

VIZSGÁLATOK HILBERT-TÉR OPERÁTORAINAK
NUMERIKUS ÉRTÉKKÉSZLETÉRŐL ÉS UNITER DILATÁCIÓIRÓL

D o k t o r i é r t e k e z é s

Készítette:

D u r s z t E n d r e

Szeged,

1967.



Diss. B 114



B e v e z e t é s

Ezen értekezés kiinduló pontjául P. R. HALMOS két problémája tekinthető. A problémák megfogalmazásához szükségesek a következő definíciók:

Valamely $\mathcal{H}$ Hilbert-téren értelmezett T operátor (korlátos, lineáris transzformáció) numerikus értékkészletén a komplex számokból álló

$$W(T) = \{ (T\varphi, \varphi) : \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1 \}$$

halmazzá értjük. Az

$$r(T) = \sup_{z \in W(T)} |z|$$

számot a T operátor numerikus rádiuszának nevezzük.

HALMOS említett problémái közül az egyik: Igaz-e minden T operátorra vonatkozóan az

$$r(T^m) \leq (r(T))^m \quad (m = 1, 2, \dots)$$

egyenlőtlenség?

A választ erre a kérdésre C. A. BERGER egy tétele alapján a pozitív értelemben sikerült megadni. BERGER tétele (a HALMOS által adott fogalmazásban) így szól: Egy T operátorra akkor és csak akkor lesz $r(T) \leq 1$, ha létezik valamely $\mathcal{H}(\supset \mathcal{H})$ Hilbert-téren értelmezett olyan U

uniter operátor, melyre

$$(0.1) \quad T^n \varphi = 2P U^n \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{H}, n=1,2,\dots)$$

érvényes. P mindig $\mathcal{H}$ -nak $\mathcal{Q}$ -ra való merőleges vetítését jelöli.

Már ezt megelőzőleg ismeretes volt az a rokon típusú tétel, hogy egy T operátorra vonatkozólag akkor és csak akkor lesz $\|T\| \leq 1$, ha T hatványaira az előbbihez hasonló előállítás érvényes, de a 2-es faktor nélkül. (L. pl. [*]) A $\|T\| \leq 1$ feltételnek eleget tevő operátort kontrakciónak nevezzük.

Ezután természetesen vetődött fel a következő probléma: Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra vonatkozóan, hogy legyen olyan $\mathcal{Q}(\supset \mathcal{H})$ Hilbert-téren értelmezett U uniter operátor, amelyre

$$(0.2) \quad T^n \varphi = \varrho P U^n \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{H}, n=1,2,\dots)$$

érvényes tetszőleges előre adott pozitív ϱ szám esetén. Megjegyezzük mindjárt, hogy (0.2)-ből

$$(0.2^*) \quad T^{*n} \varphi = \varrho P U^{-n} \varphi$$

is következik.

Amennyiben ilyen U van, azt a T operátor uniter ϱ -dilatációjának nevezzük. Azon operátorok halmazát, amelyeknek van uniter ϱ -dilatációjuk, $\mathcal{C}_\varrho$ -val fogjuk jelölni. Ha csak azt kötjük ki, hogy (0.2) $\varrho=1$ és $n=1$

speciális esetben legyen érvényes, azaz

$$T\varphi = P U \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{H})$$

Álljon, akkor U -t a T egyszerű uniter dilatációjának nevezzük.

Az előbb említett problémát tehát röviden így fogalmazhatjuk: Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy $T \in \mathcal{C}_\vartheta$ érvényes legyen?

E kérdésre választ ad a [9]-ben bebizonyított

0.1. T e t e l . $T \in \mathcal{C}_\vartheta$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(i_\vartheta) \quad \|\varphi\|^2 - 2(1 - \frac{1}{\vartheta}) \operatorname{Re}(z T \varphi, \varphi) + (1 - \frac{2}{\vartheta}) \|z T \varphi\|^2 \geq 0 \quad (\varphi \in \mathcal{H}, |z| \leq 1)$$

(ii) T spektruma a zárt egységgörlemezén van.

[9] további részéből az is kiderül, hogy $\mathcal{C}_\vartheta$ a ϑ -nak tágabb értelemben monoton növekvő függvénye, azaz, ha $\vartheta < \vartheta'$, akkor $\mathcal{C}_\vartheta \subset \mathcal{C}_{\vartheta'}$. Be van bizonyítva [9]-ben az is, hogy a $\mathcal{C}_\vartheta$ osztályok között nincs maximális.

Ezután [2]-ben sikerült kimutatni, hogy 1-nél nagyobb dimenziójú $\mathcal{H}$ esetén $\mathcal{C}_\vartheta$ szigorúan monoton függvénye ϑ -nak. Az egydimenziós $\mathcal{H}$ esetét magában foglalja a normális T esetén $T \in \mathcal{C}_\vartheta$ érvényességére ugyanitt bebizonyított kritérium. Ezeket az eredményeket tartalmazza az értekezés 2. §-a.

Az uniter 1-dilatációk spektruma jól ismert a [6], [7], [8] dolgozatokból. Tetszőleges pozitív ϑ esetére

[3]-ban sikerült először ilyen eredményeket elérni. Ezeket ismertetjük a 3. §-ban.

A 4. §-ban további megállapításokat teszünk bizonyos operátorok uniter $\mathfrak{g}$ -dilatációiról. E § fő eredményeként elégséges feltételt bizonyítunk be arra vonatkozólag, hogy valamely operátor bizonyos uniter $\mathfrak{g}$ -dilatációja eltolás operátor legyen. A $\mathfrak{A}$ téren értelmezett u uniter operátort eltolás operátornak nevezük, ha van $\mathfrak{A}$ -nak olyan $\mathcal{U}$ altere, amelyre $\mathfrak{A} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^n \mathcal{U}$ érvényes.

HALMOS előbb említett problémájában nem volt szó a numerikus értékkészletek és az uniter dilatációk kapcsolatáról, csupán a megoldás módja vezetett erre. HALMOS másik problémája azonban már közvetlenül erre a kapcsolatra vonatkozik. Nevezetesen, az a kérdés, igaz-e, hogy bármely T kontrakció numerikus értékkészlete azonos a T összes uniter dilatációi numerikus értékkészletének a metszetével.

(L. [4])

[1]-ben sikerült bebizonyítani, hogy a válasz még akkor is tagadó, ha normális kontrakciókra szorítkozunk. Ennek bizonyításához szükség volt a normális operátorok numerikus értékkészletének egy ugyancsak [1]-ben publikált új jellemzésére. Ezeket az eredményeket tartalmazza ezen értekezés 5. §-a.

1.§. Definíciók és jelölések

A bevezetésben már említett definíciókon és jelöléseken kívül még a következőket fogjuk gyakran használni:

Valamely T operátor U uniter g -dilatációját minimálisnak nevezzük, ha

$$(1.1) \quad \tilde{A} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n E.$$

Ebben az esetben U egyértelműen meg van határozva izomorfizmustól eltekintve. Ez utóbbi tény bizonyítása $g=1$ speciális esetre $[*]$ -ban megtalálható. Tetszőleges pozitív g -ra a bizonyítás teljesen hasonló.

Legyen E_ϑ ($0 \leq \vartheta \leq 2\pi$) az U spektrális függvénye. Akkor mondjuk, hogy U spektrális mértéke teljesen folytonos, ha bármely $\tilde{A}$ -beli φ és ψ vektorok esetén $(E_\vartheta \varphi, \psi)$ teljesen folytonos függvénye ϑ -nak. Másképpen: ha található olyan $f_{\varphi, \psi}(\vartheta) \in L^1(0, 2\pi)$ függvény, amelyre

$$(1.2) \quad (E_\vartheta \varphi, \psi) = \int_0^\vartheta f_{\varphi, \psi}(\tau) d\tau.$$

Tetszőleges A operátor esetében $\sigma(A)$ -val fogjuk jelölni A spektrumát. Normális A esetén $\sigma_p(A)$, ill. $\sigma_c(A)$ az A pontspektrumát, ill. folytonos spektrumát jelenti.

Ha Λ komplex számokból álló halmaz, akkor Λ^0 a Λ belső pontjainak halmazát, $\overline{\Lambda}$ a Λ lezárását, $[\Lambda]^c$ pedig a Λ (nem szükségképpen zárt) konvex burkát jelöli.

Akkor mondjuk, hogy a T operátor teljesen nem uniter, ha nincs olyan 0 -tól különböző φ vektor a $\mathcal{H}$ -ban, amelyre

$$\dots = \|T^{*2}\varphi\| = \|T\varphi\| = \|\varphi\| = \|T\varphi\| = \|T^2\varphi\| = \dots$$

lenne érvényes.

Abban az esetben, ha U uniter $\mathfrak{S}$ -dilatációja T -nek, használni fogjuk még a következő jelöléseket:

$$(1.3) \quad \mathcal{L}_m = U^m \overline{(U - T)} \mathcal{H}, \quad \mathcal{L}_m^* = U^{*m} \overline{(U^* - T^*)} \mathcal{H} \quad (m = 0, \pm 1, \dots)$$

$$(1.4) \quad \mathcal{L} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_n, \quad \mathcal{L}^* = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_n^*.$$

$\mathcal{Q}$ fogja jelölni $\mathcal{L}$ ortogonális projekcióját $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$ -ra, $\mathcal{Q}'$ -vel pedig $\mathcal{L}^*$ -nak $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n^*$ -ra való, ortogonális projekcióját jelöljük. Rövidség kedvéért bevezetjük még a következő jelöléseket:

$$(1.5) \quad \mathcal{H} = \mathcal{Q} \mathcal{L}_0, \quad \mathcal{H}^* = \mathcal{Q}' \mathcal{L}_0^*,$$

$$(1.6) \quad \mathcal{H} = (\overline{I - \mathcal{Q}}) \mathcal{L}_0, \quad \mathcal{H}^* = (\overline{I - \mathcal{Q}'}) \mathcal{L}_0^*,$$

$$(1.7) \quad \mathcal{U} = \mathcal{H} \vee U^{-1} \mathcal{H}, \quad \mathcal{U}^* = \mathcal{H}^* \vee U \mathcal{H}^*.$$

3.8. C_s , mint a s változó monoton függvénye

Mint már a bevezetésben említettük, [9]-ben be van bizonyítva a következő

2.1. L e m m a : C_s a s változónak monoton nem csökkenő függvénye abban az értelemben, hogy $C_s \subset C_\sigma$ érvényes, ha $0 \leq s < \sigma$.

A következőkben e lemmának [2]-ben szereplő bizonyítását ismertetjük.

C_0 definíciójából azonnal következik, hogy $T \in C_0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $T=0$. Viszont az 1.1. tételből következik $0 \in C_\sigma$ minden pozitív σ -ra. Ezzel $s=0$ esetre bebizonyítottuk a lemmát.

Legyen ezután $s > 0$ és definiáljuk a $\mathcal{F}_{z,\varphi}(s)$ függvényeket a következőképpen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{z,\varphi}(s) &= s \|\varphi\|^2 - 2(s-1) \operatorname{Re}(z T \varphi, \varphi) + (s-2) \|z T \varphi\|^2 = \\ &= \|\varphi\|^2 - \|z T \varphi\|^2 + (s-1) \|(\mathcal{I} - z T) \varphi\|^2. \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy az 0.1. tételben szereplő (i_s) akkor és csak akkor érvényes, ha $\mathcal{F}_{z,\varphi}(s) \geq 0$ áll minden $|z| \leq 1$ és $\varphi \in \mathcal{H}_T$ esetén. Legyen $T \in C_s$ és $s < \sigma$. Ekkor (ii) érvényes és $\mathcal{F}_{z,\varphi}(s) \geq 0$. Mivel $\mathcal{F}_{z,\varphi}(s)$ monoton nem csökkenő függvénye s -nak, azért $\mathcal{F}_{z,\varphi}(\sigma) \geq 0$ is érvényes. Ebből pedig következik, hogy $T \in C_\sigma$.

2.1. T é t e l . Abban az esetben, ha T normális operátor, $T \in C_s$ szükséges és elégséges feltétele

$$\|T\| \leq \begin{cases} \frac{s}{2-s}, & \text{ha } 0 \leq s < 1 \\ 1, & \text{ha } s > 1. \end{cases}$$

B i z o n y í t á s . $s=0$ esetén triviális az állítás. Legyen ezért a továbbiakban $0 < s < 2$. Ebben az esetben (i_s) ekvivalens a következő relációval:

$$\frac{s}{s-2} \|\varphi\|^2 - 2 \frac{s-1}{s-2} \operatorname{Re}(z T \varphi, \varphi) + \|z T \varphi\|^2 \leq 0 \quad (\varphi \in h, |z| \leq 1)$$

Ez utóbbi reláció viszont akkor és csak akkor érvényes, ha

$$\|(\frac{s-1}{s-2} J - z T) \varphi\|^2 + \frac{s}{s-2} \|\varphi\|^2 \leq (\frac{s-1}{s-2})^2 \|\varphi\|^2 \quad (\varphi \in h, |z| \leq 1).$$

vagy, ami ezzel egyenértékű,

$$\|(\frac{1-s}{2-s} J - z T) \varphi\| \leq \frac{1}{2-s} \|\varphi\| \quad (\varphi \in h, |z| \leq 1),$$

azaz

$$(i_s) \quad \sup_{|z| \leq 1} \|\frac{1-s}{2-s} J + z T\| \leq \frac{1}{2-s}.$$

Igy azt kaptuk, hogy

$$(2.1) \quad (i_s) \text{ és } (i'_s) \text{ egyenértékűek, ha } 0 < s < 2.$$

Mintegy azonban

$$\|\frac{1-s}{2-s} J + z T\| \leq \|\frac{1-s}{2-s} J\| + \|z T\|,$$

így

$$(2.2) \quad \sup_{|z| \leq 1} \|\frac{1-s}{2-s} J + z T\| \leq \frac{1-s}{2-s} + \|T\|.$$

Legyen ezután T normális operátor. Ebben az esetben T spektruma tartalmaz olyan komplex számot, amelynek abszolút értéke $\|T\|$. Jelöljük ezt a számot $\zeta\|T\|$ -val. Ez a szám T -nek aproximatív sajátértéke, azaz bármely pozitív ε -hoz található ζ -ben olyan φ_ε elem, amelyre

$$\|\varphi_\varepsilon\| = 1 \quad \text{és} \quad \|(\|T\|\zeta - T)\varphi_\varepsilon\| < \varepsilon$$

érvényes. Ebből következik, hogy

$$\|(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\zeta + T)\varphi_\varepsilon\| \geq \|(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\zeta + \|T\|\zeta)\varphi_\varepsilon\| - \|(\|T\|\zeta - T)\varphi_\varepsilon\| > \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} + \|T\| - \varepsilon.$$

Mint hogy ez minden pozitív ε -ra igaz, következik, hogy

$$\sup_{|\zeta| \leq 1} \|\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\zeta + \varepsilon T\| \geq \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} + \|T\|.$$

Ez utóbbi reláció és (2.2) biztosítja, hogy

$$\sup_{|\zeta| \leq 1} \|\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\zeta - \varepsilon T\| = \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} + \|T\|.$$

Ez viszont biztosítja, hogy normális T -re (i_s) ekvivalens

$$\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} + \|T\| \leq \frac{1}{2-\varepsilon}$$

relációval, vagy, ami ezzel egyenértékű

$$(i_s) \quad \|T\| \leq \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$$

relációval. Így (2.1) szerint:

$$(i_s) \text{ és } (i_s^*) \text{ egyenértékűek, ha } 0 < \varepsilon < 2 \text{ és } T$$

normális.

Legyen ezután $0 < \varrho \leq 1$. Ebben az esetben (i_ϱ'') -ből következik (ii). Így a 0.1 tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $0 < \varrho \leq 1$ és T normális, akkor $T \in C_\varrho$ szükséges és elégséges feltétele (i_ϱ'') érvényesége.

Normális T -re (ii) ekvivalens a $\|T\| \leq 1$ feltétellel. Így, a 2.1. lemma szerint $\varrho \geq 1$ és normális T esetén $T \in C_\varrho$ szükséges és elégséges feltétele $\|T\| \leq 1$.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Ha $0 \leq \varrho \leq 1$, akkor $\frac{\varrho}{2-\varrho}$ szigoruan monoton növekvő függvénye ϱ -nak. A 2.1. tétel és a 2.1. lemma szerint ekkor C_ϱ is szigoruan monoton növekvő függvénye ϱ -nak.

Egydimenziós $\mathcal{H}$ esetében csak valamely komplex számmal való szorzás operátora létezik és ez mindig normális. Ebben az esetben tehát a 2.1. tétel teljesen leírja C_ϱ monoton tulajdonságait.

2.2. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ dimenziója 1-nél nagyobb,
akkor C_ϱ szigoruan monoton növekvő függvénye ϱ -nak ab-
ban az értelemben, hogy

$$C_\varrho \subset C_\sigma \text{ és } C_\varrho \neq C_\sigma \text{ ha } 0 \leq \sigma < \varrho.$$

Bizonyítás. Tetszőleges pozitív ϱ -ra fogunk konstruálni olyan T_ϱ operátort, amelyre $T_\varrho \in C_\varrho$ és $\|T_\varrho\| = \varrho$ érvényes. Ez a T_ϱ nyilván nem tartozhat C_σ -ba, ha $0 \leq \sigma < \varrho$, és ez a tény bizonyítani fogja tételünket.

Legyen ebből a célból

$$(2.3) \quad \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_0 \quad (v \in \mathbb{R}) \}$$

egy ortonormált bázis $\mathcal{H}$ -ban. T_s -t a következő módon definiáljuk:

$$(2.4) \quad T_s \varphi_1 = s \varphi_2, \quad T_s \varphi_2 = 0, \quad T_s \varphi_0 = 0 \quad (v \in \mathbb{R}).$$

Nyilvánvalóan $\|T_s\| = s$ és

$$(2.5) \quad T_s^n = 0 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Konstruáljunk most egy

$$(2.6) \quad \{ \varphi'_m \quad (m = 0, \pm 1, \dots), \quad \varphi_{v,m} \quad (v \in \mathbb{R}, m = 0, \pm 1, \dots) \}$$

ortonormált rendszert és azonosítsuk φ_k -t φ'_k -vel $(k = 1, 2)$, φ_0 -t pedig $\varphi'_{0,0}$ -val. Így a (2.6) rendszer által kifeszített $\mathcal{K}$ Hilbert térnek $\mathcal{H}$ egy altere lesz. Jelöljük P -vel $\mathcal{K}$ -nak $\mathcal{H}$ -ra való ortogonális projekcióját, és definiáljuk az U lineáris operátort $\mathcal{K}$ -n a következő módon:

$$U \varphi'_m = \varphi'_{m+1}, \quad U \varphi'_{v,m} = \varphi'_{v,m+1} \quad (v \in \mathbb{R}, m = 0, \pm 1, \dots).$$

U nyilvánvalóan uniter és

$$s P U \varphi_1 = s P \varphi_2 = s \varphi_2, \quad s P U \varphi_2 = s P \varphi'_3, \quad s P U \varphi_0 = s P \varphi_{0,1} = 0.$$

(2.4) szerint tehát

$$(2.7) \quad T_s \varphi = P U \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{H}).$$

Ha $m \geq 2$, akkor

$$g P U^m \varphi_k = g P \varphi'_{k+m} = 0, \quad g P U^m \psi_v = g P \psi'_{v,m} = 0 \quad (k=1,2; v \in \Omega),$$

tehát

$$g P U^m \varphi = 0 \quad (\varphi \in \mathcal{H}, m \geq 2),$$

(2.5) és (2.7) biztosítja, hogy $T_g \in C_g$, és ezzel a bizonyítást befejeztük.

3.6. Az uniter g -dilatációk spektrumáról

Továbbra is használni fogjuk a 1. §-ban bevezetett jelöléseket.

3.1. L e m m a . $L_n \perp L_k$ és $L_n^* \perp L_k^*$, ha $n-k \geq 2$.

B i z o n y í t á s . (2.3)-ból látható, hogy elég bebizonyítani a következőket:

$$\left. \begin{aligned} (3.1) \quad & (U^m(U-T)\varphi, (U-T)\psi) = 0 \\ (3.1^*) \quad & (U^{*m}(U^*-T^*)\varphi, (U^*-T^*)\psi) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ ha } m = 2, 3, \dots$$

ahol φ és ψ tetszőleges vektorok $\mathcal{H}$ -ből.

(3.1)-et (0.2) felhasználásával bizonyítjuk a következőképpen:

$$\begin{aligned} (u^m(u-T)\varphi, (u-T)\psi) &= (u^m\varphi, \psi) - (u^{m-1}T\varphi, \psi) - (u^{m+1}\varphi, T\psi) + (u^mT\varphi, T\psi) = \\ &= (\frac{1}{s}T^m\varphi, \psi) - (\frac{1}{s}T^{m-1}T\varphi, \psi) - (\frac{1}{s}T^{m+1}\varphi, T\psi) + (\frac{1}{s}T^mT\varphi, T\psi) = 0. \end{aligned}$$

Hasonlóan kaphatjuk (3.1*)-t (0.2*) felhasználásával.

3.2. Lemma. $\eta, \eta^*, \eta\eta$ és $\eta\eta^*$ az u vándorló alterei, azaz: ha $n \neq k$ akkor

$$\begin{aligned} u^m \eta &\perp u^k \eta, & u^m \eta^* &\perp u^k \eta^*, \\ u^m \eta\eta &\perp u^k \eta\eta, & u^m \eta\eta^* &\perp u^k \eta\eta^*. \end{aligned}$$

Bizonyítás. (1.5) és (1.6) szerint nyilván elég bebizonyítani, hogy ha pozitív egész, akkor

$$(3.2) \quad u^m Q L_0 \perp Q L_0, \quad u^m Q' L_0^* \perp Q' L_0^*,$$

$$(3.3) \quad u^m (I-Q) L_0 \perp (I-Q) L_0, \quad u^m (I-Q') L_0^* \perp (I-Q') L_0^*.$$

(3.2) bizonyítása céljából legyen $\varphi = Q\varphi'$ és $\psi = Q\psi'$ ahol φ' és ψ' tetszőleges vektorok L_0 -ból. Ekkor

$$(u^m \varphi, \psi) = (u^m Q \varphi', Q \psi') = (Q u^m Q \varphi', \psi').$$

Mint hogy $Q\varphi'$ a $\bigvee_{n=1}^{\infty} L_n$ eleme, azért $Q u^m Q \varphi' \in \bigvee_{n=m+1}^{\infty} L_n$.

Igy a 3.1. lemma szerint az utóbbi skaláris szorzat 0. Ezzel bebizonyítottuk (3.2) első felét, a másodikat hasonlóképpen bizonyíthatjuk.

(3.3) bizonyítása céljából jegyezzük meg először, hogy $(I-Q)L_0$ minden eleme előáll $\varphi = \varphi' - \varphi''$ alakban,

ahol $\varphi' \in \mathcal{L}_0$ és $\varphi'' \in \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$, következésképpen
 $u^m \varphi \in \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$. Ez máris bizonyítja (3.3) első részét,
 a második bizonyítása hasonló lenne.

3.3. Lemma. Ha $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}^* = \{0\}$, akkor T uniter operator és $\mathfrak{s} = 1$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \{0\}$.
 Ebben az esetben (1.6) szerint $\varphi = \mathfrak{Q}\varphi$ érvényes $\mathcal{L}_0$ minden φ elemére, tehát $\mathcal{L}_0 \subset \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$. Ebből következik, hogy

$$\mathcal{L}_1 = u\mathcal{L}_0 \subset u \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n = \bigvee_{n=2}^{\infty} \mathcal{L}_n,$$

tehát $\mathcal{L}_0 \subset \bigvee_{n=2}^{\infty} \mathcal{L}_n$ is érvényes.

Másrészt a 3.1. lemma szerint $\mathcal{L}_0 \perp \bigvee_{n=2}^{\infty} \mathcal{L}_n$. Az utóbbi két reláció szerint tehát szükségképpen $\mathcal{L}_0 = \{0\}$, és ebből $T\varphi = u\varphi$ következik $\mathfrak{H}$ minden φ elemére. Hasonlóan bizonyítható, hogy $\mathfrak{M}\mathfrak{H}^* = \{0\}$ maga után vonja $T^*\varphi = u^*\varphi$ érvényességét.

Végül, ha $T\varphi = u\varphi$, akkor

$$\|\varphi\| = \|u\varphi\| = \|T\varphi\| = \|\mathfrak{s} P u \varphi\| = \|\mathfrak{s} T\varphi\| = \mathfrak{s} \|\varphi\|,$$

következésképpen $\mathfrak{s} = 1$, és ezzel befejeztük a bizonyítást.

3.1. Tétel. Ha T nem uniter operátor, vagy $\mathfrak{s} \neq 1$, akkor $\mathfrak{S}(u)$ a teljes egységkör vonal.

Bizonyítás. Minthogy u uniter, azért $\mathfrak{S}(u)$ az egységkör vonalon helyezkedik el. Másrészt, a 3.3. lemma szerint létezik $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ -ban, vagy $\mathfrak{M}\mathfrak{H}^*$ -ban 0-tól különböző φ elem. A 3.2. lemma szerint u eltolás operator

a $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \varphi$ téren. Minthogy az eltolás operátor spektruma pontosan a C egységgör vonal, annál inkább $\sigma(U) \equiv C$.

A következőkben egy közvetlen bizonyítást is adunk még az utóbbi állításunkra. Tegyük fel ebből a célból, hogy van olyan egységnyi abszolút értékű ε komplex szám, amely nem eleme $\sigma(U)$ -nak. Ebben az esetben $(I - \varepsilon U)^{-1}$ létezik és korlátos, továbbá, bevezetve az $S_n = I + \varepsilon U + \dots + (\varepsilon U)^n$ jelölést, $S_n(I - \varepsilon U) = I - (\varepsilon U)^{n+1}$ adódik. Így

$$\|S_n\| = \|(I - (\varepsilon U)^{n+1})(I - \varepsilon U)^{-1}\| \leq 2 \|(I - \varepsilon U)^{-1}\|.$$

Ebből következik, hogy $\|S_n\|$ -nek van n -től független felső korlátja. Viszont az előbbi φ vektorra

$$\|S_n \varphi\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^n (\varepsilon U)^k \varphi \right\|^2 = \sum_{k=0}^n \|(\varepsilon U)^k \varphi\|^2 = (n+1) \|\varphi\|^2.$$

3.4. L e m m a . Ha T teljesen nem uniter operátor, akkor by az $\mathcal{LV}\mathcal{L}^*$ altere.

B i z o n y í t á s . by minden olyan φ elemére, amely előáll $\varphi = (I - T^{*n} T^n) \psi$ alakban, ahol n valamely pozitív egész szám,

$$\begin{aligned} \varphi = & U^{-1}(U - T) \psi + U^{-2}(U - T) T \psi + \dots + U^{-n}(U - T) T^{n-1} \psi + \\ & + U^{-n+1}(U^* - T^*) T^n \psi + U^{-n+2}(U^* - T^*) T^* T^n \psi + \dots + (U^* - T^*) T^{*n-1} T^n \psi \end{aligned}$$

érvényes, következésképpen (1.3) és (1.4) szerint minden ilyen φ $\mathcal{LV}\mathcal{L}^*$ eleme. Ugyanez mutatható ki a $\varphi = (I - T^n T^{*n}) \psi$ alakban előálló vektorokról, ha az előbbi okoskodásban T és T^* ill. U és U^* szerepeit fel-

cseréljük.

Azt kaptuk tehát, hogy $\mathcal{L}V\mathcal{L}^*$ tartalmazza $(I - T^{*n}T^n)$ és $(I - T^nT^{*n})$ értékkészleteit bármely pozitív n -re. Minthogy $\mathcal{L}V\mathcal{L}^*$ zárt, azért tartalmazza az előbbi értékkészletek lezárásait is. A lemma bebizonyításához elég tehát azt belátni, hogy ha h valamely φ elemére

$$(3.4) \quad \varphi \perp (I - T^{*n}T^n)h, \quad \varphi \perp (I - T^nT^{*n})h \quad (n=1,2,\dots)$$

érvényes, akkor $\varphi = 0$. (3.4)-ből következik, hogy

$$(I - T^{*n}T^n)\varphi = 0 \quad \text{és} \quad (I - T^nT^{*n})\varphi = 0,$$

ebből pedig az, hogy $T^{*n}T^n\varphi = \varphi = T^nT^{*n}\varphi$, és ezért $\|T^n\varphi\| = \|\varphi\| = \|T^{*n}\varphi\|$ minden pozitív n -re. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha $\varphi = 0$, minthogy T a feltevés szerint teljesen nem uniter.

3.5. Lemma. Ha U valamely teljesen nem uniter operátor uniter $\mathcal{S}$ -dilatációja, akkor $\mathcal{Q} = \mathcal{L}V\mathcal{L}^*$.

Bizonyítás. (1.1) szerint elegendő azt bebizonyítani, hogy

$$(3.5) \quad \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n h = \mathcal{L}V\mathcal{L}^*.$$

A 3.4. lemma szerint h az $\mathcal{L}V\mathcal{L}^*$ altere, (1.3) és (1.4) szerint $\mathcal{L}$ is és $\mathcal{L}^*$ is redukálja U -t, így $U^n h$ is altere $\mathcal{L}V\mathcal{L}^*$ -nak minden egész n -re. Ez azt jelenti, hogy

$$(3.5') \quad \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n h \subset \mathcal{L}V\mathcal{L}^*.$$

Másrészt (1.3) szerint mind $\mathcal{L}_k$, mind pedig $\mathcal{L}_k^*$ része

$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^n \mathcal{L}_k$ -nak, bármi egész szám is k . Így (1.4) alapján

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^n \mathcal{L}_k = \mathcal{L} \vee \mathcal{L}^*.$$

Ez pedig (3.5')-vel együtt éppen (3.5)-t bizonyítja.

3.6. Lemma. $\mathcal{L} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^n (\eta \vee \eta\eta)$ és $\mathcal{L}^* = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^n (\eta^* \vee \eta\eta^*)$.

Bizonyítás. (1.5) és (1.6) szerint

$$\eta \vee \eta\eta = \mathcal{L}_0 \quad \text{és} \quad \eta^* \vee \eta\eta^* = \mathcal{L}_0^*.$$

Így (1.3) és (1.4) szerint

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^n (\eta \vee \eta\eta) = \mathcal{L} \quad \text{és} \quad \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^n (\eta^* \vee \eta\eta^*) = \mathcal{L}^*.$$

Másrészt (1.3), (1.4), (1.5) és (1.6) mutatják, hogy

$\mathcal{L}$ tartalmazza η -t és $\eta\eta$ -t, hasonlóan $\mathcal{L}^*$ tartalmazza η^* -ot és $\eta\eta^*$ -ot. Minthogy $\mathcal{L}$ is és $\mathcal{L}^*$ is redukálja $\mathcal{U}$ -t,

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^n (\eta \vee \eta\eta) \subset \mathcal{L} \quad \text{és} \quad \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^n (\eta^* \vee \eta\eta^*) \subset \mathcal{L}^*.$$

Ezek a relációk és (3.6) együtt bizonyítják a lemmát.

[6] dolgozat 3. lemmája szerint igaz a következő:

Ha $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ vándorló alterei a $\mathcal{Q}$ -n értelmezett $\mathcal{U}$ uniter operatornak és a $\sum_{n,k} \varphi_{n,k}$ (ahol $\varphi_{n,k} \in \mathcal{U}^n \mathcal{U}_k$) alakú véges lineáris kombinációk halmaza sűrű $\mathcal{Q}$ -ban, akkor $\mathcal{U}$ spektrális mértéke teljesen folytonos.

Ennek figyelembe vételével 3.6. lemmából azonnal

következik a

3.7. Lemma. u $\mathcal{L}V\mathcal{L}^*$ -ra való megszorításának a spektrális mértéke teljesen folytonos.

Ez a lemma viszont a 3.5. lemmával együtt a következő tételt adja:

3.2. Tétel. Ha u valamely teljesen nem uniter T operator minimális uniter $\mathcal{S}$ -dilatációja, akkor u spektrális mértéke teljesen folytonos.

3.8. Lemma. Ha u uniter $\mathcal{S}$ -dilatációja T -nek és u spektrális mértéke teljesen folytonos, akkor T^n gyengén 0 -hoz tart.

Bizonyítás. (1.2) és a Riemann-Lebesgue lemma szerint

$$\begin{aligned} (T^n \varphi, \psi) &= \mathcal{S}(P u^n \varphi, \psi) = \mathcal{S}(u^n \varphi, \psi) = \mathcal{S} \int_0^{2\pi} e^{in\vartheta} d(E_\vartheta \varphi, \psi) = \\ &= \mathcal{S} \int_0^{2\pi} e^{in\vartheta} f_{\varphi, \psi}(\vartheta) d\vartheta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

E lemma felhasználásával a 3.2. tételből következő

Corollárium. Ha T teljesen nem uniter és $T \in \mathcal{C}_\mathcal{S}$, akkor T^n gyengén 0 -hoz tart.

A következőkben egy felbontási tételt adunk $\mathcal{C}_\mathcal{S}$ -beli operátorokra.

3.3. Tétel. Ha $T \in \mathcal{C}_\mathcal{S}$, akkor $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, ahol

(i) $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ redukálják T -t.

(ii) $T_1 = T|_{\mathcal{H}_1}$ -nek van olyan uniter $\mathcal{S}$ -dilatá-

ciója, amelynek a spektrális mértéke teljesen folytonos.

(iii) $T_2 = T|_{\mathcal{H}_2}$ uniter.

B i z o n y í t á s . Legyen $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \cap (\mathcal{L} \vee \mathcal{L}^*)$.

Ha $\varphi \in \mathcal{H}_1$, akkor

$$T\varphi = (T - U)\varphi + U\varphi \in \mathcal{L} \vee U(\mathcal{L} \vee \mathcal{L}^*) \subset \mathcal{L} \vee \mathcal{L}^*,$$

ezért $T\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$. Hasonlóan, $T^*\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$, tehát $\mathcal{H}_1$ redukálja T -t.

Mint hogy $\mathcal{L} \vee \mathcal{L}^*$ redukálja U -t, U -nak $\mathcal{L} \vee \mathcal{L}^*$ -ra való megszorítása, amit a következőkben U_1 -gyel fogunk jelölni, uniter $\mathcal{S}$ -dilatációja T_1 -nek. A 3.7. lemma szerint viszont $U_1 = U|_{(\mathcal{L} \vee \mathcal{L}^*)}$ spektrális mértéke teljesen folytonos.

Azt kell még belátni, hogy ha $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$, akkor $T_2 = T|_{\mathcal{H}_2}$ uniter. A $\varphi \in \mathcal{H}$ esetén érvényes

$$(I - T^*T)\varphi = U^{-1}(U - T)\varphi + (U^* - T^*)T\varphi, \quad (I - TT^*)\varphi = U(U^* - T^*)\varphi + (U - T)T^*\varphi$$

relációk biztosítják, hogy $\mathcal{H}_1$ tartalmazza mind $I - T^*T$, mind pedig $I - TT^*$ értékkészletét. Ezért, ha $\psi \in \mathcal{H}_2$ akkor $\psi \perp (I - T^*T)\mathcal{H}$ és $\psi \perp (I - TT^*)\mathcal{H}$, amiből

$T^*T\psi = \psi$ és $TT^*\psi = \psi$ következik. Így beláttuk, hogy T uniter $\mathcal{H}_2$ -n.

4. §. Uniter $\mathfrak{g}$ -dilatáció, mint eltolás operátor

Tudjuk, hogy $\mathcal{L}$ és $\mathcal{L}^*$ redukálják $\mathcal{U}$ -t, és ha $\mathcal{T}$ teljesen nem uniter, akkor $\mathcal{Q} = \mathcal{L} \vee \mathcal{L}^*$. Ebben a §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy $\mathcal{U} \mid \mathcal{L}$ és $\mathcal{U} \mid \mathcal{L}^*$ eltolás operátorok, továbbá elegendő feltételt adunk arra, hogy $\mathcal{Q} = \mathcal{L}$, ill. $\mathcal{Q} = \mathcal{L}^*$ teljesüljön.

$\mathcal{U}$ -nak és $\mathcal{U}^*$ -nak (1.7)-ben bevezetett definíciója, valamint (1.5) és (1.6) szerint

$$(4.1) \quad \mathcal{U} \subset \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n, \quad \mathcal{U}^* \subset \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n^*.$$

Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{g} = 1$ esetben (4.1) speciális esetként

$$(4.1') \quad \mathcal{U} = \mathcal{L}_0, \quad \mathcal{U}^* = \mathcal{L}_0^*$$

érvényes. $\mathfrak{g} = 1$ esetben ugyanis $\mathcal{L}_n \perp \mathcal{L}_k$ és $\mathcal{L}_n^* \perp \mathcal{L}_k^*$, ha $n \neq k$. (Ez utóbbi tényleg 3.1. lemma bizonyításához hasonlóan igazolhatjuk, de [8]-ben meg is találjuk a bizonyítást.) $\mathfrak{g} = 1$ esetén tehát (1.5) és (1.6) szerint

$$\mathcal{W} = \{0\}, \quad \mathcal{W} = \mathcal{L}_0, \quad \mathcal{W}^* = \{0\}, \quad \mathcal{W}^* = \mathcal{L}_0^*,$$

ami (4.1')-et igazolja.

4.1. Lemma. $\mathcal{U}$ és $\mathcal{U}^*$ az $\mathcal{U}$ vándorló alterei.

Bizonyítás. (1.7) szerint azt kell bebizonyítani, hogy

$$\mathcal{U}^k(\mathcal{W} \vee \mathcal{U}^{-1}\mathcal{W}) \perp (\mathcal{W} \vee \mathcal{U}^{-1}\mathcal{W}), \quad \mathcal{U}^k(\mathcal{W}^* \vee \mathcal{U}\mathcal{W}^*) \perp (\mathcal{W}^* \vee \mathcal{U}\mathcal{W}^*) \quad (k = \pm 1,$$

A 2.2. lemma szerint azonban elég megmutatni, hogy

$$\mathcal{U}^{k+1}\mathcal{W} \perp \mathcal{W}, \quad \mathcal{U}^{k-1}\mathcal{W}^* \perp \mathcal{W}^* \quad (k = \pm 1, \dots).$$

Ennek igazolására viszont (1.5) és (1.6) szerint elég bebizonyítani, hogy

$$(4.2) \quad U^{k+1}(I-Q)L_0 \perp QL_0, \quad U^{k-1}(I-Q')L_0^* \perp Q'L_0^* \quad (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$$

Legyen először $k > 0$. Mithogy Q definíciója szerint $(I-Q)L_0 \subset \bigvee_{n=0}^{\infty} L_n$, azért

$$QU^{k+1}(I-Q)L_0 \subset \bigvee_{n=k+1}^{\infty} L_n \subset \bigvee_{n=2}^{\infty} L_n.$$

A 3.1. lemma szerint viszont $L_0 \perp \bigvee_{n=2}^{\infty} L_n$ tehát

$L_0 \perp QU^{k+1}(I-Q)L_0$ is érvényes, ebből pedig pozitív k -ra következik (4.2).

Legyen ezután $k < 0$. Ekkor $U^{k-1}QL_0 \subset \bigvee_{n=-k}^{\infty} L_n \subset \bigvee_{n=1}^{\infty} L_n$, tehát $U^{k-1}QL_0 = QU^{k-1}QL_0$ és így $(I-Q)U^{k-1}QL_0 = \{0\}$.

Annál inkább áll tehát $(I-Q)U^{k-1}QL_0 \perp L_0$, ebből pedig $QL_0 \perp U^{k+1}(I-Q)QL_0$ következik, ami éppen (4.2) negatív k -ra.

Ezzel (4.2) első állítását teljesen bebizonyítottuk, a második állítást hasonlóan bizonyíthatnánk.

4.2. Lemma. $U|L$ és $U|L^*$ eltolás operátorok.

Bizonyítás. (1.7) és a 3.6. lemma szerint

$$L = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \alpha, \quad L^* = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \alpha^*,$$

és ebből 4.1. lemma alkalmazásával kapjuk az állítást.

4.3. Lemma. Tegyük fel, hogy U a T -nek minimális uniter $\mathcal{S}$ -dilatációja.

Ha $T^n \rightarrow 0$ erős értelemben, akkor $\mathcal{Q} = \mathcal{L}$.

Ha $T^{*n} \rightarrow 0$ erős értelemben, akkor $\mathcal{Q} = \mathcal{L}^*$.

B i z o n y í t á s . Minthogy bármely pozitív n -re és $\varphi \in \mathcal{H}$ -ra

$$(I - U^{n-1}T^n)\varphi = U^{-1}(U-T)\varphi + U^{-2}(U-T)\varphi + \dots + U^{n-1}(U-T)T^{n-1}\varphi \in \mathcal{L},$$

és $\mathcal{L}$ zárt, azért, ha $T^n \varphi \rightarrow 0$, akkor

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - U^{n-1}T^n)\varphi \in \mathcal{L}.$$

Ebből következik, hogy $\mathcal{L} \supset \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{H} = \mathcal{Q}$ is érvényes, másrészt nyilván $\mathcal{Q} \supset \mathcal{L}$ is áll. Ezzel az első állítást bebizonyítottuk, a másodikat pedig hasonlóan bizonyíthatnánk.

4.2. lemma és 4.3. lemma egyszerű következménye a

4.1. T é t e l . Ha $T \in \mathcal{C}_s$ és $T^n \rightarrow 0$, vagy $T^{*n} \rightarrow 0$ erős értelemben, akkor T minimális uniter s -dilatációja eltolás operátor.

5.§. Normális operátorok numerikus értékkészlete

Áttérünk a bevezetésben említett problémák közül HAIMOS numerikus értékkészletek és a dilatációk kapcsolatára vonatkozó problémájára. Mint már említettük a megoldáshoz normális operátorok numerikus értékkészletének

egy új jellemzését adjuk.

Először is [5]-ben bebizonyított tétel speciális esete az

5.1. L e m m a . Ha Λ a komplex számok síkjának konvex halmaza, μ pedig egy a Λ -n értelmezett nem-negatív Borel-mérték és $\mu(\Lambda)=1$, akkor

$$\int_{\Lambda} z d\mu \in \Lambda.$$

Ennek segítségével bizonyítható az

5.1. T é t e l . Legyen $E(\cdot)$ a T normális operátorhoz tartozó spektrális mérték, S pedig a komplex sík összes olyan λ konvex Borel-féle halmazainak az összessége, amelyekre $E(\lambda)=I$. Ekkor

$$\mathcal{W}(T) = \bigcap_{\lambda \in S} \lambda.$$

B i z o n y í t á s . Jelöljük az összes $\lambda \in S$ metszetét $\mathcal{V}(T)$ -vel. $\mathcal{W}(T)$ tetszőleges z_0 pontjához és S tetszőleges λ eleméhez van olyan $\varphi \in \mathcal{H}$, hogy $\|\varphi\|=1$, és

$$z_0 = (T\varphi, \varphi) = \int_{\lambda} z d(E_z \varphi, \varphi) = \int_{\lambda} z d\|E_z \varphi\|^2, \quad \int_{\lambda} d\|E_z \varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 = 1.$$

Az 5.1. lemma szerint tehát $z_0 \in S$ és így

$$(5.1) \quad \mathcal{W}(T) \subset \mathcal{V}(T).$$

A fordított irányu tartalmazás bizonyítása céljából legyen z_0 a $\sigma(T)$ tetszőleges pontja és k tetszőleges, z_0 középpü kör. Ha φ a k -nak megfelelő spektrális altér eleme és $\|\varphi\|=1$, akkor

$$(T\varphi, \varphi) = \int_k z d(E_z \varphi, \varphi) = \int_k z d\|E_z \varphi\|^2, \quad \int_k d\|E_z \varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 = 1,$$

és így, a 5.1. lemma szerint, $(T\varphi, \varphi) \in k$. z_0 tehát a $\mathcal{W}(T)$ -nek eleme, vagy torlódási pontja, következésképpen $\sigma(T) \subset \overline{\mathcal{W}(T)}$. Minthogy a TOEPLITZ - HAUSDORFF tétel szerint bármely operátor numerikus értékkészlete konvex, ezért

$$(5.2) \quad [\sigma(T)]^c \subset \overline{\mathcal{W}(T)}$$

is érvényes.

Legyen most $z_0 \in \mathcal{V}(T)$. Minthogy $E(\sigma(T)) = \mathcal{J}$, tehát annál inkább $E([\sigma(T)]^c) = \mathcal{J}$, azért $[\sigma(T)]^c \subset \mathcal{S}$. Így $z_0 \in [\sigma(T)]^c$ ezért, (5.2) szerint

$$(5.3) \quad z_0 \in \overline{\mathcal{W}(T)}.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy $z_0 \in \mathcal{W}(T)$ is érvényes. Ebből a célból 3 esetet kell megkülönböztetnünk:

1) Ha $z_0 \in ([\sigma(T)]^c)^0$, akkor (5.2) szerint $z_0 \in (\overline{\mathcal{W}(T)})^0$. Minthogy $\mathcal{W}(T)$ konvex, $z_0 \in \mathcal{W}(T)$ következik.

2) Ha z_0 a $[\sigma(T)]^c$ extrémális pontja, akkor $[\sigma(T)]^c - \{z_0\}$ halmaz is konvex de nem része $\mathcal{S}$ -nek, mint-hogy nem tartalmazza z_0 -t, ami pedig $\mathcal{S}$ minden részhal-mazának eleme. Így $E(\{z_0\}) \neq 0$, azaz z_0 sajátértéke T -

nek tehát szükségképpen $z_0 \in \mathcal{W}(T)$.

3) (5.2) szerint már csak az az eset maradt vissza, amikor z_0 a $[\mathcal{G}(T)]^\sim$ -nek határpontja, de nem extrémális pontja. Ha most $E(\{z_0\}) \neq 0$, akkor z_0 sajátértéke T -nek, tehát $z_0 \in \mathcal{W}(T)$. Ha viszont $E(\{z_0\}) = 0$, akkor tekintsük az $[\mathcal{G}(T)]^\sim$ halmaznak és ezen halmaz z_0 -n átmenő egyetlen támasztó egyenesének közös részét, és nevezzük ezt e -nek. e_1 -ből z_0 -t elhagyva két intervallumot kapunk, legyenek ezek e_1 és e_2 . Ha $E(e_1) = 0$ lenne, akkor $E(e_1 \cup \{z_0\}) = 0$ is állna, és ekkor a $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}(T) - (e_1 \cup \{z_0\})$ halmaz E -mértéke az $\mathcal{I}$ volna. Viszont $\mathcal{G}_1$ konvex, tehát $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{S}$ is érvényes lenne. Ez azonban lehetetlen, minthogy $z_0 \notin \mathcal{G}_1$, bár a feltevés szerint $z_0 \in \mathcal{V}(T)$. Azt kaptuk tehát, hogy $E(e_1) \neq 0$. Hasonlóan kaphatnánk, hogy $E(e_2) = 0$.

Legyen φ_i ($i=1,2$) tetszőleges, egységnyi hosszúságú vektor az e_i -hez tartozó spektrális altérből. Ekkor

$$(T\varphi_i, \varphi_i) = \int_{e_i} z d\|E_z \varphi_i\|^2,$$

és így a 5.1. lemma szerint $(T\varphi_i, \varphi_i) \in e_i$. Így $\mathcal{W}(T)$ -nek van pontja e_1 -ben is és e_2 -ben is. Minthogy $\mathcal{W}(T)$ konvex, $z_0 \in \mathcal{W}(T)$ is áll.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathcal{V}(T)$ minden pontja pontja $\mathcal{W}(T)$ -nek is, azaz

$$(5.4) \quad \mathcal{V}(T) \subset \mathcal{W}(T).$$

(6.1) és (6.4) együtt éppen a tételünket eredményezi.

5.2. T é t e l . Van olyan T normális kontrakció,
amely összes uniter dilatációi numerikus értékkészleteinek
a metszete $\mathcal{W}(T)$ -t valódi részhalmazként tartalmazza.

B i z o n y í t á s . Legyen T normális operátor
a következő tulajdonságokkal:

$$\mathcal{G}_e(T) = \{z : |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}, \quad \mathcal{G}_p(T) = \{0\}.$$

Ezek a tulajdonságok már biztosítják, hogy a T kontrakció, tehát van uniter dilatációja.

Egy ilyen T például a z komplex számmal való szorzás operátora az L_μ^2 -n, ha μ tartója a $\alpha \cup \{0\}$ halmaz, ahol

$$\alpha = \{z : |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\},$$

és μ az α -n pozitív és az ívhosszal arányos, $\{0\}$ -n pedig pozitív.

Legyen λ tetszőleges eleme $\mathcal{S}$ -nek. Minthogy λ E -mértéke az $\mathcal{I}$, a 0 pont, lévén pozitív E -mértéke, szükségképpen λ eleme. Ha az

$$R = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$$

halmaz nem lenne λ részhalmaza, akkor, lévén λ konvex, lenne az α -nak olyan β részive, amely szintén idegen volna λ -tól. Ez azonban lehetetlen, minthogy β E -mértéke pozitív, λ E -mértéke pedig $\mathcal{I}$. Kaptuk tehát, hogy $\lambda \supset R \cup \{0\}$. Minthogy ez minden $\lambda \in \mathcal{S}$ halmazra igaz,

$$(5.5) \quad \mathcal{V}(T) \supset R \cup \{0\}.$$

Másrészt, minthogy $\bar{R}$ konvex és $E(\bar{R}) = \mathbb{J}$, azért

$$(5.6) \quad \bar{R} \supset \mathcal{V}(T).$$

Ha z_0 az α tetszőleges pontja, akkor $\bar{R} - \{z_0\} \in \mathcal{S}$ és így $z_0 \in \mathcal{V}(T)$. Ez a tény, valamint (5.6) azt mutatja, hogy

$$(5.7) \quad \bar{R} - \alpha \supset \mathcal{V}(T).$$

A $\{z : |z| \leq 1, \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{0\}$ halmaz nyilván konvex és E -mértéke $\mathbb{J}$, tehát részhalmaza $\mathcal{S}$ -nek. Ebből és (5.7)-ből következik, hogy

$$(5.8) \quad R \cup \{0\} \supset \mathcal{V}(T).$$

(5.5) és (5.8) szerint $\mathcal{V}(T) = R \cup \{0\}$, és ebből a 5.1. tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(5.9) \quad \mathcal{W}(T) = R \cup \{0\}.$$

Legyen most $\mathcal{U}$ tetszőleges uniter dilatációja T -nek. Ekkor nyilván $\mathcal{W}(\mathcal{U}) \supset \mathcal{W}(T)$, és így (5.9) szerint

$$(5.10) \quad \mathcal{W}(\mathcal{U}) \supset R.$$

Tegyük fel, hogy volna α -nak olyan β részve, amelyen $\sigma(\mathcal{U})$ -nak nincs pontja. Jelöljük k' -vel az egységgörlemeznek azt a zárt részét, amely a β végpontjait összekötő húrnak β -val ellentétes oldalára esik. Feltetésünk szerint $\mathcal{U}$ spektrális mértéke k' -n teljes lenne,

és így a 5.1. tétel szerint $w(u) \subset \mathbb{C}'$, ez pedig el-
lentmondana (5.10)-nek. Azt kaptuk tehát, hogy $\sigma(u)$ sű-
rű α -n, és mivel $\sigma(u)$ zárt, $\sigma(u) = \alpha$ is igaz.

Be fogjuk bizonyítani, hogy $w(u)$ tartalmazza az
egész $(i, -i)$ intervallumot.

Ha mind i , mind $-i$ sajátértéke u -nak, akkor
az állítás azonnal következik $w(u)$ konvexitásából. Fel-
tehető tehát, hogy i és $-i$ közül legalább az egyik nem
sajátértéke u -nak. Szimmetria okokból feltehető, hogy
 $-i$ nem sajátérték.

Meg fogjuk mutatni, hogy ekkor az

$$\alpha' = \{ z : |z| = 1, \operatorname{Re} z < 0 \}$$

félkörív szükségképpen tartalmazza $\sigma(u)$ legalább egy
pontját. Ellenkező esetben ugyanis a

$$(5.11) \quad \{ z : |z| \leq 1, \operatorname{Re} z > 0 \} \cup \{-i\}$$

konvex halmazon u spektrális mértéke teljes lenne, és
így a 5.1. tétel szerint ez a halmaz tartalmazná $w(u)$ -t.
Ez azonban lehetetlen, mivel a 0 pont, amely $w(u)$ ele-
me, nem tartozik (5.11) halmazhoz. Ezek szerint $\sigma(u)$ -nak
van pontja α' -n, másrészt $\sigma(u)$ tartalmazza α -t,
így belsejében tartalmazza az $(-i, i)$ intervallumot. Ha
most a (5.2) relációt T helyett u -ra alkalmazzuk, azt
kapjuk, hogy $(-i, i)$ az $\overline{w(u)}$ belsejében van, tehát
 $(-i, i) \subset w(u)$.

Ezek szerint $(-i, i)$ a T összes uniter dilatációi

numerikus értékkészleteinek a metszetében is benne van,
tehát (5.9) szerint $\mathcal{W}(T)$ valódi részhalmaza ennek a
metszetnek.

Felhasznált irodalom

- [1] DURSZT, E., On the numerical range of normal operators,
Acta Sci. Math., 25, (1964), 262-265.
- [2] ———, On unitary $\mathcal{S}$ -dilations of operators,
Acta Sci. Math., 27, (1966), 247-250.
- [3] ———, On the spectrum of unitary $\mathcal{S}$ -dilations,
Acta Sci. Math., 28, (1967), megjelenés alatt.
- [4] HALMOS, P. R., Numerical ranges and normal dilations,
Acta Sci. Math., 25, (1964), 1-5.
- [5] RUBIN, H. - WESLER, O., A notation on convexity in
Euclidean m -space, Proc. Amer. Math. Soc.,
9, (1958), 522-523.
- [6] SZ.-NAGY, B. - FOIAŞ, C., Sur les contractions de
l'espace de Hilbert. III, Acta Sci. Math.,
19, (1958), 26-45.
- [7] ———, Sur les contractions de
l'espace de Hilbert. IV, Acta Sci. Math.,
21, (1960), 251-259.
- [8] ———, Sur les contractions de
l'espace de Hilbert. V. Translations
bilatérales, Acta Sci. Math., 23, (1962),
106-129.
- [9] ———, On certain classes of
power-bounded operators in Hilbert space,
Acta Sci. Math., 27, (1966), 17-25.

[*] SZ.-NAGY, B., Prolongements des transformations
linéaires de l'espace de Hilbert qui sortent
de cet espace. "Appendice" Riesz Frigyes és
Sz.-Nagy Béla "Leçons d'analyse fonctionnelle"
c. könyvéhez. (Budapest, 1955).

