Diss. B 900

J Ó Z S E F A T T I L A T U D O M Á N Y E G Y E T E M

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A HARDY-LITTLEWOOD-FÉLE EGYENLŐTLENSÉG ÁLTALÁNOSITÁSAI

NÉMETH JÓZSEF

doktori értekezése

SZEGED

1972

Diss. B 900

JATE KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
Folyóirat-
Szeged

1.§. Bevezetés

A végtelen sorok konvergenciájának vizsgálata az analizis bármely területén igen fontos szerepet játszik. Ezen vizsgálatok kapcsán jelentős segitséget jelentenek számunkra a különböző egyenlőtlenségek - mint pl. a Cauchy-, a Minkowski-, a Hölder-féle egyenlőtlenség.

Hasonlóan, bár ha nem is oly gyakran, mint a fentiek - de sorelméleti alkalmazását illetően - fontos helyet foglal el G.H. HARDY /[6]/ klasszikusnak számitó egyenlőtlensége, amelyet 1920-ban közölt, s amely szerint, ha $p>1$, $a_n \geq 0$ $(n=1,2,\dots)$, akkor

$$/1/ \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p ,$$

ha a_n nem minden n-re tünik el, ill. még azt is megmutatta, hogy a jobboldalon levő multiplikativ konstans nem javitható.

Nem sokkal később - az 1920-as évek végén - a Fourier-konstansok sajátosságai és a pozitiv együtthatóju hatványsorok viselkedése vizsgálatánál felmerült a szükségessége az /1/ egyenlőtlenség általánositásának, amit HARDY és LITTLEWOOD /[7]/ el is végeztek. Eredményük, amelyet 1927-ben közöltek, a következő:

Legyen $p>0$, c valós /de nem szükségszerüen pozitiv/ és $\sum a_n$ egy pozitiv tagu sor. Akkor, ha $p>1$, kapjuk, hogy

/2/ $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leq K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(n\cdot a_n)^p$$, ha $c>1$.+/

/3/ $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)^p \leq K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(n\cdot a_n)^p$$, ha $c<1$.

és ha $p<1$, akkor

/4/ $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \geq K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(n\cdot a_n)^p$$, ha $c>1$.

/5/ $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)^p \geq K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(n\cdot a_n)^p$$, ha $c<1$.

Az 1940-es évek elején HARDY /[5]/ az /1/ egyenlőtlenséget más irányban is általánositotta, nevezetesen ugy, hogy az a_n-ek számtani közepét a sokkal általánosabb Hausdorff-féle közepekkel /amelyek, mint ismeretes az Euler-, Hölder-

---

+/ K abszolut konstans, nem minden esetben ugyanaz.

és Cesàro-féle összegeknél is általánosabbak/ helyettesitette.

Az igy nyert eredmények különösen fontos alkalmazási területet kaptak az L^p tér egyes tulajdonságainak és a különböző közepekkel való összegzési eljárások vizsgálatánál.

Az 1960-as években G.M. PETERSON, G.S. DAVIES /[4], [13]/ és M. IZUMI, S. IZUMI /[8]/ tovább általánositották HARDY eredményét azáltal, hogy még általánosabb közepekkel dolgoztak; olyan tipusu egyenlőtlenségeket bizonyitottak be, mint például a következő:

$$/6/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,n} f(n) \left\{ \sum_{m=1}^{n} c_{n,m} a_m \right\}^p \leq K \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,n} f(n) a_n^p ,$$

ahol a $(c_{m,n})$ mátrixra, az $f(n)$ sorozatra és p-re bizonyos feltételeket szabtak.

Ugyanakkor az /1/ egyenlőtlenségnek a /2/-/4/ alatti általánositásában szereplő n^{-c} együtthatóknak más - általánosabb - sorozattal való helyettesitésének a szükségessége is felmerült - például a trigonometrikus sorok konvergenciavizsgálatánál /ld. LEINDLER [9] dolgozatát/. Az itt kapott eredményt LEINDLER LÁSZLÓ /[10]/ 1971-ben megjelent dolgozatában egészitette ki, illetve tette teljessé, amelyben megmutatta, hogy az $\{n^{-c}\}$ sorozat tetszőleges nemnegativ tagu sorozattal helyettesithető; érvényes például a következő egyenlőtlenség:

$$/7/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \right)^p a_n^p ,$$

ahol $p \geq 1$, $\lambda_n > 0$, $a_n \geq 0 \; (n = 1, 2, \ldots)$.

Ezek után jogosan merült fel a kérdés, hogy nem lehetne-e ezt a kétirányu általánositást "összefogni" olyan értelemben, hogy a $\sum_{n=1}^{k} a_n$ közepek helyett is bizonyos $(c_{m,n})$ mátrixszal konstruált összegek szerepeljenek, ill. az n^{-c}-t is helyettesiteni tetszőleges pozitiv $\{\lambda_n\}$ sorozattal.

Az erre a kérdésre - amelyet LEINDLER LÁSZLÓ vetett fel - adott választ fejezi ki az 1. Tétel, amely - mint majd látni fogjuk - speciális esetként tartalmazza többek között a /6/, /7/ alatti eredményeket.

Ennek a tételnek a bizonyitása képezi a dolgozat első felét.

A fent emlitett egyenlőtlenségek mindegyikében közös, hogy a megfelelő közepek hatványai szerepelnek, azaz az x^p függvény játszik fontos szerepet e tételekben. Természetszerüen vetődött fel a kérdés, hogy nem lehetne-e az x^p függvényt nála általánosabbal helyettesiteni. Erre a kérdésre az első pozitiv választ MULHOLLAND /[12]/ adta meg annak kapcsán, hogy az 1930-as évek elején a Fourier-konstansokra vonatkozó Young-, Hausdorff- és Hardy-féle eredmények általánositásának vizsgálata szükségszerüen vetette fel olyan tipusu egyenlőtlenségek érvényességének igazolását, mint pl. a következő:

$$/8/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \leq K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} \Phi(n \cdot a_n) ,$$

ahol $\Phi(x)$ bizonyos feltételeket kielégitő - az x^p-nél

általánosabb - függvény, és $c > 1$.

Az ilyen tipusu egyenlőtlenségek megkönnyitették az L^p $(p \geq 1)$ tereknél általánosabb terekbe tartozó függvények sajátosságainak vizsgálatát.

Ugyancsak a trigonometrikus -, ill. hatványsorok tulajdonságainak, és különböző integrálhatósági problémáknak a vizsgálatánál merült fel a kérdés, hogy a $p < 1$ esetnek megfelelő általánosabb függvényekre vonatkozólag milyen egyenlőtlenségek érvényesek. Igy születtek meg CHEN JUNG-MING /[2]/ eredményei - az 1950-es években -, amelyek közül megemlitjük a következőt:

$$/9/ \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} \Psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \geq K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} \Psi(n \cdot a_n),$$

ahol $\Psi(x)$ bizonyos feltételeket kielégitő - az x^p-nél $(p < 1)$ általánosabb - függvény, és $c > 1$.

Azoknak a vizsgálatoknak a folytatásaként, amelyeket SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA /[14]/ az 1940-es évek végén végzett azzal kapcsolatban, hogy mi a szükséges és elegendő feltétele az $x^{\gamma} \cdot f(x)$ függvény Lebesgue-integrálhatóságának - bizonyos feltételek mellett - éppen a /8/ és /9/ alatti, ill. az ezekhez hasonló egyenlőtlenségek alkalmazásával CHEN YUNG-MING /[2]/ megmutatta például azt, hogy az $x^{\gamma} \Phi(|f(x)|)$ függvény $(0, \pi)$ -n való integrálhatóságához elegendő, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-2} \Phi(n \cdot \lambda_n) < \infty$$

álljon, ahol λ_n az $f(x)$ függvény cosinus-sorának együtthatói, továbbá λ_n nem-negativ és monoton csökkenve nullához tart, és $0<\gamma<1$.

Ezen eredmény - hasonlóan a többihez, amelyeket MULHOLLAND és CHEN YUNG-MING néhány dolgozatukban / [12] és [2], [3] / közöltek - azt a gondolatot ébreszti bennünk, hogy további általánositásokhoz ugy lehetne eljutni, hogy megvizsgálnánk, érvényesek-e a /8/, /9/ alattiakhoz hasonló egyenlőtlenségek abban az esetben, ha $\{n^{-c}\}$ helyett általánosabb λ_n sorozattal dolgozunk.

Erre a kérdésre - amelyet szintén LEINDLER LÁSZLÓ vetett fel - ad választ a dolgozat második felében tárgyalt 2. Tétel, amely azt állitja, hogy $\{n^{-c}\}$ tetszőleges pozitiv $\{\lambda_n\}$ sorozattal helyettesithető bizonyos értelemben. Ezzel kapcsolatban megemlitjük, hogy LEINDLER LÁSZLÓ /[11] / egyik most megjelenés alatt levő dolgozatában - ahol különböző függvényosztályok beágyazási tételeit tárgyalja - már alkalmazást nyert az ezen tételben szereplő egyik állitás.

Az 1. Tétellel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az abban szereplő mátrixok közül a /2.1./ és /2.2./ alattit IZUMI, PETERSON, ill. DAVIES vezették be, mig a /2.3./ és /2.4./ alattiakat annak megfelelően definiáltuk, hogy az általánositás teljesebb legyen /abban az értelemben például, hogy a fent emlitett /2/-/5/ alatti négy állitást, illetve LEINDLER LÁSZLÓ tételének mind a négy állitását tartalmazza tételünk/.

A bizonyitás alapjában véve négy segédtételen alapul, amelyek közül kettőt /A-t és C-t/ a fentebb emlitett cikkekben /[13] és [4]/ találhatunk, a másik kettőt pedig ezekhez analóg módon ugy kellett felállitanunk, hogy azokat céljainknak megfelelően tudjuk használni /ezek közül egyik bizonyitását a 13. oldalon találjuk/. Egyébként a bizonyitás alapvetően a fentiekben emlitett szerzők bizonyitásaihoz hasonló módon történik, az ottani alapvető módszerek olyan kombinálásával azonban, amely lehetővé tette, hogy aránylag sok számolás nélkül könnyen adódjanak a korábbi "két irányu" általánositás egy "összefogását" jelentő eredmények. /Részletesen ez a /2.5.1./-/2.5.5./, ill. a /2.7.1./-/2.7.3./ alatt található./

A második tétellel kapcsolatban azt jegyezzük meg, hogy az egyik feladat az volt, hogy a 2.§-ban levő segédtételeknek a megfelelőit megkonstruáljuk X^p helyett $\Phi(x)$, ill. $\Psi(x)$-szel. Ez azonban csak az A. és D. segédtételek esetében sikerült /ezek általánositásai az E. és F. segédtételek/; a bizonyitások - a $\Phi(x)$ függvény tulajdonságait felhasználva - részletezve a 23. és 24. oldalon találhatók.

Az E. és F. segédtételeket kombinálva MULHOLLAND /[12]/ módszerével adódtak eredményeink a $\Phi(x)$-re vonatkozólag /ld. /3.1.1./-/3.1.6./, ill. /3.2.1/-/3.2.4./!/.

A másik két segédtétel megfelelője X^p helyett $\Psi(x)$-re azonban nem igaz /ez csak egy $\Psi(x)$-nél szükebb olyan függvényosztályra igaz, amely - bár X^p-t tar-

talmazza, de pl. a log $(1+x)$ tipusu függvényeket már nem/. Igy tételünk másik két állitásának bizonyitásánál alapvetően LEINDLER LÁSZLÓ "blokkolási" módszerét alkalmaztuk. Itt azonban az a probléma merült fel, hogy a Hölder-egyenlőtlenség helyett kellett megtalálni a megfelelő becslési módszert /ez részletezve a /3.3.5./-/3.3.7./ alatt található/.

Végül megemlitjük, hogy éppen a disszertáció benyujtásának időpontjában jelent meg B. MUCKENHOUPT / [15] / egy dolgozata, amelyben a /3/ egyenlőtlenség integrálokra vonatkozó formáját általánositja olyan irányban, mint LEINDLER a [10] dolgozatában /3/-at. Elolvasva a dolgozatot ugy tünik, hogy ennek az eredménynek további általánositása szintén lehetséges, hasonlóan, mint fenti eredményeink esetében.

2.§. A Hardy-Littlewood-egyenlőtlenség általánositása mátrix-közepekkel

Mielőtt rátérnénk az egyik tételünk kimondására, definiáljuk azokat a mátrixokat, amelyekkel a következőkben dolgozni fogunk.

Jelöljük M_1 -gyel azon $C = (c_{m,\nu})$ háromszög-mátrixok összességét, amelyek kielégitik a következő feltételeket:

$$c_{m,\nu} > 0 \ (\nu \leq m), \quad c_{m,\nu} = 0 \ (\nu > m) \quad (m, \nu = 1, 2, \ldots)$$

és

/2.1./ $$0 < \frac{c_{m,\nu}}{c_{n,\nu}} < N_1^{+/} \quad , \quad (1 \leq \nu \leq n \leq m).$$

M_2 pedig jelentse azoknak a mátrixoknak a halmazát, amelyek elemeire áll, hogy

$$c_{m,\nu} > 0 \ (\nu \geq m), \quad c_{m,\nu} = 0 \ (\nu < m) \quad (m, \nu = 1, 2, \ldots)$$

és

/2.2/ $$\frac{c_{m,\nu}}{c_{n,\nu}} \geq N_2 \quad , \quad (1 \leq n \leq m \leq \nu).$$

+/ N_i pozitiv abszolut konstansokat jelöl $(i = 1, 2, 3, 4)$

Az M_3 -mal jelölt halmazba tartozzanak azok a mátrixok, amelyek elemei a következő feltételeknek tesznek eleget:

$$c_{\nu,m} > 0 \quad (\nu \geq m), \quad c_{\nu,m} = 0 \quad (\nu < m) \quad (\nu, m = 1, 2, \ldots),$$

és

$$/2.3/ \qquad 0 < \frac{c_{\nu,m}}{c_{\nu,n}} \leq N_3 \quad , \quad (\nu \geq n \geq m \geq 1).$$

Ha viszont a $C = (c_{\nu,m})$ mátrix elemeire fennáll, hogy

$$c_{\nu,m} > 0 \quad (\nu \leq m), \quad c_{\nu,m} = 0 \quad (\nu > m) \quad (\nu, m = 1, 2, \ldots),$$

és

$$/2.4/ \qquad \frac{c_{\nu,m}}{c_{\nu,n}} \geq N_4 \quad , \quad (1 \leq \nu \leq m \leq n) \quad ,$$

akkor azt mondjuk, hogy C beletartozik az M_4 osztályba.

Ezek után fogalmazzuk meg első tételünket.

1. TÉTEL Legyenek adottak az $a_n \geq 0$, $\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ valós számok és a $C = (c_{m,k})$ háromszög-mátrix. Ekkor fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

a/ Ha $C \in M_1$ és $p \geq 1$, akkor

$$/2.5./ \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{m=1}^{n} c_{n,m} a_m \right)^p \leq N_1^{p(p-1)} p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \lambda_m c_{m,n} \right)^p a_n^p .$$

b/ **Ha** $C \in M_3$ **és** $p \geq 1$, **akkor**

$$/2.6./ \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(\sum_{n=m}^{\infty} c_{n,m} a_n \right)^p \leq N_3^{p(p-1)} p^p \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{1-p} \left(\sum_{n=1}^{m} \lambda_n c_{m,n} \right)^p a_m^p .$$

c/ **Ha** $C \in M_2$ **és** $0 < p \leq 1$, **akkor**

$$/2.7./ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} c_{n,\nu} a_\nu \right)^p \geq N_2^{(1-p)p} p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{k,n} \lambda_k \right)^p a_n^p .$$

d/ **Ha** $C \in M_4$ **és** $0 < p \leq 1$, **akkor**

$$/2.8./ \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(\sum_{n=1}^{m} c_{n,m} a_n \right)^p \geq N_4^{(1-p)p} p^p \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{1-p} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n c_{m,n} \right)^p a_m^p .$$

A tétel bizonyitásához szükségünk van a következő négy segédtételre, amelyek közül kettőt DAVIES, PETERSON és IZUMI használtak tételeik bizonyitásánál; a másik kettő - amelyek közül egyik bizonyitását részletezzük - ezekkel analóg, s bizonyitásuk is hasonló módon történik.

A Segédtétel /ld. [4] 1. lemma/

Ha $p > 1$ **és** $z_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, **akkor**

$$/2.9./ \quad \left(\sum_{k=1}^{n} z_k \right)^p \leq p \sum_{k=1}^{n} z_k \left(\sum_{\nu=1}^{k} z_\nu \right)^{p-1} .$$

B Segédtétel

Ha $0 < p < 1$ **és** $Z_1 > 0$, $Z_n \geq 0$ $(n=2,3,\ldots)$, **akkor**

$$/2.10/ \quad \left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)^p \geq p \sum_{k=1}^{n} Z_k \left(\sum_{\nu=1}^{k} Z_\nu\right)^{p-1}.$$

C Segédtétel /ld. [4], 3. Lemma/

Ha $0 < p < 1$ **és** $Z_n \geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, **akkor minden természetes** N **számra, amelyre** $Z_N > 0$, **fennáll, hogy**

$$/2.11./ \quad \left(\sum_{k=n}^{N} Z_k\right)^p \geq p \sum_{k=n}^{N} Z_k \left(\sum_{\nu=k}^{N} Z_\nu\right)^{p-1}.$$

D Segédtétel

Ha $p > 1$ **és** $Z_n \geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, **akkor minden természetes** N **számra teljesül, hogy**

$$/2.12./ \quad \left(\sum_{k=n}^{N} Z_k\right)^p \leq p \sum_{k=n}^{N} Z_k \left(\sum_{\nu=k}^{N} Z_\nu\right)^{p-1}.$$

A B Segédtétel bizonyitása

Az egyszerübb irásmód kedvéért jelöljük λ_n **-nel a következő összeget:**

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k .$$

Tekintsük ezek után λ_n^p következő felbontását:

/2.13./ $$\lambda_n^p = \lambda_n^p - \lambda_{n-1}^p + \dots + \lambda_k^p - \lambda_{k-1}^p + \dots \lambda_2^p - \lambda_1^p + \lambda_1^p .$$

Irjuk /2.13./-at a következőképpen:

/2.14./ $$\lambda_n^p = p \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} x^{p-1} dx + \dots + p \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} x^{p-1} dx + \dots + p \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x^{p-1} dx + z_1^p$$

Alkalmazzunk tagonként egy alsó becslést, amely alapján kapjuk, hogy

$$\lambda_n^p \geq p z_n \lambda_n^{p-1} + \dots + p z_k \lambda_k^{p-1} + \dots + p z_2 \lambda_2^{p-1} + p \cdot z_1 \cdot z_1^{p-1},$$

ami éppen /2.10./-et adja.

<u>Az 1. Tétel bizonyitása</u>

Abban az esetben, ha $p = 1$, valamennyi állitás triviális; ennek belátásához csupán az összegzés sorrendjét kell felcserélnünk. Ezért feltesszük, hogy $p \neq 1$, továbbá feltehetjük azt is, hogy nem minden a_n tünik el, ugyanis ellenkező esetben a tétel állitásai evidens módon teljesülnek.

<u>/2.5./ bizonyitása</u> Legyen N tetszőleges természetes szám, ugy azonban, hogy $a_N > 0$ legyen; akkor az

A Segédtétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$/2.5.1./ \quad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(\sum_{m=1}^{n} c_{n,m} a_m \right)^p \leq p \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{m=1}^{n} c_{n,m} a_m \left(\sum_{k=1}^{m} c_{n,k} a_k \right)^{p-1} = S_1$$

Figyelembe véve, hogy $C = (c_{m,k}) \in M_1$, ezért

$$/2.5.2./ \quad S_1 \leq N_1^{p-1} p \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{m=1}^{n} c_{n,m} a_m \left(\sum_{k=1}^{m} c_{m,k} a_k \right)^{p-1} = S_2$$

Megcserélve az összegzés sorrendjét, adódik:

$$/2.5.3./ \quad S_2 = N_1^{p-1} p \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{m} c_{m,k} a_k \right)^{p-1} a_m \sum_{n=m}^{N} \lambda_n c_{n,m} .$$

Most /2.5.3./-ban a Hölder-egyenlőtlenség segitségével kialakitjuk a /2.5.1./ baloldalának megfelelő kifejezést; e célból irjuk a /2.5.3./ alatti összeget a következő formában:

$$/2.5.4./ \quad S_2 = N_1^{p-1} p \sum_{m=1}^{N} \lambda_m^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{m} c_{m,k} a_k \right)^{p-1} \lambda_m^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=m}^{N} \lambda_m c_{n,m} \cdot a_m$$

Alkalmazva a Hölder egyenlőtlenséget /kihasználva, hogy $(p-1)q = p$, ill. $-\frac{p}{q} = 1-p$ /, figyelembe véve a /2.5.1./, /2.5.2./, /2.5.3./ és /2.5.4./ formulákat, kapjuk, hogy

$$/2.5.5./ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(\sum_{m=1}^{n} c_{n,m} a_m\right)^p \leq N_1^{p-1} \cdot p \left\{\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left(\sum_{k=1}^{m} c_{m,k} a_k\right)^p\right\}^{1/q} \left\{\sum_{m=1}^{N} \lambda_m^{1-p} \left(\sum_{n=m}^{N} \lambda_n c_{n,m}\right) a_m^p\right\}^{1/p}$$

/2.5.5./- t végigosztva a

$$\left\{\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left(\sum_{k=1}^{m} c_{m,k} a_k\right)^p\right\}^{1/q}$$

kifejezéssel, majd mindkét oldalt p -edik hatványra emelve és elvégezve az $N \to \infty$ határátmenetet, kapjuk állításunkat.

<u>/2.6./ bizonyitása</u> Használva a D Segédtételt, figyelembe véve, hogy $C = (c_{m,k}) \in M_3$, majd megcserélve az összegzés sorrendjét, s végül a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy tetszőleges N természetes számra /ha $a_N > 0$ /:

$$\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left(\sum_{n=m}^{N} c_{n,m} a_n\right)^p \leq p \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \sum_{n=m}^{N} c_{n,m} a_n \left(\sum_{\nu=n}^{N} c_{\nu,m} a_\nu\right)^{p-1} \leq$$

$$\leq N_3^{p-1} p \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \sum_{n=m}^{N} c_{n,m} a_n \left(\sum_{\nu=n}^{N} c_{\nu,n} a_\nu\right)^{p-1} =$$

$$= N_3^{p-1} \cdot p \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{\nu=n}^{N} c_{\nu,n} a_\nu\right)^{p-1} a_n \sum_{m=1}^{n} c_{n,m} \lambda_m \leq$$

$$\leq N_3^{p-1} \cdot p \left\{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(\sum_{\nu=n}^{N} c_{\nu,n} a_\nu\right)^p\right\}^{1/q} \left\{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{m=1}^{n} c_{n,m} \lambda_m\right)^p a_n^p\right\}^{1/p}.$$

Innen - alkalmas leosztással, ill. p -re emeléssel - adódik, hogy

$$\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left(\sum_{n=m}^{N} c_{n,m} a_n\right)^p \leq N_3^{p(p-1)} p^p \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{m=1}^{n} c_{n,m} \lambda_m\right)^p a_n^p,$$

amiből - felhasználva az x^p függvény folytonosságát - az $N \to \infty$ határátmenettel következik /2.6./.

<u>/2.7./ bizonyitása</u> Legyen N olyan természetes szám, amelyre $a_N > 0$; használva a C Segédtételt, azt kapjuk, hogy

$$/2.7.1./ \quad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(\sum_{\nu=n}^{N} c_{n,\nu} a_\nu \right)^p \geq p \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{\nu=n}^{N} c_{n,\nu} a_\nu \left(\sum_{k=\nu}^{N} c_{n,k} a_k \right)^{p-1} = S_1$$

Figyelembe véve, hogy $C = (c_{m,k}) \in M_2$ és $p-1<0$, következik, hogy

$$/2.7.2./ \quad S_1 \geq N_2^{1-p} \cdot p \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{\nu=n}^{N} c_{n,\nu} a_\nu \left(\sum_{k=\nu}^{N} c_{\nu,k} a_k \right)^{p-1} = S_2$$

Megcserélve a szummáció sorrendjét adódik a következő:

$$/2.7.3./ \quad S_2 = N_2^{1-p} \cdot p \sum_{\nu=1}^{N} \left(\sum_{k=\nu}^{N} c_{\nu,k} a_k \right)^{p-1} a_\nu \sum_{n=1}^{\nu} \lambda_n c_{n,\nu}.$$

Használva a Hölder-egyenlőtlenséget $p<1$ esetén /ezt az alakját ld. pl. [1]-ben a 19. oldalon/ figyelembe véve a /2.7.1./, /2.7.2./ és /2.7.3./ alattiakat, kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \Big(\sum_{\nu=n}^{N} c_{n,\nu} a_\nu\Big)^p \geq N_2^{1-p} \cdot p \Big\{\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_n \Big(\sum_{k=\nu}^{N} c_{\nu,k} a_k\Big)^p\Big\}^{1/q} \Big\{\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_n^{1-p} \Big(\sum_{n=1}^{\nu} \lambda_n c_{n,\nu}\Big)^p a_\nu^p\Big\}^{1/p}$$

Elvégezve a megfelelő leosztást, a p -edik hatványra emelést és határátmenetet, kapjuk /2.7./-et.

/2.8./ bizonyitása

Feltehetjük, hogy $a_1 \neq 0$. Felhasználva a B Segédtételt, valamint azt, hogy $C = (c_{m,k}) \in M_4$, majd megcserélve az összegzési sorrendet és alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget, adódik, hogy

$$\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \Big(\sum_{n=1}^{m} c_{n,m} a_n\Big)^p \geq p \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \sum_{n=1}^{m} c_{n,m} a_n \Big(\sum_{k=1}^{n} c_{k,m} a_k\Big)^{p-1} \geq$$

$$\geq N_4^{1-p} \cdot p \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \sum_{n=1}^{m} c_{n,m} a_n \Big(\sum_{k=1}^{n} c_{k,n} a_k\Big)^{p-1} =$$

$$= N_4^{1-p} \cdot p \sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{n} c_{k,n} a_k\Big)^{p-1} a_n \sum_{m=n}^{N} \lambda_m c_{n,m} \geq$$

$$\geq N_4^{1-p}\, p \left\{ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{n} c_{k,n}\, a_k \right)^p \right\}^{1/q} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{m=n}^{N} \lambda_m c_{n,m} \right)^p a_n^p \right\}^{1/p}.$$

Osztással, p-re emeléssel, és az $N \to \infty$ határátmenettel azonnal adódik /2.8./

Bebizonyítva a tételt megjegyezzük, hogy az tartalmazza LEINDLER LÁSZLÓ /ld. [10], 1'-4'/ már emlitett eredményeit /a megfelelő mátrixok nullától különböző elemei legyenek valamennyien eggyel egyenlők/. Továbbá a $\lambda_m \to c_{m,m} f(m)^{1-p}$ ill. $c_{m,n} \to c_{m,n} f(m)$ helyettesitésekkel IZUMI és PETERSON /ld. [8], 3. Tétel/ tétele következik /2.5./-ből.

/2.7./ pedig a $c_{k,n} \to f(k)\, c_{k,n}$ és a $\lambda_n \to f(n)^{-p}$ helyettesitéssel adja a DAVIES és PETERSON /ld. [4], 5. Tétel/ által bebizonyitott egyenlőtlenségeket.

3.§. A Hardy-Littlewood-egyenlőtlenség általánositása az x^p-nél általánosabb függvényekkel

A második tétel kimondása előtt vezessünk be néhány jelölést.

a/ Legyen $a_n \geq 0$ $(n=1,2,\dots)$. Jelölje $A_{m,n}$ a következő összeget:

$$A_{m,n} = \sum_{\nu=m}^{n} a_\nu \quad , \qquad (1 \leq m \leq n \leq \infty) .$$

b/ $\Phi(x)$ -szel $(x \geq 0)$ jelöljünk egy olyan nemnegativ függvényt, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$ növekvő, és valamilyen $k > 1$ számra pedig az $\psi(x) = \frac{\Phi(x)}{x^k}$ csökkenő.

c/ $\Psi(x)$ $(x \geq 0)$ pedig jelöljön egy olyan nemnegativ, végtelenbe növekvő függvényt, amelyre a $\rho(x) = \frac{\Psi(x)}{x}$ csökkenve tart nullához, miközben x tart a végtelenbe.

d/ Ha $\lambda_n > 0$ $(n=1,2,\dots)$, akkor $\Lambda_{m,n}$ -nel jelöljük a következő összeget:

$$\Lambda_{m,n} = \sum_{i=m}^{n} \lambda_i \quad , \qquad (1 \leq m \leq n \leq \infty) .$$

Ezek után fogalmazzuk meg második tételünket.

2. TÉTEL Ha $a_n \geq 0$ és $\lambda_n > 0$ $(n=1,2,\dots)$, akkor - használva a fenti jelöléseket - érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

$$/3.1./ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi(A_{1,n}) \leq K_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi\left(\frac{a_n}{\lambda_n} \Lambda_{n,\infty}\right),$$

és

$$/3.2./ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi(A_{n,\infty}) \leq K_2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi\left(\frac{a_n}{\lambda_n} \Lambda_{1,n}\right),$$

ahol K_1 és K_2 csak a $\Phi(x)$ -től függő konstansok; továbbá

$$/3.3./ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Psi\left(\frac{a_n}{\lambda_n} \Lambda_{n,\infty}\right) \leq 16 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Psi(A_{1,n}),$$

és

$$/3.4./ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Psi\left(\frac{a_n}{\lambda_n} \Lambda_{1,n}\right) \leq 24 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Psi(A_{n,\infty}).$$

A tétel bizonyitásához szükségünk lesz a következő három segédtételre, amelyek közül az első kettő egyébként az előző paragrafusban levő A és D Segédtételek általánositásai.

E Segédtétel Ha $\Phi(x)$ és $\varphi(x)$ a fentebb definiált függvények, és $a_n \geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, akkor

$$\Phi(A_{1,n}) \leq K_3 \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(A_{1,\nu}) \text{ +/} \tag{3.5.}$$

F Segédtétel Legyen $a_n \geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, akkor bármely N természetes számra áll, hogy

$$\Phi(A_{n,N}) \leq K_4 \sum_{\nu=n}^{N} a_\nu \varphi(A_{\nu,N}). \tag{3.6.}$$

G Segédtétel Ha $b_n > 0$ és $c_n \geq 0$, $a_n \geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, továbbá, ha minden N természetes számra

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \Phi(A_{n,N}) \leq K_5 \sum_{n=1}^{N} c_n ,$$

+/ K_i $(i=3,4,5)$ csak a $\Phi(x)$ -től függő konstansok.

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Phi(A_{n,\infty}) \leq K_5 \sum_{n=1}^{\infty} c_n .$$

A továbbiakban bebizonyitjuk az E és F Segédtételeket; a G Segédtétel bizonyitásától eltekintünk, mert az - figyelembe véve a $\Phi(x)$ függvény folytonosságát, ami a definicióban szereplő feltételek értelmében triviális - egyszerü számolással adódik

Az E Segédtétel bizonyitása Legyen $f(x)$ a korábban definiált függvény, és irjunk A_n-et az $A_{1,n}$ helyett. Tekintsük $\Phi(A_n)$ következő előállitását:

$$\Phi(A_n) = \Phi(A_1) + \Phi(A_2) - \Phi(A_1) + \ldots + \Phi(A_n) - \Phi(A_{n-1})$$

Figyelembe véve, hogy $m \geq 2$ esetén /felhasználva a Lagrange-féle középértéktételt és, hogy $f(x)$ csökkenő/ érvényes, hogy

$$\Phi(A_m) - \Phi(A_{m-1}) = f(A_m) A_m^k - f(A_{m-1}) A_{m-1}^k \leq$$

$$\leq k\, f(A_m) A_m^{k-1} (A_m - A_{m-1}) = k\, f(A_m)\, a_m ;$$

továbbá, hogy

$$\Phi(A_1) \leq k\,\varphi(A_1)\,a_1,$$

kapjuk a /3.5./ alatti állitást.

<u>Az F Segédtétel bizonyitása</u> Legyen N tetszőleges természetes szám, és irjunk az egyszerüség kedvéért $A_{n,N}$ helyett B_n-t.

Mivel

$$\Phi(B_n) = \Phi(B_n) - \Phi(B_{m+1}) + \dots + \Phi(B_{N-1}) - \Phi(B_N) + \Phi(B_N)$$

használva a következő becsléseket

$$\Phi(B_m) - \Phi(B_{m+1}) = f(B_m)\,B_m^k - f(B_{m+1})\,B_{m+1}^k \leq$$

$$\leq k\,\varphi(B_m)\,(B_m - B_{m+1}) = k\,\varphi(B_m)\,a_m, \quad \text{ha } n \leq m \leq N-1$$

és

$$\Phi(B_N) \leq k\,\varphi(B_N)\,a_N,$$

kapjuk a /3.6./ alatti egyenlőtlenséget.

Ezzel a segédtételek bizonyitását befejeztük:

<u>A 2. Tétel bizonyitása</u>

<u>/3.1./ bizonyitása</u> Használva az E Segédtételt, kapjuk, hogy

$$/3.1.1./ \quad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \Phi(A_{1,n}) \leq k \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(A_{1,\nu}) = \Sigma_1,$$

ahol N tetszőleges természetes szám.

Megcserélve az összegzés sorrendjét a jobboldalon adódik, hogy

$$/3.1.2./ \quad \sum_1 = k \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \varphi(A_{1,\nu}) \Lambda_{\nu,N} .$$

Hogy a $\Phi(x)$ függvény tulajdonságait a továbbiakban céljainknak megfelelően kihasználhassuk, írjuk át a /3.1.2./ alatti kifejezést a következő formában:

$$/3.1.3/ \quad \sum_1 = k \sum_{\nu=1}^{N} t^{-1} \left\{ t \frac{a_\nu}{\lambda_\nu} \Lambda_{\nu,N} \varphi(A_{1,\nu}) \lambda_\nu \right\} ,$$

ahol t tetszőleges pozitiv számot jelent. Vegyük észre, a $\Phi(x)$ függvény tulajdonságaiból adódó következő egyszerű összefüggéseket:

Ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, akkor

$$/3.1.4./ \quad x \varphi(y) \leq x \varphi(x) + y \varphi(y) = \Phi(x) + \Phi(y) ;$$

továbbá, ha $t \geq 1$ és $x \geq 0$, akkor

/3.1.5./ $$\Phi(tx) = f(tx)\, t^k x^k \le t^k f(x)\, x^k = t^k \Phi(x).$$

A /3.1.4./ és /3.1.5./ alattiakat figyelembe véve Σ_1 /3.1.3./-beli kifejezése a következőképpen becsülhető:

/3.1.6./ $$\Sigma_1 \le k \sum_{\nu=1}^{N} t^{-1} \left\{ \Phi\left(t \frac{a_\nu}{\lambda_\nu} \Lambda_{\nu,N}\right) \lambda_\nu + \Phi(A_{1,\nu})\, \lambda_\nu \right\} \le$$

$$\le k \sum_{\nu=1}^{N} \left\{ t^{k-1} \Phi\left(\frac{a_\nu}{\lambda_\nu} \Lambda_{\nu,N}\right) \lambda_\nu + t^{-1} \Phi(A_{1,\nu})\, \lambda_\nu \right\}.$$

A t értékét ugy választva, hogy $1 - k t^{-1}$ pozitiv legyen, /3.1.1./ figyelembe vételével /3.1.6./-ból kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \Phi(A_{1,n}) \le \frac{k \cdot t^{k-1}}{1 - k t^{-1}} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \Phi\left(\frac{a_n}{\lambda_n} \Lambda_{n,N}\right),$$

amelyből viszont az $N \to \infty$ határátmenettel nyerjük /3.1./-et.

<u>/3.2./ bizonyitása</u> Felhasználva az F Segédtételt, tetszőleges N természetes számra teljesül, hogy

/3.2.1./ $$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \Phi(A_{n,N}) \le k \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{\nu=n}^{N} a_\nu \varphi(A_{\nu,N}) = \Sigma_2.$$

Megcserélve az összegzés sorrendjét az adódik, hogy

$$/3.2.2./ \quad \sum_2 = k \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \varphi(A_{\nu,N}) \Lambda_{1,\nu} .$$

Alakitsuk át a /3.2.2./ alatti formulát a következőképpen

$$/3.2.3./ \quad \sum_2 = k \sum_{\nu=1}^{N} t^{-1} \left\{ t \cdot \frac{a_\nu}{\lambda_\nu} \Lambda_{1,\nu} \varphi(A_{\nu,N}) \lambda_\nu \right\}$$

/ t tetszés szerinti pozitiv szám/.

Használva /3.1.4./-et és /3.1.5./-öt, $\sum_2$ -re a következő becslést kapjuk /hasonlóan /3.1.6./-hoz/:

$$/3.2.4./ \quad \sum_2 \leq k \sum_{\nu=1}^{N} \left\{ t^{k-1} \Phi\left(\frac{a_\nu}{\lambda_\nu} \Lambda_{1,\nu}\right) \lambda_\nu + t^{-1} \Phi(A_{\nu,N}) \lambda_\nu \right\}.$$

Ha a t értékét olyannak választjuk, hogy $1 - k t^{-1} > 0$ legyen, azt kapjuk - figyelembe véve a /3.2.1./ és /3.2.4./ formulákat, hogy

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \Phi(A_{n,N}) \leq \frac{k \cdot t^{k-1}}{1-kt^{-1}} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \Phi\left(\frac{a_n}{\lambda_n} \Lambda_{1,n}\right),$$

amiből a G Segédtétel folytán, elvégezve az $N \to \infty$ határátmenetet, adódik /3.2./.

/3.3./ bizonyitása Feltehetjük, hogy a jobboldalon álló sor konvergens, és igy tudunk definiálni egy olyan indexsorozatot, amely segitségével majd ugy tudjuk "blokkozni" a megfelelő sorokat, ami alapvetően megkönnyiti a bizonyitást. Ezt az indexsorozatot a következőképpen definiáljuk:

Legyen $m_0 = 0$ és $n \geq 1$ -re legyen m_n a legkisebb olyan természetes k $(> m_{n-1})$ amelyre már fennáll, hogy

/3.3.1./ $$\Lambda_{m_{n-1}+1,\, k} \geq \Lambda_{k+1,\, \infty}$$

A /3.3.1./ alatti definició alapján nyilvánvaló, hogy

/3.3.2./ $$\Lambda_{m_n+1,\, m_{n+1}} \geq \Lambda_{m_{n+1}+1,\, \infty}$$

Ebből, továbbá az $\{m_n\}$ sorozat definiciójából adódik, hogy

$$\Lambda_{m_n+1,\, m_{n+1}-1} < \Lambda_{m_{n+1},\, \infty} =$$

$$= \lambda_{m_{n+1}} + \Lambda_{m_{n+1}+1,\, m_{n+2}} + \Lambda_{m_{n+2}+1,\, \infty} \leq$$

$$\leq \lambda_{m_{n+1}} + 2\Lambda_{m_{n+1}+1,\, m_{n+2}} ,$$

amiből kapjuk, hogy

/3.3.3./ $$\Lambda_{m_n+1,\, m_{n+1}} \leq 2\Lambda_{m_{n+1},\, m_{n+2}} .$$

Könnyen látszik továbbá, hogy /3.3.2./-ből közvetlenül adódik:

/3.3.4./ $$\Lambda_{m_n+1,\, \infty} \leq 2\Lambda_{m_n+1,\, m_{n+1}} .$$

A továbbiakban ez utóbbi két egyenlőtlenséget fogjuk használni a bizonyitásban.

Először megmutatjuk, hogy

/3.3.5./ $$\sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}} \lambda_\nu \Psi\left(\Lambda_{m_n+1,\infty} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right) \leq \Psi\left(A_{m_n+1,\, m_{n+1}}\right) \Lambda_{m_n+1,\infty}$$

A rövidebb iársmód kedvéért használjuk a következő jelölést:

$$\tau_\nu^{(n)} = \frac{\Lambda_{m_n+1,\, m_{n+1}}}{\lambda_\nu}$$

Felhasználva a $\Psi(x)$ és $\rho(x)$ függvények tulajdonságait, kapjuk, hogy

$$/3.3.6./ \quad \sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}} \lambda_\nu \Psi\left(\Lambda_{m_n+1,\infty} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right) \leq \Lambda_{m_n+1,\infty} \sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}} a_\nu \rho\left(\tau_\nu^{(n)} a_\nu\right).$$

Jelölje ν_i és $\bar{\nu}_j$ azokat az indexeket, amelyekre teljesül, hogy

$$m_n+1 \leq \nu_i,\ \bar{\nu}_j \leq m_{n+1} \quad ,$$

és

$$\tau_{\nu_i}^{(n)} a_{\nu_i} \leq A_{m_n+1,\, m_{n+1}} ,$$

$$\tau_{\bar{\nu}_j}^{(n)} a_{\bar{\nu}_j} > A_{m_n+1,\, m_{n+1}} .$$

Figyelembe véve ezeket a jelöléseket a /3.3.6./ jobboldalának második tényezőjét a következőképpen irhatjuk:

$$\sum_{\nu=m_{n+1}}^{m_{n+1}} a_\nu \rho(\tau_\nu^{(n)} a_\nu) = \sum_{\nu=m_{n+1}}^{m_{n+1}} a_\nu \frac{\tau_\nu^{(n)} \rho(\tau_\nu^{(n)} a_\nu)}{\tau_\nu^{(n)}} \leq$$

$$\leq \sum_i^{(1)} \frac{\Psi(A_{m_n+1}, m_{n+1})}{\tau_{\nu_i}^{(n)}} + \sum_j^{(2)} \rho(A_{m_n+1}, m_{n+1}) a_{\bar{\nu}_j} \leq$$

/3.3.7./

$$\leq \Psi(A_{m_n+1}, m_{n+1}) \sum_i^{(1)} \frac{1}{\tau_{\nu_i}^{(n)}} + \rho(A_{m_n+1}, m_{n+1}) \sum_j^{(2)} a_{\bar{\nu}_j} \leq$$

$$\leq 2\, \Psi(A_{m_n+1}, m_{n+1}).$$

Igy, figyelembe véve /3.3.6./-ot és /3.3.7./-et, adódik /3.3.5./.

A fentiek - pontosabban /3.3.3./, /3.3.4./ és /3.3.5./ alapján a következőképpen becsülhetjük a bizonyitandó /3.3./ egyenlőtlenség baloldali sorának egy blokkját:

/3.3.8./ $$\sum_{\nu=m_{n+1}}^{m_{n+1}} \lambda_\nu \Psi\left(\Lambda_{\nu,\infty} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right) \leq 2 \Lambda_{m_n+1,\infty} \Psi(A_{m_n+1}, m_{n+1}) \leq$$

$$\leq 2\,\Lambda_{m_{n+1},\infty}\,\Psi(A_{m_{n+1},m_{n+1}}) \leq 4\,\Lambda_{m_{n+1},m_{n+1}}\,\Psi(A_{1,m_{n+1}}) \leq$$

$$\leq 8\sum_{k=m_{n+1}}^{m_{n+2}} \lambda_k\,\Psi(A_{1,k}).$$

Ezt a blokkozást felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu\,\Psi\left(\Lambda_{\nu,\infty}\,\frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right) \leq 8\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=m_{n+1}}^{m_{n+2}} \lambda_\nu\,\Psi(A_{1,\nu}) \leq$$

$$\leq 16\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu\,\Psi(A_{1,\nu}),$$

amit éppen bizonyitani akartunk.

<u>β.4./ bizonyitásánál</u> két esetet kell megkülönböztetnünk. Először feltesszük, hogy

$$\Lambda_{1,\infty} < \infty$$

E feltevés alapján tudjuk definiálni a következő tulajdonságokkal rendelkező $\{\mu_n\}$ sorozatot:

$\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, és ha μ_n már definiálva van, akkor legyen $\mu_{n+1} = k$, ahol k $(> \mu_n)$ az a legkisebb szám, amelyre teljesül, hogy

/3.4.1./ $$\Lambda_{\mu_n+1,\,k} \geq 3\,\Lambda_{\mu_{n-1}+1,\,\mu_n},$$

feltéve, hogy ilyen k szám létezik. Ha $\mu'_{n+1} > \mu_n+1$, akkor legyen $\mu_{n+1} = \mu'_{n+1}-1$, és ha $\mu'_{n+1} = \mu_n+1$, akkor pedig $\mu_{n+1} = \mu_n+1$. Ha ilyen k nem létezik, akkor legyen $\mu_{n+1} = \infty$. Világos, hogy ez az indukciós definició mindig "befejeződik" valamilyen $n = N_0$ számnál ugy, hogy $\mu_{N_0} = \infty$.

Ellenkező esetben ugyanis a μ_n definiciója alapján alább bizonyitandó

/3.4.2./ $$3\,J_{n-2} \leq J_{n-1} + J_n$$

$$(2 \leq n < N_0 \text{ és } J_n = \Lambda_{\mu_n+1,\,\mu_{n+1}})$$

egyenlőtlenség miatt az következne, hogy $\Lambda_{1,\infty} = \infty$, ellentétben feltevésünkkel.

Most bizonyitsuk be a /3.4.2./ alatti egyenlőtlenséget. Mivel

$$J_n + J_{n-1} = \Lambda_{\mu_n+1,\,\mu_{n+1}} + \Lambda_{\mu_{n-1}+1,\,\mu_n} = \Lambda_{\mu_{n-1}+1,\,\mu_n+1} + \Lambda_{\mu_n+2,\,\mu_{n+1}}$$

/ha $\mu_{n+1} = \mu_n+1$, akkor a jobboldalon a második

összeg nem lép fel/, és a /3.4.1./ alapján

$$\Lambda_{\mu_{n-1}+1,\,\mu_n+1} \geq 3\Lambda_{\mu_{n-2}+1,\,\mu_{n-1}} = 3J_{n-2},$$

adódik /3.4.2./.

A továbbiakban néhány olyan egyenlőtlenséget irunk fel, amelyek a $\{\mu_n\}$ definiciójából adódnak, s amelyeket a későbbiekben használni fogunk.

/3.4.2./ alapján könnyen adódik, hogy minden olyan n -re, amelyre $1 \leq n < N_0 - 1$, teljesül a következő:

/3.4.3./ $$\Lambda_{1,\mu_n} \leq 3J_{n-1} + J_n ;$$

ugyanis induljunk ki a következő triviális egyenlőtlenségből:

$$J_0 \leq 3J_0 + J_1 .$$

Ebből /3.4.2./ alapján adódik, hogy

$$J_0 \leq 2J_1 + J_2,$$

amiből kapjuk, hogy

$$J_0 + J_1 \leq 3J_1 + J_2 \leq 2J_2 + J_3$$

/a második becslésnél ismét /3.4.2./-t használtuk/.

Ezzel a módszerrel eljutunk az

$$J_0 + J_1 + \dots + J_{n-2} \leq 2 J_{n-1} + J_n$$

egyenlőtlenségig, amelyből / J_{n-1} hozzáadásával/ adódik, hogy

$$\Lambda_{1,\mu_n} = J_0 + J_1 + \dots + J_{n-1} \leq 3 J_{n-1} + J_n$$

azaz éppen a kivánt egyenlőtlenség.

Továbbá, ugyanilyen könnyen belátható, hogy igaz a következő egyenlőtlenség is:

/3.4.4./ $$\Lambda_{1,\mu_{N_0}} \leq 3 J_{N_0-3} + 5 J_{N_0-2}.$$

Most bizonyitsunk be egy becslést a /3.4./ baloldali sorának egy blokkjára vonatkozóan; nevezetesen azt, hogy

/3.4.5./ $$\sum_{\nu=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} \lambda_\nu \Psi\left(\Lambda_{1,\nu} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right) \leq 2 \Lambda_{1,\mu_{n+1}} \Psi\left(A_{\mu_n+1,\mu_{n+1}}\right).$$

A $\Psi(x)$ és $\rho(x)$ sajátosságai következtében irhatjuk, hogy

$$\sum_{\nu=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} \lambda_\nu \Psi\left(\Lambda_{1,\nu} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right) \leq \sum_{\nu=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} \lambda_\nu \Psi\left(\Lambda_{1,\mu_{n+1}} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right) =$$

$$= \Lambda_{1,\mu_{n+1}} \sum_{\nu=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} a_\nu \rho\left(\Lambda_{1,\mu_{n+1}} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right) \leq \Lambda_{1,\mu_{n+1}} \sum_{\nu=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} a_\nu \rho\left(\Lambda_{\mu_n+1,\mu_{n+1}} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right)$$

Innen, hasonlóan a /3.3.5./ bizonyitásában használt gondolatmenethez, azonnal adódik /3.4.5./. Ezek után - figyelembe véve /3.4.5./-öt - a /3.4./ baloldalán álló sort a következőképpen becsülhetjük:

$$/3.4.6./ \quad \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{\nu=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} \lambda_\nu \Psi\left(\Lambda_{1,\nu} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu}\right) \leq 2 \sum_{n=0}^{N_0-1} \Lambda_{1,\mu_{n+1}} \Psi\left(A_{\mu_n+1,\mu_{n+1}}\right) = \sum_3$$

$\sum_3$ -at irjuk át a következő alakban:

$$\Sigma_3 = 2\sum_{n=0}^{1} \Lambda_{1,\mu_{n+1}} \Psi(A_{\mu_n+1,\mu_{n+1}}) +$$

/3.4.7./ $$+ 2\sum_{n=2}^{N_0-2} \Lambda_{1,\mu_{n+1}} \Psi(A_{\mu_n+1,\mu_{n+1}}) +$$

$$+ 2\Lambda_{1,\mu_{N_0}} \Psi(A_{\mu_{N_0-1}+1,\infty}) = \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6$$

Használva /3.4.1./-et és /3.4.3./-at kapjuk, hogy

$$\Sigma_5 \le 2\sum_{n=2}^{N_0-2} (\Lambda_{1,\mu_{n-1}} + \Lambda_{\mu_{n-1}+1,\mu_{n+1}}) \Psi(A_{\mu_n+1,\mu_{n+1}}) \le$$

/3.4.8./

$$\le 2\sum_{n=2}^{N_0-2} (3\Lambda_{\mu_{n-2}+1,\mu_{n-1}} + 2\Lambda_{\mu_{n-1}+1,\mu_n} + \Lambda_{\mu_n+1,\mu_{n+1}}) \Psi(A_{\mu_n+1,\mu_{n+1}}) \le$$

$$\le 2\sum_{n=2}^{N_0-2} (3\Lambda_{\mu_{n-2}+1,\mu_{n-1}} + 5\Lambda_{\mu_{n-1}+1,\mu_n} + \Lambda_{\mu_n+1}) \Psi(A_{\mu_n+1,\mu_{n+1}}).$$

A $\{\mu_n\}$ sorozat definiciójából egyszerü számolással adódik, hogy

/3.4.9./ $$\Sigma_4 \le 2[5\lambda_1 \Psi(A_{1,\infty}) + \lambda_2 \Psi(A_{2,\infty})].$$

A /3.4.4./ alatti egyenlőtlenséget figyelembe véve viszont azt kapjuk, hogy

/3.4.10./ $$\sum_6 \leq 2\left(3\Lambda_{\mu_{N_0-3}+1,\mu_{N_0-2}} + 5\Lambda_{\mu_{N_0-2}+1,\mu_{N_0-1}}\right)\Psi\left(A_{\mu_{N_0-1}+1,\infty}\right).$$

Az utolsó három becslés - /3.4.8./, /3.4.9./ és /3.4.10./ - alapján, felhasználva /3.4.6./-ot és /3.4.7./-et, az adódik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Psi\left(\Lambda_{1,n}\frac{a_n}{\lambda_n}\right) \leq 18 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Psi\left(A_{n,\infty}\right),$$

amit éppen bizonyitanunk kellett.

Ezzel tehát a $\Lambda_{1,\infty} < \infty$ esetben /3.4./-et bizonyitottuk.

Most pedig tegyük fel, hogy $\Lambda_{1,\infty} = \infty$. Ebben az esetben definiálhatunk egy olyan $\{m_n\}$ indexsorozatot, amelyre teljesül, hogy $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, és ha már az $m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_n$ $(n \geq 1)$ elemek definiálva vannak, akkor m_{n+1} legyen a legkisebb olyan k természetes számmal egyenlő, amelyre

/3.4.11./ $$\Lambda_{m_n+1,k} \geq 2\Lambda_{m_{n-1}+1,m_n}.$$

A definicióból könnyen adódik a következő három egyenlőtlenség, amelyeket a továbbiakban a bizonyitásban fel fogunk használni.

/3.4.12./ $$\Lambda_{1,\, m_{n+1}-1} \leq \Lambda_{m_n+1,\, m_{n+1}-1} + 2\Lambda_{m_{n-1},\, m_n},$$

/3.4.13./ $$\Lambda_{1,\, m_2-1} \leq 3\lambda_1,$$

/3.4.14./ $$\Lambda_{m_n-1,\, m_{n+1}-1} \leq 3\Lambda_{m_{n-1},\, m_n}.$$

Ezek után megjegyezzük, hogy - hasonlóan, mint a /3.3.5./ és /3.4.5./ alatti egyenlőtlenségeket - be lehet bizonyitani, hogy érvényesek a következők:

/3.4.15./ $$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \lambda_k \Psi\left(\Lambda_{m_{n-1},\, m_{n+1}-1} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) \leq 2\Psi\left(A_{m_n,\, m_{n+1}-1}\right)\Lambda_{m_{n-1},\, m_{n+1}-1},$$

/3.4.16./ $$\sum_{k=1}^{m_2-1} \lambda_k \Psi\left(\Lambda_{1,\, m_2-1} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) \leq 2\Lambda_{1,\, m_2-1}\Psi\left(A_{1,\, m_2-1}\right).$$

Felhasználva $\{m_n\}$ definicióját és a /3.4.12./ alatti

egyenlőtlenséget a /3.4./ baloldalát a következőképpen becsülhetjük:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Psi\left(\Lambda_{1,k} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \lambda_k \Psi\left(\Lambda_{1,m_{n+1}-1} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) \leq$$

/3.4.17./

$$\leq \sum_{k=1}^{m_2-1} \lambda_k \Psi\left(\Lambda_{1,m_2-1} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \lambda_k \Psi\left[\frac{a_k}{\lambda_k}\left(\Lambda_{m_{n+1},m_{n+1}-1} + 2\Lambda_{m_{n-1},m}\right.\right.$$

$$= \Sigma_7$$

Mivel $\Psi(2x) \leq 2\Psi(x)$ ezért Σ_7 -re igaz a következő becslés:

/3.4.18./ $$\Sigma_7 \leq \sum_{k=1}^{m_2-1} \lambda_k \Psi\left(\Lambda_{1,m_2-1} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) + 2\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \lambda_k \Psi\left(\Lambda_{m_{n-1},m_{n+1}-1} \frac{a_k}{\lambda_k}\right) = \Sigma_8$$

A Σ_8 -at tovább becsülhetjük felülről, ha használjuk a /3.4.15./ és /3.4.16./ alatti egyenlőtlenségeket.

/3.4.19./ $$\Sigma_8 \leq 2\Lambda_{1,m_2-1} \Psi\left(A_{1,m_2-1}\right) + 4\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{m_{n-1},m_{n+1}-1} \Psi\left(A_{m_n,m_{n+1}-1}\right) = \Sigma$$

A Σ_g-re viszont a /3.4.13./ és /3.4.14./ alapján adódik, hogy

$$/3.4.20./\quad \Sigma_g \leq 6\lambda_1 \Psi(A_{1,\infty}) + 12 \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_{m_{n-1}, m_n} \Psi(A_{m_n,\infty}) \leq$$

$$\leq 24 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Psi(A_{n,\infty}).$$

Figyelembe véve a /3.4.17./-/3.4.20./ alattiakat, éppen a bizonyitandó /3.4./ egyenlőtlenség adódik abban az esetben, ha $\lambda_{1,\infty} = \infty$.

Ezzel /3.4./-et teljesen bebizonyitottuk.

A tétel bizonyitását befejezve megjegyezzük, hogy az tartalmazza LEINDLER LÁSZLÓ [10]-ben közölt 1'-4' alatti eredményeit, továbbá /3.1./-ből az $n^{-c} \to \lambda_n$ helyettesitéssel adódik MULHOLLAND már emlitett eredménye /ld. [12], 1. lemma/; /3.3./-ból viszont CHEN YUNG-MING egyik lemmáját /ld. [2], 5. lemma/ kapjuk; a /3.2./ és /3.4./ alatti eredményünkből pedig ugyancsak CHEN YUNG-MING [2]-ben kimondott 3. és 7. lemmájának sorokra vonatkozó alakja következik.

Irodalomjegyzék

[1] Beckenbach, E.F. and Bellman, R., Inequalities /Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961/.

[2] Chen Yung-Ming, Some asymptotic properties of Fourier constants and integrability theorems, Math. Zeitschr., 68 /1957/, 227-244.

[3] Chen Yung-Ming, Some further asymptotic properties of Fourier constants, Math. Zeitschr., 69 /1958/, 105-120.

[4] Davies, G.S. and Peterson, G.S., On an inequality of Hardy's /II/, Quart. J. Math. /Oxford/, /2/ 15 /1964/, 35-40.

[5] Hardy, G.H., Divergent series /Cambridge, 1948/.

[6] Hardy, G.H.-Littlewood, J.E.-Pólya, G., Inequalities /Cambridge, 1952/.

[7] Hardy, G.H.-Littlewood, J.E., Elementary theorems concerning power series with positive coeeficients and moment constants of positive functions, J. reine angew. Math., 157 /1927/, 141-158.

[8] Izumi, M., Izumi, S. and Peterson, G.M., On Hardy's inequality and its generalization, Tohuku Math. J., 21 /1969/, 601-613.

[9] Leindler, L., Über verschiedene Konvergenzarten trigonometrischer Reihen. III, Acta Sci. Math., 27 /1966/, 205-215.

[10] Leindler, L., Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood, Acta Sci. Math., 31 /1970/, 279-285.

[11] Leindler, L., On imbedding theorems, Acta Sci. Math., 34 /1973/, /megjelenés alatt/

[12] Mulholland, H.P., Concerning the generalization of the Young-Hausdorff theorem and the Hardy-Littlewood theorems on Fourier constants, Proc. London Math. Soc., /2/ 35 /1933/, 257-293.

[13] Peterson, G.M., An inequality of Hardy's, Quart. J. Math. /Oxford/, /2/ 13 /1966/, 237-240.

[14] Szőkefalvi-Nagy, B., Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées. Acta Sci. Math., 13 /1949/, 118-135.

[15] Muckenhoupt, B., Hardy's inequality with weights, Studia Math., 44 /1972/, 31-38.