J Ó Z S E F   A T T I L A   T U D O M Á N Y E G Y E T E M

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

LINEÁRIS KONVOLUCIÓS TIPUSÚ INTEGRÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSAIRÓL

GYŐRI ISTVÁN

doktori értekezése

S Z E G E D

1970

T a r t a l o m j e g y z é k

Bevezetés 2

1.Egy valószinüségelméleti probléma megoldásáról 9

2.Egzisztencia és unicitás tételek 14

3.Megjegyzések a konvoluciós operátor kompaktságáról 31

4.Integrál egyenlőtlenségek 40

5.A megoldások aszimptotikus viselkedése és stabilitása 52

6.Speciális tipusú konvoluciós egyenletek vizsgálata 79

Irodalomjegyzék 92

B e v e z e t é s

Számos feladat az

$$y(t)=f(t)+\psi(t)\int_0^t \varphi(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau \qquad /1/$$
$$(0\le t<\infty)$$

alakú konvoluciós integrálegyenlet vizsgálatára vezet,ahol $y(t)$ ismeretlen függvény.Ilyen feladatot jelent például bizonyos biológiai folyamatok tanulmányozása /Lotka [11] /,vagy az önszabályozási rendszerek analizise /Benes [4] /.

Bizonyos sztochasztikus folyamatoknál az

$$y(t)=f(t)+\int_0^t y(t-\tau)\,d\Phi(\tau) \qquad /2/$$
$$(0<t<\infty)$$

alakú Stieltjes tipusú konvoluciós egyenlet vizsgálata szükséges.Például a Bellman-Harris féle elágazási folyamatban / [9] , [13] / részecskék bizonyos sztochasztikus törvény alapján bomlanak el.

Minden részecske élettartama egy valószinűségi változó, és ezeknek a valószinűségi változóknak közös $G(t)$ eloszlásfüggvényük van. Ha egy részecske élettartama véget ér, akkor annak valószinűsége, hogy n uj részecske keletkezik, p_n $(n=0,1,2,\dots)$. Felteszzük, hogy a $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ valószinűségeloszlás

$$m=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot p_n$$

várható értéke véges. Ha feltesszük továbbá, hogy az új részecskék keletkezése független, és $M(t)$ a részecskék száma a t időpillanatban, akkor $M(t)$ eleget tesz az

$$M(t)=1-G(t)+m\int_0^t M(t-\tau)\,dG(\tau)$$
$$(0\leq t<\infty)$$

egyenletnek. Stieltjes tipusú konvoluciós egyenlet alkalmazására további példa a dolgozat első fejezetében található.

A /2/ egyenlet megoldásának egzisztenciáját és unicitását Feller [6] ,majd Harris [9] vizsgálta. Harris általánositotta Feller eredményét, és megmutatta, hogy ha $f(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon Borel-mérhető és bármely véges intervallumon korlátos függvény, $\Phi(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon folytonos eloszlásfüggvény, akkor /2/-nek létezik egy egyértelműen meghatározott Borel-mérhető megoldása, és ez a megoldás minden véges intervallumon korlátos.

A fenti eredményt általánositjuk,ugyanis az $f(t)$ függvényről a Baire-mérhetőséget és minden véges intervallumon való korlátosságot, tesszük fel mig a $\Phi(t)$ függvényről azt tesszük fel,hogy minden véges intervallumon korlátos változású / 2.1 tétel/.

Az /1/ egyenletet többek között Feller [6] Bellman és Cooke [2] ,valamint Fényes Tamás [7] vizsgálta.

Feller illetve Bellman és Cooke munkájában $\varphi(t)=1$ volt. Fényes a $\varphi(t)=\frac{1}{t+a}$ $(0\leq a<\infty,$ állandó$)$ esetben,azaz az

$$y(t)=f(t)+\frac{1}{t+a}\int_0^t \varphi(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau \qquad /3/$$
$$(0\leq t<\infty)$$

egyenletre nyert egzisztencia tételeiben feltette, hogy $f(t)$, $\varphi(t)$ és $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$ a $[0,\infty)$ intervallumon lokálisan integrálható függvény. Fényes Tamás egy konzultáció alkalmával felvetette a kérdést,hogy a fenti állitásban szükséges-e a $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$ függvény lokális integrálhatóságát feltételezni. A disszertáció 2.3 tételéből következik / 2.2 megjegyzés/,hogy ha $a>0$, akkor pusztán az $f(t)$ ill. $\varphi(t)$ lokális integrálhatósága elegendő a /3/ egyenlet megoldásának egzisztenciájához és unicitásához.

Ha azonban $a=0$,akkor a kérdéses feltételt csak igen speciális esetben sikerült elhagyni. /2.4 tétel,2.3 megjegyzés/

Az egzisztencia tételek bizonyitása során nem a Bellman és Cooke,és nem is a Fényes által használt eljárást követjük.A bizonyitásokat mindig a következő ismert eredményre vezetjük vissza:

Ha A a B Banach téren értelmezett lineáris korlátos operátor és $\|A\|<1$,akkor az

$$y=f+Ay$$

egyenlet minden $f\in B$ eleméhez létezik egy egyértelműen meghatározott $y\in B$ megoldása.

A dolgozat harmadik fejezetében az

$$Ay(t)=\int_0^t y(t-\tau)\,d\Phi(\tau)$$

összefüggéssel definiált A operátort vizsgáljuk,és a következőket nyerjük:

A $[0,T]$ intervallumon folytonos függvények Banach-térén értelmezett A operátor akkor és csakis akkor kompakt,ha $\Phi(t)$ -re teljesül a

$$\lim_{\delta\to+0}\ \bigvee_{t=\delta}^{T}\left(\Phi(t)-\Phi(t-\delta)\right) \qquad /4/$$

feltétel /3.2 tétel/,ahol $\bigvee_{t=0}^{T} g(t)$ a $g(t)$ függvény $[0,T]$ intervallumon vett teljes változását jelöli. Radon tételének Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla [14] könyvében található bizonyitását megismételve adódik, hogy az A operátor a $C_0(0,T)$ téren akkor és csakis akkor kompakt, ha teljesül a /4/ feltétel /3.5. tétel./. Itt $C_0(0,T)$ azoknak a $[0,T]$ intervallumon folytonos függvényeknek a tere, amelyek a $t=0$ pontban nullával egyenlők. Ezután megmutatjuk, hogy ha a /4/ feltétel teljesül, akkor a $\Phi(t)$ folytonos. Továbbá példát mutatunk olyan folytonos függvényre, amely nem elégíti ki a /4/ feltételt. Ezt a példát Szőkefalvi-Nagy Béla [15] könyvében található szinguláris függvény szolgáltatja.

A negyedik fejezetben bizonyitás nélkül közöljük Gronvall [8], Bihari [5], Wisvanatham [16], Levinson [10] ill. Bellman és Cooke [2] eredményeit. Wisvanatham eredményére támaszkodva új felső becslést adunk egy lineáris konvoluciós tipusú integrálegyenlőtlenség megoldására/ 4.7 tétel./

Legyen $y(t)$ az

$$y(t)=f(t)+\int_0^t y(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \qquad /7/$$

egyenlet megoldása, és $z(t)$ a

$$z(t)=g(t)+\int_0^t z(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau \qquad /8/$$

egyenlet megoldása.

Ekkor a fenti eredmények felhasználásával felső becslést adunk a /7/ egyenlet $y(t)$ megoldására, valamint az $y(t)$ és $z(t)$ megoldások $\max_{0\le t\le T}|z(t)-y(t)|$ ill. $\int_0^T[z(t)-y(t)]^2dt$ eltérésére /5.1, 5.2 és 5.4 tétel/.

Tekintsük ezek után a /2/ egyenlet esetét. Legyen $y(t)$ a /2/ egyenlet folytonos megoldása, és $z(t)$ a

$$z(t)=g(t)+\int_0^t z(t-\tau)\,d\Psi(\tau)$$
$$(0\le t\le T)$$

egyenlet folytonos megoldása. Ekkor bizonyos feltételek teljesülése esetén megmutatjuk, hogy $\max_{0\le t\le T}|z(t)-y(t)|$ tetszőlegesen kicsivé tehető, ha csak $\max_{0\le t\le T}|g(t)-f(t)|$ ill. $\max_{0\le t\le T}|\Psi(t)-\Phi(t)|$ elegendően kicsi /5.5 tétel/.

A fenti tételek alkalmazása azt eredményezheti, hogy egy egyenlet megoldását, amelyre nincsenek jól ismert módszerek, olyan egyenlet megoldásával közelitsük, amelyre kidolgozott eljárások ismeretesek.

A dolgozat utolsó fejezetében ilyen "egyszerűbb" egyenletekkel foglalkozunk.

Bellman és Cooke /2/ megmutatta, hogy ha $f(t)$ differenciálható és $f'(t)$ valamint $\varphi(t)$ integrálható függvény, akkor a /7/ egyenlet megoldása integrálással előállitható a

$$z(t)=1+\int_0^t z(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \qquad /9/$$

egyenlet megoldásából.

Erre az eredményre támaszkodva nyerjük,hogy ugyanez igaz akkor is,ha $\varphi(t)$ differenciálható és $\varphi'(t)$ valamint $f(t)$ integrálható /6.2/ tétel/.

Megmutatjuk továbbá,hogy ha $\varphi(t)$ egy konstans együtthatós,lineáris differenciálegyenlet megoldása,akkor a /9/ egyenlet megoldása ekvivalens egy megfelelően megkonstruált konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet megoldásával /6.3tétel/.

Végül a fenti eredmények felhasználásával adódik egy numerikus eljárás,amely R.Bellmann,R.Kalaba és B.Kothin [3] által adott numerikus módszer általánositásának tekinthető.

1. Egy valószinűségelméleti probléma megoldásáról

Ebben a fejezetben egy valószinűségelméleti probléma megoldásával foglalkozunk.Megmutatjuk,hogy ennek a problémának a megoldása az

$$y(t)=G(t)+\int_0^t y(t-\tau)\,dG(\tau)$$

konvoluciós integrálegyenlet megoldására vezet.Tekintsünk egy gépalkatrészt,és jelölje a gép működése közben a figyelt gépalkatrész véletlen élettartamát a ξ_1 valószinűségi változó.Ha ez az alkatrész elromlik,kicseréljük egy másik alkatrészre,amelynek véletlen élettartamát ξ_2 jelöli.A második gépalkatrészt egy harmadikra cseréljük,amelynek élettartama ξ_3, és igy tovább.Igy a véletlen élettartamok $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ végtelen sorozatát kapjuk.

Tegyük fel,hogy a csere időmentes /a gép folyamatosan üzemel/,és a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ valószinűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak.

Feladatunk megkeresni annak a valószinűségi változónak a várható értékét,amely megadja ,hogy egy $[0,T]$ időintervallumban hány alkatrészcserére volt szükség.

Jelölje ezt a valószinűségi változót N_t. Igy a probléma megoldása az $M(t)=M(N_t)$ várható érték megkeresése.

Legyen n tetszőlegesen rögzitett természetes szám. Ekkor $N_t=n$, azaz a $[0,T]$ időintervallumban pontosan n cserére volt szükség, ha

$$\xi_1+\dots+\xi_n \leq t < \xi_1+\dots+\xi_{n+1}$$

Ha bevezetjük az

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}\xi_i \qquad (k=1,2,\dots) \qquad /1.1/$$

jelölést, akkor az $N_t=n$ esemény ekvivalens az $S_n \leq t < S_{n+1}$ eseménnyel.

A következőben fel fogunk használni néhány eredményt. Ezek a valószinűségszámitás tankönyveiben megtalálhatók:

Legyen η_1 és η_2 független, $F_1(t)$ ill. $F_2(t)$ eloszlásfüggvényű valószinűségi változó, és tekintsük a $\xi=\eta_1+\eta_2$ összeget, akkor a ξ eloszlásfüggvénye:

$$H(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(t-s)\,dF_2(s)=\int_{-\infty}^{\infty}F_2(t-s)\,dF_1(s)$$

A $H(t)$ függvénnyel jelölt eloszlást az $F_1(t)$ és $F_2(t)$ eloszlásfüggvényű eloszlások konvoluciójának nevezzük. A konvolució műveletét jelöljük a következő módon: $H=F_1 * F_2(t)$

Tetszőleges számú független $F_1(t),\dots,F_n(t)$

eloszlásfüggvényű $\eta_1, \dots, \eta_n$ valószinűségi változók esetén a $\zeta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$ valószinűségi változó $H(t)$ eloszlásfüggvényét a

$$H(t) = F_1 * F_2 * \dots * F_n(t)$$

formula adja. Ha $\eta_1, \dots, \eta_n$ azonos eloszlású, azaz $F(t) = F_i(t)$ $(i=1,2,\dots)$, akkor

$$H(t) = F * F * \dots * F(t) = F^{*(n)}(t)$$

A $\{\xi_i\}$ valószinűségi változók feltételeink alapján függetlenek és azonos eloszlásúak. Jelölje közös eloszlásfüggvényüket $G(t)$. Ekkor a fentieket és az /1.1/-et felhasználva nyerjük, hogy

$$P(S_n \leqq t) = G^{*(n)}(t)$$

$$(n = 1,2,\dots)$$

Másrészt az Nt de~~f~~iniciója alapján:

$$P(N_t \leqq n) = P(S_{n+1} > t) =$$

$$= 1 - P(S_{n+1} \leqq t) = 1 - G^{*(n+1)}(t) \quad ,$$

azaz az Nt=n esemény valószinűsége a

$$p_n(t) = P(N_t = n) =$$
$$= P(N_t \leqq n) - P(N_t \leqq n-1) = G^{*(n)}(t) - G^{*(n+1)}(t)$$

formulával adott.

Az Nt valószinűségi változó $M(t)$ várható értékére érvényes az

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n(t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(G^{*(n)}(t) - G^{*(n+1)}(t) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(t)$$
$$(0 \leqq t < \infty)$$

formula /természetesen feltéve,hogy a várható érték létezik/,és $t < 0$ értékekre $M(t) = 0$ .A fenti formulából adódik/feltéve,hogy a szükséges átalakitások elvégezhetők/:

$$M(t) = G^{*(1)}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} G^{*(n)}(t) =$$

$$= G(t) + G(t) * \sum_{n=2}^{\infty} G^{*(n-1)}(t) =$$

$$= G(t) + G * \sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(t) = G(t) + G * M(t) .$$

Ez utóbbi egyenlőségből az

$$M(t) = G(t) + \int_{-\infty}^{\infty} M(t-\tau)\, d\, G(\tau) \qquad /1.2/$$

egyenlet adódik,ahol $M(t)$ az ismeretlen függvény. Mivel $\xi_i \geqq 0$ $(i=1,2,\dots)$,igy a $t \leqq 0$ értékre $G(t) = 0$. Ha a $t \leqq 0$ értékre tett $M(t) = 0$ kikötést is figyelembe vesszük,akkor /1.2/ egyenlet az

$$M(t) = G(t) + \int_{0}^{t} M(t-\tau)\, d\, G(\tau) \qquad /1.3/$$

egyenletbe megy át,azaz $M(t)$ egy Stieltjes tipusú konvoluciós integrálegyenlet megoldása.

2. Egzisztencia és unicitás tételek

Ebben a fejezetben az

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(t-\tau)\, d\,\Phi(\tau)$$

illetve az

$$y(t) = f(t) + \psi(t) \int_0^t y(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau$$

egyenletekre vonatkozó egzisztencia és unicitás tételeket fogunk bebizonyitani. A fenti egyenletekben $f(t)$ és $\Phi(t)$, ill. $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon adott függvények és $y(t)$ az ismeretlen függvény. A fenti tételek bizonyitása során szükségünk lesz két lemmára.

2.1. L E M M A <u>Tegyük fel, hogy</u> $0 < T < \infty$ <u>és</u>

/a/ $f(t)$ <u>a</u> $[0,T]$ <u>intervallumon folytonos függvény,</u> $f(0)=0$;

/b/ $\Phi(t)$ <u>a</u> $[0,T]$ <u>intervallumon korlátos változású függvény.</u>

<u>Ekkor az</u>

$$F(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, d\,\Phi(\tau)$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

<u>függvény folytonos.</u>

B i z o n y i t á s. Legyen $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ tetszőlegesen rögzitett pont. Ekkor

$$|F(t_2) - F(t_1)| =$$

$$= \left| \int_0^{t_2} f(t_2-\tau)\, d\,\Phi(\tau) - \int_0^{t_1} f(t_1-\tau)\, d\,\Phi(\tau) \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{t_1} |f(t_2-\tau) - f(t_1-\tau)|\, dV(\tau) + \int_{t_1}^{t_2} |f(t_2-\tau)|\, dV(\tau),$$

ahol $V(t)$ a $\Phi(t)$ függvény teljes változás függvénye. A fentiek alapján

$$|F(t_2) - F(t_1)| \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq \tau \leq t_1} |f(t_2-\tau) - f(t_1-\tau)|\, V(t_1) +$$

$$+ \max_{t_1 \leq \tau \leq t_2} |f(t_2-\tau)| \, [V(t_2) - V(t_1)] =$$

$$= \max_{0 \leq s \leq t_1} |f(t_2-t_1-s) - f(s)| \cdot V(t_1) +$$

$$+ \max_{0 \leq s \leq t_2-t_1} |f(s)| \, [V(t_2) - V(t_1)] .$$

Ebből az /a/ feltétel alapján nyilvánvaló, hogy ha $t_1 \leq t_2 \to t_1$, akkor $F(t_2) - F(t_1) \to 0$.

Ha $t_1 \geq t_2 \to t_1$,akkor a fentiekhez hasonlóan járhatunk el, igy $F(t)$ folytonos a $[0,T]$ intervallumon.

Qu. e. d.

A fenti lemma segitségével bebizonyitjuk a következő állitást.

2.2. L E M M A. Legyen $\Phi(t)$ a $[0,T]$ intervallumon $(0<T<\infty)$ korlátos változású függvény.Ekkor minden olyan $f(t)$ függvényre,amely a $[0,T]$ intervallumon Baire - mérhető és korlátos, az

$$F(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, d\,\Phi(\tau)$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

függvény szintén Baire - mérhető és korlátos.

B i z o n y i t á s. A bizonyitást a Baire - féle függvény osztályok rendszáma szerinti transzfinit indukcióval végezzük el.

Tekintsük a 0-ad rendű Baire - féle függvény osztályt,ami nem más mint a $[0,T]$-n folytonos függvények összessége.Tegyük fel,hogy $f(t)$ eleme ennek az osztálynak ,azaz folytonos a $[0,T]$ intervallumon.

Ekkor a 2.1.lemma alapján nyilvánvaló,hogy az

$$F(t)=\int_0^t f(t-\tau)\,d\Phi(\tau)=$$
$$=\int_0^t \left[f(t-\tau)-f(0)\right]d\Phi(\tau)+f(0)\left[\Phi(t)-\Phi(0)\right]$$

függvény Baire - mérhető és korlátos a $[0,T]$ intervallumon,ugyanis a fenti egyenlőség jobboldalán álló első függvény folytonos és a második korlátos változású.

Legyen $\alpha \neq 0$ tetszőleges rendszám,és tegyük fel, hogy az állitást már igazoltuk minden olyan függvényre,amely az α-át megelőző rendszámú Baire osztályba tartozik.Ekkor megmutatjuk,hogy az α-ad rendű Baire-féle függvényosztály elemére is igaz az állitás.

Legyen $f(t)$ eleme az α -ad rendű Baire féle függvényosztálynak,és tegyük fel,hogy $f(t)$ a $[0,T]$ intervallumon korlátos függvény.Ekkor található olyan $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ függvénysorozat, amelynek minden eleme egy α -ad rendűnél alacsonyabb rendű Baire-féle osztályba tartozik és minden $0 \leq t \leq T$ -re $\lim_{n\to+\infty} f_n(t)=f(t)$.
Ha $0<K<\infty$ az $f(t)$ függvény korlátja,akkor feltehető,hogy $|f_n(t)| \leq K$ $(0 \leq t \leq T;$ $n=1,2,\ldots)$. Ellenkező esetben ugyanis az $f_n^* = (f_n \cap K) \cup (-K)$ függvények sorozatát tekintenénk, amelynek tagjait úgy kapjuk,hogy az eredeti sorozat tagjait felülről a K,alulról a-K konstanssal levágjuk.

Az $\{f_n(t)\}$ függvények sorozata egyenletesen korlátos, és mindenütt az $f(t)$ függvényhez konvergál, igy Lebesgue tétele alapján

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^t f_n(t-\tau)\, d\,\Phi(\tau) =$$

$$= \int_0^t f(t-\tau)\, d\,\Phi(\tau) = F(t)$$

minden rögzitett $0 \leq t \leq T$ értékre.

A transzfinit indukciós feltevés alapján minden $F_n(t)$ Baire-mérhető, továbbá a Baire-mérhető függvények osztálya a pontonkénti határmenetre nézve zárt, igy $F(t)$ Baire-mérhető.

Másrészt $F(t)$ korlátos a $[0, T]$ intervallamon, ugyanis

$$F(t) = \left| \int_0^t f(t-\tau)\, d\Phi(\tau) \right| \leq K \left[V(T) - V(0) \right]$$

$$(0 \leq t \leq T),$$

ahol K az $f(t)$ felső korlátja,

$$V(T) - V(0)$$

a Φ teljes változása.

Qu. e. d.

A fenti lemmák felhasználásával bebizonyitjuk unicitás tételeinket.

2.1. T É T E L Tegyük fel, hogy

/a/ $f(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon Baire-mérhető és minden véges intervallumon korlátos függvény;

/b/ $\Phi(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon minden véges részintervallumán korlátos változású és a $t=0$ pontban jobbról folytonos.

Ekkor az

$$y(t)=f(t)+\int_0^t y(t-\tau)\,d\,\Phi(\tau) \qquad /2.1/$$

egyenletnek a $[0,\infty)$ intervallumon létezik egy $y(t)$ megoldása, és $y(t)$ a $[0,\infty)$ -en Baire-mérhető függvények körében egyértelműen meghatározott. Továbbá $y(t)$ a $[0,\infty)$ minden véges intervallumán korlátos.

B i z o n yi t á s. A tétel bizonyitásához elegendő megmutatni, hogy a /2.1/ egyenletnek minden véges $[0,T]$ intervallumon létezik megoldása, és ez egyértelmüen meghatározott.

Legyen $0<T<\infty$ tetszőlegesen rögzitett, és jelölje $B(0,T)$ a $[0,T]$ intervallumon Baire-mérhető, korlátos függvények halmazát. Minden $y(t)\in B(0,T)$ függvényhez rendeljük hozzá az

$$\|y\|=\sup_{0\le t\le T}\left|e^{-Lt}y(t)\right| \qquad /2.2/$$

normát,ahol az $0 < L < \infty$ állandót úgy rögzitjük,hogy teljesüljön a

$$q = \int_0^T e^{-Lt} \, dV(t) < 1 \qquad /2.3/$$

egyenlőtlenség. Ilyen L mindig létezik, hiszen $\Phi(t)$ és vele együtt a $V(t)$ teljes változás függvénye is jobbról folytonos a $t=0$ pontban.

Nyilvánvaló,hogy a $B(0,T)$ függvényhalmaz a /2.2/ normára nézve Banach - tér. A $B(0,T)$ Banach - tér tetszőleges $y(t)$ elemére definiáljuk az A operátort az

$$Ay = \int_0^t y(t-\tau) \, d\Phi(\tau) \qquad /2.4/$$

összefüggéssel. Ekkor a 2.2 Lemma alapján nyilvánvaló,hogy az A lineáris operátor a $B(0,T)$ Banach - teret önmagába képezi le.

Megmutatjuk,hogy $\| A \| < 1$.

Legyen $y(t) \in B(0,T)$ tetszőlges,ekkor

$$\| Ay \| = \sup_{0 \le t \le T} \left| e^{-Lt} \int_0^t y(t-\tau) \, d\Phi(\tau) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \int_0^t e^{-Lt} \left| y(t-\tau) \right| d V(\tau) \right\} =$$

$$= \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \int_0^t e^{-L(t-\tau)} \left| y(t-\tau) \right| e^{-L\tau} d V(\tau) \right\} ,$$

azaz

$$\| A y \| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \left| y(t) \right| e^{-Lt} \right\} \int_0^T e^{-L\tau} d V(\tau) =$$

$$= q \| y \| .$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség és az L definiciója alapján adódik, hogy

$$\| A \| \leq q < 1 .$$

Abból, hogy a $B(0,T)$ Banach-téren értelmezett A operátor lineáris, korlátos és $\| A \| < 1$, [14] alapján következik, hogy az

$$y(t) = f(t) + A y = f(t) + \int_0^t y(t-\tau) \, d \Phi(\tau)$$

egyenletnek létezik egy egyértelműen meghatározott $y(t) \in B(0,T)$ megoldása.

Mivel $0 < T < \infty$ tetszőleges volt,igy a megoldás egzisztenciája és unicitása a $[0,\infty)$ intervallumon is teljesül.

M e g j e g y z é s. Abból,hogy az $\|A\| < 1$ következik,hogy a rögzitett $[0,T]$ intervallumon

$$\sup_{0\le t\le T} \left| \left[y(t) - \sum_{k=0}^{N} A^k f(t) \right] e^{-Lt} \right| = \left\| y - \sum_{k=0}^{N} A^k f \right\| \to 0,$$

ha csak $N \to \infty$,azaz az $y(t)$ megoldás elő-áll az

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f(t) \qquad /2.5/$$

végtelen sor alakjában , továbbá a fenti végtelen sor minden véges intervallumon egyenletesen konvergál.

2.1 lemma és a fenti megjegyzés alapján nyilvánvaló a következő állitás:

2.2 T É T E L. <u>Tegyük fel,hogy</u> $\Phi(t)$ <u>a 2.1 tételben adott,és</u> $f(t)$ <u>a</u> $[0,\infty)$ <u>-en folytonos,továbbá</u> $f(0)=0$.

<u>Ekkor a /2.1/ egyenlet megoldása folytonos a</u> $[0,\infty)$ <u>intervallumon.</u>

A fenti tételek után vizsgáljuk az

$$y(t) = f(t) + \psi(t) \int_0^t y(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau \qquad /2.6/$$

egyenlet $[0, \infty)$ -en lokálisan integrálható megoldásának egzisztenciáját és unicitását.

A következő tételekben a /2.6/ egyenlet megoldása alatt olyan függvényt értünk, amely a $[0, \infty)$ intervallumon lokálisan integrálható, és egy nullamértékű halmaztól eltekintve kielégiti a /2.6/ egyenletet. Igy a /2.6/ egyenlet megoldásának egyértelműsége alatt azt értjük, hogy a megoldás legfeljebb egy nulla mértékü halmaztól eltekintve egyértelműen meghatározott.

2.3. T É T E L. Tegyük fel, hogy

/a/ $f(t)$ és $\varphi(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumon lokálisan integrálható;

/b/ $\psi(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumon lokálisan integrálható, és bármely véges intervallumon korlátos.

Ekkor a /2.6/ egyenletnek a $[0, \infty)$ intervallumon lokálisan integrálható függvények körében létezik egy egyértelműen meghatározott megoldása.

B i z o n y i t á s: A tétel bizonyitásához elegendő megmutatni, hogy a /2.6/ egyenletnek minden véges $[0, T]$ intervallumon létezik integrálható megoldása, és ez a megoldás egyértelműen meghatározott.

Legyen $0 < T < \infty$ tetszőlegesen rögzitett, és jelölje $B(0,T)$ a $[0,T]$ intervallumon integrálható függvények halmazát. Minden $y(t) \in B(0,T)$ függvényhez rendeljük hozzá az

$$\|y\| = \int_0^T e^{-Lt} |y(t)| \, dt \qquad /2.7/$$

normát. Az $0 < L < \infty$ állandót úgy rögzitjük, hogy teljesüljön a

$$q = K \cdot \int_0^T e^{-Lt} |\varphi(t)| \, dt < 1 \qquad /2.8/$$

egyenlőtlenség, ahol

$$K = \sup_{0 \le t \le T} |\psi(t)| \, (< \infty)$$

Ilyen L mindig létezik, hiszen $\varphi(t)$ a $[0,T]$ intervallumon integrálható függvény.

Nyilvánvaló, hogy a $B(0,T)$ függvényhalmaz a /2.7/ normára nézve Banach-tér. A $B(0,T)$ Banach-tér tetszőleges $y(t)$ elemére definiáljuk az A operátort a következő összefüggéssel:

$$Ay = \psi(t) \int_0^t y(t-\tau) \varphi(\tau) \, d\tau$$

$$(0 \le t \le T) \, .$$

Ekkor az A operátor lineáris és a $B(0,T)$ teret önmagába képezi le, hiszen $\psi(t)$ a feltételeink szerint mérhető és korlátos, mig az

$$\int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

függvény a konvolució tulajdonságai alapján integrálható, azaz $Ay(t)$ is integrálható.

Ezután megmutatjuk, hogy az A operátor korlátos és $\|A\|<1$. Legyen $y(t)$ tetszőleges eleme a $B(0,T)$ Banach-térnek. Ekkor

$$\|Ay\| = \int_0^T \left| e^{-Lt}\psi(t)\int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \right| dt \leqq$$

$$\leqq K\int_0^T \left\{ \int_0^t e^{-L(t-\tau)}|y(t-\tau)|\,e^{-L\tau}|\varphi(\tau)|\,d\tau \right\} dt\,.$$

Innen a kettős integrál tulajdonságait felhasználva nyerjük, hogy

$$\|Ay\| \leqq K\cdot\int_0^T \left\{ \int_0^t e^{-L(t-\tau)}|y(t-\tau)|\,e^{-L\tau}|\varphi(\tau)|\,dt \right\} d\tau =$$

$$= K\cdot\int_0^T \left\{ e^{-L\tau}|\varphi(\tau)| \int_\tau^T e^{-L(t-\tau)}|y(t-\tau)|\,dt \right\} d\tau =$$

$$= K\cdot\int_0^T \left\{ e^{-L\tau}|\varphi(\tau)| \int_0^{T-\tau} e^{-Ls}|y(s)|\,ds \right\} d\tau\,.$$

A fenti egyenlőség alapján nyilvánvaló,hogy

$$\|Ay\| \leq K \cdot \int_0^T e^{-L\tau} |\varphi(\tau)| \, d\tau \cdot \int_0^T e^{-Ls} |y(s)| \, ds = q \|y\|,$$

azaz a /2.8/egyenlőtlenségből

$$\|A\| \leq q < 1 .$$

A fentiek alapján tehát a $B(0,T)$ Banach-téren értelmezett A operátor lineáris,korlátos és $\|A\| < 1$. Igy az

$$y(t) = f(t) + Ay = f(t) + \psi(t) \int_0^t y(t-\tau) \varphi(\tau) \, d\tau$$

egyenletnek létezik egy egyértelműen meghatározott $y(t) \in B(0,T)$ megoldása.

Q.e.d.

2.2. M e g j e g y z é s. Tekintsük az

$$y(t) = f(t) + \frac{1}{t+a} \int_0^t y(t-\tau) \varphi(\tau) \, d\tau \qquad /2.9/$$

$$(0 \leq t < \infty)$$

egyenletet,ahol $a > 0$ állandó és $f(t)$ ill. $\varphi(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumon lokálisan integrálható.Ekkor a fenti tételt alkalmazva nyerjük,hogy a/2.9/ egyenletnek létezik egy, a $[0, \infty)$ intervallumon lokálisan integrálható megoldása.

Ez az eredmény általánositása Fényes Tamás [7] tételének.Ő ugyanis a fenti feltételeken túl még azt is feltette,hogy $\varphi(+0)$ létezik, és a $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(+0)}{t}$ függvény lokálisan integrálható.

Az előző tételek bizonyitása során látott módszert követve bebizonyitjuk a következő tételt.

2.4. T É T E L. <u>Tegyük fel,hogy</u>

/a/ $f(t)$ <u>a</u> $[0,\infty)$ <u>intervallumon mérhető,és bármely véges intervallumon lényegében korlátos.</u>

/b/ $\varphi(t)$ <u>a</u> $[0,\infty)$ <u>intervallumon lokálisan integrálható.</u>

/c/ $\psi(t)$ <u>a</u> $[0,\infty)$ <u>intervallumon mérhető,és bármely</u> $0<T<\infty$ <u>állandóhoz létezik olyan</u> $0<L=L(T)<\infty$, <u>hogy</u>

$$\sup_{0\leq t\leq T} \text{ess} \left\{ |\psi(t)| \int_0^t e^{-L\tau} |\varphi(\tau)|\, d\tau \right\} < 1 \qquad /2.9/$$

<u>teljesüljön.</u>

Ekkor a /2.6/ egyenletnek a $[0,\infty)$ intervallumon mérhető és bármely véges intervallumon korlátos függvények körében létezik egy egyértelműen meghatározott megoldása.

B i z o n y í t á s. Legyen $0<T<\infty$ tetszőlegesen rögzitett, és jelölje $B(0,T)$ a $[0,T]$ intervallumon mérhető és lényegében korlátos függvények összeségét. Minden $y(t)\in B(0,T)$ függvényhez rendeljük hozzá az

$$\|y\| = \sup_{0\le t\le T} \text{ess} \left\{ e^{-Lt} |y(t)| \right\} \qquad /2.1o/$$

normát, ahol az $0<L<\infty$ állandó a /2.9/ feltétellel adott.

Nyilvánvaló, hogy a $B(0,T)$ függvényhalmaz a /2.10/ normára nézve Banach-tér. A $B(0,T)$ Banach-tér tetszőleges $y(t)$ elemére definiáljuk az A operátort:

$$Ay(t) = \psi(t)\int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

$$(0\le t< T)$$

Ekkor

$$\sup_{0\le t\le T} \text{ess} \left| e^{-Lt} Ay(t) \right| =$$

$$= \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess} \left| e^{-Lt} \psi(t) \int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \right| \leqq$$

$$\leqq \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess} \left\{ |\psi(t)| \int_0^t e^{-L(t-\tau)} |y(t-\tau)| e^{-L\tau} |\varphi(\tau)| d\tau \right\} \leqq$$

$$\leqq \|y\| \cdot \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess} \left\{ |\psi(t)| \int_0^t e^{-L\tau} |\varphi(\tau)| d\tau \right\} \qquad /2.11/$$

Az A operátor a $B(0,T)$ teret önmagába képezi le,ugyanis

$$\int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

integrálható és $\psi(t)$ mérhető,igy $Ay(t)$ mérhető és /2.11/ alapján lényegében korlátos függvény.

A /2.11/ egyenlőtlenség és a /2.9/ alapján az is nyilvánvaló,hogy $\|A\| < 1$.

Igy a /2.6/ egyenletnek létezik a $[0,T]$ intervallumon egyértelműen meghatározott mérhető és korlátos megoldása.

Mivel $0 < T < \infty$ tetszőlegesen rögzitett volt,ezért a tételt bebizonyitottuk.

2.3 Megjegyzés. Tekintsük az

$$y(t)=f(t)+\frac{\lambda}{t}\int_0^t y(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \qquad /2.12/$$

egyenletet, ahol $f(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon mérhető, és bármely véges intervallumon korlátos, $-\infty<\lambda<\infty$ állandó, és $\varphi(t)$ a $[0,\infty)$ -en lokálisan integrálható.

Fényes Tamás [7] bebizonyitotta, hogy ha a fenti feltételek mellett $\varphi(+0)$ létezik, és $\frac{\varphi(t)-\varphi(+0)}{t}$ lokálisan integrálható, akkor a /2.12/ egyenletnek létezik a $[0,\infty)$ intervallumon lokálisan integrálható megoldása. A megoldás a lokálisan integrálható függvények körében egyértelmű, ha $\lambda\cdot\varphi(+0)\leq 0$, és végtelen sok különböző lokálisan integrálható megoldása van, ha $\lambda\cdot\varphi(+0)>0$.

A 2.4 tétel alapján nyerjük, hogy ha az $0<L<\infty$ állandóra

$$|\varphi(t)|\leqq e^{+Lt} \qquad (0\leq t<\infty)$$

és $|\lambda|<1$, akkor a /2.12/ egyenlet megoldása a $[0,\infty)$ intervallumon mérhető, és a $[0,\infty)$ minden részintervallumán lényegében korlátos függvények körében egyértelműen meghatározott.

3. Megjegyzések a konvoluciós operátor kompaktságáról

Az előző fejezetben a $\Phi(t)$ korlátos változású függvény definiált egy

$$A_y(t) = \int_0^t y(t-\tau)\, d\Phi(\tau) \qquad /3.1/$$

operátort, ahol $y(t)$ vagy folytonos, vagy Baire-féle függvény volt.
Ebben a fejezetben a $[0,T]$ intervallumon folytonos függvényekre vizsgáljuk az A operátort.

Legyen $C(0,T)$ a $[0,T]$ intervallumon folytonos függvények tere és $C_0(0,T) \subset C(0,T)$ az olyan folytonos függvények tere, amelyek a $t=0$ pontban zéróval egyenlők. Az $y(t) \in C(0,T)$ /vagy az $y(t) \in C_0(0,T)$ / függvények normája alatt az

$$\|y\| = \max_{0 \le t \le T} |y(t)|$$

mennyiséget értjük.

Legyen

$$r_t(\tau) = \begin{cases} \Phi(t-\tau) & 0 \leq \tau \leq t \leq T \\ \Phi(0) & \text{különben} \end{cases} \qquad /3.2/$$

Ekkor az A operátor az

$$A y(t) = \int_0^T y(\tau)\, d\, r_t(\tau) \qquad /3.3/$$

alakba írható át. Ha most feltesszük, hogy az A operátor értelmezési tartománya $C(0,T)$, akkor alkalmazhatjuk Radon ide vonatkozó tételeit /lásd Riesz F. és Szőkefalvi - Nagy Béla [14] /

3.1 T É T E L Legyen $\Phi(t)$ a $[0,T]$ intervallumon korlátos változású függvény. Az A operátor a $C(0,T)$ teret akkor és csakis akkor képezi le önmagába, ha $\Phi(t)$ folytonos.

B i z o n y i t á s. A feltétel szükséges. Tegyük fel ugyanis, hogy $AC(0,T) \subset C(0,T)$, és legyen $y(t) \equiv 1$. Ekkor

$$A y(t) = \Phi(t) - \Phi(0)$$

függvény folytonos, igy $\Phi(t)$ is folytonos. A feltétel elegendősége nyilvánvaló.

Q u. e. d.

A fenti tétel bizonyitása Radon megfelelő tétele alapján is nyilvánvaló, hogy ha az operátort átirjuk a /3.3/ alakba.

3.2. T É T E L. __Tegyük fel, hogy $\Phi(t)$ a $[0,T]$ intervallumon folytonos, korlátos változású függvény. Ekkor a__

$$\lim_{\delta\to 0+} \bigvee_{t=\delta}^{T} \left(\Phi(t) - \Phi(t-\delta) \right) = 0 \qquad /3.4/$$

__feltétel teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy az A operátor a $C(0,T)$ térben kompakt legyen.__

B i z o n y i t á s. Ha az A operátort átirjuk a /3.3/ alakba, akkor Radon tétele szerint az A kompaktságának szükséges és elegendő feltétele, hogy minden rögzitett $0 \leq \xi \leq T$ -re

$$\| r_\xi - r_t \| = \bigvee_{\tau=0}^{T} \left(r_\xi(\tau) - r_t(\tau) \right) \longrightarrow 0,$$

ha/csak $t \longrightarrow \xi$. Ezután az állitás nyilvánvaló, hiszen ez a feltétel és a /3.4/ feltétel ekvivalens.

Q u. e. d.

Tegyük fel ezek után, hogy egy $\Phi(t)$ korlátos változású függvény eleget tesz a /3.4/feltételnek. Ekkor tetszőleges $0 < t_0 < T$ pontot rögzitve nyerjük a

$$\mathop{V}_{t=\delta}^{T}\left(\Phi(t)-\Phi(t-\delta)\right)\geqq$$

$$\geqq\left|\Phi(t_0)-\Phi(t_0-\delta)-\left[\Phi(t_0-\delta)-\Phi(t_0-2\delta)\right]\right|+$$

$$+\left|\Phi(t_0+\delta)-\Phi(t_0)-\left[\Phi(t_0)-\Phi(t_0-\delta)\right]\right|$$

egyenlőséget minden olyan $\delta>0$ számra, amelyre $0\leq t_0-\delta$, $t_0+\delta\leq T$.

Ha most $0<\delta\to 0$,akkor a /3.4/ feltétel alapján

$$0\geq\left|\Phi(t_0)-\Phi(t_0-0)-\left[\Phi(t_0-0)-\Phi(t_0-0)\right]\right|+$$

$$+\left|\Phi(t_0+0)-\Phi(t_0)-\left[\Phi(t_0)-\Phi(t_0-0)\right]\right|,$$

azaz

$$\Phi(t_0-0)=\Phi(t_0)=\Phi(t_0+0).$$

Ha $t_0=T$,akkor fent csak az első tag szerepel, míg ha $t_0=0$,akkor fent csak a második tag szerepel.Igy $\Phi(t)$ a $[0,T]$ zárt intervallumban folytonos.

A fentieket összefoglalva a következő állítást nyertük:

3.3 T É T E L. **Ha $\Phi(t)$ a $[0,T]$ intervallumon korlátos változású függvény, és eleget tesz a /3.4/ feltételnek, akkor $\Phi(t)$ a $[0,T]$ intervallumon folytonos.**

Ezután megmutatjuk, hogy létezik olyan $F(t)$ folytonos és korlátos változású függvény, amelyre nem teljesül a /3.4/ feltétel.

Jelölje $F(t)$ a Szőkefalvi-Nagy Béla [15] könyvében megkonstruált szinguláris függvényt.

Az $F(t)$ függvényt egy $F_n(t)$ sorozat határértékeképpen fogjuk értelmezni; az $F_n(t)$ függvény folytonos, és a képe egy olyan törtvonal, amelynek szögpontjaihoz a $t = \frac{k}{2^n}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n)$ abszcisszák tartoznak.

Legyen $F_0(t) = t$; $F_1(t)$ egyezzék meg $F_0(t)$-vel a 0,1 pontokban, a $t = \frac{1}{2}$ pontban pedig legyen az értéke $(1+s)/2$, ahol s adott szám, $0 < s < 1$. Általában, ha $F_n(t)$-t már értelmeztük, legyen $F_{n+1}(t) = F_n(t)$ a $t = \frac{k}{2^n}$ pontokban $(k = 0, 1, \ldots, 2^n)$, mig a felezéssel kapott új osztópontokban legyen

$$F_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1-s}{2} F_n(\alpha) + \frac{1+s}{2} F_n(\beta) \qquad /3.5/;$$

itt $\alpha = \frac{k}{2^n}$, $\beta = \frac{k+1}{2^n}$ a felezett szakasz végpontjai.

Szőkefalvi-Nagy Béla megmutatta, hogy az $\{F_n(t)\}$ sorozat egy $F(t)$ határértékhez tart, amely szigorú értelemben növekvő, folytonos és majdnem mindenütt $F'(t)=0$

Ezután meg fogjuk mutatni, hogy $F(t)$ nem tesz eleget a /3.4/ feltételnek. Legyen n tetszőlegesen rögzitett természetes szám és $\delta=\frac{1}{2^n}$. Ekkor

$$\overset{1}{\underset{\delta}{V}}\left[F(t)-F(t-\delta)\right]\geq$$

$$\geq\sum_{i=2}^{2^n}\left|\left[F(t_i)-F(t_i-\delta)\right]-\left[F(t_{i-1})-F(t_{i-1}-\delta)\right]\right|=S(\delta) \qquad /3.6/$$

ahol $t_i=\frac{i}{2^n}$ $(i=0,1,2,\ldots 2^n)$. A t_i és a δ definiciója alapján nyilvánvaló, hogy

$$S(\delta)=\sum_{i=2}^{2^n}\left|F(t_i)-2F(t_{i-1})+F(t_{i-2})\right|.$$

Minthogy a szögpontokban a magasabb indexű függvényeknek, és igy a határértékfüggvénynek is ugyanaz az értékük, azért a /3.5/ összefüggés alapján

$$2F(t_{i-1})=(1-s)F(t_i)+(1+s)F(t_{i-2}),$$

azaz

$$S(\delta)=\sum_{i=2}^{2^n}\left|F(t_i)-(1-s)F(t_i)-(1+s)F(t_{i-2})+F(t_{i-2})\right|=$$

$$= s\sum_{i=2}^{2^n} \left| F(t_i) - F(t_{i-2}) \right| = s\sum_{i=2}^{2^n} \left[F(t_i) - F(t_{i-2}) \right] =$$

$$= s\left[F(t_{2^n}) - F(t_1) + F(t_{2^n-1}) - F(t_0) \right] =$$

$$= s\left[F(1) - F\left(\frac{1}{2^n}\right) + F\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) - F(0) \right].$$

A /3.6/ formula alapján

$$\overset{1}{\underset{\delta}{V}} \left[F(t) - F(t-\delta) \right] \geqq s\left[F(1) - F\left(\frac{1}{2^n}\right) + F\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) - F(0) \right].$$

Ha most $\delta = \frac{1}{2^n} \to 0$,akkor

$$\lim_{\delta \to 0} \overset{1}{\underset{\delta}{V}} \left[F(t) - F(t-\delta) \right] \geqq 2\cdot s\left[F(1) - F(0) \right] > 0,$$

azaz $F(t)$ nem elégiti ki a /3.4/feltételt.

Ezután bebizonyitjuk a következő egyszerű állitást:

3.4. T É T E L. <u>Ha a $\Phi(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ függvény teljesen folytonos,akkor kielégiti a /3.4/ feltételt.</u>

B i z o n y i t á s. Mivel $\Phi(t)$ teljesen folytonos,igy

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

ahol a $\varphi(t)$ integrálható függvény.

Ekkor mint ismeretes /Szőkefalvi-Nagy Béla [15]/

$$\overset{T}{\underset{0}{V}}(\Phi) = \int_0^T |\varphi(t)|\,dt$$

és

$$\lim_{\delta\to 0+} \overset{T}{\underset{t=\delta}{V}} [\Phi(t) - \Phi(t-\delta)] = \lim_{\delta\to 0+} \int_\delta^T |\varphi(t) - \varphi(t-\delta)|\,dt = 0$$

ugyanis $\varphi(t)$ integrálható.

Qu. e. d.

Ezután tekintsük a $C_0(0,T)$ függvényteret.

Mint tudjuk, az A operátor a $C(0,T)$ teret önmagába képezi le /lásd 2.1 lemma/.

A következő tételben megmutatjuk, hogy a /3.4/ feltétel teljesülése a $C_0(0,T)$ téren értelmezett A operátor esetén is szükséges és elegendő az A kompaktságához.

3.5. T É T E L. Tegyük fel, hogy $\Phi(t)$ a $[0,T]$ intervallumon korlátos változású, és a $t=0$ pontban jobbról folytonos. Ekkor a /3.4/ feltétel teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy az A operátor a $C_0(0,T)$ térben kompakt legyen.

B i z o n y i t á s. A feltétel elegendő, ha ugyanis $\Phi(t)$ eleget tesz a /3.4/ feltételnek, akkor a 3.3 tétel alapján $\Phi(t)$ folytonos függvény. Igy az A a $C(0,T)$ teret önmagába képezi le, és ott a 3.2 tétel értelmében kompakt.

Másrészt $C_0(0,T) \subset C(0,T)$,igy A a $C_0(0,T)$ térben is kompakt.

A feltétel szükséges. Tegyük fel ugyanis, hogy A kompakt operátor a $C_0(0,T)$ téren és legyen $r_t(\tau)$ a /3.2/ összefüggéssel definiálva. Ha Radon tételének Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla [14] által adott bizonyitását megismételjük, akkor nyerjük, hogy

$$\|r_\xi - r_t\| \to 0 \qquad (t \to \xi) \ .$$

Ezért a 3.2 tételnél látottak alapján $\phi(t)$ kielégiti a /3.4/ tételt.

4. Integrál egyenlőtlenségek.

A következő fejezetben konvoluciós tipusú integrálegyenletek megoldásainak asszimptótikus viselkedését és stabilitását vizsgáljuk.
A bizonyítások során fel fogjuk használni az integrál egyenlőtlenségek megoldásaira nyert becsléseket.

Közönséges differenciálegyenletek megoldásainak stabilitását és asszimptotikus viselkedését vizsgálva T.H Gronvall [8] bebizonyitott egy integrál egyenlőtlenséget. A fenti egyenlőtlenséget R. Bellman igen sok munkájában pl. [1] használta, igy az egyenlőtlenséget Gronvall-Bellman egyenlőtlenségnek nevezik. Az egyenlőtlenség a következő:

4.1. T É T E L. /Gronvall-Bellman/

Tegyük fel, hogy $u(t)$ és $v(t)$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos, nem negativ függvény és $0 < k < \infty$ állandó.
Ekkor az

$$u(t) \leq k + \int_0^t v(\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

$$(a \leq t \leq b)$$

egyenlőtlenségből következik az

$$u(t) \leqq k \cdot e^{\int_0^t v(\tau)\, d\tau}$$

$$(a \leq t \leq b)$$

egyenlőtlenség.

Bellman eredményét Bihari I. [5] általánositotta.

4.2. T É T E L. /Bihari/ Legyen $u(t)$ ill. $v(t)$ a fenti tételben adott, és $0 < k < \infty$ állandó. Továbbá legyen $g(u)$ az $0 \leq u < \infty$ intervallumon folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény, és $g(0) = 0$.

Ekkor az

$$u(t) \leqq k + \int_a^b v(\tau)\, g(u(\tau))\, d\tau$$

$$(a \leq t \leq b)$$

egyenlőtlenségből következik a

$$G(u(t)) \leq G(k) + \int_a^b v(\tau)\, d\tau$$

$$(a \leq t \leq b)$$

egyenlőtlenség, ahol

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{g(t)}\, dt \qquad (u \geq 0, \quad u_0 > 0).$$

A fenti két állitást B. Wisvanatham [16] a következő módon általánositotta:

4.3. T É T E L. /Wisvanatham/ <u>Tegyük fel, hogy</u> $u(t)$ <u>az</u> $a \le t \le b$ <u>intervallumon folytonos, nem negativ,</u> $f(t, u)$ <u>az</u> $a \le t \le b$, $0 \le u < \infty$ <u>tartományban nemnegativ, folytonos, és rögzitett</u> t-<u>re az</u> u <u>változójában monoton növekvő. Ekkor az</u>

$$u(t) \leqq u(a) + \int_a^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau$$

<u>egyenlőtlenségből következik, hogy</u>

$$u(t) \leqq v(t)$$
$$(a \leqq t \leqq b) \quad ,$$

<u>ahol</u> $v(t)$ <u>a</u>

$$v'(t) = f(t, v(t))$$

<u>egyenlet</u> $v(a) = u(a)$ <u>kezdeti feltételt kielégitő maximális megoldása.</u>

A fenti tételek felhasználásával, olyan integrál egyenlőtlenségeket vizsgálunk, amelyek jobb-oldalán egy konvoluciós integrál áll.

Ilyen tipusú tételt először Levinson [10] közölt:

4.4. T É T E L /Levinson/ Legyen $0 \le k < \infty$ állandó, $u(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumon folytonos, nemnegativ függvény és $v(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumon nemnegativ, integrálható függvény.

Ekkor az

$$u(t) \leqq k + \int_0^t v(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \qquad (0 \leqq t < \infty) \qquad /4.1/$$

egyenlőtlenségből következik olyan $0 < \mu < \infty$ állandó létezése, amelyre

$$y(t) \leqq 2\, k\, e^{\mu t} \qquad (0 \leqq t < \infty)$$

A Levinson-féle egyenlőtlenségnél általánosabb a következő egyenlőtlenség.

4.5. T É T E L /Bellman-Cooke [2] /

Tegyük fel, hogy

/a/ $u(t)$ a $0 \le t < \infty$ intervallumon nemnegativ folytonos függvény;

/b/ $v(t)$ a $0 \le t < \infty$ intervallumon lokálisan integrálható nemnegativ függvény, és létezik olyan $0 < \mu < \infty$ állandó, amelyre

$$\int_0^\infty e^{-\mu t}\, v(t)\, dt < 1 .$$

Ekkor a /4.1/ egyenletből következik, hogy

$$u(t) \leqq \frac{k}{1 - \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu t} v(t)\, dt} e^{\mu t}$$

$$(0 \leq t < \infty) .$$

A fenti tételt könnyen általánosithatjuk a következő formában.

4.6. T É T E L Tegyük fel, hogy

/a/ $u(t)$ a $0 \leq t < \infty$ intervallumon nemnegativ, folytonos függvény;

/b/ $V(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumon monoton nem csökkenő, és létezik olyan $0 < \mu < \infty$ állandó, amelyre

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\mu t} \, dV(t) < 1 .$$

Ekkor az

$$u(t) \leq k + \int\limits_0^t u(t-\tau)\, dV(\tau) \qquad /4.2/$$

$$(0 \leq t < \infty ; \quad 0 \leq k)$$

egyenlőtlenségből következik az

$$u(t) \leq \frac{k}{1-\int_0^{\infty} e^{-\mu t}\, dV(t)}\, e^{\mu t} \qquad /4.3/$$

$$(0 \leq t < \infty)$$

egyenlőtlenség.

B i z o n y i t á s. A /4.2/ egyenlőtlenségből nyerjük:

$$u(t)\, e^{-\mu t} \leq k \cdot e^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t u(t-\tau)\, dV(\tau) \leq$$

$$\leq k + \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} u(t-\tau)\, e^{-\mu\tau}\, dV(\tau) \quad ,$$

azaz

$$u(t)\, e^{-\mu t} \leq k + \max_{0 \leq \tau \leq t} \left\{ e^{-\mu\tau} u(\tau) \right\} \int_0^{\infty} e^{-\mu\tau}\, dV(\tau)$$

$$(0 \leq t < \infty) \quad .$$

A fenti egyenlőség alapján

$$\max_{0 \leq \tau \leq t} \left\{ u(\tau)\, e^{-\mu\tau} \right\} \leq k + \max_{0 \leq \tau \leq t} \left\{ e^{-\mu\tau} u(\tau) \right\} \int_0^{\infty} e^{-\mu\tau}\, dV(\tau),$$

azaz

$$u(t)\, e^{-\mu t} \leq \max_{0 \leq \tau \leq t} \left\{ u(\tau)\, e^{-\mu\tau} \right\} \leq \frac{k}{1-\int_0^{\infty} e^{-\mu t}\, dV(t)} \quad .$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségből nyilvánvaló az állitás.

Ezután egy általunk talált tételt bizonyinyitunk be.

4.7. T É T E L. Tegyük fel,hogy

/a/ $v(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon négyzetesen integrálható,nemnegativ függvény.

/b/ $y(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon nemnegativ, lokálisan integrálható és minden véges intervallumon korlátos.

Ekkor a /4.1/ egyenlőtlenségből következik az

$$y(t) \leq 3k \cdot e^{\frac{V}{\sqrt{2}} t} \qquad /4.4/$$

$$(0 \leq t < \infty)$$

egyenlőtlenség,ahol

$$V = \int_0^\infty (v(t))^2 \, dt \, . \qquad /4.5/$$

B i z o n y i t á s. Legyen $0 < T < \infty$ tetszőlegesen rögzitett és tegyük fel,hogy a $[0,T]$ intervallumon $y(t) \leq m$.

Ekkor a /4.1/ egyenlőtlenség alapján

$$y(t) \leq k + m \int_0^t v(\tau) \, d\tau \, .$$

azaz a Schwarz-féle egyenlőtlenséget alkalmazva adódik,hogy

$$y(t) \leq k + m\sqrt{t\int_0^t v^2(\tau)\,d\tau} \leq$$

$$\leq k + m\sqrt{Vt}$$

$$(0 \leq t \leq T) \qquad . \qquad /4.6/$$

A /4.6/ egyenlőtlenséget felhasználva /4.1/-ből adódik az

$$y(t) \leq k + k \cdot \int_0^t v(t-\tau)\,d\tau +$$

$$+ m \cdot \sqrt{V} \cdot \int_0^t v(t-\tau)\sqrt{\tau}\,d\tau$$

egyenlőtlenség. A Schwarz-féle egyenlőtlenség alkalmazásával nyerjük:

$$y(t) \leq k + k\sqrt{Vt} + m\sqrt{\frac{(Vt)^2}{2}}$$

$$(0 \leq t \leq T) \quad .$$

A fentiek alapján teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden n természetes számra teljesül az

$$y(t) \leq k\left(1 + \sqrt{Vt} + \ldots + \sqrt{\frac{(Vt)^n}{n!}}\right) + m\sqrt{\frac{(Vt)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

egyenlőtlenség.

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(t\cdot V)^{n+1}}{(n+1)!}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(TV)^{n+1}}{(n+1)!}} = 0,$$

igy

$$y(t) \leq k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(Vt)^n}{n!}} \quad . \qquad /4.7/$$

Nyilvánvaló,hogy a /4.7/ egyenlőtlenség az egész $[0, \infty)$ intervallumon érvényes, hiszen $0 < T < \infty$ tetszőlegesen rögzitett volt.

Legyen

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{\sqrt{n!}}, \qquad /4.8/$$

ekkor a /4.7/ alapján

$$y(t) \leq k \cdot f\left(\sqrt{Vt}\right).$$

Azaz a /4.4/ becslést megkapjuk,ha megmutatjuk, hogy

$$f(u) \leq 3 e^{\frac{1}{\sqrt{2}} u^2} \qquad (0 \leq u < \infty)$$

/4.9/

Ezután bebizonyitjuk a /4.9/egyenlőtlenséget. A /4.8/ végtelen sor tagonként differenciálható,igy

$$f'(u)=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{u^{n-1}}{\sqrt{n!}}=1+u\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{u^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}=$$

$$=1+u\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\frac{u^{n}}{\sqrt{n!}},$$

azaz

$$f'(u)\leqq 1+\sqrt{2}\,u\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{n}}{\sqrt{n!}}=1+\sqrt{2}\,u\,f(u),$$

ugyanis $\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\leqq\sqrt{2}\qquad(n=0,1,2,\dots)$.

Mivel az $0\leq u<\infty$ intervallumon $f(u)$ nemnegativ és

$$f(u)\leq f(0)+\int_0^u\left(1+\sqrt{2}\,t\,f(t)\right)dt,$$

igy a 4.3 tétel alapján $f(u)\leqq z(u)$,ahol $z(u)$ a

$$z'(u)=1+\sqrt{2}\,u\,z(u) \qquad /4.10/$$

differenciálegyenlet $z(0)=f(0)=1$ kezdeti feltételt kielégitő megoldása.

A /4.10/ egyenlet megoldása

$$z(u) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}u^2} + e^{\frac{1}{\sqrt{2}}u^2}\int_0^u e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2}\,dt \le$$

$$\le \left(1 + \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2}\,dt\right)e^{\frac{1}{\sqrt{2}}u^2} < 3\,e^{\frac{1}{\sqrt{2}}u^2},$$

azaz

$$f(u) < 3e^{\frac{1}{\sqrt{2}}u^2}$$

$$(0 \le u < \infty).$$

Qu. e. d.

A következő eredményt Müskisz [12] bebizonyította, és a késleltetett argumentumú integró-differenciálegyenletek vizsgálatára használta fel.

4.8. T É T E L /Miskisz/ Legyen

/a/. $f(t)$ az $a \le t \le b$ intervallumon folytonos függvény.

/b/. $g(t)$ az $a \le t \le b$ intervallumon korlátos változású függvény.

Ekkor bármilyen n természetes számra teljesül az

$$\left|\int_a^b f(t)\,dg(t)\right| \le \omega\left(\frac{b-a}{n};f\right)\cdot \bigvee_a^b (g) + $$
$$+ |f(a)|\,|g(a)| + |f(b)|\,|g(b)| +$$
$$+ \frac{n}{b-a}\,\omega\left(\frac{b-a}{n};f\right)\int_a^b |g(t)|\,dt$$

egyenlőtlenség, ahol

$$\omega\left(\frac{b-a}{n};f\right) = \sup_{|t_2-t_1|\le \frac{b-a}{n}} |f(t_2)-f(t_1)|$$

és $\bigvee_a^b (g)$ **a** $g(t)$ **függvény teljes változása.**

5. A megoldások asszimptotikus viselkedése és stabilitása

Ebben a fejezetben az

$$y(t)=f(t)+\int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \qquad /5.1/$$

ill. az,

$$y(t)=f(t)+\int_0^t y(t-\tau)\,d\Phi(\tau) \qquad /5.2/$$

egyenlet megoldásának az f és φ ill. Φ függvénytől való függését vizsgáljuk. A következő tétel az /5.1/ egyenlet esetére nyert egyik eredményünket tartalmazza.

5.1. T É T E L. Tegyük fel, hogy

/a/ $f(t)$ és $\varphi(t)$ a $0\le t<\infty$ intervallumon lokálisan integrálható.

/b/ Létezik olyan $-\infty < L < \infty$ állandó, amelyre

$$|f(t)|\,e^{-Lt} \le k(L) \qquad /5.3/$$

$(0\le t<\infty;\quad 0<k(L)<\infty$ állandó.$)$

és

$$\Phi(L)=\int_0^\infty \left(\varphi(t)e^{-Lt}\right)^2 dt < \infty . \qquad /5.4/$$

Ekkor az /5.1/ **egyenlet** $y(t)$ **megoldására teljesül az**

$$y(t) \leqq 3k(L)\,e^{\left(\frac{\Phi(L)}{\sqrt{2}}+L\right)t} \qquad /5.5/$$

egyenlőtlenség.

B i z o n y i t á s. Az /5.1/ egyenletekből nyerjük, hogy

$$y(t)e^{-Lt}=f(t)e^{-Lt}+$$

$$+\int_0^t e^{-L(t-\tau)}y(t-\tau)e^{-L\tau}\varphi(\tau)d\tau,$$

azaz

$$|y(t)|e^{-Lt}\leqq$$

$$\leqq k(L)+\int_0^t e^{-L(t-\tau)}|y(t-\tau)|\,e^{-L\tau}|\varphi(\tau)|\,d\tau.$$

A 2.4 tétel alapján $y(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon lokálisan integrálható és bármely véges intervallumon korlátos, igy a 4.7 tételt felhasználva az

$$|y(t)|e^{-Lt}\leqq 3k(L)\,e^{\frac{\Phi(L)}{\sqrt{2}}}$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Ez utóbbi egyenlőtlenségből nyilvánvalóan következik az /5.5/ egyenlőtlenség.

Tekintsük a fenti tétel egy speciális esetét. Legyen $f(t)$ és $\varphi(t)$ a $[0,\infty)$ intervallumon lokálisan integrálható, és tegyük fel, hogy

$$|\varphi(t)| \leqq c\cdot e^{\mu t} \qquad (0\leq t<\infty) \qquad /5.6/,$$

ahol $-\infty<\mu<\infty$ és $0<c<\infty$ állandó. Ekkor minden $L>\mu$ értékre

$$\frac{\Phi(L)}{\sqrt{2}}+L=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\left(\varphi(t)\,e^{-Lt}\right)dt+L\leqq$$

$$\leqq\frac{c^2}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{2(\mu-L)t}\,dt+L,$$

azaz

$$\frac{\Phi(L)}{\sqrt{2}}+L\leqq\frac{c^2}{2\sqrt{2}\,(L-\mu)}+L\,. \qquad /5.7/$$

Ha feltesszük, hogy $\mu<L<\infty$ és

$$|f(t)|\,e^{-Lt}\leqq k(L) \qquad (0\leq t<\infty), \qquad /5.8/$$

akkor az 5.1 tétel, valamint az /5.7/ egyenlőség alapján nyerjük, hogy

$$|y(t)| \leqq 3k(L)\, e^{\frac{[c^2+2\sqrt{2}L(L-\mu)]t}{2\sqrt{2}L(L-\mu)}} \quad . \qquad /5.9/$$

Ha most $L>\mu$ olyan, hogy

$$c^2 + 2\sqrt{2}\, L\cdot(L-\mu) = 0 \; ,$$

akkor $y(t)$ korlátos, és ha $L>\mu$ olyan, hogy

$$\frac{c^2+2\sqrt{2}\, L\,(L-\mu)}{L(L-\mu)} < 0 ,$$

akkor

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0 \; .$$

Ezután egy egyszerű tételt bizonyitunk be.

5.2 **T É T E L** <u>Ha</u> $0<T<\infty$ <u>és</u>

/a/ $f(t)$ <u>és</u> $g(t)$ <u>folytonos,</u>

$\varphi(t)$ <u>és</u> $\psi(t)$ <u>integrálható és</u>

$$|\varphi(t)|,\ |\psi(t)| \leqq M\,(<\infty)$$

<u>a</u> $[0,T]$ <u>intervallumon;</u>

/b/ $|g(t)-f(t)| \leqq \delta_1 \qquad (0\leq t\leq T)$

/c/ $$\int_0^T |\psi(t) - \varphi(t)|\, dt < \delta_2,$$

akkor az /5.1/ egyenlet $y(t)$ **és a**

$$z(t) = g(t) + \int_0^t z(t-\tau)\,\varphi(\tau)\, d\tau \qquad /5.10/$$

egyenlet $z(t)$ **megoldására fennáll a**

$$|z(t) - y(t)| \leqq \left(\delta_1 + \delta_2 e^{MT} \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|\right) e^{MT}$$

egyenlőtlenség.

B i z o n y i t á s. Mivel $y(t)$ ill. $z(t)$ megoldása az /5.1/ ill. /5.10/ egyenletnek, ezért a /b/ és /c/ feltételekből nyerjük:

$$|z(t) - y(t)| \leqq$$

$$\leqq |g(t) - f(t)| + \left|\int_0^t z(t-\tau)\varphi(\tau)\, d\tau - \int_0^t y(t-\tau)\varphi(\tau)\, d\tau\right| \leqq$$

$$\leqq \delta_1 + \int_0^t |z(t-\tau) - y(t-\tau)|\,|\psi(\tau)|\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t |y(t-\tau)|\,|\psi(\tau) - \varphi(\tau)|\, d\tau \leqq$$

$$\leq \delta_1 + \delta_2 \cdot \max_{0 \leq \tau \leq T} |y(\tau)| +$$

$$+ M \int_0^t |z(t-\tau) - y(t-\tau)| \, d\tau \, . \qquad /5.14/$$

Mivel az $f(t)$, $g(t)$ függvények folytonosak, igy a 2.1 tétel alapján $y(t)$ és $z(t)$ is folytonos függvény.

Ebből következik, hogy a /5.14/ egyenlőtlenségre alkalmazható a 4.1 tétel, azaz fennáll az

$$|z(t) - y(t)| \leq$$

$$\leq \left|\delta_1 + \delta_2 \max_{0 \leq \tau \leq T} |y(\tau)|\right) e^{MT}$$

$$(0 \leq t \leq T) \qquad /5.15/$$

egyenlőtlenség. Ezután megadjuk a /5.1/ egyenlet egy megoldásának felső korlátját.

Az /5.1/ egyenletből adódik:

$$|y(t)| \leq |f(t)| + \int_0^t |y(t-\tau)| \, |\varphi(\tau)| \, d\tau \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + M \int_0^t |y(\tau)| \, d\tau \, ,$$

azaz a 4.1 tétel alkalmazása után

$$|y(t)| \leqq e^{Mt} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$$

$$(0 \leq t \leq T) .$$

Ha ez utóbbi egyenlőtlenséget beirjuk a /5.15/-be, akkor a

$$|z(t) - y(t)| \leq$$

$$\leq \left(\delta_1 + \delta_2 e^{MT} \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|\right) e^{MT}$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

Ha az előző tételben a $\psi(t)$ függvényt mint a $\varphi(t)$ függvényt megközelitő polinomot fogjuk fel, akkor, mint tudjuk, az eltérésüket nem integrálközépben, hanem négyzetintegrálban célszerű mérni, ekkor az előző tétel nem használható. Igy a következőben erre a célra használható tételt adunk meg. Először megadjuk az /5.1/ egyenlet egy négyzetesen integrálható $y(t)$ megoldására az $\int_0^T y^2(t)\,dt$ mennyiség becslését:

5.3. T É T E L. **Ha** $\varphi(t)$ **négyzetesen integrálható a** $0 \leq t \leq T$ **intervallumon, azaz**

$$\Phi = \int_0^T \varphi^2(t)\, dt < \infty \,, \qquad /5.16/$$

és

$$|f(t)| \leq M \; (< \infty) \,, \quad (0 \leq t \leq T) \qquad /5.17/$$

valamint $y(t)$ **az**

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau \qquad /5.18/$$

egyenlet négyzetesen integrálható megoldása, akkor teljesül az

$$\int_0^T y^2(\tau)\, d\tau \leq \frac{4M^2}{\Phi} \left[e^{\frac{\Phi}{2}T} \left(1 - \frac{\sqrt{\Phi T}}{2}\right) - 1 \right]^2 \qquad /5.19/$$

egyenlőtlenség.

B i z o n y i t á s. A /5.18/ egyenletből mindkét oldalt négyzetre emelve, és figyelembe véve a /5.17/ egyenlőtlenséget, nyerjük:

$$y^2(t) = f^2(t) +$$

$$+ 2f(t)\int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \left(\int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right)^2 \leqq$$

$$\leqq M^2 + 2M\int_0^t |y(t-\tau)|\,|\varphi(\tau)|\,d\tau + \left(\int_0^t y(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right)^2.$$

Ha a fenti egyenlőtlenség jobb oldalára alkalmazzuk a Schwarz - féle egyenlőtlenséget,akkor az

$$y^2(t) \leqq M^2 + 2M\sqrt{\int_0^t \varphi^2(\tau)\,d\tau \cdot \int_0^t y^2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk.Most vegyük figyelembe az /5.16/ összefüggést,és integráljuk a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalát.Ekkor

$$\int_0^t y^2(\tau)\,d\tau \leqq$$

$$\leqq M^2 t + \int_0^t \left[2M\sqrt{\Phi}\sqrt{\int_0^\tau y^2(s)\,ds} + \Phi\int_0^\tau y^2(s)\,ds\right] d\tau .$$

Legyen

$$Y(t) = \int_0^t y^2(\tau)\,d\tau ,$$

ekkor $Y(t)$ folytonos,és teljesül rá. az

$$Y(t) \leqq M^2T + \int_0^t \left[2M\sqrt{\Phi}\sqrt{Y(\tau)} + \Phi Y(\tau)\right] d\tau$$

egyenlőtlenség. Ebből a 4.2 tétel alapján következik, hogy

$$Y(t) \leqq G^{-1}\left(G\left(M^2T\right) + t\right) \qquad /5.21/$$

$$(0 \leq t \leq T) \quad ,$$

ahol

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{2M\sqrt{\Phi}\sqrt{t} + \Phi t}\, dt . \qquad /5.22/$$

$$(u \geq 0 , \; u_0 > 0)$$

Ha az /5.22/-ben szereplő integrált kiszámitjuk, akkor $G(u)$-ra a

$$G(u) = \frac{2}{\Phi} \log \frac{2M\sqrt{\Phi} + \Phi\sqrt{u}}{2M\sqrt{\Phi} + \Phi\sqrt{u_0}}$$

összefüggést nyerjük.

Ha most u_0 -át nullának választjuk, akkor a

$$G(u)=\frac{2}{\Phi}\log\left(1+\frac{\sqrt{\Phi}}{2M}\sqrt{u}\right)\quad (u\geq 0) \qquad /5.23/$$

összefüggést nyerjük, amelyből egyszerű számitással adódik a G függvény G^{-1} inverz-függvénye:

$$G^{-1}(v)=\frac{4M^2}{\Phi}\left(e^{\frac{\Phi}{2}}-1\right)^2\quad (v\geq 0). \qquad /5.24/$$

A G ill. G^{-1} függvényre nyert /5.24/ összefüggést felhasználva az /5.21/ egyenlőtlenségből kapjuk:

$$Y(t)\leqq\frac{4M^2}{\Phi}\left\{e^{\frac{\Phi}{2}\left[\frac{2}{\Phi}\log\left(1+\frac{\sqrt{\Phi}}{2M}\sqrt{M^2T}\right)+t\right.}-1\right\}^2 .$$

Ha elvégezzük a kijelölt müveleteket és a lehetséges egyszerűsitéseket, akkor adódik, hogy

$$Y(t)\leqq\frac{4M^2}{\Phi}\left[e^{\frac{\Phi}{2}T}\left(1+\frac{\sqrt{\Phi}}{2}\sqrt{T}\right)-1\right]^2 ,$$

azaz figyelembe véve $Y(t)$ definicióját, a kivánt egyenlőtlenséget nyerjük.

Qu. e. d.

A fenti tételt felhasználva bebizonyitjuk a következőt:

5.4 T É T E L **Tegyük fel, hogy $f(t)$, $g(t)$, $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ olyan, a $[0,T]$ intervallumon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következő feltételek:**

/a/ **létezik olyan** $0 \leq M < \infty$ **állandó, hogy**

$$|f(t)| \leq M \qquad (0 \leq t \leq T) \; ; \tag{5.25}$$

/b/ $\varphi(t)$ **és** $\psi(t)$ **négyzetesen integrálható függvény, azaz**

$$\Phi = \int_0^T \varphi^2(t)\, dt < \infty \tag{5.26}$$

$$\Psi = \int_0^T \psi^2(t)\, dt < \infty \; ;$$

/c/ $0 < \delta < \infty$ **számra teljesül a**

$$|g(t) - f(t)| \leq \delta \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{5.27}$$

és

$$\int_0^T \left[\psi(t) - \varphi(t)\right]^2 dt \leq \delta \tag{5.28}$$

egyenlőtlenség.

Ha ezen feltételek mellett $y(t)$ **ill.** $z(t)$ **az**

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \qquad /5.29/$$

ill.

$$z(t) = g(t) + \int_0^t z(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau \qquad /5.30/$$

egyenlet négyzetesen integrálható megoldása, akkor teljesül az

$$\int_0^T \left[z(t) - y(t)\right]^2 dt \leq$$

$$\leqq \left(\delta + M\sqrt{\delta}\,\sqrt{K(\Phi)}\right)^2 K(\Psi) \qquad /5.31/$$

egyenlőtlenség, ahol

$$K(u) = \frac{4}{u}\left[e^{\frac{u}{2}}\left(1 + \frac{\sqrt{uT}}{2}\right) - 1\right]^2 . \qquad /5.32/$$

$$(0 < u < \infty)$$

B i z o n y i t á s. **Az /5.29/ ill. /5.30/ egyenletből következik, hogy**

$$z(t)-y(t) = g(t)-f(t)+$$
$$+\int_0^t y(t-\tau)\left[\psi(\tau)-\varphi(\tau)\right]d\tau +$$
$$+\int_0^t \left[z(t-\tau)-y(t-\tau)\right]\psi(\tau)\,d\tau .$$

Vezessük be az

$$f_1(t) = g(t)-f(t)+\int_0^t y(t-\tau)\left[\psi(\tau)-\varphi(\tau)\right]d\tau \qquad /5.33/$$

jelölést.

Ekkor a $z(t)-y(t)$ függvény megoldása a

$$z(t)-y(t) = f_1(t)+\int_0^t \left[z(t-\tau)-y(t-\tau)\right]\psi(\tau)\,d\tau \qquad /5.34/$$

egyenletnek, és négyzetesen integrálható, hiszen $z(t)$ és $y(t)$ is négyzetesen integrálható.

Megmutatjuk, hogy $f_1(t)$ korlátos függvény. Ha alkalmazzuk a Schwarz-féle egyenlőtlenséget, és figyelembe vesszük a /c/ feltételt, akkor az /5.33/-ból nyerjük:

$$|f_1(t)| \leqq |g(t)-f(t)| +$$

$$+\sqrt{\int_0^t y^2(\tau)\,d\tau}\cdot\sqrt{\int_0^t [\psi(\tau)-\varphi(\tau)]^2 d\tau} \leqq$$

$$\leqq \delta + \sqrt{\delta}\cdot\sqrt{\int_0^t y^2(\tau)\,d\tau} \qquad /5.35/$$

$$(0 \leq t \leq T).$$

Mivel $y(t)$ az /5.29/ egyenlet négyzetesen integrálható megoldása,az 5.3 tételt és az /5.32/ jelölést alkalmazva nyerjük:

$$\int_0^t y^2(\tau)d\tau \leq \frac{4M^2}{\phi}\left[e^{\frac{\phi}{2}T}\left(1+\frac{\sqrt{\phi T}}{2}\right)-1\right]^2 = M^2 K(\phi),$$

ahol M ill. ϕ az /5.25/ ill. /5.26/által van megadva.

Ha ezt az /5.35/ -be irjuk,akkor az

$$|f_1(t)| \leqq \delta + M\sqrt{\delta}\sqrt{K(\phi)} = M_1 \qquad /5.36/$$

egyenlőtlenséget nyerjük,azaz $M_1 < \infty$ felső korlátja $f_1(t)$ -nek. Ha most az /5.34/ egyenletre alkalmazzuk az /5.3/ tételt,akkor nyerjük,hogy

$$\int_0^T [z(t)-y(t)]^2 dt \leqq$$

$$\leqq \frac{4M_1^2}{\psi}\left[e^{\frac{\psi}{2}T}\left(1+\frac{\sqrt{\phi T}}{2}\right)-1\right]^2 = M_1^2\cdot K(\Psi),$$

ahol M_1 az /5.36/, Ψ pedig az /5.26/ által adott. Ha ide behelyettesitjük az M_1 értékét, akkor a kivánt összefüggést nyerjük.

Qu. e. d.

Az

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(t-\tau)\, d\Phi(\tau) \qquad /5.37/$$

egyenletre nyert eredményünket a következő tétel foglalja össze.

5.5 T É T E L <u>Tegyük fel, hogy</u>

/a/ $f(t)$ <u>és</u> $g(t)$ <u>folytonos a</u> $0 \le t \le T$ <u>intervallumon;</u>

/b/ $\Phi(t)$ <u>korlátos változású a</u> $[0,T]$ <u>intervallumon, és</u> $\Psi(t)$ <u>Lipschitz-folytonos, azaz létezik olyan</u> $0 < K < \infty$ <u>állandó, hogy bármely</u> $0 \le t_1,\ t_2 \le T$ <u>értékpárra</u>

$$|\Psi(t_2) - \Psi(t_1)| \le K\,|t_2 - t_1|;$$

/c/ $|\Psi(0)| < \frac{1}{2}$

<u>Ezen feltételek mellett, bármely előre adott</u> $\varepsilon > 0$ <u>számhoz található olyan</u> $\delta > 0$ <u>szám, hogy ha</u>

/d/ $|g(t) - f(t)| \leq \delta \quad (0 \leq t \leq T);$

/e/ $|\Phi(t) - \Psi(t)| \leq \delta \quad (0 \leq t \leq T)$

és $y(t)$ **az** /5.37/, $z(t)$ **pedig a**

$$z(t) = g(t) + \int_0^t z(t-\tau)\, d\Psi(\tau) \qquad /5.38/$$

egyenlet folytonos, korlátos változású megoldása, akkor teljesül a

$$|z(t) - y(t)| < \varepsilon \qquad (0 \leq t < T)$$

egyenlőtlenség.

B i z o n y í t á s. Az /5.38/ egyenletből a /d/ feltétel alkalmazásával tetszőlegesen rögzitett $0 \leq t \leq T$ érték esetén nyerjük:

$$|z(t) - y(t)| \leq$$

$$\leq |g(t) - f(t)| + \left|\int_0^t z(t-\tau)\, d\Psi(\tau) - \int_0^t y(t-\tau)\, d\Phi(\tau)\right| \leq$$

$$\leq \delta + \left|\int_0^t y(t-\tau)\, d[\Psi(\tau) - \Phi(\tau)]\right| +$$

$$+ \left|\int_0^t [z(t-\tau) - y(t-\tau)]\, d\Psi(\tau)\right| . \qquad /5.39/$$

Most becslést adunk a fenti egyenlőtlenség jobb oldalán álló tagokra. Vizsgáljuk a jobb oldalon álló második tagot. Az /5.37/ egyenlet $y(t)$ megoldása folytonos a $0 \leq t \leq T$ intervallumon, igy alkalmazhatjuk a 4.8 tételt, azaz bármely rögzitett n természetes számra teljesül a

$$\left| \int_0^t y(t-\tau)\, d\left[\Psi(\tau) - \Phi(\tau)\right] \right| \leqq$$

$$\leqq \omega\left(\tfrac{t}{n}; y\right)\left[\overset{t}{\underset{0}{V}}(\Psi) + \overset{t}{\underset{0}{V}}(\Phi)\right] + |y(0)|\,|\Psi(t) - \Phi(t)| +$$

$$+ |y(t)| \cdot |\Psi(0) - \Phi(0)| + \frac{n}{t}\, \omega\left(\tfrac{t}{n}; y\right) \int_0^t |\Psi(t) - \Phi(t)|\, d\tau$$

egyenlőtlenség. Ezután vegyük figyelembe az /e/ ill. az $y(0) = f(0)$ feltételt. Ekkor

$$\left| \int_0^t y(t-\tau)\, d\left[\Psi(\tau) - \Phi(\tau)\right] \right| \leqq$$

$$\leqq \omega\left(\tfrac{t}{n}; y\right) \cdot \left[\overset{t}{\underset{0}{V}}(\Psi) + \overset{t}{\underset{0}{V}}(\Phi)\right] + |f(0)| \cdot \delta +$$

$$+ \delta \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |y(t)| + \delta \cdot n \cdot \omega\left(\tfrac{t}{n}; y\right) =$$

$$= \omega\left(\tfrac{t}{n}; y(t-\tau)\right) \left[\overset{T}{\underset{0}{V}}(\Psi) + \overset{T}{\underset{0}{V}}(\Phi)\right] +$$

$$+ \delta\left[|f(0)| + \max_{0 \leq t \leq T} |y(t)| + n \cdot \omega\left(\tfrac{t}{n}; y\right)\right] \qquad /5.40/$$

Az /5.39/ egyenlőtlenség jobb oldalán álló utolsó tagból egyszerű átalakitással nyerjük:

$$\left|\int_0^t [z(t-\tau)-y(t-\tau)]\, d\Psi(\tau)\right| \leqq$$

$$\leqq |z(0)-y(0)|\cdot|\Psi(t)| + |z(t)-y(t)|\,|\Psi(0)| +$$

$$+\left|\int_0^t \Psi(\tau)\, d[z(t-\tau)-y(t-\tau)]\right|.$$

Mivel a feltételek szerint $\Psi(t)$ folytonos, $y(t)$ ill. $z(t)$ korlátos változású, ez utóbbi egyenlőtlenségből a 4.8 tétel alkalmazásával tetszőlegesen rögzitett **m** természetes szám esetén nyerjük:

$$\left|\int_0^t [z(t-\tau)-y(t-\tau)]\, d\Psi(\tau)\right| \leqq$$

$$\leqq |z(0)-y(0)|\cdot|\Psi(t)| + |z(t)-y(t)|\cdot|\Psi(0)| +$$

$$+\ \omega\left(\tfrac{t}{m};\Psi\right)\left[\mathop{V}_{\tau=0}^{t}(y(t-\tau)) + \mathop{V}_{\tau=0}^{t}(z(t-\tau))\right] +$$

$$+|z(0)-y(0)|\cdot|\Psi(t)| + |z(t)-y(t)|\,|\Psi(0)| +$$

$$+\ \tfrac{m}{t}\,\omega\left(\tfrac{t}{m};\Psi\right)\cdot\int_0^t |z(\tau)-y(\tau)|\, d\tau .$$

Ha most figyelembe vesszük a /b/ és/d/ feltételt, akkor a fenti egyenlőtlenségből egyszerű rendezéssel az

$$\left|\int_0^t [z(t-\tau)-y(t-\tau)]\,d\Psi(\tau)\right| \leqq$$

$$\leqq 2\delta \max_{0\leq t\leq T}\{|\Psi(t)|\} + 2\cdot|\Psi(0)|\,|z(t)-y(t)| +$$

$$+\,\omega\left(\frac{t}{m};\Psi\right)\cdot\left[\mathop{V}_{\tau=0}^{t}(y(t-\tau)) + \mathop{V}_{\tau=0}^{t}(z(t-\tau))\right] +$$

$$+\,K\int_0^t |z(\tau)-y(\tau)|\,d\tau$$

egyenlőtlenség adódik, ahol a K konstans a /b/ feltételben adott. Ha most elvégezzük az $m \to \infty$ határmenetet, akkor kapjuk, hogy

$$\left|\int_0^t [z(t-\tau)-y(t-\tau)\,d\Psi(\tau)\right| \leqq$$

$$\leqq 2\cdot\delta\cdot\max_{0\leq t\leq T}\{|\Psi(t)|\} + 2\cdot|\Psi(0)|\,|z(t)-y(t)| +$$

$$+\,K\cdot\int_0^t |z(\tau)-y(\tau)|\,d\tau \,.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenséget és az /5.40/-et az /5.39/ egyenlőtlenségbe irva kapjuk:

$$|z(t) - y(t)| \leqq$$

$$\leqq \delta + \delta \left[|f(0) + \max_{0 \le t \le T} \left\{ |y(t)| \right\} + n \cdot \omega\left(\tfrac{t}{n}; y(t-\tau)\right)\right] +$$

$$+ \omega\left(\tfrac{t}{n}; y(t-\tau)\right)\left[\overset{T}{\underset{0}{V}}(\Psi) + \overset{T}{\underset{0}{V}}(\Phi)\right] + 2\delta \max_{0 \le t \le T} \left\{ |\Psi(t)| \right\} +$$

$$+ 2|\Psi(0)| \cdot |z(t) - y(t)| + K \cdot \int_0^t |z(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \leqq$$

$$\leqq \delta \left[1 + |f(0)| + \max_{0 \le t \le T} \left\{ |y(t)| \right\} + 2 \cdot \max_{0 \le t \le T} \left\{ |\Psi(t)| \right\} +\right.$$

$$\left. + n \cdot \omega\left(\tfrac{t}{n}; y(t-\tau)\right)\right] + \omega\left(\tfrac{t}{n}; y(t-\tau)\right) \cdot \left[\overset{T}{\underset{0}{V}}(\Psi) + \overset{T}{\underset{0}{V}}(\Phi)\right] +$$

$$+ 2|\Psi(0)| \cdot |z(t) - y(t)| + K \cdot \int_0^t |z(\tau) - y(\tau)|\, d\tau .$$

Ezt az egyenlőséget tetszőlegesen rögzitett $0 < t \le T$ értékre nyertük. A $t = 0$ eset közvetlen behelyettesitéssel igazolható.

Most vegyük figyelembe a $2\cdot\Phi(0)<1$ feltételt, és végezzünk egyszerű átalakitásokat a fenti egyenlőtlenségen. Ekkor

$$|z(t)-y(t)| \leqq \frac{\delta}{1-2|\Psi(0)|}\Big[1+|f(0)|+$$

$$+\max_{0\le t\le T}\{|y(t)|\}+2\cdot\max_{0\le t\le T}\{|\Psi(t)|\}+$$

$$+n\cdot\max_{0\le t\le T}\omega\left(\tfrac{t}{n};y(t-\tau)\right)\Big]+$$

$$+\frac{1}{1-2|\Phi(0)|}\max_{0\le t\le T}\left\{\omega\left(\tfrac{t}{n};y(t-\tau)\right)\right\}\Big[\overset{T}{\underset{0}{V}}(\Psi)+\overset{T}{\underset{0}{V}}(\Phi)\Big]+$$

$$+K\int_0^t|z(\tau)-y(\tau)|\,d\tau \quad . \qquad /5.41/$$

Vezessük be az

$$F(n)=\frac{1}{1-2|\Psi(0)|}\Big[1+|f(0)|+\max_{0\le t\le T}\{|y(t)|\}+$$

$$+2\max_{0\le t\le T}\{|\Psi(t)|\}+n\cdot\max_{0\le t\le T}\left\{\omega\left(\tfrac{t}{n};y(t-\tau)\right)\right\}\Big]$$

és az

$$M=\frac{1}{1-2|\Psi(0)|}\Big[\overset{T}{\underset{0}{V}}(\Psi)+\overset{T}{\underset{0}{V}}(\Phi)\Big]$$

jelölést. Ekkor az /5.41/ egyenlőtlenség a

$$|z(t)-y(t)| \leqq$$

$$\leqq \delta \cdot F(n) + M \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \omega\left(\frac{t}{n}; y(t-\tau)\right)\right\} +$$

$$+K \cdot \int_0^t |z(\tau) - y(\tau)| \, d\tau$$

alakban irható,amelyből a 4.1 tétel alkalmazásával nyerjük a következőt:

$$|z(t)-y(t)| \leq$$

$$\leqq \left[\delta \cdot F(n) + M \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \omega\left(\frac{t}{n}; y(t-\tau)\right)\right\} e^{KT} \qquad /5.42/$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

Ezek után tekintsük a rögzitett $\varepsilon > 0$ számot, és válasszunk olyan N természetes számot,amelyre

$$M \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \omega\left(\frac{t}{N}; y(t-\tau)\right)\right\} e^{KT} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad /5.43/$$

A folytonossági modulus definiciója alapján nyilvánvaló,hogy ilyen szám létezik,hiszen $y(t)$ a $[0,T]$ intervallumon folytonos függvény, igy

$$\max_{0 \le \tau \le T} \left\{ \omega \left(\frac{t}{N}; y(t-\tau) \right) \right\} =$$

$$= \max_{0 \le t \le T} \sup_{|\tau_2 - \tau_1| \le \frac{t}{N}} \left\{ \left| y(t-\tau_2) - y(t-\tau_1) \right| \right\} \leqq e^{-KT} \frac{\varepsilon}{2M}$$

teljesül, ha N elég nagy. Ha az igy rögzitett N természetes számra δ -t olyan kicsinek választjuk, hogy

$$\delta F(N) e^{KT} < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesüljön, akkor az /5.43/ és /5.42/ egyenlőtlenségeket is figyelembe véve nyerjük:

$$|z(t) - y(t)| < \varepsilon$$
$$(0 \le t \le T)$$

Qu. e. d.

Tekintsük a tétel alábbi következményét:

Legyen $\varphi(t)$ ill. $\psi(t)$ a $[0,T]$ intervallumon integrálható függvény és

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau$$

ill.
$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau)\, d\tau ,$$

valamint $f(t)$ és $g(t)$ az előzőekben adott.Ekkor az /5.37/ ill. /5.38/ egyenlet az

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \qquad /5.44/$$

ill.a

$$z(t) = g(t) + \int_0^t z(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau \qquad /5.45/$$

egyenletbe megy át,és $\Phi(t), \Psi(t)$ kielégiti az előző tétel feltételeit.

Ha feltésszük azt is,hogy $f(t)$ és $g(t)$ korlátos változású,akkor Bellman-Cooke [2] szerint az /5.44/ ill. az /5.45/ egyenlet $y(t)$ ill. $z(t)$ megoldása a $[0,T]$ intervallumon folytonos, korlátos változású függvény,igy az előző tétel szerint bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám,hogy

$$|z(t) - y(t)| < \varepsilon \qquad (0 \leq t \leq T),$$

ha

$$|g(t) - f(t)| < \delta \qquad (0 \leq t \leq T)$$

és

$$|\Psi(t) - \Phi(t)| < \delta \qquad (0 \leq t \leq T).$$

Vizsgáljuk a legutolsó egyenlőtlenséget. Ha beirjuk a $\Phi(t)$ és $\Psi(t)$ jelentését, akkor az

$$\left|\int_0^t \psi(\tau)d\tau - \int_0^t \varphi(\tau)d\tau\right| = \left|\int_0^t [\psi(\tau)-\varphi(\tau)]\,d\tau\right| < \delta$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

Összefoglalva a fentieket:

3.5. T É T E L. Tegyük fel, hogy

/a/ $f(t)$ és $g(t)$ a $[0,T]$ intervallumon folytonos, korlátos változású függvények.

/b/ $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ a $[0,T]$ intervallumon integrálható.

Ekkor bármely előre adott $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy az /5.44/ ill. /5.45/ egyenlet $y(t)$ ill. $z(t)$ megoldására teljesül, hogy

$$|z(t) - y(t)| < \varepsilon$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

ha csak

$$|g(t) - f(t)| < \delta$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

<u>**és**</u> $$\left| \int_0^t [\psi(\tau) - \varphi(\tau)]\, d\tau \right| < \delta \quad .$$

Megpróbálunk a fenti tételek használhatóságára utalni. Tegyük fel, hogy a /5.44/ egyenlet megoldását úgy akarjuk megadni, hogy helyette egy egyszerűbb egyenletet oldunk meg. Tegyük fel, hogy az egyszerűbb egyenlet a /5.45/ egyenletet jelenti, és a benne szereplő $\psi(t)$ függvény a $\varphi(t)$-t valamely értelemben legjobban közelitő meghatározott fokszámú polinom. Legyen továbbá $f(t) = g(t)$, ekkor a korábban nyert tételek értelmében a megoldások különbségére becslést tudunk adni. A $\varphi(t)$ azonban lehet elég szabálytalan függvény is, hiszen róla csak azt tételezzük fel, hogy integrálható.
Ugyanakkor a

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau$$

integrálfüggvénye abszolut folytonos függvény.
Ezért elképzelhető, hogy könnyű approximálni egyenletesen közelitő polinomokkal. Tegyük fel, hogy $\Psi(t)$ egy ilyen polinom. Ekkor a legutolsó tétel szerint az /5.45/ egyenlet megoldása használható az /5.44/ egyenlet megoldásának közelitésére.
Ennek a közelitésnek még az az előnye is megvan, hogy a /5.45/ egyenletben a $\psi(t) = \Psi'(t)$ fokszáma eggyel kisebb, mint a $\Psi(t)$ fokszáma.

6. Speciális tipusú konvoluciós egyenletek vizsgálata

Az előző részben bizonyitott tételek kapcsolatot teremtenek két különböző egyenlet megoldása között. Nevezetesen, ha a konvoluciós egyenletekben adott fügvények keveset térnek el, akkor a megoldások is keveset térnek el. Ez lehetővé teszi, hogy bizonyos bonyolult függvények helyett, mint majd látni fogjuk, a lényegesen könnyebben kezelhető polinomokat, kvázipolinomokat használjuk.

A most bizonyitásra kerülő tétel az

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \qquad /6.1/$$

egyenlet megoldásának megkeresését a

$$z(t) = 1 + \int_0^t z(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \qquad /6.2/$$

egyenlet megoldásának megkeresésére vezeti vissza. A tétel Bellmantól és Cooke-től ered:

6.1. T É T E L. /Bellman, Cooke [2] /: __Ha__

/a/ $f'(t)$ __létezik a__ $0 \leq t \leq T$ __intervallumon és__ $\int_0^T |f'(t)|\,dt < \infty$,

/b/ $$\int_0^T |\varphi(t)|\, dt < \infty ,$$

akkor az /6.1/ egyenlet $y(t)$ **megoldása előáll az**

$$y(t) = f(0)\, z(t) + \int_0^t z(t-\tau)\, f'(\tau)\, d\tau \qquad /6.3/$$

formulával, ahol $z(t)$ **az / 6.2 / egyenlet megoldása.**

A tétel állitása nyilvánvaló, ha a /6.3/ formulát a /6.1/ egyenletbe helyettesitjük. Ezért a bizonyitást nem részletezzük.

A fenti tétel az $f'(t)$ függvény létezését teszi fel, jóllehet gyakran csak a $\varphi'(t)$ létezik. Ilyen esetet foglal magába az általunk talált tétel:

6.2. T É T E L **Ha**

/a/ $$\int_0^T |f(t)|\, dt < \infty ,$$

/b/ $\varphi'(t)$ **létezik és**

$$\int_0^T |\varphi'(t)|\, dt < \infty ,$$

akkor a /6.1/ egyenlet $y(t)$ **megoldása:**

$$y(t) = f(t) + \varphi(0) \int_0^t f(\tau)\, z(t-\tau)\, d\tau + \int_0^t \left\{ z(t-\tau) \int_0^\tau f(s)\, \varphi'(\tau - s)\, ds \right\} d\tau \qquad /6.4/$$

alakú, ahol $z(t)$ a /6.2/ egyenlet megoldása.

B i z o n y i t á s. Ha a /6.1/ egyenlet megoldását

$$y(t) = f(t) + \varepsilon(t) \qquad /6.5/$$

alakbankeressük, akkor az /6.1/ egyenletből helyettesités után $\varepsilon(t)$ -re az

$$\varepsilon(t) = \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau + \int_0^t \varepsilon(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$$

egyenletet nyerjük, amelynek megoldása a /6.1/ tétel alapján:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left\{ z(t-\tau)\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau f(\tau-s)\varphi(s)\,ds \right\} d\tau$$

alakú, ahol $z(t)$ a /6.2/ egyenlet megoldása.

Mint az elemi differenciál számitásban ismeretes:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \varphi(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau\,,$$

azaz

$$\varepsilon(t) = \varphi(0)\int_0^t f(\tau)\,z(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \left\{ z(t-\tau)\int_0^\tau f(s)\,\varphi'(\tau-s)\,ds \right\} d\tau$$

Ha az igy nyert összefüggést a /6.5/-be irjuk, akkor a /6.4/ kifejezést kapjuk.

Qu. e. d.

A következő tételek lényege az, hogy a konvoluciós egyenlet megoldásának problémáját visszavezetik egy n -ed rendű homogén állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet megoldására. Mint tudjuk ez utóbbi egyenlet integrációja elemi függvények segitségével mindig lehetséges, sőt nem is kvadraturákra, hanem algebrai műveletekre redukálódik.

Először bebizonyitjuk a következőt:

6. 1. L E M M A. <u>Ha</u> $\varphi(t)$ <u>a</u> $[0,T]$ <u>intervallumon</u> n <u>-szer</u> $/n\geq 1/$ <u>folytonosan differenciálható, akkor az</u>

$$y(t) = 1 + \int_0^t \varphi(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \qquad /6.6/$$

<u>egyenlet</u> $y(t)$ <u>megoldása is</u> n <u>-szer folytonosan differenciálható, és a differenciálhányadosra teljesül az</u>

$$y^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^{(i)}(0)\, y^{(k-1-i)}(t) + \int_0^t y(\tau)\, \varphi^{(k)}(t-\tau)\, d\tau \qquad /6.7/$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

<u>összefüggés, ahol</u> $y^{(k)}(t)$ $y(t)$ k<u>-adik deriváltját jelöli.</u>

B i z o n y i t á s. A bizonyitás teljes indukcióval igen könnyen elvégezhető, ezért nem részletezzük.

6.3. T É T E L. Tegyük fel, hogy $\varphi(t)$ megoldása az

$$a_n\varphi^{(n)}(t)+a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(t)+\dots+a_0\varphi(t)=0 \qquad /6.8/$$

differenciál egyenletnek. Ekkor az

$$y(t)=1+\int_0^t y(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau \qquad /6.9/$$

egyenlet megoldása a

$$b_n y^{(n)}(t)+b_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+b_0 y(t)=a_0 \qquad /6.10/$$

differenciál egyenletnek az

$$y(0)=1$$

$$y^{(k)}(0)=\sum_{i=0}^{k-1}\varphi^{(i)}(0)\,y^{(k-1-i)}(0) \qquad /6.11/$$

$$(k=1,2,\dots,n-1)$$

kezdeti feltételeket kielégitő megoldása adja, ahol

$$b_{n-k}=a_{n-k}-\sum_{i=0}^{k-1}a_{n-i}\,\varphi^{(k-1-i)}(0). \qquad /6.12/$$

$$(k=0,1,\dots,n)$$

B i z o n y i t á s. Mivel mind a /6.9/, mind a /6.10/ egyenlet megoldása ~~egyértelműen meg oldása~~ egyértelműen meghatározott, elég megmutatni, hogy a /6.9/ egyenlet megoldása kielégiti a /6.10/ egyenletet és a /6.11/ kezdeti feltételeket.

Az előző lemma alapján tudjuk, hogy $y(t)$ n-szer folytonosan differenciálható, és deriváltjaira a /6.7/ összefüggés teljesül. Ebből az összefüggésből viszont azonnal következik a /6.11/ kezdeti feltételrendszer, ugyanis $t=0$ esetén az

$$\int_0^t y(\tau)\varphi^{(k)}(t-\tau)\,d\tau \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

tag eltűnik.

Tekintsük az $y(t)$ deriváltjaira a teljesülő /6.7/ egyenletet

$$y^{(k)}(t)=\sum_{i=0}^{k-1}\varphi^{(i)}(0)\,y^{(k-1-i)}(t)+\int_0^t y(\tau)\,\varphi^{(k)}(t-\tau)\,d\tau$$

$$(k=1,2,\dots,n)$$

majd képezzük a

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\,y^{(k)}(t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{i=0}^{k-1}\varphi^{(i)}(0)\,y^{(k-1-i)}(t)+\sum_{k=1}^{n}a_k\int_0^t y(\tau)\varphi^{(k)}(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=0}^{k-1}a_{n-i}\,\varphi^{(k-1-i)}(0)\right\}y^{(n-k)}(t)+\int_0^t y(\tau)\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k\,\varphi^{(k)}(t-\tau)\right\}d\tau$$

összeget. Szorozzuk be a /6.9/ egyenlet mindkét oldalát a_0-lal, majd a kapott egyenlőséget adjuk hozzá a fenti egyenlethez. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} a_{k-i} \varphi^{(k-1-i)}(0) \right\} y^{(n-k)}(t) +$$

$$+ a_0 + \int_0^t y(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^{(k)}(t-\tau) \right\} d\tau$$

Mivel a $\varphi(t)$ megoldása a /6.8/ differenciál-egyenletnek,kapjuk hogy

$$\int_0^t y(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^{(k)}(t-\tau) \right\} d\tau = 0;$$

$$(0 \le t \le T)$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_{n-i} \varphi^{(k-1-i)}(0) \right\} y^{(n-k)}(t) + a_0$$

Ha az igy nyert egyenletet átrendezzük,és bevezetjük a /6.12/ jelölést,akkor a /6.10/ egyenletet kapjuk $y(t)$ -re.

Most néhány speciális esetben alkalmazzuk a fenti tételt:

Tegyük fel,hogy $\varphi(t)$ $(n-1)$ -ed rendű polinom:

$$\varphi(t) = c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0 . \qquad /6.13/$$

Ekkor $\varphi(t)$ eleget tesz a

$$\varphi^{(n)}(t)=0 \qquad /6.14/$$

homogén lineáris n -ed rendű diferenciálegyenletnek, igy a /6.9/ egyenlet megoldásánál alkalmazhatjuk az elöző tételt. Ehhez ki kell számitanunk a /6.12/ együtthatókat. Mivel a /6.14/ egyenletet a /6.8/ ból akkor nyerjük, ha

$$a_i=0$$

$(i=1,2,\dots,n-1)$ és $a_n=1$, igy

/6.12/-ből adódik, hogy

$$b_n=1$$

és

$$b_{n-1}=-\varphi^{(k-1)}(0)=-(k-1)!\,c_{k-1}$$

$$(k=1,2,\dots,n)$$

6.4. T É T E L. <u>Ha</u> $\varphi(t)$ <u>az /6.13/-ban adott</u> $(n-1)$ <u>-ed rendű polinom, akkor a /6.9/ egyenlet megoldását az</u>

$$y^{(n)}(t)-c_0\,y^{(n-1)}(t)-c_1\,y^{(n-2)}(t)-\dots-(n-1)!\,c_{n-1}\,y(t)=0.$$

<u>differenciálegyenletnek az</u> $y(0)=1$

$$y^{(k)}(0)=\sum_{i=0}^{k-1} i!\,c_i\,y^{(k-1-i)}(0) \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

<u>kezdeti feltételeket kielégitő megoldása adja.</u>

Ezután érdekes foglalkozni a kvázipolinomok esetével.

6.1. **D e f i n i c i ó.** A $\varphi(t)$ függvényt kvázipolinomnak nevezzük, ha

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{N} p_k(t)\,e^{\alpha_k t}$$

alakú, ahol $p_k(t)$ a t változó polinomja és α_k tetszőleges valós szám.

Tegyük fel, hogy $\varphi(t)$ a

$$\varphi(t)=C_1 e^{\alpha_1 t}+\dots+C_n e^{\alpha_n t} \qquad /6.15/$$

formulával adott kvázipolinom, ahol C_i ill. α_i $(i=1,\dots,n)$ tetszőleges valós szám és

$$\alpha_i \neq \alpha_j ,$$

$$\text{ha} \quad i\neq j \quad (i,j=1,2,\dots,n).$$

Legyen

$$p(\alpha)=(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\dots(\alpha-\alpha_n)=$$
$$=\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\dots+a_0$$

ahol az a_{n-k} együtthatók az

$$\begin{aligned}
&a_n=1\\
-\,&a_{n-1}=\alpha_1+\dots+\alpha_n\\
&a_{n-2}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_1\alpha_n+\dots+\alpha_{n-1}\alpha_n \qquad /6.16/\\
-\,&a_{n-3}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\dots+\alpha_1\alpha_2\alpha_n+\dots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n\\
&\vdots\\
(-1)^n&a_0=\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n
\end{aligned}$$

formulákkal vannak megadva. Ekkor a közönséges diferenciálegyenletek elméletéből tudjuk, hogy $\varphi(t)$ eleget tesz a

$$\varphi^{(n)}(t)+a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(t)+\dots+a_0\varphi(t)=0$$

diferenciálegyenletnek.

Mivel a $\varphi(t)$ definiciójából a

$$\varphi^{(k)}(0)=\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j^{k} \qquad /6.17/$$

$$(k=0,1,\dots,n)$$

összefüggések adódnak, a /6.16/ és a /6.17/ ismeretében meghatározhatjuk a /6.11/ ill. a /6.12/-ben szereplő $y^{(k)}(0)$ ill. b_{n-k} értéket. Ez azt jelenti, hogy a /6.3/ tétel értelmében az /6.9/ egyenlet megoldását visszavezettük a /6.10/ egyenlet megoldására.

Most rátérünk a trigonometrikus polinomok esetére. Tegyük fel, hogy $\varphi(t)$ a Fourier-sorok elmélete szempontjából fontos

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right) \qquad /6.18/$$

összefüggéssel van megadva.

Legyen

$$p(\alpha)=\alpha(\alpha-i)(\alpha+i)(\alpha-2i)(\alpha+2i)\dots(\alpha-ni)(\alpha+ni)=$$

$$= \alpha^{2n+1} + a_{2n-1}\alpha^{2n-1} + \cdots + a_1\alpha ,$$

ahol

$$a_{2n-1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$
$$a_{2n-3} = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 3^2 + \cdots + 1\cdot n^2 + \cdots + (n-1)^2 n^2$$
$$\vdots$$
$$a_1 = (1\cdot 2\cdot \cdots n)^2 .$$

Ekkor, mint tudjuk a $\varphi(t)$ eleget tesz a

$$\varphi^{(2n-1)}(t) + a_{2n-1}\varphi^{(2n-1)}(t) + \cdots + a_1\varphi'(t) = 0$$

differenciálegyenletnek, azaz a fentiekhez hasonló módon alkalmazható az /6.3/ tétel.

Ezek alapján azonnal adódik egy numerikus eljárás, amely [3] munkában adott numerikus módszer általánositásának tekinthető:

Keressük az

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \qquad /6.19/$$
$$(0 \le t \le T)$$

egyenlet megoldását, a $[0, T]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $\psi(t)$ egy, a $\varphi(t)$-t közelitő olyan függvény, amely kielégit egy /6.8/ alakú konstans együtthatós n-ed rendű homogén lineáris differenciálegyenletet, /pl, $\psi(t)$ polinom, kvázipolinom vagy trigonometrikus polinom/.

Ekkor a /6.19/ egyenlet megoldását a

$$z(t) = f(t) + \int_0^t z(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau \qquad /6.20/$$

egyenlet megoldásával közelitjük.Mint azt a /6.2/ tételből tudjuk,ennek az egyenletnek a megoldását a

$$z(t) = f(t) + \psi(0)\int_0^t f(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t \eta(t-\tau)\left\{\int_0^\tau f(s)\,\psi(\tau-s)\,ds\right\}d\tau \qquad /6.21/$$

függvény adja,feltéve,hogy $f(t)$ a $[0,T]$ intervallumon integrálható,ahol az $\eta(t)$ függvény az

$$\eta(t) = 1 + \int_0^t \eta(t-\tau)\;\psi(\tau)\;d\tau \qquad /6.22/$$

egyenlet megoldása.A /6.3/ tétel alapján a /6.22/egyenlet megoldását egy a $\psi(t)$ függvény ismeretében meghatározott n -ed rendű konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása adja.

Összefoglalva a fentieket nyertük,hogy a /6,19/ egyenlet közelitő megoldását egy közönséges differenciálegyenlet adja.Ez azért előnyös,mert ezek integrációja elemi függvények segitségével mindig lehetséges, és ugyanakkor jól kidolgozott numerikus módszerek is rendelkezésre állnak.

Az adott $f(t), \varphi(t)$ és $\psi(t)$ függvények tulajdonságainak ismeretében a közelitésnél elkövetett hibákat /a

$$\max_{0 \le t \le T} |z(t) - y(t)| \qquad , \qquad \int_0^T [z(t) - y(t)]^2 dt$$

értékeket/ a 3. fejezetben bebizonyitott tételek alapján becsülhetjük meg.

Irodalomjegyzék

1.R.Bellman: The stability of solutions of linear differential equations.
Duke Math. Journal, 10 /1943/, pp.643-647.

2.R.Bellman, K.L.Cooke: Differential-difference equations.New York,/1963/,238-273.old.

3.R;Bellman, R.Kalaba, B.Kothin: Differential approximation applied to the solution on convolution equations
REND Corporation,Santa Monica /1964/

4.V.E.Benes: A nonlinear integral equation from the theory of servomechanisms.
The Bell System, 5 /1961/,1310-1321.old.

5.Bihari I.: A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equatńons.
Acta Math. Hung. 7 /1956/, 81-94.oldal.

6.W.Feller: On the integral equation of renewal theory.
Ann. of Math.Stat.12 /1941/,243-267.oldal.

7.Fényes T.: A note on the solution of integral equations of convolution type of the third kind by application of the operational calculus of Mikusinski.
Studia Sci. Math. Hungar. 2 /1967/ 81-89.old.

8.T.H.Gronvall: Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system

of differential equations,
Ann. of Math. 20 /1918/, 262-296.oldal.

9.T.E.Harris: The theory of branching processes.
Springer, Berlin /1963/

10.Levinson: Age-dependent branching processes.
Illinois Journal of Math. 4 /1960/
110-118.oldal.

11.A.Lotka: On an integral equation in population
analysis.
Annals of Math.Stat. 10 /1939/,141-146.o.

12.A.D.Miskisz: Теория линейных дифференциалных
уравнений с запаздывающим аргумен-
том. ГТТЛ /1951/, 233-237. old.

13.E.O.Powell: Some features of generation times of
individual bacteria.Biometrika, 42
/1955/, 16-44. oldal.

14.Riesz F. és Szőkefalvi-Nagy B.: Leçons d'analyse
fonctionnelle.Akadémiai Kiadó,Bp./1961/

15.Szőkefalvi-Nagy B.: Valós függvények és függvény-
sorok.Tankönyvkiadó, Bp.,/1961/161-163.o.

16.B.Wisvanatham: A generalization of Bellmans lemma.
Proc.Am. Math. Soc. 14 /1963/, 15-18.o.

Köszönetet mondok Dr Pintér Lajos docens úrnak a disszertáció megirása közben nyújtott állandó segitségéért.