

DOKTORI DISSZERTÁCIÓ.

METRIKUS TEREK FOLYTONOS LEKÉPEZÉSEINEK KITERJESZTÉSE ÉS
APPROXIMÁLÁSA LIPSCHITZ-TRANSZFORMÁCIÓKKAL.

G E H É R L Á S Z L Ó

tudományos munkatárs.

SZEGED

1958



Diss. B 167



B e v e z e t é s .

Ismeretes Tietze [1] azon tétele, mely szerint egy E metrikus tér zárt D részhalmazán értelmezett valós számértékű, folytonos $f(x)$ függvény folytatható az egész E térben értelmezett folytonos valós függvénné.

Egy ilyen kiterjesztés (Tietze [1] formulája):

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in D, \\ \sup_{y \in D} \frac{f(y)}{[1 + \rho^2(x, y)]^\sigma}, & \text{ha } x \in E - D, \end{cases}$$

ahol $\rho(x, y)$ az x és y pont távolságát, σ pedig az x pont D halmaztól mért $\rho(x, D)$ távolságának reciprok értékét jelenti.

Egy másik folytonos kiterjesztés (Riesz Frigyes formulája)¹:

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in D, \\ \rho(x, D) \sup_{y \in D} \frac{f(y)}{\rho(x, y)}, & \text{ha } x \in E - D. \end{cases}$$

Tietze tételét Urysohn [4] általánosította metrikus terekről normális topológikus terekre, felhasználva azt a lemmát, hogy egy ilyen tér két, A és B , diszjunkt zárt részhalmazához megadható egy olyan folytonos valós függvény, amely az A halmazon 0, a B halmazon 1, a tér többi pontjaiban pedig 0 és 1 közötti értéket vesz fel.²

Az említett bizonyítások mind lényegesen kihasználják a valós számok halmazának speciális tulajdonságait (nevezetesen a lineáris rendezést), tehát nem érvényesek olyan függvényekre, amelyek értékei nem valós számok, hanem pl. valamely más metrikus tér pontjai, tehát

amelyek az adott metrikus térnek egy másik metrikus térbe való leképezését szolgáltatják. Felmerül a kérdés, hogy Tietze tétele átvihető-e ilyen folytonos transzformációkra? Ilyen irányú eredményt tartalmaz ARONSZAJN és PANITCHPAKDI egy dolgozata [5]. Ez a dolgozat bizonyos egyenletesen folytonos transzformációk kiterjesztésével foglalkozik. Hogy a tételt pontosan megfogalmazhassuk, definiálnunk kell néhány fogalmat.

1. d e f i n i c i ó : Legyen $T(x)$ az A metrikus térnek egy leképezése az M metrikus térbe. Egy nem negatív valós értékű, monoton nem csökkenő és a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ feltételnek eleget tevő $\delta(\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < \infty)$ függvényt $T(x)$ folytonossági majoránsának⁴ nevezzük, ha A bármely két, a $\rho(x,y) \leq \varepsilon$ feltételt kielégítő x, y pontjára

$$\rho'(T(x), T(y)) \leq \delta(\varepsilon),$$

ahol ρ, ρ' az A ill. M terekben mért távolságokat jelentik.

Ha egy transzformációnak van egy folytonossági majoránsa, akkor nyilván végtelen sok van, és ekkor a transzformáció egyenletesen folytonos.

Minden egyenletesen folytonos $T(x)$ transzformációnak van egy minimális folytonossági majoránsa, az u.n. folytonossági modulus, amelyet a következőképpen lehet definiálni:

$$\delta_T(\varepsilon) = \sup \left\{ \rho'(T(x), T(y)) : x, y \in D; \rho(x, y) \leq \varepsilon \right\}.$$

2. d e f i n i c i ó : Az M metrikus teret hiperkonvexnek nevezzük, ha a következő tulajdonsággal rendelkezik: Ha az M tér zárt gömbjei egy halmazának megvan az a tulajdonsága, hogy bármely két gömb sugarának összege nem kisebb középpontjuk távolságá-

nál, akkor a halmazba tartozó összes gömböknek van közös pontjuk.

Ha a definíció ekvivalens a következővel:

2. d e f i n í c i ó : Az M metrikus tér hiperkonvex,
ha a) konvex és b) zárt gömbjeinek halmaza rendelkezik az u.n.

"bináris interszekció" tulajdonsággal: Ha az M tér zárt gömbjei egy
halmazának megvan az a tulajdonsága, hogy bármely két gömbnek van
közös pontja, akkor a halmazba tartozó összes gömböknek is van kö-
zös pontjuk.

Minden lineáris metrikus tér konvex lévén, akkor és csak
akkor hiperkonvex, ha zárt gömbjeinek halmaza rendelkezik a bináris
interszekció tulajdonsággal.

SACHSIN [6] bebizonyította, hogy véges dimenziós normált
lineáris tér akkor és csak akkor hiperkonvex, ha megadható benne
egy olyan $e_1, e_2, \dots, e_n$ ⁶ bázis, hogy a tér bármely

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

vektorának normáját az

$$\|x\| = \max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}$$

formulával nyerjük.

Az euklideszi terek közül tehát csak az 1 dimenziós tér
hiperkonvex.

Az előbbiekben definiált fogalmak segítségével ARONSZAJN
és PANITCHPAKDI [5] eredménye a következőképpen fogalmazható:

Legyen $T(x)$ egy E metrikus tér D részhalmazának
egyenletesen folytonos leképezése a hiperkonvex M metrikus térbe.

Ha $T(x)$ -nek van egy $\delta(\varepsilon)$ szubadditív folytonossági majorán-
sa, akkor $T(x)$ folytatható az egész E teret az M térbe leképe-
ző egyenletesen folytonos transzformációvá, melynek $\delta(\varepsilon)$ ugyancsak

$$j : D \rightarrow M$$

folytonossági majoránssá.

Ha az M tér nem hiperkonvex, megadható olyan E tér és ennek D részhalmsza, és olyan T leképezés, amelyre a tétel nem érvényes.

A tétel speciális eseteként adódik, hogy ha T a D halmazon valamely K konstanssal egyenletes Lipschitz feltételnek tesz eleget, akkor kiterjeszthető E -re a K Lipschitz-konstans megtartásával. Ekkor ugyanis a $\delta(\varepsilon) = K\varepsilon$ függvény T -nek egy szubadditív folytonossági majoránssá.

A következőkben ezeket az eredményeket több irányban is általánosítjuk.

Szubadditív folytonossági majoráns létezése ill. egyenletes Lipschitz feltétel helyett csak minden pontban való folytonosságot ill. minden pontban lokális Lipschitz feltétel teljesülését tesszük fel. Viszont a D részhalmszról feltesszük, hogy zárt, az M térről (ill. a T leképezés értékkészletéről) pedig feltesszük, hogy hiperkonvex és korlátos.

A folytonos transzformációk kiterjesztésének kérdését a Lipschitz-transzformációk kiterjesztésének kérdésére vezetjük vissza úgy, hogy a folytonos transzformációkat egyenletesen approximáljuk Lipschitz-transzformációkkal.

Az 1. részben a minden pontban lokális Lipschitz-feltételt kielégítő transzformációk kiterjesztésével foglalkozunk. Mivel korlátos értékkészlet esetén a lokális Lipschitz feltétel teljesüléséből következik a nem lokális Lipschitz feltétel teljesülése is, a továbbiakban a "lokális" feltételt mindig elhagyjuk.

A 2. részben bebizonyítjuk, hogy ha T értékei a korlátos és hiperkonvex M metrikus térben vannak és T folyto-

nos ill. egyenletesen folytonos, akkor egyenletesen approximálható olyan transzformációkkal, amelyek minden pontban Lipschitz feltételt ill. egyenletes Lipschitz feltételt elégítenek ki és értékeik ugyan- csak M -ben vannak.

A 3. részben az 1. és 2. rész tételeinek korolláriumaként nyerjük a folytonos transzformációk kiterjeszthetőségére vonatkozó tételt.

Az 1.-3. rész eredményeit kiterjesztjük bármely véges dimenziós Banach térre.

A 4. részben a hiperkonvex tér fogalmát általánosítjuk és a tételeknek is általánosabb alakot adunk.

Megjegyezzük, hogy ha az M tér tetszőleges, a kiterjesztés általában nem végezhető el. Pontosán a következőt állíthatjuk:

Legyen M egy adott metrikus tér. Ha tetszőlegesen választva az E metrikus teret és az E -ben zárt D halmazt, bármely, D -t M -be leképező folytonos transzformáció folytonosan folytatható az egész E -t M -be leképező transzformációvá, akkor M szükségképpen tágabb értelemben abszolút retraktum.^{11, 12}

1.§.

1. tétel. Legyen E egy tetszőleges metrikus tér, D ennek egy zárt részhalmaza, M pedig egy korlátos és hiperkonvex metrikus tér,¹³ melynek átmérője d . Legyen $T \in \text{Lip}[D, M; k]$, $T^* \in \text{Lip}[D, M; k^*]$ és bármely $x \in D$ pontban álljon fent a $\rho'(T(x), T^*(x)) \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ha létezik egy olyan $T_E^* \in \text{Lip}[E, M; k_E^*]$,¹⁴ amelyre $T_E^* \succ T^*$ és $T_E \in \text{Lip}[E, M; k_E]$, akkor létezik egy olyan T_E transzformációja, $T_E \succ T$, amelyre bármely $x \in E$ pontban $\rho'(T_E(x), T_E^*(x)) \leq \varepsilon$ és

$$T_E \in \text{Lip}[E, M; k_E], \quad \text{ahol}$$

$$k_E(x) = \begin{cases} \max[k(x), k_E^*(x)], & \text{ha } x \in D, \\ 1 + \max\left[\frac{d}{\rho(x, D)}, k_E^*(x)\right], & \text{ha } x \in E - D. \end{cases}$$

B i z o n y í t á s . Bontsuk fel az $E - D$ halmazt megszámlálhatóan végtelen sok részre a következőképen: E_n -nel jelöljük az $E - D$ halmaz azon x pontjainak halmazát, amelyek eleget tesznek az

$$n-1 < \max\left[\frac{d}{\rho(x, D)}, k_E^*(x)\right] \leq n.$$

egyenlőtlenségnek. A $D, E_1, E_2, \dots$ halmazok nyilván páronként idegenek és $D \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Vezessünk be az $E_1, E_2, \dots$ halmazokon egy-egy jólrendezést, legyenek ezek rendtípusai rendre $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Az $E - D$ halmaznak is egy jólrendezését nyerjük, ha az $E_1, E_2, \dots$ halmazokon az előbbi jólrendezéseket vezetjük be és kikötjük, hogy E_m elemei megelőzik E_n bármely elemét, ha $m < n$. Ennek a jólrendezésének rendtípusa $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$.

Legyen η egy tetszőszerinti rendszám és jelöljük D_η -vel az x_η elemet megelőző elemek halmazának és D -nek egyesítését ($D_1 = D$ és $D_\eta = E$, ha $\eta > \alpha$). A kiterjesztett transzformációt transzfinit rekurzióval fogjuk értelmezni.

Mivel $D_1 = D$, $T_1 = T$ a kívánt kiterjesztés D_1 -re.

Legyen η egy tetszőszerinti rendezám (feltehető, hogy $\eta \leq \alpha$), és tegyük fel, hogy a T transzformációt már kiterjesztettük az η -nál kisebb indexű D_ξ halmazokra úgy, hogy a

hogalmaras!

kiterjesztett transzformáció, $T_\xi \in \text{Lip}[D_\xi, M; \bar{k}]$, ahol

$$\bar{k}(x) = \begin{cases} \max[k(x), k^*(x)] & \text{ha } x \in D \\ n_1 & \text{ha } x \in E_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

bármely $x \in D_\xi$ pontban $\rho'(T_\xi(x), T_E^*(x)) \leq \varepsilon$ és $T_\xi > T_{\xi'}$ ha $\xi > \xi'$. Bizonyítjuk, hogy T ekkor kiterjeszthető D_η -ra is úgy, hogy a kiterjesztett transzformáció, T_η , minden $x \in D_\eta$ pontban kielégítse a

$$(I) \quad \rho'(T_\eta(x), T_E^*(x)) \leq \varepsilon,$$

$$(II) \quad \rho'(T_\eta(x), T_\eta(y)) \leq \bar{k}(x) \rho(x, y) \quad (y \in D_\eta)$$

feltételeket, és bármely $\xi < \eta$ rendszámra $T_\eta > T_\xi$ legyen.

Legyen először η limesz szám, ekkor $D_\eta = \bigcup_{\xi < \eta} D_\xi$ és legyen

$$T_\eta(x) = T_\xi(x) \quad \text{ha } x \in D_\xi \quad (\xi < \eta).$$

Mivel $T_\xi < T_{\xi'}$, ha $\xi < \xi'$, az értelmezés egyértelmű és bármely $\xi < \eta$ rendszámra $T_\eta > T_\xi > T$. T_η kielégíti az (I) és (II) feltételeket, mert ha x a D_η tetszőleges rögzített pontja és y a D_η egy másik tetszőleges pontja, akkor van olyan $\xi < \eta$ rendszám, amelyre $x \in D_\xi$ és $y \in D_\xi$, tehát

$$\rho'(T_\eta(x), T_\eta(y)) = \rho'(T_\xi(x), T_\xi(y)) \leq \bar{k}(x) \rho(x, y),$$

és

$$\rho'(T_\eta(x), T_E^*(x)) = \rho'(T_\xi(x), T_E^*(x)) \leq \varepsilon.$$

Ha η nem limesz szám, hanem pl. $\eta = \xi + 1$, akkor

$D_n = D_{\xi+1} = D_\xi - \{x_\xi\}$. Az x_ξ pont legyen pl. az E_n halmazban.
 Fussa végig x a D_ξ halmazt és írjunk M valamennyi

$T_\xi(x)$ pontja köré egy-egy $k(x)p(x, x_\xi)$ sugaru zárt gömböt, $T_E^*(x_\xi)$ köré pedig ε sugaru zárt gömböt. Ezek közül bármelyik kettő sugarának összege legalább akkora, mint középpontjuk távolsága. Legyen ugyanis y és z a D_ξ két tetszőszerinti pontja, ezekre

$$\overline{k(y)}p(y, x_\xi) + \overline{k(z)}p(z, x_\xi) \geq \min[\overline{k(y)}, \overline{k(z)}](p(y, x_\xi) + p(z, x_\xi)) \geq$$

$$\geq \min[\overline{k(y)}, \overline{k(z)}]p(y, z) \geq p'(T_\xi(y), T_\xi(z)),$$

másrészt bármely $x \in D_\xi$ pontra

$$\overline{k(x)}p(x, x_\xi) + \varepsilon \geq p'(T_E^*(x), T_E^*(x_\xi)) + p'(T_E^*(x), T_\xi(x)) \geq$$

$$\geq p'(T_E^*(x_\xi), T_\xi(x)).$$

Tehát mivel M hiperkonvex, ezeknek a zárt gömböknek van legalább egy közös pontjuk. Legyen ezek közül egy t_ξ . A

$$T_\eta(x) = T_{\xi+1}(x) = \begin{cases} T_\xi(x) & \text{ha } x \in D \\ t_\xi(x) & \text{ha } x = x_\xi \end{cases}$$

transzformáció T_ξ -nek, s így T -nek is egy kiterjesztése.

T_η eleget tesz az (I) és (II) feltételeknek, ugyanis a konstrukció szerint bármely $x \in D_\xi$ pontra

$$p'(T_\eta(x), T_\eta(x_\xi)) \leq \overline{k^*}(x)p(x, x_\xi)$$

és

$$p'(T_\eta(x), T_E^*(x)) \leq \varepsilon,$$

tehát az (I) és (II) feltételek az $x \in D_f$ pontokban teljesülnek.

Azt kell még belátnunk, hogy teljesülnek az x_f pontban is.

Az (I) feltétel teljesülése következik a konstrukcióból.

Hogy a (II) feltétel teljesülését is bebizonyítsuk, vegyünk fel egy tetszőszerinti $x \in D_n$ pontot.

Tegyük fel először, hogy $x \in D$. Akkor

$$\frac{\rho'(T_n(x), T_n(x_f))}{\rho(x, x_f)} \leq \frac{d}{\rho(x_f, D)} \leq \max \left[\frac{d}{\rho(x_f, D)}, k_E^*(x) \right] \leq n = \bar{k}(x_f) \rho(x, x_f)$$

Ha pedig $x \in E-D$, akkor van olyan pozitív egész $m \leq n$ szám, amelyre $x \in E_m$. Ekkor mivel $\bar{k}(x) = m$,

$$\rho'(T_n(x), T_n(x_f)) \leq \bar{k}(x) \rho(x, x_f) \leq n \rho(x, x_f) = \bar{k}(x_f) \rho(x, x_f),$$

amit bizonyítani akartunk.

Ilyen módon tehát transzfinit rekurzióval értelmeztünk egy

$T_E > T$ transzformációt úgy, hogy bármely $x \in E$ pontban
 $\rho'(T_E(x), T_E^*(x)) \leq \varepsilon$ és $T_E \in \text{Lip}[E, M; \bar{k}] \subset \text{Lip}[E, M; k_E]$.
 Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A tételnek fontos korolláriuma a következő:

Rögzített tétel:

Korollárium. Legyen E egy tetszőleges metri-
 kus tér, D ennek egy zárt részhalmaza, M pedig egy korlátos hi-
 perkonvex metrikus tér. Ha $T \in \text{Lip}[D, M; k]$, akkor léte-
 zik egy olyan $T_E > T$ transzformáció, hogy $T_E \in \text{Lip}[E, M; k_E]$,
 ahol

$$k_E(x) = \begin{cases} k(x) & \text{ha } x \in D \\ 1 + \frac{d}{\rho(x, D)} & \text{ha } x \in E-D. \end{cases}$$

Ez úgy látható be, hogy az 1. tételt alkalmazzuk abban az

esetben, ha $T(x) = a \in \text{konst.}$ ($x \in D$) és $T_E^*(x) = a$ ($x \in E$).

A kiterjesztési tétel igaz speciálisan korlátos valószínűségi függvényekre, sőt igaz, nemkorlátos valószínűségi függvényekre is.¹⁶
De igaz marad akkor is, ha a képhalmaz tetszőleges véges dimenziós lineáris normált tér, a transzformációról pedig csak azt tesszük fel, hogy minden pontban lokális Lipschitz feltételt elégít ki.

Pontosan a következőt állíthatjuk:

1. tétel: Legyen E egy tetszőleges metrikus tér, D ennek egy zárt részhalmaza, B pedig egy véges dimenziós Banach tér. Ha $T \in \text{Lip}_w[D, B]$ ill. $T \in \text{Lip}_p[D, B]$, akkor létezik olyan $T_E > T$ transzformáció, hogy $T_E \in \text{Lip}_w[E, B]$ ill. $T_E \in \text{Lip}_p[E, B]$.

Ez abból a tényből következik, hogy egy véges dimenziós B Banach térben bárhogyan is választva az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázist, megadhatók olyan $\mu > 0$ és $m > 0$ számok, hogy bármely

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in B$$

vektorra álljon

$$\mu \leq \frac{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}{\|x\|} \leq m. \quad 17$$

Ebből ugyanis következik, hogy ha a T transzformációt a $T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + \dots + T_n e_n$ alakba írjuk (ami egyértelmű), akkor és csak akkor tartozik a $\text{Lip}_w[D, B]$ ill. $\text{Lip}_p[D, B]$ osztályba, ha T valamennyi $T_1, T_2, \dots, T_n$ "koordinátája" a $\text{Lip}_w[D, R]$ ill. $\text{Lip}_p[D, R]$ osztályba tartozik, ahol R a valós számegyenes. Elég tehát "koordinátáit kiterjeszteni".

A továbbiakban fontos szerepet játszik a folytonos transzformációk Lipschitz-transzformációkkal való egyenletes közelítése.

Ha $f(x)$ egy kompakt metrikus téren értelmezett folytonos valós függvény, akkor a Stone-Weierstrass [11] tétel szerint egyenletesen approximálható egyenletes Lipschitz-feltételt kielégítő függvényekkel, mert az egyenletes Lipschitz feltételt kielégítő függvények ^{nyilván} elég tesznek a Stone-Weierstrass tétel feltételeinek.

Általános esetben, tetszőleges ^(nem feltétlenül kompakt) metrikus téren értelmezett valós függvények ill. transzformációk esetén külön kell választani az egyenletesen és nem egyenletesen folytonos valós függvények ill. transzformációk esetét.

Legyen M egy hiperkonvex metrikus tér, A egy tetszőleges metrikus tér, T pedig A -nak egy leképezése M -be.

2. tétel. T akkor és csak akkor egyenletesen approximálható $Lip_u[A, M]$ osztályba tartozó transzformációkkal, ha egyenletesen folytonos.

3. tétel. T akkor és csak akkor approximálható $Lip[A, M]$ osztályba tartozó transzformációkkal, ha folytonos.

Nyilvánvaló, hogy a $Lip_u[A, M]$ ill. $Lip[A, M]$ osztályba tartozó transzformációkkal egyenletesen approximálható transzformációk egyenletesen folytonosak ill. folytonosak. Tehát csak a tételek másik részével kell foglalkoznunk. Ehhez a következő lemmára van szükség.

L e m m a . Legyen a nem negatív valós értékű $m(x)$ függvény a pozitív valós félegyenes egy O -ban torlódó részhalmazán értelmezve és tegyen eleget a következő feltételeknek: a) bármely $x_0 > 0$ számra

$\sup_{x \geq x_0} m(x) < \infty$, b.) $\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = \infty$. Akkor a O -hoz tetszőesszerinti közel található olyan $x^* > 0$ szám, amelyre $m(x)$ értelmezve van és

amelyre $2m(r^*) > m(r)$, ha $r > r^*$.

B i z o n y í t á s : Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis van a 0 -nak egy olyan δ sugaru környezete, amelyben már nem található ilyen pont. Az a.) és b.) feltétel szerint ebben a környezetben van az értelmezési tartománynak olyan $r_1 > 0$ pontja, amelyre $m(r_1) > \sup_{r \geq \delta} m(r)$. Az indirekt feltevés szerint r_1 -hez található az értelmezési tartománynak olyan $r_2 > r_1$ pontja, amelyre $m(r_2) \geq 2m(r_1)$. Mivel $m(r_2) > \sup_{r \geq \delta} m(r)$, r_2 is a 0 sugaru környezetébe esik, tehát az indirekt feltevés értelmében az értelmezési tartománynak van olyan $r_3 > r_2$ pontja, amelyre $m(r_3) \geq 2m(r_2) \geq 4m(r_1)$. Mivel r_3 ismét a 0 δ sugaru környezetébe tartozik. Az eljárást folytatva az értelmezési tartomány $0 < r < \delta$ intervallumba eső pontjainak egy olyan $r_1 < r_2 < r_3 \dots$ monoton növekedő végtelen sorozatát nyerjük, melyre $m(r_n) \geq 2^{n-1} m(r_1)$ ($n=1, 2, \dots$), tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} m(r_n) = \infty$. Ez pedig ellentmond az a) feltételnek.

A bizonyítás érvényes arra az esetre is, ha 2 helyett tetszőleges 1-nél nagyobb számot veszünk.

A 2. tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy T az A metrikus téren egyenletesen folytonos, de maga nem tartozik a $Lip_\omega[A, M]$ osztályba. Akkor van A -nak két tetszőesszerinti közeli pontja, vagyis az

$$m(r) = \sup \left[\frac{\rho'(T(x_1), T(x_2))}{\rho(x_1, x_2)} : x_1, x_2 \in A ; \rho(x_1, x_2) = r \right]$$

függvény értelmezési tartományának a 0 torlódási pontja.

$m(r)$ kielégíti a lemma a) és b) feltételét, ugyanis ha d -vel jelöljük M átmérőjét, akkor $m(r) \leq \frac{d}{r}$, amiből $\sup_{r \geq r_0} m(r) \leq \frac{d}{r_0} < \infty$, másrészt mivel T nem tartozik a

$Lip_\mu[A, M]$ osztályba, $\lim_{r \rightarrow 0} m(r) = \infty$.

Tehát a 0-hoz tetszőszerinti közel található olyan r^* , amelyre $2m(r^*) > m(r)$, ha $r \geq r^*$. Válasszuk r^* -ot olyan kicsinek, hogy bármely a $\rho(x_1, x_2) \leq r^*$ feltételt kielégítő pontpárra $\rho'(T(x_1), T(x_2)) \leq \varepsilon$ legyen, ahol ε egy előre megadott tetszőszerinti kicsi pozitív szám (az egyenletes folytonosság miatt ez lehetséges).

Legyen N az A metrikus térben egy r^* -hálózat.

(Az N halmazt az A metrikus térben μ -hálózatnak nevezzük, ha N bármely két pontjának távolsága legalább μ , és A bármely x pontjához található N -nek olyan pontja, amely x -től μ -nél kisebb távolságra van. Ilyen hálózat mindig létezik, lásd pl.

HAUSDORFF [12]). Az a T_N transzformáció, amely az N hálózat pontjaiban van értelmezve és ott megegyezik T -vel, a

$Lip_\mu[N, M; 2m(r^*)]$ osztályba tartozik, ugyanis, ha $x, y \in N$, akkor $r = \rho(x, y) \geq r^*$, tehát

$$\frac{\rho'(T_N(x), T_N(y))}{\rho(x, y)} = \frac{\rho'(T(x), T(y))}{\rho(x, y)} \leq m(r) \leq 2m(r^*).$$

Tehát létezik egy olyan $T_{N,A}$ transzformáció, amelyre $T_{N,A} > T_N$ és $T_{N,A} \in Lip_\mu[A, M; 2m(r^*)]$.

Bebizonyítjuk, hogy bármely $x \in A$ pontban

$\rho'(T(x), T_{N,A}(x)) \leq 3\varepsilon$. Ugyanis bármely $x \in A$ ponthoz található az N hálózatnak egy olyan x_N pontja, amelyre $\rho(x, x_N) < r^*$, tehát

$$\begin{aligned} \rho'(T(x_N), T_{N,A}(x)) &= \rho'(T_{N,A}(x_N), T_{N,A}(x)) \leq 2m(r^*)\rho(x, x_N) \leq \\ &\leq 2m(r^*)r^* = 2 \sup \left[\frac{\rho'(T(x_1), T(x_2))}{r^*} : x_1, x_2 \in A; \rho(x_1, x_2) = r^* \right] r^* \\ &= 2 \sup [\rho'(T(x_1), T(x_2)) : x_1, x_2 \in A; \rho(x_1, x_2) = r^*] \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ezt összevetve a $\rho'(T(x), T(x_N)) \leq \varepsilon$ egyenlőtlenséggel azt kapjuk, hogy

$$\rho'(T(x), T(x_{N,A})) \leq \rho'(T(x), T(x_N)) + \rho'(T(x_N), T_{N,A}(x)) \leq 3\varepsilon$$

bármely $x \in A$ pontban.

Tehát tetszőleges pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy 3ε -nál jobban approximáló, $\text{Lip}_m[A, M]$ osztályba tartozó transzformációt, amivel a 2. tételt bebizonyítottuk.

A 2. tételben M korlátossága helyett elég feltenni, hogy minden $\tau_0 > 0$ számra $\sup_{\tau \geq \tau_0} m(\tau) < \infty$, vagyis $\frac{\rho'(T(x_1), T(x_2))}{\rho(x_1, x_2)}$ korlátos, ha $\rho(x_1, x_2) \geq \tau_0$. Ez teljesül, ha T -nek van szubadditív folytonossági majoránisa.

Legyen ugyanis $\delta(\tau)$ a T -nek egy szubadditív folytonossági majoránisa. Mivel $\delta(\tau) \rightarrow 0$, ha $\tau \rightarrow 0$, megadható egy olyan $\tau_\varepsilon > 0$ szám, hogy $\delta(\tau) \leq \varepsilon$, valahányszor $\tau < \tau_\varepsilon$. Bármely $\tau > 0$ szám az $\tau = \left[\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right] \tau_\varepsilon + \tau'$ alakba írható, ahol $\left[\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right]$ az $\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}$ egész része és $0 \leq \tau' < \tau_\varepsilon$. A szubadditív tulajdonságból a feltétel többszörös alkalmazásával nyerjük a $\delta(\tau) \leq \left[\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right] \delta(\tau_\varepsilon) + \delta(\tau')$ egyenlőtlenséget. Mivel a $\rho(x_1, x_2) = \tau$ jelölés mellett

$$\frac{\rho'(T(x_1), T(x_2))}{\rho(x_1, x_2)} \leq \frac{\delta(\tau)}{\tau} \leq \frac{\left[\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right] \delta(\tau_\varepsilon) + \delta(\tau')}{\left[\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right] \tau_\varepsilon + \tau'}$$

$$\leq \frac{\left[\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right] \varepsilon + \varepsilon}{\left[\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right] \tau_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\tau_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\left[\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right] \tau_\varepsilon} \leq \frac{2\varepsilon}{\tau_\varepsilon},$$

ha $\tau > \tau_\varepsilon$, /miből azonnal következik az állítás.

Megfordítva, ha T egyenletesen approximálható $\text{Lip}_m[A, M]$ osztályba tartozó transzformációkkal, akkor van szubadditív folyto-

nossági majoránssa.

Legyen ugyanis T_ε egy ε -nál jobban approximáló,
 $Lip_\infty[A, M; K]$ osztályba tartozó transzformáció, akkor

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{d_{T(\tau)}(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sup [g'(T_\varepsilon(x_1), T_\varepsilon(x_2)) : x_1, x_2 \in A; \rho(x_1, x_2) \leq \tau]}{\tau} \leq$$

$$\leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sup [g'(T_\varepsilon(x_1), T_\varepsilon(x_2)) + 2\varepsilon : x_1, x_2 \in A; \rho(x_1, x_2) \leq \tau]}{\tau} \leq$$

$$\leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{K\tau + 2\varepsilon}{\tau} = K,$$

amiből következik, hogy T -nek van szubadditív folytonossági majoránssa. Összefoglalva, ha M nem szükségképpen korlátos, akkor a következőt állíthatjuk.

2. tétel. Legyen A egy tetszőleges metrikus tér, M egy hiperkonvex metrikus tér, T pedig a A térnek egy egyenletesen folytonos leképezése M -be. T akkor és csak akkor approximálható egyenletesen $Lip_\infty[A, M]$ osztályba tartozó transzformációkkal, ha van szubadditív folytonossági majoránssa.

A 2. tétel bizonyításának második részében csak annyit használtunk fel, hogy ha egyáltalán létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyhez található T_ε -t ε -nál jobban közelítő $Lip_\infty[A, M]$ osztályba tartozó transzformáció, akkor T -nek van szubadditív folytonossági majoránssa. Ebből pedig a 2. tétel szerint következik, hogy T egyenletesen approximálható $Lip_\infty[A, M]$ osztályba tartozó transzformációkkal. Tehát igaz a következő:

Korollárium. Legyen A egy tetszőleges metrikus tér, M egy hiperkonvex metrikus tér, T pedig A -nak egy egyenletesen folytonos leképezése M -be. Ha létezik olyan $T^* \in \underline{Lip}_\mu[A, M]$ transzformáció, amelyre $\sup p'(T(x), T^*(x)) < \infty$, akkor T egyenletesen ^(a) approximálható $\underline{Lip}_\mu[A, M]$ osztályba tartozó transzformációkkal.

A 3. tétel bizonyítása. Legyen $R \subset A$ az A azon x pontjainak halmaza, amelyekben a T transzformáció nem elégíti ki a Lipschitz feltételt, vagyis amelyekre

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{p'(T(x), T(y))}{p(x, y)} = \infty,$$

és legyen $S = A - R$ R komplementer halmaza.

Legyen x az R egy tetszőleges rögzített pontja. Az

$$m_x(r) = \sup_{p(x, y) = r} \frac{p'(T(x), T(y))}{p(x, y)}$$

függvény értelmezési tartományának a 0 torlódási pontja. ¹⁹ $m_x(r)$ nem

negatív és kielégíti a lemma a) és b) feltételeit, mert a) bármely

$$r_0 > 0 \text{ számra } \sup_{r \geq r_0} m_x(r) = \sup_{\substack{p(x, y) \geq r_0 \\ p(x, y)}} \frac{p'(T(x), T(y))}{p(x, y)} \leq \frac{d}{r_0} < \infty, \text{ és}$$

$$b) \quad \lim_{r \rightarrow 0} m_x(r) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{p'(T(x), T(y))}{p(x, y)} = \infty.$$

A lemma szerint tehát a 0-hoz tetszésszerűen közel talál-

ható az $m_x(r)$ értelmezési tartományának egy olyan r^* pontja,

amelyre $2m_x(r^*) > m_x(r)$, ha $r \geq r^*$. Ezért az x -hez tetszés-

szerűen közel található olyan x^* pont, amelyre

$$2 \frac{p'(T(x), T(x^*))}{p(x, x^*)} > \frac{p'(T(x), T(y))}{p(x, y)},$$

ha $p(x, y) \geq p(x, x^*)$. A folytonosság miatt bármely $x \in A$

ponthoz és $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\vartheta(x, \varepsilon)$ szám, hogy $\rho(T(x), T(y)) \leq \varepsilon$, ha $\rho(x, y) \leq 2 \vartheta(x, \varepsilon)$. Válasszuk minden $x \in A$ ponthoz a lemma szerinti x^* pontot az x $\vartheta(x, \varepsilon)$ sugaru környezetében. (A továbbiakban egy ponthoz az ilyen módon hozzárendelt pontot ugyanazzal a betűvel és $*$ -gal jelöljük.) Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy R bármely x pontjára $\rho(x, x^*) < 1$.

Felbontjuk az R halmazt megszámlálhatóan végtelen sok idegen halmaz egyesítésére. Legyen R_n ($n=1, 2, 3, \dots$) az R azon x pontjainak halmaza, amelyek kielégítik az $\frac{1}{n+1} \leq \rho(x, x^*) < \frac{1}{n}$ feltételt. Nyilvánvaló, hogy az R_n halmazok páronként idegenek és egyesítésük R .

Az R_1 halmazban konstruáljunk egy 1 -hálózatot, jelöljük ezt N_1 -gyel. Az N_1 pontjai köré írt 1 sugaru nyílt gömbök egyesítése, G_1 nyílt és $G_1 \supset R_1$. Az $R_2 - G_1$ halmazban konstruáljunk egy $\frac{1}{2}$ -hálózatot és írjunk ennek minden pontja köré egy $\frac{1}{2}$ sugaru nyílt gömböt. Ezek egyesítése, G_2 nyílt és nyilván $G_1 \cup G_2 \supset R_1 \cup R_2$. Az eljárást folytatva, általában legyen N_n az $R_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i$ halmazban egy $\frac{1}{n}$ -hálózat, G_n pedig az ennek pontjai köré írt $\frac{1}{n}$ sugaru nyílt gömbök nyílt egyesítése.

Legyen $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ és $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. G nyílt és $G \supset R$, tehát az $A - G = S - G \subset S$ és $A - G$ zárt. Bebizonyítjuk, hogy $N \cup A - G$ is zárt (A -ban). Ehhez azt kell bizonyítanunk, hogy $G - N$ nyílt, azaz minden pontja belső pont (ugyanis $G - N$ az $N \cup A - G$ komplementer halmaza).

Legyen x a $G - N$ egy tetszőleges pontja, bebizonyítjuk, hogy $(G - N)$ -nek belső pontja. Ugyanis x -hez található egy olyan n , amelyre $x \in G_n$, vagyis az N_n -nek van egy

olyan pontja, mondjuk x_n , amelyre $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Ez azt jelenti, hogy x az x_n köré írt $\frac{1}{n}$ sugaru nyílt gömbben van. De akkor teljesen ebben a gömbben van x -nek valamely pozitív sugaru környezete is. Ha ezt a környezetet elég kicsinek választjuk, akkor a hálózatot definíciója szerint nem tartalmazza sem az N -nek sem az $(A - G)$ -nek egyetlen pontját sem, amit bizonyítani akartunk.

Az a T_n transzformáció, amely az $N \cup A - G$ halma-
zon van értelmezve ($N \cup A - G$ zárt A -ban), és ott azonos T -
vel, a $\text{Lip}[N \cup A - G, M; k]$ osztályba tartozik, ahol

$$k(x) = \begin{cases} 2 \frac{\rho'(T(x), T(x^*))}{\rho(x, x^*)} & \text{ha } x \in N \\ \sup_{y \in A} \frac{\rho'(T(x), T(y))}{\rho(x, y)} & \text{ha } x \in A - G. \end{cases}$$

(Mivel $A - G \subset S$ és S pontjaiban T Lipschitz feltételt elégít
ki $\sup_{y \in A} \frac{\rho'(T(x), T(y))}{\rho(x, y)} < \infty$. $A - G$ és N idegenek, tehát
az értelmezés egyértelmű.) Ugyanis, ha $x \in N$, akkor valamely n -re

$x \in N_n$, és mivel $N \cup A - G$ bármely x -től különböző y pont-
ja x -től legalább $\frac{1}{n}$ távolságra van, annál inkább

$\rho(x, y) \geq \rho(x, x^*)$. Ebből következik, hogy minden x -től
különböző $y \in N \cup A - G$ pontra

$$\frac{\rho'(T_n(x), T_n(y))}{\rho(x, y)} < 2 \frac{\rho'(T(x), T(x^*))}{\rho(x, x^*)},$$

vagyis $\rho'(T_n(x), T_n(y)) \leq k_A(x) \rho(x, y)$. Ha $x \in A - G$, akkor az állítás
világos.

Az 1. tétel szerint létezik olyan $T_{NA} > T_n$ transzformá-
ció, amely a $\text{Lip}[A, M; k_A]$ osztályba tartozik, ahol $x \in N \cup A - G$
esetén $k_A(x) = k(x)$.

Megmutatjuk, hogy bármely $x \in A$ pontban

$\rho'(T(x), T_{N/A}(x)) \leq 5\varepsilon$. Ugyanis, ha $x \in N \setminus A-G$, akkor

$T_{N/A}(x) = T_N(x) = T(x)$. Ha pedig $x \in G-N \subset G$, akkor van olyan n , amelyre $x \in G_n$, tehát N_n -nek van egy olyan pontja, mondjuk

x_n , amelyre $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n} \leq 2\rho(x_n, x_n^*)$. Ebből és a $\rho(x_n, x_n^*) < \rho(x_n, \varepsilon)$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\rho'(T(x_n), T_{N/A}(x)) = \rho(T_{N/A}(x_n), T_{N/A}(x)) \leq k_A(x_n) \rho(x_n, x) \leq$$

$$\leq 2 \frac{\rho'(T(x_n), T(x_n^*))}{\rho(x_n, x_n^*)} 2\rho(x_n, x_n^*) \leq$$

$$\leq 4\rho'(T(x_n), T(x_n^*)) \leq 4\varepsilon.$$

Másrészt a $\rho(x, x_n) < 2\rho(x_n, \varepsilon)$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\rho'(T(x), T(x_n)) \leq \varepsilon$, amit az előbbivel összevetve a kívánt

$$\rho'(T(x), T_{N/A}(x)) \leq \rho'(T(x), T(x_n)) + \rho'(T(x_n), T_{N/A}(x)) \leq 5\varepsilon$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

A 2., 2' és 3. tételek igazak speciálisan valós függvényekre, de igazak maradnak olyan transzformációkra is, amelyeknek értékei valamilyen véges dimenziós Banach térben vannak.

4. tétel. Legyen T egy tetszőleges A metrikus térnek egy egyenletesen folytonos leképezése a B véges dimenziós lineáris metrikus térbe. T akkor és csak akkor approximálható egyenletesen $Lip_u[A, B]$ osztályba tartozó transzformációkkal, ha van szubadditív folytonossági majoránsa.

5. tétel. Legyen T egy tetszőleges A metri-

kus térnek egy korlátos folytonos leképezése a B véges dimenziós lineáris metrikus térbe. Ekkor T egyenletesen approximálható $Lip[A, B]$ osztályba tartozó transzformációkkal.

A 4. tétel bizonyítása. Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy valós bázis B -ben. Van olyan $\mu > 0$ és m , hogy bármely

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n \in B$$

vektorra

$$\mu \leq \frac{|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|}{\|y\|} \leq m.$$

A T transzformáció az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisvektorok segítségével egyértelműen a $T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + \dots + T_n e_n$ alakba írható.

Legyen $\delta(\epsilon)$ a T -nek egy szubadditív folytonossági majoránsa. Mivel

$$|T_i(x_1) - T_i(x_2)| \leq m \|T(x_1) - T(x_2)\| \leq m \delta(\epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

a $T_1, T_2, \dots, T_n$ valós értékű függvényeknek is van szubadditív folytonossági majoránsuk, tehát megadható a $Lip_\mu[A, R]$

(R a valósszámegyenes) osztályba tartozó transzformációknak olyan $\{T_1^{(k)}\}, \{T_2^{(k)}\}, \dots, \{T_n^{(k)}\}$ sorozatai, amelyek egyenletesen konvergálnak a $T_1, T_2, \dots$ ill. T_n transzformációhoz. De akkor bármely k -ra

$$T^{(k)} = T_1^{(k)} e_1 + T_2^{(k)} e_2 + \dots + T_n^{(k)} e_n \in Lip_\mu[A, B]$$

és a $\{T^{(k)}\}$ sorozat egyenletesen konvergál a T transzformációhoz.

A 5. tétel bizonyítása analóg módon megy.

3. §.

Legyen D az E metrikus térnek egy zárt részhalmaza, T pedig a D halmaznak egy folytonos leképezése az M korlátos és hiperkonvex metrikus térbe. A 3. tétel szerint T egyenletesen approximálható $Lip[D, M]$ osztályba tartozó transzformációkkal. Legyen $\{T_i\}$ egy olyan approximáló sorozat, amely bármely i -re és $x \in D$ pontra kielégíti a $\rho(T(x), T_i(x)) \leq \frac{1}{2^{i+1}}$, s így $\rho(T_i(x), T_{i+1}(x)) \leq \frac{1}{2^i}$ feltételt is.

Az 1. tétel szerint T_1 -nek van egy olyan $T_{1,E} > T_1$ kiterjesztése, amely a $Lip[E, M]$ osztályba tartozik. Az 1. tétel sorozatos alkalmazásával a $T_1, T_2, \dots$ transzformációknak olyan $T_{1,E}, T_{2,E}, \dots$ kiterjesztését nyerjük, amelyekre $T_i \in Lip[E, M]$ és $\rho(T_{i,E}(x), T_{i+1,E}(x)) \leq \frac{1}{2^i}$ ($i=1,2,\dots$) ha $x \in D$.

Bebizonyítjuk, hogy $\{T_{i,E}\}$ az E halmazon egyenletesen konvergál valamely T_E transzformációhoz, amely nyilván T -nek egy folytonos kiterjesztése E -re. Legyen ugyanis $x \in E$ egy tetszőleges pontja, írjunk az M minden $T_{i,E}$ ($i=1,2,\dots$) pontja köré egy $\frac{1}{2^{i-1}}$ sugaru zárt gömböt. Ezek közül bármelyik kettő sugarainak összege legalább akkora, mint középpontjuk távolsága, mert

$$\begin{aligned} \rho(T_{i,E}(x), T_{i+k,E}(x)) &\leq \rho(T_{i,E}(x), T_{i+1,E}(x)) + \rho(T_{i+1,E}(x), T_{i+2,E}(x)) + \dots \\ &\dots + \rho(T_{i+k-1,E}(x), T_{i+k,E}(x)) \leq \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \dots + \frac{1}{2^{i+k-1}} < \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i+k-1}}. \end{aligned}$$

Tehát van közös pontjuk, de csak egy, mert a gömbök sugara 0-hoz tart. Jelöljük ezt a közös pontot $t(x)$ -szel. $\{T_{i,E}\}$ E -n nyilván

ván egyenletesen konvergál a

$$T_E(x) = \begin{cases} T(x) & \text{ha } x \in D \\ t(x) & \text{ha } x \in E-D \end{cases}$$

transzformációhoz, tehát $T_E(x)$ $T(x)$ -nek egy folytonos kiterjesztését adja.

Ha M maga nem hiperkonvex, hanem véges sok korlátos és hiperkonvex metrikus tér topológikus szorzata, akkor a T transzformáció koordinátáit folytonosan folytatva, a T transzformációnak is egy folytonos kiterjesztését nyerjük. Ezzel a következő tételt bizonyítottuk be.

6. tétel. Legyen D egy totális E metrikus térnek egy zárt részhalmaza; T a D halmaznak egy folytonos leképezése véges sok korlátos és hiperkonvex metrikus tér topológikus szorzatába, M -be. Létezik egy olyan $T_E > T$ transzformáció, amely az E teret egyenletesen folytonosan képezi le az M térbe. ^{20, 21}

Megjegyzés. Ha M egy lineáris metrikus tér, akkor a bizonyítás a következőképpen is elvégezhető:

Írjuk a $T_n \Rightarrow T$ feltételt sor alakba:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + \dots$$

$$= U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

ahol $U_1 = T_1$ és $U_i = T_i - T_{i-1}$, ha $i \geq 2$. A

$\rho(T_i(x), T_{i+1}(x)) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$ ($x \in D$) feltétel miatt $\sup_{x \in D} \|U_i(x)\| \leq \frac{1}{2^i}$ tehát az U_i ($i = 1, 2, \dots$) transzformáció a D halmazt

az M 0 pontja köré írt $\frac{1}{2^{i-1}}$ sugarú zárt gömbbe, G_i -be képezi le úgy, hogy $U_i \in \text{Lip}[D, G_i]$. Ez a zárt gömb egy korlátos és hiperkonvex metrikus tér, tehát az 1. tétel szerint van olyan $U_{iE} > U_i$

upheld by
university
of California

transzformáció, melyre $U_{i,E} \in \text{Lip}[E, G_i]$, vagyis, amelyre

$$\sup_{x \in E} \|U_{i,E}(x)\| \leq \frac{1}{2^{i-1}} \quad \text{De ez éppen azt jelenti, hogy}$$

$U_{1,E} + U_{2,E} + \dots$ egyenletesen konvergens és összege a kiterjesztett folytonos transzformációt adja.

4. §.

ARONSZAJN és PANITCHPAKDI [5] a hiperkonvex tér fogalmát a következőképpen általánosították:

3. d e f i n i c i ó . Egy M metrikus teret m -hiperkonvexnek nevezzük, ha a következő tulajdonsággal rendelkezik: M zárt gömbjei bármely m -nél kisebb számosságú halmazának közös része nem üres, ha közülük bármely kettő sugarának összege legalább akkora, mint középpontjuk távolsága.

A hiperkonvexség nyilván erősebb feltétel mint az m -hiperkonvexség, ez pedig erősebb, mint az n -hiperkonvexség, ha $m > n$. $m=3$ esetén az m -hiperkonvexség azonos a konvexséggel.

Fontos példa egy nem hiperkonvex, de valamely m számosságra m -hiperkonvex metrikus térre a következő (lásd [5]):

Bármely H kompakt Hausdorff-féle topológikus téren értelmezett folytonos függvények tere (a $\sup_{x \in H} |f(x)| = \|f\|$ norma használatával) n -hiperkonvex, ahol n a megszámlálhatóan végtelen számosság. 4

4. d e f i n i c i ó . Egy metrikus tér m -szeparábilis, ha van m -nél kisebb számosságú mindenütt sűrű részhalmaza.

Ha egy metrikus tér m -szeparábilis és m -hiperkonvex, akkor hiperkonvex (lásd [5] 411.o.)

ARONSZAJN és PANITCHPAKDI az egyenletesen folytonos transzformációk kiterjesztésére a következő általánosabb eredményt nyerik.

Legyen T a D metrikus tér egyenletesen folytonos leképezése a M m -hiperkonvex metrikus térbe, E pedig egy D -t tartalmazó $(m+1)$ -szeparábilis metrikus tér. Ha T -nek van egy $\delta(\varepsilon)$ szubadditív folytonossági majoránisa, akkor van olyan $T_E > T$ transzformáció, amely az E teret ugyancsak egyenletesen folytonos módon képezi le M -be és amelynek $\delta(\varepsilon)$ ugyan- csak folytonossági majoránisa.

Ha M nem m -hiperkonvex, akkor megadható olyan D $(m+1)$ -szeparábilis E tér és T leképezés, amelyre a tétel nem érvényes.

Az 1.-3.§ tételeit a következőképpen általánosítjuk:

7. tétel. Legyen E egy tetszőleges m -szeparábilis metrikus tér, D ennek egy zárt részhalmaza, M pedig egy korlátos m -hiperkonvex metrikus tér. Ha $T \in \text{Lip}_c[D, M]$ ill. T a D -nek egy folytonos leképezése M -be, akkor létezik olyan $T_E > T$ transzformáció, hogy $T_E \in \text{Lip}_c[E, M]$ ill. T_E az E teret ugyancsak folytonosan képezi le M -be.

8. tétel. Legyen A egy m -szeparábilis metrikus tér, M pedig egy korlátos m -hiperkonvex metrikus tér. Ha T az A teret egyenletesen folytonos módon ill. folytonos módon képezi le M -be, akkor egyenletesen approximálható $\text{Lip}_u[A, M]$ ill. $\text{Lip}[A, M]$ osztályba tartozó transzformációkkal.

Ezeknek bizonyításához elég csak az 1.tételt általánosítanunk, ebből ugyanis az 1., 2., 3. és 6. tétel bizonyításának gondolatmenetével következnek a 7. és 8.tételek. Most tehát az 1.tételt fogjuk általánosítani, de a Lipschitz konstansok megtartásáról lemondunk. Mindjárt feltesszük, hogy $k(x)$ és $k_E(x)$ értékei pozitív egész számok. Ekkor $k(x)$ értékei is pozitív egész számok lesz-

nek. Ezzel a $\overline{k(x)}$ -szel a bizonyítás a következő.

Tegyük fel, hogy m egy nem megszámlálhatóan végtelen számosság (ugyanis ha m - legfeljebb megszámlálható, akkor mivel E véges sok pontból áll, minden az E teret M -be leképező transzformáció Lipschitz-transzformáció, tehát a tételek nyilvánvalóak).

Tegyük fel, hogy a kiterjesztést már elvégeztük az η -nál kisebb indexű D_ξ halmazokra. Ha η limesz szám, akkor T_η szóról-szóra ugyanúgy definiálható, mint az 1. tételben.

Ha η nem limesz szám, mondjuk $\eta = \xi + 1$, akkor osszuk fel a D_ξ halmazt a következőképpen: $D_{\xi+n}$ -nel jelöljük a D_ξ azon x pontjainak halmazát, amelyekre $k(x) = n$. Válasszunk $D_{\xi+n}$ -ben ($n = 1, 2, \dots$) egy m -nél kisebb számosságú mindenütt sűrű részhalmazt (ilyent lehet, mert E , s így minden részhalmaza is m -szeparábilis). Ezek egyesítése sűrű D_ξ -ben és ugyancsak m -nél kisebb számosságú. Ennek a D_ξ -ben sűrű halmaznak pontjaihoz rendelt $T_\xi(x)$ pontok köré írjunk $\overline{k(x)} \rho(x, x_\xi)$ sugaru zárt gömböket, $T_\xi^*(x_\xi)$ köré pedig ε sugaru zárt gömböket. Ezek közül bármely kettő sugarának összege legalább akkora, mint középpontjuk távolsága, tehát van közös pontjuk, legyen ezek közül egy t_ξ .

A

$$T_\eta(x) = T_{\xi+1}(x) = \begin{cases} T_\xi(x) & \text{ha } x \in D_\xi \\ t_\xi & \text{ha } x = x_\xi \end{cases}$$

transzformáció T_ξ -nek, s így T -nek egy kívánt tulajdonságu kiterjesztése D_η -ra, mert $\rho(T_\eta(x_\xi), T_\xi^*(x_\xi)) \leq \varepsilon$, és ha x az adott D_ξ -ben sűrű halmaznak egy pontja, akkor

$$\rho'(T_n(x), T_n(x_f)) \leq \overline{k(x)} \rho(x, x_f)$$

Ha pedig x a D_f egy tetszőleges pontja, akkor valamely n -re $x \in D_{f,n}$. Az x pontot a $D_{f,n}$ -ben adott mindenütt sűrű részhalmaz pontjaival közelítve, ismét az előbbi egyenlőtlenséget nyerjük. A továbbiakban az 1. tétel bizonyításához hasonlóan járunk el.

Lábjegyzetek.

1. KÉRÉKJÁRTÓ [2], 75.o. vagy S.ALEXANDROFF - H.HOPF [3], 77.o.

2. Metrikus tér esetén egy ilyen függvény:

$$f(x) = \frac{p(x, A)}{p(x, A) + p(x, B)}$$

3. $\delta(\varepsilon)$ értékeként $+\infty$ -t is megengedjük.

4. Az elnevezés SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA professzor urtól származik.

5. Akkor mondjuk, hogy egy M metrikus tér konvex, ha M bármely két x, y pontjához és bármely olyan α, β nem-negatív valós számpárhoz, melyre $p(x, y) = \alpha + \beta$, található olyan $z \in M$, hogy $p(x, z) = \alpha$ és $p(y, z) = \beta$.

6. Az $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorok egy bázist alkotnak, ha a tér bármely eleme egyértelműen írható $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ alakba, ahol $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok.

7. ARONSZAJN és PANITCHPAKDI [5] bebizonyítják, hogy T - nek akkor és csak akkor van szubadditív folytonossági majoránsa, ha folytonossági modulusára, $\Sigma_T(\varepsilon)$ -ra teljesül a $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\delta_T(\varepsilon)}{\varepsilon} < \infty$ feltétel.

8. Akkor mondjuk, hogy egy A metrikus teret egy másik, M metrikus térbe leképező T transzformáció egy $x_0 \in A$ pontban Lipschitz feltételt elégít ki, ha található egy $k(x_0)$ konstans úgy, hogy bármely $y \in A$ pontban $p'(T(x_0), T(y)) \leq k(x_0) p(x_0, y)$. Ha ez az egyenlőtlenség csak az x_0 pont valamely $\delta(x_0)$ sugarú környezetének pontjaira áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy T az x_0 pontban lokális Lipschitz feltételnek tesz eleget. Ha létezik egy olyan K állandó, hogy A bármely két x, y pontjára

$\rho'(T(x), T(y)) \leq K \rho(x, y)$, akkor azt mondjuk, hogy T egyenletes Lipschitz feltételt elégíti ki, a K konstanssal.

Adott A és M esetén, az A minden pontjában lokális Lipschitz feltételt kielégítő transzformációk osztályát jelölje $Lip_e[A, M]$, az A minden pontjában (nem lokális) Lipschitz feltételt kielégítő transzformációk osztályát $Lip[A, M]$, az A halmazon egyenletes Lipschitz feltételt kielégítő transzformációk osztályát pedig $Lip_u[A, M]$.

Ha a Lipschitz-konstansokat is megadjuk, akkor ezt az A és M után írjuk, de közbe a pontosvesszőt teszünk. Tehát $Lip[A, M; K]$ jelenti a $Lip_u[A, M]$ osztályba tartozó azon transzformációk osztályát, melyeknek K egy Lipschitz-konstansa, $Lip[A, M; k]$ pedig a $Lip[A, M]$ osztály azon transzformációk osztályát, amelyeknek $k(x)$ egy Lipschitz-konstans függvényét adja.

9. Egyenletesen folytonos transzformációk esetén D zárt-sága nem lényeges, mert ha T egy halmazon egyenletesen folytonos, akkor a halmaz lezártján is az.

10. Ha T értékkészlete korlátos, akkor az x_0 pontban a lokális Lipschitz feltétel teljesüléséből következik a nem lokális Lipschitz feltétel teljesülése. Ha ugyanis x_0 egy $\delta(x_0)$ sugarú környezetében fekvő y pontokra $\rho'(T(x_0), T(y)) \leq k(x_0) \rho(x_0, y)$, akkor minden $y \in A$ pontra $\rho'(T(x_0), T(y)) \leq \max[k(x_0), \frac{d}{\delta(x_0)}] \rho(x_0, y)$, ahol d M átmérője.

11. Akkor mondjuk, hogy az M metrikus tér az E metrikus térnek egy retrakciója, ha E topológikusan tartalmazza az M teret és megadható egy olyan folytonos transzformáció, u.n. retrakció, amely az E teret az M térre képezi le és az M hal-

mást identikusan képezi le önmagára.

Ha egy M metrikus tér minden olyan metrikus térnek retrakciója, amely M -et topológikusan tartalmazza és amelyben M topológikusan zárt, akkor ezt a teret tágabb értelemben abszolút retraktumnak nevezzük.

G_f Egy tágabb értelemben abszolút retraktum mindig abszolút és összefüggő [7].

12. Legyen ugyanis E egy tetszőleges metrikus tér, melyben M topológikusan zárt. Akkor Hausdorff [8] egy tétele szerint az E térben be lehet vezetni egy az adott metrikával ekvivalens új metrikát úgy, hogy az új metrika az M halmazon azonos legyen M metrikájával, tehát az így nyert új metrikus tér, E' , metrikusan is tartalmazza az M teret (és M zárt E' -ben is). Az M -nek önmagára való identikus transzformációja folytonos, tehát a feltétel szerint folytonosan folytatható egy az egész E' teret M -be leképező transzformációvá. Ez a transzformáció E -t is folytonosan képezi le M -re, tehát egy retrakció, amit bizonyítani akartunk.

13. M korlátossága helyett elég feltegni, hogy T értékkészlete korlátos, mert egy hiperkonvex metrikus térnek bármely zárt $\bar{G}$ gömbje is hiperkonvex metrikus tér. Ugyanis $\bar{G}$ bármely zárt gömbje M egy zárt gömbjének és $\bar{G}$ -nek közös része, tehát $\bar{G}$ zárt gömbjeinek bármely halmaza $\{\bar{G}_i \cap \bar{G}\}; i \in I$ (I egy indexhalmaz) alakba írható. Ha ezek közül a zárt gömbök közül bármely kettő sugarának összege legalább akkora mint középpontjuk távolsága, akkor az M azon gömbrendszere, melynek elemei $\bar{G}$ és G_i ($i \in I$) ugyanilyen tulajdonságuk. Ezeknek tehát van közös pontjuk, és ezek a közös pontok az eredeti gömbrendszernek is közös

pontjai.

14. $T_1 > T_2$ azt jelöli, hogy T_1 a T_2 -nek egy kiterjesztése.

15. Egyenletes Lipschitz feltételt kielégítő transzformációkról hasonló módon állitható a következő.

Legyen E egy tetszőleges metrikus tér, D ennek egy tetszőleges részhalmaza, M pedig egy hiperkonvex metrikus tér. Legyen $T \in \text{Lip}_p[D, M; K]$ és $T^* \in \text{Lip}_p[D, M; K^*]$ és minden $x \in D$ pontban álljon fenn a $\rho(T(x), T^*(x)) \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ha van olyan $T_E^* \in \text{Lip}_p[E, M; K_E^*]$ transzformáció, amelyre $T_E^* > T^*$, akkor létezik olyan $T_E \in \text{Lip}_p[E, M; \max\{K, K_E^*\}]$ transzformáció, melyre $T_E > T$ és amely bármely $x \in E$ pontban kielégíti a $\rho(T_E(x), T_E^*(x)) \leq \varepsilon$ feltételt.

Ennek bizonyítása hasonló ^{az} ARONSZAJN és PANITCHPAKDI [5] dolgozatának 415. oldalán található bizonyítással.

16. CZIPSZER J. és GEHÉR L. [9]

17. RIESZ-SZ.-NAGY [10]. 216.o.

18. Ha létezik egy olyan pozitív ε szám, hogy A bármely két pontjára $\rho(x, y) \geq \varepsilon$, akkor bármely az A teret a d átmérőjű M térbe leképező T transzformációra $\rho(T(x), T(y)) \leq \rho(x, y)$ tehát T egyenletes Lipschitz feltételt elégít ki.

19. A 18. lábjegyzetben adott bizonyításhoz hasonlóan látható be.

20. A tételnek speciális esete, amikor M véges dimenziós lineáris metrikus tér, T pedig korlátos. A nem korlátos transzformációk kiterjeszthetősége abból következik, hogy valós értékű függvényekre sem kell feltenni a korlátosságot.

21. Ha T egyenletesen folytonos, akkor $\text{Lip}_p[D, M]$ osz-

tályba tartozó transzformációkkal is egyenletesen approximálható, ezeket az approximáló transzformációkat egy $\overset{a}{Lip}_p [E, M]$ osztályba tartozó transzformációkká kiterjesztve, ezek limesze $\overline{T}_\varepsilon$ egyenletesen folytonos lesz.

Irodalom jegyzék.

- [1] H.TIEZE, Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, Journ. f. Math., 145 (1915), p. 9-14.
- [2] B.KERÉKJÁRTÓ, Topologie I (Berlin, 1923).
- [3] S.ALEXANDROFF-H.HOPF, Topologie I (Berlin, 1935).
- [4] P.URYSONN, Mächtigkeit zusammenhängender Mengen, Math. Ann., 94 (1925), p. 262-309.
- [5] H.ARONSZAJN - P.PANITCHPAKDI, Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, Pac. Journ. of Math., 6 (1956), p.405-441.
- [6] L.Nachbin, A theorem of Halm-Banach type for linear transformations, Trans. Am. Math. Soc., 88 (1950), p. 28-46.
- [7] K.BORSUK, Sur les rétractes, Fund. Math., 17 (1931), 152-170.
- [8] F.HAUSDORFF, Erweiterung einer Homöomorphie, Fund. Math., 16 (1930), 353-360.
- [9] J.CZIPSZER - L.GEHÉR, Extension of functions satisfying a Lipschitz condition, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 6 (1955), 213-221.
- [10] F.RIESZ et B.SZ.-NAGY, Leçons d'analyse fonctionnelle, 3.kiadás (Budapest-Páris, 1955).
- [11] M.H.STONE, The generalized Weierstrass approximation theorem, Math. Mag., 21 (1948) 167-184, 237-254.
- [12] F.HAUSDORFF, Mengenlehre (Berlin és Leipzig, 1935).

