

J Ó Z S E F A T T I L A T U D O M Á N Y E G Y E T E M

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

NÉGYZETESEN INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNY FOURIER-SORÁNAK
RÉSZLETÖSSZEGEIRŐL

MÓRICZ FERENC
doktori értekezése

S Z E G E D

1967



Diss. B 386



B e v e z e t é s

A $(-\pi, \pi)$ intervallumon értelmezett, valós értékű, integrálható $f(x)$ függvénynek legyen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

a Fourier-sora, azaz legyen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

A Fourier-sorok vizsgálatának központi problémája a konvergencia-viszonyok pontos felkutatása. Részletesebben, annak a vizsgálata, hogy a Fourier-sor konvergál-e (pontonként, integrálközepben stb.), összegezhető-e a sorbafejtett függvényhez.

Az integrálközepben való konvergencia problémája viszonylag könnyebbnek bizonyult. A Riesz-Fischer-tétel szerint [1], [2] négyzetesen integrálható $f(x)$ függvény esetén a Fourier-sor négyzetintegrálra tart $f(x)$ -hez, azaz, ha $s_n(x)$ jelöli a Fourier-sor n -edik részletösszegét, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty);$$

és érvényes a Parseval-formula:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2 + \dots \right].$$

Fordítva, tetszésszerűen olyan $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ valós számokhoz, amelyek négyzetei konvergens sort alkotnak, található egy (nullamértékű halmaztól eltekintve) egyértelműen meghatározott, négyzetesen integrálható függvény, amelynek ezek a Fourier-együtthatói.

Ha az $f(x)$ függvényről csak azt tesszük fel, hogy integrálható, akkor Fourier-sorának $s_n(x)$ részletösszegeiről a következő állítható [3], 267.o.: megadható a részletösszegeknek olyan (a függvénytől függő) $\{s_{n_k}(x)\}$ részsorozata, amelyre

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_{n_k}(x)| dx \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

A Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájának problémája jóval bonyolultabbnak bizonyult. KOLMOGOROV [4], [5] olyan integrálható függvényt konstruált a $(-\pi, \pi)$ intervallumon, amelynek Fourier-sora mindenütt divergál. (1926). Sőt, ezen függvény Fourier-sorának $s_n(x)$ részletösszegeire a következő nagyságrendi becslés is igaz: tetszőleges $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) pozitív számsorozat esetén

$$s_n(x) \neq O(\varepsilon(n) \log \log n)$$

majdnem mindenütt. Megjegyezzük, hogy a legjobb eddigi eredmény ebben az esetben $\sigma(\log n)$ [3], 66. o.

Ezekután természetesen merült fel a kérdés: mit lehet állítani az L^p -integrálható ($p > 1$), speciálisan a négyzetesen integrálható függvények Fourier-soráról. Ebben az irányban az első pozitív eredményt GARSIA [6] érte el (1964). Sikerkült bebizonyítani, hogy minden négyzetesen integrálható függvény Fourier-sora átrendezhető úgy, hogy az átrendezett sor majdnem mindenütt konvergál. (Az átrendezés függ a sorbafejtett függvénytől.) Végül CARLESON [7] bizonyította be azt a rendkívül mély tételt, amely szerint minden négyzetesen integrálható függvény Fourier-sora az eredeti sorrendben majdnem mindenütt konvergál (1966). Az L^p -integrálható függvények ($1 < p < 2$) Fourier-sorának konvergencia problémája még nyitott.

Már GARSIA pozitív eredményét jóval megelőzően felmerült a négyzetesen integrálható függvények átrendezett Fourier-sorának divergenciaproblémája. KOLMOGOROV [8] volt az első, aki megjegyezte, hogy létezik olyan négyzetesen integrálható függvény, amelynek Fourier-sora tagjainak egy bizonyos átrendezésében majdnem mindenütt divergál (1927). Azonban ezen tény bizonyítását sohasem közölte. Azután ZAHORSKI [9] vázolta ezen állítás egy bizonyítását (1960). Ujabban, OLEVSZKIJ [10] és ULJANOV [11] nyertek olyan általános tételeket, amelyekből következett ilyen négyzetesen integrálható függvény létezése. Azután, kevésbé elemi eszközöket használva, TAJKOV [12] nyert valamivel élesebb eredményt, és TANDORI [13] adott direkt elemi konstrukciót,

amely KOLMOGOROV állításához vezetett, azzal az élesítéssel, hogy az általuk megadott átrendezett FOURIER-sor mindenütt divergált.

ULJANOV vetette fel a következő kérdést: mi a pontos Weyl-féle multiplikátora a feltétel nélküli konvergenciának négyzetesen integrálható függvények Fourier-sora esetében? A feltétel nélküli konvergencia pontos Weyl-féle multiplikátorán olyan nem-negatív valós $\{\lambda(n)\}$ számsorozatot értünk, amelyre igaz a következő két állítás:

1) ha a valós $\{a_n, b_n\}$ együttthatórendszerre

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \lambda^2(n) < \infty,$$

akkor az ezen együttthatókkal képezett Fourier-sor tagjainak minden átrendezésében majdnem mindenütt konvergál;

2) ha a nem-negatív valós $\{\mu(n)\}$ számsorozat olyan, hogy

$$\mu(n) = o(\lambda(n)),$$

akkor megadható valós $\{A_n, B_n\}$ együttthatósorozat, amellyel képezett Fourier-sor tagjainak egy bizonyos átrendezésében pozitív mértékű halmazon divergál és

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \mu^2(n) < \infty.$$

Erre a problémára a válasz nem ismeretes. Arra a kérdésre próbálunk választ adni, milyen, az együttthatókra tett megszorítások mellett is igaz még, hogy van mindenütt divergens átrendezés. Eredményünk:

1. t é t e l. Ha $\{\rho(n)\}$ pozitív, valós számok

tetszőleges olyan sorozata, amelyre

$$(1) \quad g(n) = O(\sqrt{\log \log n})^{1)}$$

akkor létezik olyan négyzetesen integrálható függvény, amelynek Fourier-együtthatóira

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) g^2(n) < \infty$$

és amelynek a Fourier-sora átrendezhető mindenütt divergens sorrá.

Az 1. tétel szerint a feltétel nélküli konvergencia pontos Weyl-féle multiplikátora Fourier-sorok esetén legalább $O(\log \log n)$. A másik kérdés a következő: négyzetesen integrálható függvények esetén milyen nagy lehet az átrendezett Fourier-sor részletösszege.

2. tétel. Ha $\{g(n)\}$ pozitív, valós számok olyan sorozata, amelyre (1) érvényes, akkor létezik olyan négyzetesen integrálható függvény, amelynek Fourier-sora átrendezhető oly módon, hogy az átrendezett sor $G_N(x)$ részletösszegeire mindenütt álljon:

$$(3) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|G_N(x)|}{g(N)} > 0$$

1)

A következőkben a logaritmust mindig 4-es alappal értjük (bár ez eredményeink szempontjából nem lényeges).

Kérdés, hogy a (2) feltétel illetve a (3) becslés a legfinomabb-e. Más szavakkal, a Fourier-sor együtthatóira tett

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log \log^2 n < \infty$$

feltevésből következik-e a feltétel nélküli konvergencia; továbbá, négyzetesen integrálható függvény Fourier-sora tagjainak tetszőleges átrendezése esetén igaz-e, hogy majdnem mindenütt

$$S_N(x) = o(\sqrt{\log \log n})$$

Ezuton szeretnék köszönetet mondani TANDORI KÁROLY professzor urnak, aki ezen problémakörre felhívta figyelmet és értékes tanácsaival segített.

1. § Segédtelek

Ismeretes, hogy az n -edik Fejér-féle magfüggvény zárt előállítására a következő:

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kx = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin(n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

Egyszerű számolással nyerjük a következő egyenlőtlenségeket:

$$(4) \quad K_n(x) \geq \frac{2(n+1)}{\pi^2} \quad \text{ha} \quad |x| \leq \frac{\pi}{n+1},$$

$$(5) \quad 0 \leq K_n(x) \leq \frac{n+1}{2}, \quad K_n(x) \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)x^2} \quad \text{ha} \quad |x| \leq \frac{\pi}{2},$$

és

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(x) dx < \pi n.$$

A következőkben egy E halmazt egyszerűnek nevezünk, ha véges sok, egymásba nem nyúló, zárt $[\alpha_k, \beta_k]$ ($\alpha_k < \beta_k$) intervallum egyesítése. Bármely $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \min_k (\beta_k - \alpha_k)/2$) valós számra legyen

$$E^{(\varepsilon)} = \bigcup_k [\alpha_k + \varepsilon, \beta_k - \varepsilon].$$

Továbbá, az $a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$ ($\neq 0$) függvényt ν frekvenciájú tagnak nevezzük. Ezekután két trigonometrikus polinomot diszjunktnak nevezünk, ha a két polinomnak nincs közös frekvenciájú tagja.

$C_1, C_2, \dots$ pozitív abszolút állandókat jelölnek.

1. s e g é d t é t e l. Legyenek $\delta (\leq \pi/8)$, $\varepsilon (< \delta)$ és $\eta (\leq 1)$ pozitív valós számok, és n olyan természetes szám, amelyre $n > C_1/\varepsilon\eta$. Akkor megadható olyan nem-negatív $P(x)$ trigonometrikus polinom 4ν ($\nu = 0, 1, \dots, n$) frekvenciákkal, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$(7) \quad P(x) \geq 1 \quad \text{ha} \quad |x| \leq \delta - \varepsilon,$$

$$(8) \quad P(x) \leq \eta \quad \text{ha} \quad \delta \leq |x| \leq \frac{\pi}{8},$$

és

$$(9) \quad \int_{-\pi}^{\pi} P^2(x) dx \leq C_2 \delta.$$

B i z o n y i t á s. Irjuk a rövidség kedvéért

$$a = \frac{\pi}{4(n+1)}, \quad b_k = \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad (k=0, \pm 1, \dots).$$

Határozzuk meg a β és σ egész számokat úgy, hogy a

$$b_\beta - a \leq -\delta + \varepsilon < b_\sigma \quad \text{és} \quad b_\sigma < \delta - \varepsilon \leq b_\sigma + a$$

egyenlőtlenségek fennálljanak. Ez lehetséges, ha az n -et úgy választjuk, hogy $n+1 > \pi/2\varepsilon$.

Tekintsük a

$$P(x) = 2\pi a \sum_{r=\vartheta}^{\varsigma} K_n(4(x-b_r))$$

trigonometrikus polinomot. Meg fogjuk mutatni, hogy $P(x)$ rendelkezik a (7)-(9) tulajdonságokkal. A ϑ és ς választása, továbbá (4) alapján könnyű látni, hogy (7) teljesül.

A (8) egyenlőtlenséget bizonyítandó, tegyük fel, hogy $\vartheta \leq |x| \leq \pi/8$. Felhasználva (5)-öt, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(x) &\leq 2\pi a \sum_{r=\vartheta}^{\varsigma} \frac{\pi^2}{32(n+1)(x-b_r)^2} < \frac{a\pi^3}{16(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\varepsilon+b_k)^2} < \\ &< \frac{\pi^3}{32(n+1)} \left(\frac{2a}{\varepsilon^2} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right) < \frac{\pi^3}{16\varepsilon(n+1)}. \end{aligned}$$

Innen kapjuk (8)-at, ha $C_1 = \pi^3/16$.

Ezekután már csak (9) fennállását kell megmutatnunk. Helyettesítéssel való integrálással kapjuk, hogy

$$(10) \quad \int_{-\pi}^{\pi} P^2(x) dx = 4\pi^2 a^2 \sum_{r=\vartheta}^{\varsigma} \sum_{b=\vartheta}^{\varsigma} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-b_r) K_n(x-b_b) dx.$$

Ha $r \neq b$, például $r < b$, akkor bontsuk fel az integrált öt integrál összegére a következő módon:

$$(11) \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-b_r) K_n(x-b_b) dx = \int_{-\pi}^{b_r-a} + \int_{b_r-a}^{b_r+a} + \int_{b_r+a}^{b_b-a} + \int_{b_b-a}^{b_b+a} + \int_{b_b+a}^{\pi}.$$

Jelöljük a jobboldalon álló integrálokat egymás után I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 -tel. Alkalmazva (4), (5) és (6)-ot kapjuk, hogy

$$(12) \quad I_1 \leq \frac{\pi^4}{4(n+1)^2} \int_{-\pi}^{b_r-a} \frac{dx}{(x-b_r)^2(x-b_s)^2} < \frac{\pi^4}{4(n+1)^2} \cdot \frac{1}{(b_s-b_r)^2} \int_{-\pi}^{b_r-a} \frac{dx}{(x-b_s)^2} < \\ < \frac{\pi^2}{(b-r)^2} \cdot \frac{1}{b_s-b_r+a} < \frac{\pi^2}{(b-r)^2 a},$$

$$(13) \quad I_2 \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)} \cdot \frac{n+1}{2} \int_{b_r-a}^{b_r+a} \frac{dx}{(x-b_s)^2} < \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2a}{(b_s-b_r-a)^2} = \\ = \frac{2a(n+1)^2}{(b-r-\frac{1}{2})^2} = \frac{\pi^2}{2(2b-2r-1)^2 a}.$$

Ugyanezek a becslések igazak I_5 -re illetve I_4 -re is. Ami I_3 -at illeti, világos, hogy $I_3 = 0$ ha $b = r+1$. Ha $b > r+1$, akkor bontsuk fel az integrált két integrálra az összegére a következő módon:

$$I_3 = \int_{b_r+a}^{(b_r+b_s)/2} + \int_{(b_r+b_s)/2}^{b_s-a} = J_1 + J_2.$$

J_1 pontosan ugyanugy becsülhető, mint I_1 és I_2 , és kapjuk, hogy

$$(14) \quad J_1 \leq \frac{\pi^4}{4(n+1)^2} \int_{b_r+a}^{(b_r+b_s)/2} \frac{dx}{(x-b_r)^2(x-b_s)^2} < \\ < \frac{\pi^4}{4(n+1)^2} \cdot \frac{4}{(b_s-b_r)^2} \int_{b_r+a}^{(b_r+b_s)/2} \frac{dx}{(x-b_r)^2} < \frac{4\pi^2}{(b-r)^2 a},$$

és ugyanez igaz J_2 -re is.

Figyelembe véve a (11), (12), (13) és (14) becs-
léseket, kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-b_r) K_n(x-b_s) dx < 2(I_1 + I_2 + J_1) < \frac{11\pi^2}{(b-r)^2 a}$$

Ebből, (6) és (10) alapján, következik, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} P^2(x) dx < 4\pi^2 a^2 \sum_{r=3}^5 \left(\pi n + \frac{22\pi^2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) <$$

$$< 177\pi^4 a (5-3+1) = 177\pi^4 \left(\frac{b_5 - b_3}{2} + a \right) = C_2 \delta,$$

ha $C_2 = 177\pi^4$. Ezzel az 1. segédtétel bizonyítását be-
fejeztük.

A fenti gondolatmenettel bizonyítható az 1. segéd-
tétel következő általánosítása is:

1'. s e g é d t é t e l. Legyen $E \subset [-\pi/8, \pi/8]$
egyszerű halmaz, ε és $\eta (\leq 1)$ pozitív valós számok, és n
olyan természetes szám, amelyre $n > C_1 / \varepsilon \eta$. Megadható
olyan nem-negatív $P(x)$ trigonometrikus polinom 4γ
 $(\gamma = 0, 1, \dots, n)$ frekvenciákkal, amely a következő tulajdon-
ságokkal rendelkezik:

(7') $P(x) \geq 1$ ha $x \in E^{(\varepsilon)}$,

(8') $P(x) \leq \eta$ ha $x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] - E$,

és

$$(9') \quad \int_{-\pi}^{\pi} P^2(x) dx \leq C_2 \operatorname{mes}(E)^2$$

2. s e g é d t é t e l. Legyen $P(x)$ az 1'. segéd-tételben előforduló polinom, és N olyan 4-gyel oszt-
ható természetes szám, amelyre $N > 4n+2$. Továbbá, le-
gyen

$$Q_1(x) = \cos Nx \cdot P(x),$$

$$(15) \quad Q_2(x) = -C_3 \cos 2x \cdot Q_1(x),$$

$$Q_3(x) = C_4 \cos 4Nx \cdot P(x).$$

Ekkor $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ és $Q_3(x)$ páronként diszjunkt trigo-
nometrikus polinomok 2ν frekvenciákkal ($N/2 - 2n - 1 \leq \nu \leq$
 $\leq 2N + 2n$), és a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$(16) \quad |Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x)| \leq C_5 \eta \quad \text{ha} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] - E,$$

$$(17) \quad \int_{-\pi}^{\pi} (Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x))^2 dx \leq C_6 \operatorname{mes}(E).$$

Továbbá, megadható az $E^{(\varepsilon)}$ halmaznak olyan felbontása há-
rom páronként diszjunkt E_1, E_2, E_3 részhalmazzra, hogy

$$(18) \quad \sum_{k=1}^l Q_k(x) \geq \frac{1}{4} \quad \text{ha} \quad x \in E_l \quad (l=1, 2, 3).$$

2) $\operatorname{mes}(E)$ jelöli az E halmaz Lebesgue mértékét.

B i z o n y í t á s. Nyilvánvaló, hogy $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ és $Q_3(x)$ páronként diszjunkt trigonometrikus polinomok, mivel $Q_1(x)$ és $Q_3(x)$ csak olyan tagokat tartalmaznak, amelyek frekvenciája 4-gyel osztható, míg $Q_2(x)$ csak olyan tagokat, amelyek frekvenciája 2-vel osztható, de 4-gyel nem, és továbbá, az N -re tett feltevésből következik, hogy $N + 4n < 4N - 4n$.

Felhasználva a

$$\cos x \geq \frac{1}{4} \quad \text{ha} \quad |x| \leq \frac{5\pi}{12}$$

elemi egyenlőtlenséget, kapjuk a következő becsléseket:

$$Q_1(x) \geq \frac{P(x)}{4} \geq \frac{1}{4}$$

ha

$$x \in \bar{E}_1 = E^{(\varepsilon)} \cap \left\{ \bigcup_k \left[\frac{1}{N} \left(2k\pi - \frac{5\pi}{12} \right), \frac{1}{N} \left(2k\pi + \frac{5\pi}{12} \right) \right] \right\},$$

$$Q_1(x) + Q_2(x) \geq - (C_3 \cos 2x - 1) \cos Nx \cdot P(x) \geq \left(\frac{C_3}{4} - 1 \right) \frac{1}{4}$$

ha

$$x \in \bar{E}_2 = E^{(\varepsilon)} \cap \left\{ \bigcup_k \left[\frac{1}{N} \left(2k\pi + \frac{7\pi}{12} \right), \frac{1}{N} \left(2k\pi + \frac{17\pi}{12} \right) \right] \right\},$$

és

$$Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x) \geq (C_4 \cos 4Nx - C_3 - 1) P(x) \geq \frac{C_4}{4} - C_3 - 1$$

ha

$$x \in \bar{E}_3 = E^{(\varepsilon)} \cap \left\{ \bigcup_k \left[\frac{1}{N} \left(\frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{48} \right), \frac{1}{N} \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{48} \right) \right] \right\}.$$

Mivel

$$\frac{5\pi}{12} > \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{48} \quad \text{és} \quad \frac{7\pi}{12} < \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{48} ,$$

ezért $E^{(e)} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \cup \bar{E}_3$. Ezekután, legyen $E_1 = \bar{E}_1$, $E_2 = \bar{E}_2 - E_1$ és $E_3 = \bar{E}_3 - (E_1 \cup E_2)$. Ezzel bizonyítottuk (18)-at, $C_3 = 8$ és $C_4 = 4C_3 + 5$ állandókkal.

Könnyű látni, hogy a (16) és (17) egyenlőtlenségek teljesülnek, ha $C_5 = 1 + C_3 + C_4$ és $C_6 = 1 + C_3^2 + C_4^2$. Ezzel a 2. segédétel bizonyítását befejeztük.

A továbbiakban szükségünk lesz a 2. segédétel következő, kissé általánosabb formájára is, amely az előbbi módon bizonyítható be.

2'. s e g é d t é t e l. Legyen $P(x)$ tetszőleges trigonometrikus polinom páros $\nu (\leq n)$ frekvenciákkal, és N olyan páros természetes szám, amelyre $N > n+1$. Továbbá, legyenek

$$Q_1(x) = \cos Nx \cdot P(x) ,$$

$$(15') \quad Q_2(x) = -C_3 \cos x \cdot Q_1(x) ,$$

$$Q_3(x) = C_4 \cos 4Nx \cdot P(x) .$$

Akkor $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ és $Q_3(x)$ páronként diszjunkt trigonometrikus polinomok $N-n-1$ és $4N+n$ közé eső frekvenciákkal, és a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$(16') \quad |Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x)| \leq C_5 |P(x)| ,$$

$$(17') \quad \int_{-\pi}^{\pi} (Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x))^2 dx \leq C_6 \int_{-\pi}^{\pi} P^2(x) dx .$$

Továbbá, minden mérhető $E \subset [-\pi/8, \pi/8]$ halmaz, amelyen $P(x)$ pozitív, felbontható három, páronként diszjunkt, mérhető E_1, E_2, E_3 részalmazra oly módon, hogy

$$(18') \quad \sum_{k=1}^l Q_k(x) \geq \frac{P(x)}{4} \quad \text{ha} \quad x \in E_l \quad (l=1, 2, 3).$$

3. s e g é d t é t e l. Legyen $\varepsilon (< \pi/4)$ pozitív valós szám. Megadhatók páronként diszjunkt $R_k^{(i)}(x)$ trigonometrikus polinomok és $E_k^{(i)}$ egyszerű halmazok $(k=1, 2, \dots, 3^i; i=1, 2, \dots)$ a következő tulajdonságokkal:

(i) az $R_k^{(i)}(x)$ -ben $(k=1, 2, \dots, 3^i)$ előforduló frekvenciák páros számok, legfeljebb $f_i = (C_7/\varepsilon)^i 4^{4^i}$ -vel egyenlők;

$$(ii) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{3^i} R_k^{(i)}(x) \right)^2 dx \leq C_8 \quad i=1, 2, \dots;$$

(iii) az ugyanazon i -hez tartozó $E_k^{(i)}$ halmazok $(k=1, 2, \dots, 3^i)$ diszjunktak, az

$$F_i = \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right] - \bigcup_{k=1}^{3^i} E_k^{(i)}$$

halmaz legfeljebb $2f_i$ diszjunkt intervallumból áll, és

$$(19) \quad \text{mes}(F_i) \leq \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^i} \right) \quad i$$

(iv) tetszőleges i természetes számra, az $R_k^{(j)}(x)$ trigonometrikus polinomok $(k=1, 2, \dots, 3^j; j=1, 2, \dots, i)$ egy

$$u_1^{(i)}(x), u_2^{(i)}(x), \dots, u_{J_i}^{(i)}(x), \quad J_i = 3 + 3^2 + \dots + 3^i,$$

sorozatba rendezhetők oly módon, hogy

$$(20) \quad \sum_{j=1}^{\mu_k^{(i)}} u_j^{(i)}(x) \geq \frac{i}{8} \quad \text{minden } x \in E_k^{(i)} \text{ -re,}$$

ahol $\mu_k^{(i)}$ nem függ az $E_k^{(i)}$ -beli x pont speciális választásától

M e g j e g y z é s a 3. segédtételhez: (i) és (ii) alapján nyilvánvaló, hogy

$$(21) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{J_i} u_j^{(i)}(x) \right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{3^j} R_k^{(j)}(x) \right)^2 dx \leq C_8 i$$

érvényes minden i -re.

B i z o n y í t á s. Az $R_k^{(i)}(x)$ trigonometrikus polinomok és az $E_k^{(i)}$ halmazok értelmezése i szerint haladó rekurzióval történik.

Először legyen $i=1$. Alkalmazzuk az 1. segédtételt $\delta = \pi/8$ -al, $\varepsilon/4$ -gyel ε helyett, $\eta = 1$ -gyel és $n = [4C_1/\varepsilon] + 1$ -gyel. Azután alkalmazzuk a 2. segédtételt az így nyert trigonometrikus polinommal és $N = 4n + 4$ -gyel. Ezáltal kapjuk a (16), (17) és (18)-nak eleget tevő $Q_k(x)$ trigonometrikus polinomokat és az E_k egyszerű halmazokat ($k=1,2,3$). Irjuk most $R_k^{(1)}(x) = Q_k(x)$ és $E_k^{(1)} = E_k$ ($k=1,2,3$). Világos, hogy $R_k^{(i)}(x)$ -ben ($k=1,2,3$) csak páros frekvenciák fordulnak elő, és ezek nem haladják meg a következőt:

$$2(4N + 4n) = 40n + 32 \leq \frac{C_7}{\varepsilon} 4^4 = f_1,$$

ahol $C_7 = 64C_1C_5$. A (ii) és (iii) állítások is teljesülnek,

³⁾ $[\alpha]$ jelöli az α valós szám egész részét.

ha $C_\delta = C_6 \pi / 4$, továbbá az F_1 halmaz legfeljebb

$$2 \sum_{k=1}^3 \frac{4}{\pi} \cos(E_k^{(i)}) f_1 \leq 2 f_1$$

intervallumból áll. $U_j^{(i)}(x) = R_j^{(i)}(x)$ -et és $\mu_j^{(i)} = j$ -t ($j=1,2,3$) írva, látjuk, hogy (iv) is fennáll.

Most tegyük fel, hogy az összes $R_k^{(i)}(x)$ trigonometrikus polinomot és $E_k^{(i)}$ halmazt ($i=1,2,\dots,m$) már értelmeztük úgy, hogy (i)-(iv) fennállnak, és értelmezni fogjuk az $i=m+1$ -nek megfelelő polinomokat és halmazokat úgy, hogy a kiterjesztett rendszer még teljesítse (i)-(iv)-et.

Az 1'. segédtétel alkalmazásával kezdjük, egymásután választva $E_k^{(m)}$ -et ($k=1,2,\dots,3^m$) (az E helyett), $\kappa \varepsilon$ -nal (ε helyett), η -val és $n > \max(\{m, C_1/\kappa \varepsilon \eta\})$ -val, ahol a κ, η pozitív számokat és az n természetes számot később fogjuk meghatározni. Jelölje $P_k(x)$ ($k=1,2,\dots,3^m$) a megfelelő trigonometrikus polinomokat az 1'. segédtétel értelmében. Ezekután alkalmazzuk a 2. segédtételt a $P_k(x)$ trigonometrikus polinomok mindegyikére, a (15) szerinti három függvényt a következőképpen választva:

$$R_{3k-2}^{(m+1)}(x) = \cos N_k x \cdot P_k(x),$$

$$R_{3k-1}^{(m+1)}(x) = -C_3 \cos 2x \cdot R_{3k-2}^{(m+1)}(x),$$

$$R_{3k}^{(m+1)}(x) = C_4 \cos 4N_k x \cdot P_k(x)$$

($k=1,2,\dots,3^m$), ahol az N_k természetes számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$f_m < \frac{N_1}{2} - 2n - 1, \quad 2N_k + 2n < \frac{N_{k+1}}{2} - 2n - 1$$

($k=1, 2, \dots, 3^m-1$), és, ezen felül, mindegyik N_k osztható 4 -
gyel. Válasszuk az N_k számokat például a következőkép-
pen:

$$(22) \quad N_1 = 8n + 4, \quad N_{k+1} = 4N_k + 8n + 4 \quad (k=1, 2, \dots, 3^m-1).$$

A (22) rekurzív értelmezések biztosítják, hogy
az $R_k^{(m+1)}(x)$ ($k=1, 2, \dots, 3^{m+1}$) trigonometrikus polinomok diszjunktak
egymástól és az összes $R_k^{(i)}(x)$ ($i \leq m$) polinomoktól. (22)-
ből kapjuk, hogy az $R_k^{(m+1)}(x)$ -ben előforduló frekvenciák
páros számok és nem haladják meg a következőt:

$$(23) \quad 4N_{3^m} + 4n < (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{3^m}) (16n + 1).$$

(17) szerint

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{3^{m+1}} R_k^{(m+1)}(x) \right)^2 dx \leq C_6 \int_{-\pi}^{\pi} \text{mes} (E_k^{(m)}) \leq C_8.$$

Ezzel nyertük, hogy (ii) érvényes $i = m+1$ -re is, $C_8 = C_6 \pi / 4$ -
gyel.

A 2. segédétel szerint megadható az $(E_k^{(m)})_{k \in \mathbb{N}}$ hal-
mazoknak egy felbontásuk három, páronként diszjunkt egysze-
rű részhalmazra, amelyeket jelöljünk most $E_{3k-2}^{(m+1)}$, $E_{3k-1}^{(m+1)}$
és $E_{3k}^{(m+1)}$ -gyel; így a $k=1, 2, \dots, 3^m$ mindegyikére ér-
vényes a következő:

$$(24) \quad \sum_{j=1}^l R_{3k-3+j}^{(m+1)}(x) \geq \frac{1}{4} \quad \text{ha} \quad x \in E_{3k-3+l}^{(m+1)} \quad (l=1, 2, 3).$$

Világos, hogy az $E_k^{(m+1)}$ ($k=1, 2, \dots, 3^{m+1}$) halmazok páronként diszjunktak. Az indukciós feltevés alapján nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \text{mes}(F_{m+1}) &\leq \text{mes}(F_m) + \text{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{3^m} (E_k^{(m)} - (E_{3k-2}^{(m+1)} \cup E_{3k-1}^{(m+1)} \cup E_{3k}^{(m+1)}))\right) \leq \\ &\leq \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) + 2f_m \cdot 2\kappa\varepsilon \end{aligned}$$

Ha tehát úgy rögzítjük az eddig határozatlan κ -t, hogy

$$(25) \quad \kappa = \frac{1}{2^{m+3} f_m},$$

akkor (19) teljesülni fog. Könnyen látható, hogy az F_{m+1} halmaz legfeljebb $2f_{m+1}$ intervallumból áll, mivel

$$2 \sum_{k=1}^{3^{m+1}} \frac{4}{\pi} \text{mes}(E_k^{(m+1)}) f_{m+1} \leq 2f_{m+1}.$$

Ez azt mutatja, hogy (iii) érvényes.

Az $R_k^{(i)}(x)$ ($k=1, 2, \dots, 3^i$; $i=1, 2, \dots, m, m+1$) trigonometrikus polinomok átrendezését a (iv) által kívánt sorozatba a következő módon valósítjuk meg. Az indukciós feltevés alapján, legyen

$$(26) \quad u_1^{(m)}(x), u_{-2}^{(m)}(x), \dots, u_{3_m}^{(m)}(x)$$

az összes $R_k^{(i)}(x)$ ($i \leq m$) trigonometrikus polinomoknak olyan sorozata, amely eleget tesz (iv)-nek. Mindegyik $R_k^{(m)}(x)$ ($k=1, 2, \dots, 3^m$) trigonometrikus polinom esetén megkeressük azt a helyet, ahol az a (26) sorozatban előfordul, és ezután az

$$R_{3k-2}^{(m+1)}(x), R_{3k-1}^{(m+1)}(x), R_{3k}^{(m+1)}(x)$$

trigonometrikus polinomokat beszúrjuk közvetlenül $R_k^{(m)}(x)$ után (26)-ban. Ily módon az összes $R_k^{(i)}(x)$ ($i \leq m+1$) trigonometrikus polinomot egy jól meghatározott $\{u_j^{(m+1)}(x)\}$ sorozatba rendeztük.⁴⁾

Minden k -ra ($k = 1, 2, \dots, 3^{m+1}$) jelölje $\mu_k^{(m+1)}$ az $\{u_j^{(m+1)}(x)\}$ sorozat azon tagjának a j alsó indexét, amely egyenlő $R_k^{(m+1)}(x)$ -szel. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\sum_{j=1}^{\mu_{3k-3+l}^{(m+1)}} u_j^{(m+1)}(x) \geq \sum_{j=1}^{\mu_k^{(m)}} u_j^{(m)}(x) + \sum_{j=1}^l R_{3k-3+j}^{(m+1)}(x) - \sum_{j=1}^{3^m} |R_j^{(m+1)}(x)|,$$

ahol az utolsó összegezés minden j indexre veendő kivéve $j = 3k-3+l$ -et ($l = 1, 2, 3$). Az indukciós feltevés, (16) és (24) alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{\mu_{3k-3+l}^{(m+1)}} u_j^{(m+1)}(x) \geq \frac{m}{8} + \frac{1}{4} - (3^m - 1) C_5 \eta$$

minden $x \in E_{3k-3+l}^{(m+1)}$ -re ($l = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, 3^m$), és ez legalább $(m+1)/8$ lesz, ha most az η értékét a következőképpen rögzítjük:

$$(27) \quad \eta = \frac{1}{8 C_5 (3^m - 1)}$$

⁴⁾ Például, az $m = 1$ esetben az $\{u_j^{(2)}(x)\}$ sorozat így értelmezett: $R_1^{(1)}(x), R_1^{(2)}(x), R_2^{(2)}(x), R_3^{(2)}(x), R_2^{(1)}(x), R_4^{(2)}(x), R_5^{(2)}(x), R_6^{(2)}(x), R_3^{(1)}(x), R_7^{(2)}(x), R_8^{(2)}(x), R_9^{(2)}(x)$.

Ez bizonyítja, hogy (iv) érvényes az $i = m+1$ esetre is.

Igy megmutattuk, hogy az (i)-(iv) tulajdonságok teljesülnek, kivéve az f_{m+1} -re vonatkozó állítást (i)-ben, azaz azt, hogy f_{m+1} választható $(C_7/\varepsilon)^{m+1} 4^{m+1}$ -nek. (25) és (27) szerint n -et úgy kell választani, hogy

$$n > \max_{\kappa \in \eta} \left(f_m, \frac{C_1}{\kappa \varepsilon} \right) = 64 C_1 C_5 6^m \frac{f_m}{\varepsilon},$$

például $n = [6^m f_m C_7/\varepsilon] + 1$, ahol $C_7 = 64 C_1 C_5$. (23) szerint az $R_k^{(m+1)}(x)$ -ben előforduló frekvenciák nem haladják meg

$$4^{3^{m+2}} 6^m f_m \frac{C_7}{\varepsilon} < \left(\frac{C_7}{\varepsilon} \right)^{m+1} 4^{m+1} = f_{m+1}$$

-et. Ezzel a 3. segédétel bizonyítását teljesen befejeztük.

4. s e g é d t é t e l. Legyen M tetszőleges természetes szám. Minden m természetes számra ($m = 1, 2, \dots$) megadhatók páronként diszjunkt $S_j^{(m)}(x)$ ($j = 1, 2, \dots, \tilde{J}_{m+1}$) trigonometrikus polinomok a következő tulajdonságokkal:

(v) az $S_j^{(m)}(x)$ trigonometrikus polinomokban előforduló ν frekvenciákra $M+1 \leq \nu \leq 16M + 4^{m+C_9}$;

(vi)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{\tilde{J}_{m+1}} S_j^{(m)}(x) \right)^2 dx \leq \frac{C_{10}}{m} \quad (m = 1, 2, \dots);$$

(vii)
$$\sum_{j=\mu_1}^{\mu_2} S_j^{(m)}(x) \geq \frac{1}{32} \quad \text{minden } |x| \leq \frac{\pi}{8} \text{ -ra,}$$

ahol $\mu_i = \mu_i^{(m)}(x)$ ($i = 1, 2$), $1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \tilde{J}_{m+1}$ ($m = 1, 2, \dots$).

B i z o n y í t á s. Rögzítsük az m természetes számot, majd alkalmazzuk a 3. segédtételt $\varepsilon_1 = 1/m$ -mel. Ezáltal nyerjük a páronként diszjunkt $U_j^{(m)}(x)$ ($j = 1, 2, \dots, 3^m$) trigonometrikus polinomokat, az $U_j^{(m)}(x)$ -ben előforduló frekvenciák páros számok és nem nagyobbak f_m -nél; továbbá a páronként diszjunkt $E_k^{(m)}$ ($k = 1, 2, \dots, 3^m$) egyszerű halmazokat, amelyekre (iii), (20) és (21) fennáll.

Jelöljük F -fel azt az egyszerű halmazt, amelyet a $[-\pi/8, \pi/8] - \bigcup_{k=1}^{3^m} E_k^{(m)}$ egyszerű halmazból úgy kapunk, hogy mindegyik $[\alpha, \beta]$ intervallumát $[\alpha - \varepsilon_2, \beta + \varepsilon_2]$ -vel helyettesítjük, ahol $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 / 4f_m$. (iii) szerint F legfeljebb $2f_m$ intervallumból áll, továbbá

$$mes(F) \leq mes\left(\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] - \bigcup_{k=1}^{3^m} E_k^{(m)}\right) + 4f_m \varepsilon_2 \leq \frac{2}{m}.$$

Alkalmazzuk az 1'. segédtételt. F -et választva E helyett, ε_2 -öt ε helyett, $\eta = 1$ -gyel és f_{m+1} -et n helyett. Jelöljük $P^{(m)}(x)$ -szel a kapott trigonometrikus polinomot. $P^{(m)}(x)$ 4ν frekvenciájú tagokból áll ($\nu = 0, 1, \dots, f_{m+1}$), továbbá $P^{(m)}(x)$ -re érvényes (7') és (9').

Legyenek N_1 és N_2 a legkisebb páros egészszámok, amelyekre $N_1 - f_m \geq M + 1$ és $N_2 - 4f_{m+1} \geq 4N_1 + f_m + 1$. Ezekután alkalmazzuk a 2'. segédtételt az $U_j^{(m)}(x)/m$ trigonometrikus polinomok mindegyikére N_1 -gyel, majd a $P^{(m)}(x)/8$ -ra N_2 -vel. Jelöljük a három (15') függvényt a következő módon:

$$S_j^{(m)}(x) = \cos N_1 x \cdot \frac{u_j^{(m)}(x)}{m},$$

$$S_{3m+j}^{(m)}(x) = -C_3 \cos x \cdot S_j^{(m)}(x),$$

$$S_{23m+j}^{(m)}(x) = C_4 \cos 4N_1 x \cdot \frac{u_j^{(m)}(x)}{m}$$

($j = 1, 2, \dots, 3_m$) , továbbá

$$S_{33m+1}^{(m)}(x) = \cos N_2 x \cdot \frac{P^{(m)}(x)}{8},$$

$$S_{33m+2}^{(m)}(x) = -C_3 \cos x \cdot S_{33m+1}^{(m)}(x),$$

$$S_{33m+3}^{(m)}(x) = C_4 \cos 4N_2 x \cdot \frac{P^{(m)}(x)}{8}.$$

Ezzel az $S_j^{(m)}(x)$ ($j = 1, 2, \dots, 3_{m+1}$) trigonometrikus polinomokat értelmeztük, mivel $33m+3 = 3_{m+1}$.

Nyilvánvaló, hogy az $S_j^{(m)}(x)$ -ek ($j = 1, 2, \dots, 3_{m+1}$) páronként diszjunkt trigonometrikus polinomok legfeljebb

$4N_2 + 4f_{m+1}$ frekvenciákkal. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\begin{aligned} 4N_2 + 4f_{m+1} &< 4(4N_1 + 4f_{m+1} + f_m + 2) + 4f_{m+1} < 16M + f_{m+2} = \\ &= 16M + (C_7 m)^{m+2} 4^4 < 16M + 4^{4^{m+C_8}} \end{aligned}$$

Ami (vi)-ot illeti, (9'), (17') és (21) alapján nyerjük, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{\bar{J}_{m+1}} S_j^{(m)}(x) \right)^2 dx \leq \frac{C_6}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{\bar{J}_m} u_j^{(m)}(x) \right)^2 dx + \frac{C_6}{64} \text{mes}(F) \leq \frac{C_{10}}{m}$$

fennáll $C_{10} = C_6 (C_8 + C_2/32)$ -vel.

Hátravan még (vii) bizonyítása. Az x eleme valamely $E_k^{(m)}$ -nek, akkor legyen $\mu_1^{(m)}(x) = 1$ és (18') alapján $\mu_2^{(m)}(x) = \mu_k^{(m)}$ vagy $\bar{J}_m + \mu_k^{(m)}$ vagy $2\bar{J}_m + \mu_k^{(m)}$, megfelelően ($k = 1, 2, \dots, \bar{J}_m$). Továbbá, ha $x \in F^{(\varepsilon_2)}$, akkor legyen $\mu_1^{(m)}(x) = 3\bar{J}_m + 1$ és $\mu_2^{(m)}(x) = \mu_1^{(m)}(x)$ vagy $\mu_1^{(m)}(x) + 1$ vagy $\mu_1^{(m)}(x) + 2$ (18')-nek megfelelően. Ezzel meghatároztuk a $\mu_1^{(m)}(x)$ és $\mu_2^{(m)}(x)$ indexeket minden $|x| \leq \pi/8$ -ra, mivel

$$F^{(\varepsilon_2)} = \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right] = \bigcup_{k=1}^{3^m} E_k^{(m)}.$$

Nyilván $1 \leq \mu_1^{(m)}(x) \leq \mu_2^{(m)}(x) \leq \bar{J}_{m+1}$. Továbbá, (7'), (18) és (20) értelmében, a (vii) állítás is érvényes. Ezzel a 4. segéd-tétel bizonyítását befejeztük.

§ 2. A tételek bizonyítása

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\{g(n)\}$ monoton nem-növé sorozat. Határozzuk meg a $(C_g+1 \leq) m_1 < m_2 < \dots$ természetes számokat úgy, hogy

$$(24) \quad \frac{g(n)}{\sqrt{\log \log n}} \leq \frac{1}{k} \quad \text{ha} \quad n \geq M_k = 4^{4^{m_k + C_g}}$$

($k=1, 2, \dots$); (1) szerint ez lehetséges. Alkalmazva a 4. segéd-tételt M_k -val, kapjuk az $S_j^{(m_k)}(x)$ trigonometrikus polinomokat ($j=1, 2, \dots, j_{m_k+1}$; $k=1, 2, \dots$). Jelöljük $T_k(x)$ -szel az $S_j^{(m_k)}(x - (k)_8 \pi/4)$ ⁵⁾ ($j=1, 2, \dots, j_{m_k+1}$) trigonometrikus polinomok összegét. Nyilvánvaló, hogy

$$(25) \quad T_k(x) = \sum_{n=M_k+1}^{47M_k} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (k=1, 2, \dots).$$

Tekintsük a

$$(26) \quad \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x) \quad , \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m_k}}{k} T_k(x)$$

sorokat. A $T_k(x)$ és $T_l(x)$ trigonometrikus polinomok nem egymásra nyulók, ha $k \neq l$, mivel $47M_k \leq M_k^4 \leq M_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots$). Ezért, ha mindenegyes $T_k(x)$ trigonometrikus polinomot tagenként kiirunk (26)-ban, akkor (26) trigonometrikus sor formájában áll elő:

$$(27) \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad , \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad ,$$

ahol az a_n és b_n együtthatókat (25)-tel értelmezzük,

$$A_n = a_n \sqrt{m_k} / k \quad \text{és} \quad B_n = b_n \sqrt{m_k} / k \quad \text{ha} \quad M_k + 1 \leq n \leq 17 M_k$$

$(k=1, 2, \dots)$ és a_n, b_n, A_n, B_n 0-val egyenlő máskülönben

(24) és (vi) értelmében érvényesek a következő becslések:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \vartheta^2(n) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta^2(17M_k) \sum_{n=M_k+1}^{17M_k} (a_n^2 + b_n^2) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta^2(M_k^4) \int_{-\pi}^{\pi} T_k^2(x) dx \leq C_{10} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k + C_9 + 1}{k^2 m_k} \leq 2C_{10} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \end{aligned}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} T_k^2(x) dx \leq C_{10} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Innen látható, hogy (27a) és (27b) négyzetesen integrálható függvények Fourier-sorai, és ezenfelül (27a) együtthatói kielégítik a (2) feltételt.

Irjuk le a páronként diszjunkt $S_j^{(m_k)}(x)$ trigonometrikus polinomokat a következő módon:

$$(28) \quad S_1^{(m_1)}(x), \dots, S_{\mathfrak{F}_{m_1+1}}^{(m_1)}(x); S_1^{(m_2)}(x), \dots, S_{\mathfrak{F}_{m_2+1}}^{(m_2)}(x); \dots; S_1^{(m_k)}(x), \dots, S_{\mathfrak{F}_{m_k+1}}^{(m_k)}(x); \dots$$

és címkézzük az előforduló frekvenciákat, ebben a sorrendben, az $n(j)$ alsó indexszel ($j=1, 2, \dots$). Nyilvánvaló, hogy a (28)-beli $S_1^{(m_k)}(x), \dots, S_{\mathfrak{F}_{m_k+1}}^{(m_k)}(x)$ trigonometrikus polinomokban előforduló $n(j)$ frekvenciákra igaz a következő egyenlőtlenségpár:

$$(29) \quad M_k + 1 \leq n(j) \leq 17 M_k \quad (k=1, 2, \dots).$$

Ezzel nyertük (27a) és (27b) nem-eltűnő tagjainak egy jól meghatározott

$$(30) \quad a) \sum_{j=1}^{\infty} (a_{n(j)} \cos n(j)x + b_{n(j)} \sin n(j)x), b) \sum_{j=1}^{\infty} (A_{n(j)} \cos n(j)x + B_{n(j)} \sin n(j)x)$$

átrendezését.

(vii) szerint a (30a) sor részletösszegei divergálnak mindenütt. Ezzel az 1. tételt teljesen bebizonyítottuk.

Ami (3)-at illeti, jelöljük $\sigma_{\lambda}(x)$ -szel a (30b) sor λ -adik részletösszegét. Tetszőleges $x \in [-\pi/8, \pi/8]$ pont és tetszőleges k természetes szám esetén jelöljük

$j_1 = j_{1k}(x)$ -szel az első olyan j természetes számot, amelyre $n(j)$ előfordul $S_{\mu_1}^{(m_k)}(x)$ -ben, és $j_2 = j_{2k}(x)$ -szel az utolsó olyan j természetes számot, amelyre $n(j)$ előfordul $S_{\mu_2}^{(m_k)}(x)$ -ben, ahol a $\mu_i = \mu_i^{(m_k)}(x)$ alsó indexek a 4. segédtételben (vii)-tel vannak értelmezve. Így

$$\sigma_{j_2}(x) - \sigma_{j_1}(x) = \frac{\sqrt{m_k}}{k} \sum_{j=\mu_1}^{\mu_2} S_j^{(m_k)}\left(x - (k)_8 \frac{\pi}{4}\right),$$

és (29) alapján nyilvánvaló, hogy

$$M_k + 1 \leq j_{1k}(x) \leq j_{2k}(x) \leq 17 M_k \quad (k=1, 2, \dots).$$

Innen következik, hogy minden $x \in [-\pi/8, \pi/8]$ -ra, $j_{1k}(x)$ és $j_{2k}(x)$ tart ∞ -hez, ha k tart ∞ -hez. Felhasználva (vii)-t és (24)-et, kapjuk, hogy

$$\frac{G_{j_2}(x) - G_{j_1}(x)}{g(j_2)} \geq \frac{\sqrt{m_k}}{32 k g(17 M_k)} \geq \frac{\sqrt{\log \log M_k}}{32 \sqrt{2} k g(M_k)} \geq \frac{1}{32 \sqrt{2}}$$

($k = 1, 2, \dots$; $|x - (k)_8 \pi/4| \leq \pi/8$). Ebből következik, hogy

$$\max \left(\frac{|G_{j_2}(x)|}{g(j_2)}, \frac{|G_{j_1}(x)|}{g(j_1)} \right) \geq \frac{1}{64 \sqrt{2}}.$$

Figyelembevée a $T_k(x)$ trigonometrikus polinomok konstrukcióját, a (27b) sor teljesíti (3)-at minden $x \in [-\pi, \pi]$ -re. Ezzel a 2. tétel bizonyítását is befejeztük.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] F., RIESZ, Sur les systemes orthogonaux de fonctions, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 144 (1907), 615-619, 734-736.
- [2] E., FISCHER, Sur la convergence en moyenne, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 144 (1907), 1022-1024.
- [3] A., ZYGMUND, Trigonometric Series, Cambridge (1959)
I. k
- [4] A., KOLMOGOROFF, Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, Fund. Math., 4 (1923), 324-328.
- [5] A., KOLMOGOROFF, Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 183 (1926), 1327-1328.
- [6] A., GARSIA, Existence of almost everywhere convergent reamangements for Fourier series of L_2 functions, Annals of Math. 79 (1964), 623-629.
- [7] L., CARLESON, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., 116 (1966), 135-157.
- [8] A., KOLMOGOROFF, et MENCHOFF, D., Sur la convergence des séries de foctions orthogonales, Math. Z., 26 (1927), 432-441.

- [9] Z., ZAHORSKI, Une série de Fourier permutée d'une fonction de classe L_2 divergente presque partout, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 251 (1960), 501-503.
- [10] А. М. ОЛЕВСКИЙ, Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам, Доклады Акад. Наук СССР, 138 (1961), 545-548.
- [11] П. М. УЛЯНОВ, Расходящиеся ряды по система Хаара и по базисам, Доклады Акад. Наук СССР, 138 (1961), 556-559.
- [12] Л. В. ТАЙКОВ, О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе, Успехи Матем. Наук, 18, 5(113) (1963), 191-198.
- [13] K., TANDORI, Beispiel der Fourierreihe einer quadratisch-integrierbaren Funktion, die in gewisser Anordnung ihrer Glieder überall divergiert, Acta Math. Hung., 15 (1964), 165-173.

