{21}^2 & 0 & \dots & s_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_{n1}^2 & s_{n2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

A [33] -as cikkben további általánositás is található zárt görbékre bizonyos folytonossági és differenciálhatósági feltételeket felhasználva. Ezeknek a meggondolásoknak a térre való átvitele már nem egészen egyszerü kérdés.

Az /1/ formula konvex sokszögekre vonatkozó általánositása nyerhető a közismert sokszögekre vonatkozó:

$$L^2 \geqq 4n.\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} . T \qquad /A/$$

és

$$T \geqq n.r^2.\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{n} \qquad /B/$$

egyenlőtlenségekből,A az izoperimetrikus formula,ahol L a sokszög kerületét,T a területét jelenti,r a legnagyobb beirható kör sugara,ill.ezek felső határa,n az oldalszám.

28.Tétel:

Konvex n-oldalu sokszögre:

$$A(R_i) \geqq 2.\sqrt{2} . \frac{\mathrm{tg}\ \frac{\pi}{2n}}{\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}.r \qquad /7/$$

Bizonyitás: Tükrözzük a sokszög belsejében levő tetszőleges O pontot a sokszög oldalaira vonatkozóan,a tükörkép legyen O_i (i=1,2,...n) akkor $\overline{O_i A_k} = R_k$ lévén nyerünk egy 2n oldalu sokszöget,ha a tükörképeket a csucsokkal összekötjük és erre alkalmazva a /A/ összefüggést nyerjük:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \geqq 2.\sqrt{n.\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{2n}} .\sqrt{T} \qquad /8/$$

ha még /B/-t is felhasználjuk,akkor kapjuk /8/-ból kis számolással a 28.tételt.

A 28.tétel az /1/ általánositása,mert n=3-ra pontosan meg is kapjuk belőle.Talán érdemes még megjegyezni,hogy n=4-re:

$$A(R_i) \geqq 2.\sqrt{\sqrt{2} - 1} . r= 1,281...r \qquad /9/$$

az állandó értékének csökkenése miatt nem tul érdekes a formula,de ennek igy is kell lennie,mert n növekedése esetén egyre kevesebb lehet az R_i-k és r eltérése.Szabályos sokszög esetén,ha O a középpont akkor a 28.tétel alapján becslést nyerünk R/r alsó határára,de ez csak n=3-ra adja meg a közismert $R/r \geqq \sec{}^{\pi}/_{n}$ összefüggésből adódó értéket,nagyobb n-re már rosszabb.

Nehezebb probléma a térbeli simplexekre vonatkozó formulák pl. a /2/-es formula általánositása térbeli konvex poliéderekre,ez a megállapitás az egész dolgozat ilyenféle összefüggéseire vonatkozik.

Befejezés.

A feldolgozott témakör és szerény eredményei azt a más oldalról is hangoztatott véleményt igazolja, hogy a matematika nemcsak egészében, de részleteiben is, egyes ágait tekintve is kimerithetetlen. Különösen áll ez a geometriára, amely már 25oo éve kutatás tárgya és bár a legelső rendszeres tudományos felépitést produkálta, azóta is uj és uj eredményekkel gyönyörködteti a vele foglalkozókat. A nemrég elhunyt nagymesterek közül csak találomra emlitve néhányat- D.Hilbert, Fejér Lipót, Szőkefalvi Nagy Gyula- Ők is szivesen elidőztek egy-egy elemi geometriai kérdésnél.

Ami a közelebbi témát illeti, a simplexeket, kiemelem befejezésképen, hogy a középértékek Cauchy, Jensen, Pólya stb. által kidolgozott elmélete igen hatásos segédeszköznek bizonyul. Meggyőződésem, hogy e téma kifejtésének még csak az elején vagyunk.

Jelmagyarázat.

1./Irodalmi hivatkozások a szövegben: szögletes zárójelben álló szám segitségével történik pl. [5] ,a szám a dolgozat végén összeállitott cikkjegyzék megfelelő számu cikkére utal.

2./Saját tételek: külön kiemelve római számozással folyamatosan pl. 17.tétel. Összesen 28 tétel van.

3./Formulák: fejezetenként római számozással egyszerü zárójelben. Pl. /4/. Hivatkozás esetén, ha más fejezetbeli formuláról van szó, akkor a fejezetmegjelöléssel együtt pl. II./7/. Saját fejezeten belül csak a szám pl./9/.

4./Formulákhoz tartozó levezetések esetén dupla index is használatba került. Pl. /41/ vagy /42/ ez esetben az első szám az eredeti formulára utal példánkban tehát a /4/-re.

5./Csillagozás átfogalmazás vagy lényegtelen átalakitás esetén használatos. Pl. /6*/lényegében azonos a /6/-tal.

6./Összes többi jelölés a közismert nemzetközi jelölésekkel egyezik meg. A folyó szövegben egy-két helyen / törtvonást jelöl.

----------- □ -----------

I D É Z E T T   I R O D A L O M.

[1] .D.Barrow: Lősung zu Aufgabe 374o.
Amer.Math.Monthley 44 /1937/.

[2]. E.Beckenbach,R.Bellman : Inequalities.
Ergebnisse d.Math. /1961/ p.5.

[3]. J.Berkes: Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecks-Ungleichung.Elemente d.Math.12/6./1957/p.121-23.

[4]. J.Berkes :Aufgabe 329.Elemente d.Math.13/3 /1958/p.67.
Elemente d.Math.14/6 /1959/p.132.

[5]. J.Berkes : Bemerkungen zur Arbeit von F.Leuenberges über Einige Dreiecksungleichungen.Elemente d.Math.14/3/1959/p.61-63

[6]. J.Berkes : Aufgabe 372. Elemente d.Math.15/1/196o/p.17.
Elemente d.Math.16/2./1961/p.31.

[7]. Berkes J :Háromszögszerkesztési problémák.
Ped.Főisk.Évk.Szeged,1957.p.251-56.

[8]. J.Berkes : Einige Dreiecksungleichungen.
Elemente d.Math. /Megjelenés előtt./

[9.] J.Berkes : Simplexungleichungen.
Elemente d.Math. /Elfogadás előtt./

[1o]. L.Carlitz : Problem E.1454.
Amer.Math.Monthly.68/1961/p.177.

[11] .H.G.Eggleston : A triangle inequality.
Math.Gazette 42/1958/p.54-55.

[12]. P.Erdős : Aufgabe 374o.
Amer.Math.Monthly 42/1935/.

[13] .L.Fejes Tóth : Lagerungen in der Ebene,auf der Kugel und im Raum.
Springer./1953/p.33.

[14] .L.Fejes Tóth: 8.feladat.
Matematikai Lapok.1./195o/p.72.

[15]. A.Florian : Zu einem Satz von P.Erdős
Elemente d.Math.13/3/1958/p.55-58.

[16]. Hajós Gy. A 8-as számu feladat megoldása.
Matematikai Lapok.1./195o/p.313-16.

[17] .D.Kazarinoff: A simple proof of the Erdős-Mordell inequality.
The Mich.Math.Journ.4/1957/p.97-98.

[17*] . N.D.Kazarinoff : D.K.Kazarinoffs inequality for tetrahedra. The Mich.Math.Journ.4/1957/p.99-1o4.

[18.] T.Kubota : Tohoku Math.Journ.25/1925/p.122-26.

[19.] H.Chr.Lenhard : Verschärfung des Erdős-Mordellschen Ungleichung. für Polygone.Arch.d.Math.12/1961/p.311-19.

[2o.] F.Leuenberger : Einige Dreiecksungleichungen. Elemente d.Math.13/1958/p.121-26.

[21.] F.Leuenberger : Simplexungleichungen. Elemente d.Math.15/4/196o/p.77-79.

[22.] F.Leuenberger :Dreieck und Viereck als Extremalpolygone. Elemente d.Math.15/4/196o/p.81-82.

[23.] A.Makovski:Some Geometric Inequalities. Elemente d.Math.17/2/1962/p.4o-41.

[24.] Molnár F.: Stewart tételének egy általánositásáról. Matematikai Lapok.12/3-4./1961/p.215-21.

[25.] J.Mordell : Lősung zu Aufgabe 374o. Amer.Math.Monthly 44/1937/.

[26.] A Oppenheim :The Erdős Inequality and Others Inequalities for a tiangle.Amer.Math.Monthly.68/1961/p.226-3o.

[27.] M.Schreiber : Aufgabe 196. Jber.dtsch.Math.Ver.95,63/1935/

[28.] J.Schopp : Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im n-dimensionalem Raum.Elemente d.Math.13/3/1958/p.1o6-7.

[29.] J.Schopp: Extremaleigenschaften des Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex.Elemente d.Math.14/3./1959/p.61-62.

[3o.] J.Schopp : Simplexungleichungen. Elemente d.Math.16/1./1961/p.13-16.

[31.] P.H.Schoute : Mehrdimensionale Geometrie.I-II. Samml.Schubert./19o5/p.123.

[32.] G.Steensholt : Note on an elementary property of triangles. Amer.Math.Monthly.63/1956/p.571-72.

[33.] B.Szőkefalvi-Nagy,L.Rédei : Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron.Publ.Math.Debrecen./1949/1,p.42-5o.

--------------- □ ---------------

A dolgozatban nem emlitett egyéb munkáim jegyzéke :

1./A talpponti háromszögről. Középisk.Mat.Lapok.1956,XII/3.p.66-72.
2./Egy háromszögszerkesztési probléma.
Szegedi Ped.Főisk.Évk.1956.p.233-35.
3./Szép Jenővel közösen : A dialektikus materializmus érvényesitése a főiskolai matematika oktatásban.
Szegedi ped.Főisk.Évk.1956.p.253-6o.
4./Néhány elemi uton megoldható szélsőértékfeladat.Középisk.Mat.Lap 1957.XIV/3.p.7o-74.
5./A matematika korszerüsitésének problémái a középiskolai oktatásban.Mat.Tan.1962.XII/3p.57-62.
6./Matematika és filozófia a gyakorlatban.
/Beküldve a Mat.Tan.-nak./
7./A következő főiskolai jegyzetek:
Elemi geometria.1955.p.1-74.
Trigonometria és térmértan.1956.p.1-175.
Trigonometriai példatár.1955.p.7o-143.
Analitikus geometria.1957.p.1-173.

T A R T A L O M J E G Y Z É K.