GERGELY JENŐ:

Kettős integrálu variátióproblémák változó határgörbével.

H.é.n.

Tudományegyetem
Mathematikai és Természettudományi Kara.
Leltári szám: V/a 771

Kettős integrálu variatióproblémák
változó határgörbével.

Doktori értekezés

benyujtja

Gergely Jenő

M. KIR. HORTHY MIKLÓS TUDOMÁNYE

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi Kara

M. Kir. Ferencz József-Tudományegyetem
Mathematikai és Természettudományi kara.
Leltári szám: 11/g.

VI. a./201.

Kettős integrálu variatióproblémák változó határgörbével.

A kettős integrálu variatióproblémáknál, – amikor az ismeretlen függvény 2 független változótól függ –, az extrémális függvény Euler-Lagrange féle differentiálegyenlete, illetőleg ennek levezetése feltételezi a keresett függvény második partiális differentiálhányadosainak létezését. Ha azonban az integrálban a keresett függvénynek csak első differentiálhányadosai szerepelnek, akkor a második differentiálhányadosok létezésének a priorikus feltételezése természetellenes és szükséges olyan differentiálegyenletek felállítása, amelyekben a keresett függvénynek csak első differentiálhányadosai forduljanak elő. Ezt a követelményt elégítik ki, azok az elsőrendű partiális differentiálegyenlet rendszerek, amelyeket Dr. Haar Alfréd vezet le a kettős integrálok variatiójáról* szóló

* Haar Alfréd. A kettős integrálok variatiójáról. Math. és Term. tud. Értesítő XXXV. kötet 1. és 2. füzet Budapest 1917.

értekezésében. A differentiálegyenletrendszerek levezetése a következő lemma segítségével történik, amely lemma a kettős integrálok variátiójának elméletében analog szerepet játszik a Du Bois Reymond féle, az egyszeres integrálu problémák esetében használt lemmával:

Ha $u(xy)$ és $v(xy)$ olyan függvényei az x és y független változóknak, amelyek egy megadott T tartomány belsejében folytonosak, és ha

$$1)\qquad \iint_{(T)} \left(u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) dx\, dy = 0$$

mindazokra a $\xi(x.y)$ függvényekre nézve, melyek e tartomány határán eltűnnek, belsejében pedig x és y szerint folytonosan differentiálhatók, akkor – bármely a T tartomány belsejében fekvő zárt görbét jelöl G – a következő integrál:

$$1)a\qquad \int_{(G)} (u\, dy - v\, dx)$$

értéke zérussal egyenlő, azaz létezik egy oly $\omega(xy)$ függvény, melynek első differentiálhányadosai tartományunkban folytonosak s amely kielégíti a

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = - v(xy)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = u(xy)$$

egyenleteket.

A lemma segítségével azonnal a következő partiális differentiálegyenletrendszerek adódnak a keresett függvény számára:

Ha az integrál alatti függvény $f(p,q,x,y)$ – p-vel és q-val az ismeretlen $z(xy)$ függvény differentiálhányadosait jelöljük: $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, f-t minden tekintetbe jövő argumentumértéknél analytikus függvénynek tételezzük fel –

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Az f argumentumai az ismeretlen $z(xy)$ függvényre vonatkoznak, $\omega(xy)$ egy egyszer folytonosan differentiálható segédfüggvény.

Ha pedig az integrál alatti függvény $f(p,q,z,x,y)$, akkor az egyenletrendszerek

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}$$

ahol az f argumentumai szintén a keresett $z(xy)$ függvényre vonatkoznak, $\omega(xy)$ és $\Omega(xy)$ egyszer folytonosan differentiálható segédfüggvények, továbbá $\frac{\partial\Omega}{\partial x \partial y}$ is létezik és folytonos.

Dr. Haar Alfréd említett értekezésében megjegyzi, hogy ezek a differentiálegyenletrendszerek a kettős integrálok variátióelméletének további kiépítésére ép ugy alapul vehetők, mint az Euler-Lagrange egyenletek és az ily módon felépített elmélet nem tételezi fel a második differentiálhányadosok létezését. Dolgozatom az ily módon kijelölt roppant nagy problémakörnek egy csekély részét óhajtja realizálni: a felirt partiális differentiálegyenletrendszerekből akarok feltételeket levezetni a változó határgörbéjü kettős integrálu variátióproblemák számára.

1 §.

Az

$$\iint_{(T)} f(p\, q\, x\, y)\, dx\, dy = \text{minimum}$$

variátióproblema első variátiója

$$\delta J = \varepsilon \iint_{T} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

eltűnik, – amint azt a variátiószámitásban kimutatják – ha az f argumentumai az extremalis függvényre vonatkoznak és $\xi(xy)$ a T tartományban értelmezett, itt egyszer folytonosan differentiálható s a T tartomány határán eltűnő függvény.

Mivel a keresett függvényre nézve fennállanak a (2) egyenletek, az első variátió a következőképen irható:

$$\iint\limits_{(T)} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{(T)} \frac{\partial(\xi \omega)}{\partial(x y)}\, dx\, dy \quad *$$

Továbbá, egész általánosan, egy (F) felületdarabra vett integrátiónál:

$$\iint\limits_{(F)} f\, d\sigma = \iint\limits_{(F)} f(u v) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

– u és v a felületkoordináták, E, F, G a felület első fundamentális mennyiségei. Igy tehát az első variátió:

$$\iint\limits_{(T)} \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2}} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2}} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2} \right\} dx\, dy =$$

* Idézett helyen. 2 §.

$$= \iint\limits_{(F)} \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \left(-\cos \widehat{nx}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \cos \widehat{ny} \right] d\sigma,$$

ahol $d\sigma$ a $\zeta = \zeta(xy)$ felület felületeleme, n a ζ felület normálisa és az integratió az ω felületnek arra az (F) darabjára értendő, amelyre vonatkozó (xy) a T-ben van.

Alkalmazzuk most az első variátió ezen alakjára a Stokes féle integrálátalakítást.

Stokes integráltétele a következő: Ha (F) egy felület véges darabja, (C) ennek határvonala, továbbá $P(xyz)$, $Q(xyz)$, $R(xyz)$ egyszer folytonosan differentiálható függvények, akkor

$$\iint\limits_{(F)} \left[\left\{ \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right\} \cos \widehat{nx} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right\} \cos \widehat{ny} + \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right\} \cos \widehat{nz} \right] d\sigma =$$

$$= - \int\limits_{(C)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Jelen esetben legyen $R = \omega$, $P \equiv Q \equiv 0$ és a felület $z = \zeta(xy)$. Ekkor az első variátió

$$\delta J = -\varepsilon \int\limits_{(C)} \omega\, dz$$

ahol a (C) görbe a T tartomány határvonalának képe a $\zeta(xy)$ felületen (a T tartomány határvonalára a z tengellyel $\parallel$ alkotókkal emelt henger és a ζ felület metszése).

Mivel az elsö variátió ω és ζ függvényekre nézve (előjeltől eltekintve) szimmetrikus, tehát az analog átalakitás elvégzése után

$$\delta J = \varepsilon \int\limits_{(\bar{C})}\zeta \, dz$$

alakban irható, ahol $(\bar{C})$ görbe a T tartomány határvonalának képe az $\omega(xy)$ felületen.

Az elsö variátió ezen átalakitásából elsösorban az látható, hogy minden olyan $z(xy)$ függvény, amely a (2) egyenletrendszert kielégiti, zéróvá teszi az elsö variátiót állandó határvonalu problemáknál. Ekkor ugyanis ζ a T tartomány határán eltünik s igy

$$\delta J = \varepsilon \int\limits_{(\bar{C})}\zeta \, dz = 0. \; *$$

---

* Ugyanezt láthatjuk az elsö variátió $\delta J = -\varepsilon \int\limits_{(C)} \omega \, dz$ alakjából. A (C) a ζ felületen van, ζ azonban a T tartomány határán eltünik s igy (C) maga a T tartomány határa, azaz a (xy) sík-

Továbbá felhasználjuk az elsö variátió ezen átalakítását arra, hogy a keresett függvényre egy szükséges feltételt vezessünk le abban az esetben, ha határvonala $\mathcal{L}$ nem adott, hanem annak a feltételnek van alávetve, hogy az $x\,y$ síkra vetett merőleges projektiója egy állandó Ω görbe legyen (azaz az $\mathcal{L}$ a Ω görbére állitott az $(x\,y)$ síkra merőleges hengeren feküdjön).

Ekkor ugyanis

$$\delta J = \varepsilon \iint_{(\bar{C})} \zeta\, dz \quad , \text{ pontosan kűrva}$$

$$\varepsilon \int_0^{t_0} \zeta\left[x(t), y(t)\right].\left[\omega_x\left[x(t), y(t)\right].\, x'(t) + \omega_y\left[x(t), y(t)\right] y'(t)\right] dt$$

$\underbrace{}_{0 \leq t < t_0}$

($x(t)$, $y(t)$ a Ω görbe parameteres egyenlete, az $x(t)$, $y(t)$ függvényeket egyszer folytonosan differentiálhatóknak tételezzük fel)

zéró tartozik lenni minden olyan $\zeta(t)$ függvényre $(0 \leq t < t_0)$, amely a $t = 0$ és $t = t_0$ helyen ugyanazon értékeket veszi fel. Ebből azonnal következik, hogy

$$\omega_x \frac{dx}{ds} + \omega_y \frac{dy}{ds}\bigg|^{\Omega} = 0.$$

---

ban levö síkgörbe, amelyre - durván szólva - $dz = 0$, tehát

$$\delta J = -\varepsilon \int_{(C)} \omega\, dz = 0$$

A pontos igazolást a következő lemma adja: Ha $M(t)$ a $0 \leqq t \leqq t_0$ intervallumban folytonos, továbbá

$$\int_0^{t_0} \xi(t)\, M(t)\, dt = 0$$

minden olyan folytonos $\xi(t)$ függvényre, amelynél $\xi(0) = \xi(t_0)$, akkor $M(t) \equiv 0$ a $0 \leqq t \leqq t_0$ intervallumban. Legyen ugyanis $\xi(0) = \xi(t_0) = 0$ s akkor lemmánk feltételei egybeesnek a variátió-számítás egyik alaplemmájának feltételeivel s így annak állítása szerint $M(t) \equiv 0$ a $[0\, t_0]$-ban.*

Tehát – az ω függvényről a (2) egyenletrendszer utján átmenve a $z(x\,y)$ függvényre – a z-re a $\mathcal{L}$ görbe mentén a következő feltételt nyertük:

$$f_p \frac{dy}{ds} - f_q \frac{dx}{ds} \Big|^{\mathcal{L}} = 0\,,$$

egy oly eredmény, amely – az általánosabb $\iint_T f(x\,y\,z\,p\,q) = \min.$ problema esetében is ugyanilyen alakban – a második differentiálhányados létezésének feltételezésével volt levezetve. Mivel azonban a feltételben csak első

---

* Természetesen ugyanez az $\omega_x \frac{dx}{ds} + \omega_y \frac{dy}{ds} \Big|^{\mathcal{L}} = 0$ feltétel következtethető az első variátió $\delta J = -\varepsilon \int_{(C)} \omega\, dz$ alakjából a következő lemma által:

Ha $\int_{(C)} \omega\, dz = 0$ minden (C) görbére nézve, ahol (C) egy, az $x\,y$ síkra merőleges hengeren van, de különben tetszőleges, akkor $\omega = \text{constans}$ a hengernek az $x\,y$ síkban levő vezérvonalán.

differentiálhányadosok szerepelnek, a most adott bizonyítás a problémás természetének jobban megfelel.

Az általánosabb $\iint_{(T)} f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = \min.$ problé- ma esetében egy lépésről lépésre megfelelő gondolatmenet az

$$\left(\Omega_x - f_q\right)\frac{dx}{ds} + \left(f_p - \Omega_y\right)\frac{dy}{ds}\Big|^{\Omega} = 0$$

feltételt adja. Mivel a második differentiálhányadosok feltételezésével erre az esetre is, – amint az előbb említettük – az

$$f_p \frac{dy}{ds} - f_q \frac{dx}{ds}\Big|^{\Omega} = 0$$

feltétel áll, következik, hogy oly felületeknek megfelelő Ω függvények, amely z felületek kétszer folytonosan differentiálhatók s a jelenlegi probléma extremalis felületei, eleget tartoznak tenni az

$$\Omega_x \frac{dx}{ds} - \Omega_y \frac{dy}{ds}\Big|^{\Omega} = 0 \qquad \text{feltételnek.}$$

2 §.

A $\iint_T f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = \min.$ variátió probléma esetére, – ha a határgörbe az előbbi §.-ban jelzett módon változhat – a (13) egyenletek segítségével a z számára egy más feltétel is egyszerűen levezethető. Az első variátió alakja most:

$$\delta J = \varepsilon \iint_T \left(f_p \zeta_x + f_q \zeta_y + f_z \zeta\right) dx\, dy.$$

A jelen esetben a δJ zérő tartozik lenni minden egyszer folytonosan differentiálható $f(x\,y)$ függvényre nézve s így $f = \text{constans} = k$ függvényre is. Tehát

$$\delta J = \varepsilon . k . \iint_T f_z \, dx\, dy = 0 \quad , \qquad \text{azaz}$$

$$\iint_T f_z \, dx\, dy = 0$$

A (3) értelmében $f_z = 2\,\Omega_{xy}$ s így $\iint_T \Omega_{xy}\, dx\, dy = 0$.

A kettős integrálra vonatkozó integráltételek szerint

$$\iint_T \Omega_{xy} = \int_{\Omega} \Omega_x \, dx = \int_{\Omega} \Omega_y \, dy = 0 \qquad \text{s így}$$

$$\int_{\Omega} (\Omega_x \, dx - \Omega_y \, dy) = 0$$

Ω_x és Ω_y értékeit a (3) egyenletekből behelyettesítve:

$$\int_{\Omega} (f_q + \omega_x)\, dx + (\omega_y - f_p)\, dy = \int_{\Omega} \omega_x \, dx + \omega_y \, dy + \int_{\Omega} (f_q \, dx - f_p \, dy) =$$

$$= \int_{\Omega} (f_q \, dx - f_p \, dy) = 0 \quad , \qquad \text{ugyanis}$$

$\int_{\Omega} \omega_x \, dx + \omega_y \, dy = 0$, mert a Ω zárt görbe

A $z(xy)$ függvényre tehát a feltétel:

$$\int_{\Omega} (f_q\, dx - f_p\, dy) = 0 \;*$$

3. §.

A Dr. Haar Alfréd említett dolgozatában levezetett lemma segítségével a kettős integrálu variátió problémák parameteres alakban való tárgyalásánál is levezethetők – egész sablonszerűleg a (2) és (3) - nak megfelelő egyenletrendszerek.

Az
$$\iint_T F(x_u\, y_u\, z_u\, x_v\, y_v\, z_v)\, du\, dv = \min. \text{ problémánál}$$

– a T az $(u\, v)$ sík egy egyszeresen összefüggő, $u = u(t)$, $v = v(t)$ görbe által határolt tartománya, ahol $u(t)$, $v(t)$ egyszer folytonosan differentiálható függvények – az elsö variátió

$$\delta J = \varepsilon \iint_T \sum (F_{x_u}\xi_u + F_{x_v}\xi_v)\, du\, dv$$

Változatlan határgörbéjü problémáknál a $\delta J = 0$ minden olyan

---

* A $\iint_T f(x, y; p\, q)\, dx\, dy = \min.$ probléma esetében ez a feltétel mindenesetre teljesül, hiszen $\int_{\Omega}(f_q\, dx - f_p\, dy)$ a (2) értelmében

$$\int_{\Omega} \omega_x\, dx + \omega_y\, dy = 0$$

ξ, η, ζ a T-ben egyszer folytonosan differentiálható függvényre nézve, amely a T határán eltünik. Legyen ξ egy tetszőleges ilyen függvény, η és ζ azonban identikusan zérő. Ekkor

$$\delta J = \varepsilon \iint\limits_T (F_{x_u}\xi_u + F_{x_v}\xi_v)\, du\, dv = 0$$

minden, a T határán eltünő, egyszer folytonosan differentiálható ξ-re. Az említett lemma értelmében tehát létezik egy olyan $\omega(uv)$ egyszer folytonosan differentiálható függvény, amelyre

$$\begin{aligned} \omega_u(uv) &= -F_{x_v} \\ \omega_v(uv) &= F_{x_u} \end{aligned} \qquad (2)'$$

(az F_{x_u}, F_{x_v} argumentumai a keresett függvények.) Ép igy – a ξ és ζ, illetőleg a ξ és η zérussá tételével – nyerjük, hogy léteznek továbbá olyan $\overline{\omega}(uv)$ és $\overline{\overline{\omega}}(uv)$ egyszer folytonosan differentiálható függvények, hogy

$$(2)' \quad \begin{aligned} &\overline{\omega}_u(uv) = -F_{y_v}\,; \quad \overline{\omega}_v(uv) = F_{y_u} \quad \text{illetőleg} \\ &\overline{\overline{\omega}}_u(uv) = -F_{z_v}\,; \quad \overline{\overline{\omega}}_v(uv) = F_{z_u}. \end{aligned}$$

Az $x(uv)$, $y(uv)$, $z(uv)$, $\omega(uv)$, $\overline{\omega}(uv)$, $\overline{\overline{\omega}}(uv)$ 6 ismeretlen függvény számára 6 differentiálegyenletből álló egyenletrendszerünk van.*

---

* Az $\omega, \overline{\omega}, \overline{\overline{\omega}}$ függvények, illetve differentiálhányadosaik között az

Az ω függvények bevezetésével az elsö variátió alakja a következö:

$$\delta J = \varepsilon \iint_T \left[\frac{\partial(\xi\omega)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\eta\overline{\omega})}{\partial(uv)} + \frac{\partial(\zeta\overline{\overline{\omega}})}{\partial(uv)} \right] du\, dv \quad **$$

Az 1 §-ban részletesen leirt, a Stokes féle integráltételen alapuló integrálátalakitás után

$$\delta J = \varepsilon \int_0^{t_0} [\xi(t).\omega'(t) + \eta(t).\overline{\omega}'(t) + \zeta(t).\overline{\overline{\omega}}'(t)]\, dt =$$

$$= -\varepsilon \int_0^{t_0} [\omega(t).\xi'(t) + \overline{\omega}(t)\,\eta'(t) + \overline{\overline{\omega}}(t).\zeta'(t)]\, dt \qquad , \text{ahol}$$

a $\xi(t)$, stb. függvények a $\xi(uv)$,... stb. függvényekből $u = u(t)$, $v = v(t)$ behelyettesitésével állanak elö s az illetö függvényeknek a T határán felvett értékeit adják.

F-nek a parameteres tárgyalásnál szükséges homogén volta miatt a következö vonatkozások állanak fenn:

$$\omega_v x_v + \overline{\omega}_v y_v + \overline{\overline{\omega}}_v z_v = \omega_u x_u + \overline{\omega}_u y_u + \overline{\overline{\omega}}_u z_u = 0$$

$$\omega_v x_u + \overline{\omega}_v y_u + \overline{\overline{\omega}}_v z_u = -(\omega_u x_v + \overline{\omega}_u y_v + \overline{\overline{\omega}}_u z_v) = F$$

**

Mivel $\sum \omega_v x_u = F$ és $-\sum \omega_u x_v = F$, azért az integrál az extremale felületek bevezetése után a

$$J = \frac{1}{2} \iint_T \left[\frac{\partial(x\omega)}{\partial(uv)} + \frac{\partial(y\overline{\omega})}{\partial(uv)} + \frac{\partial(z\overline{\overline{\omega}})}{\partial(uv)} \right] du\, dv \qquad ,$$

az elsö variátióval analog alakban irható.

Az $\iint\limits_T F(x, y, z, x_u\, y_u\, z_u\, x_v\, y_v\, z_v)\, du\, dv = \min.$ problémáinál a teljesen hasonló úton levezetett egyenletrendszer:

$$
(3)' \quad
\begin{array}{lll}
F_{x_u} = \omega_v + \Omega_v & F_{x_v} = -\omega_u + \Omega_u & F_x = 2\Omega_{uv} \\
F_{y_u} = \overline{\omega}_v + \overline{\Omega}_v & F_{y_v} = -\overline{\omega}_u + \overline{\Omega}_u & F_y = 2\overline{\Omega}_{uv} \\
F_{z_u} = \overline{\overline{\omega}}_v + \overline{\overline{\Omega}}_v & F_{z_v} = -\overline{\overline{\omega}}_u + \overline{\overline{\Omega}}_u & F_z = 2\overline{\overline{\Omega}}_{uv} \; *
\end{array}
$$

A Stokes féle integrálátalakitással kapott elsö variátió alak ugyanaz, de a benne szereplö ω függvények jellege megváltozott, amennyiben az F mellett az Ω segédfüggvény is szerepel.

4. §.

Akár az $\iint\limits_{(T)} F(x_u\, y_u\, z_u\, x_v\, y_v\, z_v)\, du\, dv = \min.$, akár a $\iint\limits_{(T)} F(x, y, z, x_u\, y_u\, z_u\, x_v\, y_v\, z_v)\, du\, dv = \min.$ probléma esetében a keresett függvény legyen annak a feltételnek alávetve, hogy C határgörbéje a

$$\varphi(x\, y\, z) = 0$$

elöirt $\mathfrak{F}$ felületen feküdjön. (φ egyszer folytonosan differentiálható függvény.)

A konkurrens felületek egy egyparameteres serege

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(u, v; \varepsilon), \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(u, v; \varepsilon), \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(u, v; \varepsilon),$$

---

* Az ω és Ω függvények az

$$(\omega_v + \Omega_v)\, x_u + (\overline{\omega}_v + \overline{\Omega}_v)\, y_u + (\overline{\overline{\omega}}_v + \overline{\overline{\Omega}}_v)\, z_u = (\Omega_u - \omega_u)\, x_v + (\overline{\Omega}_u - \overline{\omega}_u)\, y_v + (\overline{\overline{\Omega}}_u - \overline{\overline{\omega}}_u)\, z_v = F'$$

és

$$(\omega_v + \Omega_v)\, x_v + (\overline{\omega}_v + \overline{\Omega}_v)\, y_v + (\overline{\overline{\omega}}_v + \overline{\overline{\Omega}}_v)\, z_v = (\Omega_u - \omega_u)\, x_u + (\overline{\Omega}_u - \overline{\omega}_u)\, y_u + (\overline{\overline{\Omega}}_u - \overline{\overline{\omega}}_u)\, z_u = 0$$

egyenleteknek tesznek eleget.

ahol X, Y, Z u, v és ε - nak egyszer folytonosan differentiálható függvényei. $X(t\varepsilon)$, $Y(t\varepsilon)$, $Z(t\varepsilon)$ az X, Y, Z-ből a $\mathfrak{L}$: $u=u(t)$ $v=v(t)$ helyettesítésével keletkeznek. Ezek ε minden értéke mellett kielégítik a

$$\varphi\left[X(t\varepsilon), Y(t\varepsilon), Z(t\varepsilon)\right]=0$$

egyenletet; továbbá az ebből a variátió processussal nyert

a) $$\varphi_x(t)\cdot\xi(t)+\varphi_y(t)\eta(t)+\varphi_z(t)\zeta(t)=0$$ egyenlet is

fennáll, ha $\xi(t)=X_\varepsilon(t\,0)$, stb és $\varphi_x(t)=\varphi_x\left[x[u(t),v(t)], y[u(t),v(t)], z[u(t),v(t)]\right]$ stb.

Az első variátió általánosítása szerint:

$$\int_0^{t_0}(\omega'\xi+\bar{\omega}'\eta+\bar{\bar{\omega}}'\zeta)\,dt=0$$ minden olyan

ξ, η, ζ függvényre nézve, amely az a) feltételt kielégíti. Az a) feltétel egy tetszőleges $V(t)$ függvénnyel szorozva, 0-tól t_0-ig integrálva és az első variátióhoz hozzáadva, adja

$$\int_0^{t^0}\left\{\xi(t)\left[V\cdot\varphi_x(t)+\omega'\right]+\eta(t)\left[V\varphi_y(t)+\bar{\omega}'\right]+\zeta(t)\left[V\varphi_z(t)+\bar{\bar{\omega}}'\right]\right\}dt=0$$

Kell tehát léteznie egy olyan $V(t)$ függvénynek, hogy

$$V(t)\cdot\varphi_x(t)+\omega'(t)=0$$
$$V(t)\varphi_y(t)+\bar{\omega}'(t)=0$$
$$V(t)\varphi_z(t)+\bar{\bar{\omega}}'(t)=0 \;*$$

* Lásd O. Bolza: Vorlesungen über Variationsrechnung Teubner. 1909. 68 §.

A feltétel részletesebben kiírva:

$$v(t).\ \varphi_x(t) + \omega_u(t).\ u'(t) + \omega_v(t).\ v'(t) = 0$$

$$v(t).\ \varphi_y(t) + \overline{\omega}_u(t).\ u'(t) + \overline{\omega}_v(t).\ v'(t) = 0$$

$$v(t).\ \varphi_z(t) + \overline{\overline{\omega}}_u(t).\ u'(t) + \overline{\overline{\omega}}_v(t).\ v'(t) = 0$$

s mivel $v(t) \neq 0$, tehát a határgörbén fenn kell állania a következő egyenletnek:

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \omega_u & \omega_v \\ \varphi_y & \overline{\omega}_u & \overline{\omega}_v \\ \varphi_z & \overline{\overline{\omega}}_u & \overline{\overline{\omega}}_v \end{vmatrix} = 0$$

Ez az egyenlet a $\iint\limits_{(T)} F(x_u\, y_u\, z_u\, x_v\, y_v\, z_v)\, du\, dv = \text{min.}$ probléma esetében

$$A) \quad \begin{vmatrix} F_{x_u} & F_{x_v} & \varphi_x \\ F_{y_u} & F_{y_v} & \varphi_y \\ F_{z_u} & F_{z_v} & \varphi_z \end{vmatrix} = 0^{*}$$

A $\iint\limits_{(T)} F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v)\, du\, dv = \text{min.}$ probléma esetében pedig:

$$B) \quad \begin{vmatrix} \varphi_x & F_{x_v} - \Omega_u & F_{x_u} - \Omega_v \\ \varphi_y & F_{y_v} - \overline{\Omega}_u & F_{y_u} - \overline{\Omega}_v \\ \varphi_z & F_{z_v} - \overline{\overline{\Omega}}_u & F_{z_u} - \overline{\overline{\Omega}}_v \end{vmatrix} = 0$$

---

* Lásd Bolza: idézett munka 8 0 §.

Ha a második differentiálhányadosok létezését is feltételezzük, akkor az általánosabb esetben is az A) alaku feltételt kapjuk. Tehát ekkor az A) alaku feltételt a B)-ből levonva az Ω-kra kapunk egy ujabb feltételt, amely olyan Ω-kra vonatkozik, amelyek kétszer folytonosan differentiálható $x(u\,v)$, $y(u\,v)$, $z(u\,v)$ függvényekhez tartoznak.

5 §.

A határfeltételeknek más faja az, ha a konkurrens felületeket annak a megszoritásnak vetjük alá, hogy határuk mentén egy bizonyos egyszeres integrál állandó értéket vegyen fel:

$$\int_{t_1}^{t_2} G\left[x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)\right] dt = \text{konstans}$$

$X, Y, Z, \xi, \eta, \zeta$-val ugyanoly jellegü függvényeket jelölve, mint a 4 §.-ban, az elsö variátiónak

$$\int_{t_1}^{t_2} (\omega' \xi + \overline{\omega}' \eta + \overline{\overline{\omega}}' \zeta)\, dt =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} (\omega \xi' + \overline{\omega}\, \eta' + \overline{\overline{\omega}} \zeta')\, dt$$

el kell tünni minden olyan ξ, η, ζ függvényre nézve, amely a kerületi feltételből a variátióprocesszussal nyert

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum G_x \xi + G_{x'} \xi'\right) dt = 0$$

feltételt kielégitik. Ez a feltétel elsö tagjának partiális integrátió-val való átalakitása után:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum\left\{\xi'\left(G_{x'} - \int_0^t G_x\, dt\right)\right\} dt = 0$$

[A partiális integrátiónál az integráljel nélküli tag elesik, mert $\xi(t_1) = \xi(t_2)$].

Az átalakitott feltételt egy tetszöleges (egyelöre) függvénnyel szorozva és az elsö variátióhoz adva nyerjük:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum \xi'\left[\omega + v.\left(G_{x'} - \int_0^t G_x\, dt\right)\right]\right\} dt = 0$$

A v választható tehát oly módon, hogy

$$\omega + v\left(G_{x'} - \int_0^t G_x\, dt\right) = \text{konstans}; \qquad \text{valamint}$$

$$\overline{\omega} + v\left(G_{y'} - \int_0^t G_y\, dt\right) = \text{konstans};$$

$$\overline{\overline{\omega}} + v\left(G_{z'} - \int_0^t G_z\, dt\right) = \text{konstans};$$

A (2)' és (3)' egyenletrendszerekből ω, $\overline{\omega}$ és $\overline{\overline{\omega}}$ értékeit betéve, láthatjuk, hogy a (2)' által reprezentált esetben e feltételek a második differentiálhányadosok feltételezésével kapott feltételeknek integrált alakjai, míg a (3)' által reprezentált esetben az Ω függvények fellépése komplikálja a feltételt. Ez esetre is érvényes a 4 § végén tett megjegyzés.*

x x x

Látható tehát, hogy az $\iint\limits_T f(x\,y\,p\,q)\,dx\,dy = \min.$ ill. a $\iint\limits_T F(x_u\,y_u\,z_u\,x_v\,y_v\,z_v)\,du\,dv = \min$ problémák esetében a második differentiálhányadosok létezésének feltételezésével kapott eredményeket találjuk, ha csak az elő differentiálhányadosokat veszem tekintetbe, míg a $\iint\limits_T f(x\,y\,z\,p\,q)\,dx\,dy = \min$, ill. a $\iint\limits_T F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v)\,du\,dv = \min.$ problémák esetében a feltételeket az Ω függvények fellépése modifikálja.

---

* A feltételeknek megfelelő ξ, η, ζ függvényekhez mindig tartozik egy megfelelő egyparaméteres ~~görbesereg~~. felületsereg

L. erre vonatkozóan Bolza idézett helyen 560, 568 o. a 4 §-hoz és 671 o. [2] lábjegyzet a 671 oldalon.