DISS. B 1135

GENERÁLHATÓ KVÁZIAUTOMATÁK

Babcsányi István

egyetemi doktori dolgozata

József Attila Tudományegyetem
Bolyai Intézete
SZEGED, 1974

TARTALOM

Bevezetés	3
Generálható, minimálisan generálható, reverzibilis és invertálható kváziautomaták	8
A kváziautomaták homomorfizmusairól	15
A generálható kváziautomaták kongruencia-relációiról	19
Állapot-független, reverzibilis állapot--független és ciklikus állapot-független kváziautomaták	30
Félperfekt kváziautomatákról	54
Kváziautomaták generálható A-részkvázi-automatáiról	63
Ciklikus kváziautomaták félperfekt részkváziautomatáiról	70
Kváziautomaták A-direkt szorzatáról	78
Irodalom	96

BEVEZETÉS

Kváziautomatának nevezünk minden olyan $A=(A,F,\delta)$ rendszert, amely a /nem üres/ A halmazból, a tetszőleges F félcsoportból áll, és δ az $A\times F$ szorzathalmaznak az A -ba való olyan /egyértelmű/ leképezése, amelyre

$$\delta(a,fg)=\delta(\delta(a,f),g) \qquad (a\in A;\ f,g\in F)$$

teljesül. Így a kimenő jel nélküli automaták egy természetes általánositását nyertük. Valóban, bármely $A=(A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automata olyan $A=(A,F,\delta)$ kváziautomataként fogható fel, ahol $F=F(X)$. / $F(X)$ az X által generált szabad félcsoport./ Ennek alapján az A halmazt az A kváziautomata állapothalmazának, az F félcsoportot az A bemenő-félcsoportjának, a δ függvényt pedig az A átmenet-függvényének mondjuk. Az A elemeit szokás A állapotainak nevezni.

Az $A_1=(A_1,F_1,\delta_1)$ kváziautomatát az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata részkváziautomatájának hivjuk, ha A_1 részhalmaza A -nak, F_1 részfélcsoportja F -nek és δ_1 az $A_1\times F_1$ szorzathalmazon megegyezik δ -val. Ha $F_1=F$, akkor A_1 -et az A kváziautomata A-részkváziautomatájának nevezzük.

Definiáljuk az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata F bemenő-félcsoportján a következő relációt:

$$(1) \qquad f\equiv g\,(\varrho_A) \iff \bigwedge_{a\in A} a\,[\delta(a,f)=\delta(a,g)] \qquad (f,g\in F).$$

Nyilvánvaló, hogy ϱ_A kongruencia-reláció. /Myhill-féle

kongruencia/. Az $\overline{F} = F/\varrho_A$ faktorfélcsoportot az A karakterisztikus félcsoportjának nevezzük.

A kváziautomaták elméletében fontos szerepet játszanak a kváziautomaták homomorf leképezései. Az $\mathcal{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomatáról azt mondjuk, hogy homomorf módon beágyazható a $\mathcal{B}=(B, F', \delta')$ kváziautomatába /vagy röviden: $\mathcal{A}$ realizálható $\mathcal{B}$ -ben/, ha van az A állapothalmaznak olyan φ leképezése a B állapothalmazba és az F bemenő-félcsoportnak olyan ψ homomorf leképezése az F' bemenő-félcsoportba, amelyekre minden $a(\in A)$ és $f(\in F)$ esetén teljesül a

$$\varphi(\delta(a, f)) = \delta'(\varphi(a), \psi(f))$$

feltétel. Ha φ A -nak B -re, ψ pedig F -nek F' -re való leképezése, akkor $\mathcal{B}$ -t $\mathcal{A}$ homomorf képének hívjuk. Ha a φ és a ψ leképezések még egy-egyértelműek is, akkor az előző definíciókban a "homomorf" szó helyett mindenütt az "izomorf" szót mondjuk. A dolgozatban ψ -t identikusnak tekintjük, azaz általában közös bemenő-félcsoporttal rendelkező kváziautomatákat vizsgálunk. Megjegyezzük még, hogy a (φ, ψ) leképezés-párt /ha ψ identikus, akkor φ -t/ $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ -be /re/ való homomorf leképezésének vagy homomorfizmusának nevezzük. Az izomorf leképezés vagy izomorfizmus fogalmát is a szokásos értelemben használjuk.

Az $\mathcal{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomata A állapothalmazán értelmezett ϱ /bináris/ relációt δ -relációnak nevezzük, ha

$$(2) \qquad a \varrho b \quad (a, b \in A) \Longrightarrow \bigwedge_{f \in F} f[\delta(a, f) \varrho \delta(b, f)] .$$

Ha a ϱ δ-reláció ekvivalencia, akkor ϱ -t $\mathcal{A}$ kongruenciarelációjának /röviden: kongruenciájának/ mondjuk.

Jelöljük $\mathcal{C}_\varrho$ -val az A állapothalmaz ϱ által indukált osztályozását és $\mathcal{C}_\varrho(a)$-val az $a(\in A)$ állapot által reprezentált osztályt /azaz $\mathcal{C}_\varrho(a)=\langle b\in A \mid b\,\varrho\,a\rangle$ /. Az $A/\varrho=\langle \mathcal{C}_\varrho(a) \mid a\in A\rangle$ halmazt a ϱ által indukált faktorhalmaznak nevezzük. Az $a\longrightarrow \mathcal{C}_\varrho(a)$ $(a\in A)$ A ϱ által indukált természetes leképezése az A/ϱ faktorhalmazra. Továbbá az A állapothalmazon értelmezett relációkat és A osztályozásait szokás az A kváziautomata reláció inak és osztályozásainak nevezni. Nyilvánvaló, hogy A minden ϱ kongruenciájára az $A/\varrho=(A/\varrho\,,F,\delta_\varrho)$ kváziautomata jól-definiált, ahol

$$\delta_\varrho(\mathcal{C}_\varrho(a),f)=\mathcal{C}_\varrho(\delta(a,f)) \quad (a\in A;\ f\in F).$$

Az A/ϱ kváziautomatát A ϱ által indukált faktorkváziautomatájának nevezzük. Könnyen látható, hogy a ϱ által indukált természetes leképezés A homomorf leképezése A/ϱ -ra, amelyet A A/ϱ -ra való természetes homomorfizmusának hivunk. A következő tételben az algebrából jól ismert általános homomorfiatételt fogalmazzuk meg kváziautomatákra.

1.Tétel./A kváziautomaták homomorfiatétele/ Ha az $\mathcal{B}=(B,F,\delta')$ kváziautomata az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata homomorf képe a φ homomorfizmus mellett, akkor a φ által indukált ϱ_φ reláció az A kváziautomata kongruenciarelációja és $A/\varrho_\varphi\cong\mathcal{B}$.

Megjegyezzük, hogy $a\,\varrho_\varphi\,b$ $(a,b\in A)\Longleftrightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$, továbbá $A/\varrho_\varphi\cong\mathcal{B}$ azt jelenti, hogy A/ϱ_φ izomorf $\mathcal{B}$ -vel.

A strukturális vizsgálatokban nagy szerepet játszanak bizonyos speciális homomorfizmusok, az ugynevezett endomorfizmusok. Az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata φ homomor-

fizmusát A endomorfizmusának nevezzük, ha φ A önmagába való leképezése. Ha φ A önmagára való egy-egyértelmű leképezése, akkor A automorfizmusának hívjuk. Az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata endomorfizmusai /automorfizmusai/ a szokásos leképezés-szorzásra nézve félcsoportot /csoportot/ alkotnak, amelyet A endomorfizmus-félcsoportjának /automorfizmuscsoportjának/ nevezünk és $E(A)$ -val / $G(A)$ --val/ jelölünk. A.C.FLECK [11] megmutatta, hogy ha az $A=(A,F,\delta)$ és a $\mathcal{B}=(B,F,\delta')$ kváziautomaták izomorfak, akkor automorfizmuscsoportjaik is izomorfak. Hasonlóan bizonyítható be a

2.Tétel./BABCSÁNYI I.[3]/ $A\cong\mathcal{B} \Rightarrow E(A)\cong E(B)$.

Bizonyítás. Legyen a $\mathcal{B}=(B,F,\delta')$ kváziautomata az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata izomorf képe a φ izomorfizmus mellett. Nyilvánvaló, hogy $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ $(\alpha\in E(A))$ B önmagába való egyértelmű leképezése. Mivel

$$\varphi\alpha\varphi^{-1}(\delta'(b,f)) = \varphi\alpha(\delta(\varphi^{-1}(b),f)) =$$
$$= \varphi(\delta(\alpha\varphi^{-1}(b),f)) = \delta'(\varphi\alpha\varphi^{-1}(b),f)$$

$(b\in B,\ f\in F)$, ezért $\varphi\alpha\varphi^{-1}\in E(B)$. Legyenek $\alpha,\beta(\in E(A))$ olyanok, amelyekre $\varphi\alpha\varphi^{-1}=\varphi\beta\varphi^{-1}$ teljesül, azaz minden $b(\in B)$ állapotra $\varphi\alpha\varphi^{-1}(b)=\varphi\beta\varphi^{-1}(b)$. Mivel φ egy-egyértelmű leképezés, ezért $\alpha\varphi^{-1}(b)=\beta\varphi^{-1}(b)$ minden $\varphi^{-1}(b)(\in A)$ állapotra igaz, amiből következik, hogy $\alpha=\beta$. Tehát a $\Psi:\alpha\longrightarrow\varphi\alpha\varphi^{-1}$ $(\alpha\in E(A))$ hozzárendelés egy-egyértelmű. Ha $\alpha'\in E(B)$, akkor $\varphi^{-1}\alpha'\varphi\in E(A)$, s így $\Psi(\varphi^{-1}\alpha'\varphi)=\alpha'$, ami azt jelenti, hogy Ψ $E(A)$ $E(B)$-re való leképezése. Most megmutatjuk, hogy Ψ homomorfizmus:

$\psi(\alpha\beta) = \varphi\alpha\beta\varphi^{-1} = (\varphi\alpha\varphi^{-1})(\varphi\beta\varphi^{-1}) = \psi(\alpha)\psi(\beta)$ $(\alpha, \beta \in E(A))$. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

A tétel megforditása általában nem igaz /l. A.C. FLECK [11] /.

Ebben a dolgozatban a generálható kváziautomatákat és endomorfizmusaikat / homomorfizmusaikat / vizsgáljuk, természetesen a teljesség igénye nélkül. Speciálisan megadjuk, hogy a reverzibilis állapot-független kváziautomaták és endomorfizmusaik hogyan állithatók erősen összefüggő állapot-független illetve félperfekt kváziautomaták és automorfizmusaik segitségével. Végül kváziautomaták generálható részkváziautomatáiról és A-direkt szorzatáról közlünk néhány eredményt.

Az itt nem definiált fogalmak megtalálhatók CSÁKÁNY B. [9] , RÉDEI L. [20] , E.S.LJAPIN [18] , A.H. CLIFFORD, G.B.PRESTON [8] , A.G.KUROS [17] , GÉCSEG F., PEÁK I. [15] és V.M.GLUSKOV [16] munkákban.

GENERÁLHATÓ, MINIMÁLISAN GENERÁLHATÓ, REVERZIBILIS ÉS INVERTÁLHATÓ KVÁZIAUTOMATÁK

Az $\mathcal{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomata A állapothalmazának /nem üres/ G részhalmazát $\mathcal{A}$ generátorrendszerének nevezzük, ha minden $a(\in A)$ állapothoz létezik olyan $a_0(\in G)$ állapot és $f(\in F)$, amelyekre $a=\delta(a_0, f)$ teljesül. Az $\mathcal{A}$ kváziautomata G generátorrendszere minimális, ha nincs G-nek olyan valódi részhalmaza, amely $\mathcal{A}$ generátorrendszere. Az $\mathcal{A}$ kváziautomatát /végesen, minimálisan/ generálhatónak mondjuk, ha van /véges, minimális/ generátorrendszere. Megjegyezzük, hogy az $\mathcal{A}$ kváziautomatát ciklikusnak hívjuk, ha van egyelemű generátorrendszere, s erősen összefüggőnek, ha minden állapota egyelemű generátorrendszer eleme. A generátorrendszer elemeit generátorelemeknek mondjuk.

1.Lemma. Legyen az $\mathcal{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomata $\overline{F}$ karakterisztikus félcsoportja jobbegységelemes és $\overline{e}$ $\overline{F}$ egy jobbegységeleme. Az $\mathcal{A}$ kváziautomata akkor és csak akkor generálható, ha

$$(3) \qquad \bigvee_{a\in A} a\,[\,\delta(a, e)=a\,]$$

teljesül.

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $\overline{f}$ a ϱ_A /1.(1)/ által indukált osztályozás $f(\in F)$ által reprezentált osztálya. Ha az $\mathcal{A}$ kváziautomata generálható, akkor bármely $a(\in A)$ állapothoz van olyan $b(\in A)$ és $f(\in F)$, hogy $a=\delta(b, f)$. Így

$$a=\delta(b, f)=\delta(b, fe)=\delta(\delta(b, f), e)=\delta(a, e).$$

Forditva, ha (3) teljesül, akkor A generálható, mivel az A állapothalmaz nyilván generátorrendszere A -nak.

Az $A_a = \langle \delta(a,f) \mid f \in F \rangle$ halmazt az $a(\in A)$ állapotból elérhető halmaznak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $\bigcup_{a \in A} A_a \subseteq A$. A akkor és csak akkor generálható, ha van A -nak olyan G részhalmaza, amelyre $\bigcup_{a \in G} A_a = A$ teljesül. Az A_a $(a \in A)$ halmazt maximálisnak mondjuk, ha bármely $b(\in A)$ állapotra

$$A_a \subseteq A_b \Longrightarrow A_a = A_b .$$

Az $A_a = (A_a, F, \delta_a)$ A A-részkváziautomatája. Ha A generálható és A_a $(a \in A)$ maximális, akkor A_a A ciklikus A--részkváziautomatája.

2.Lemma. Az $A = (A, F, \delta)$ kváziautomata akkor és csak akkor generálható minimálisan, ha az A állapothalmaz maximális halmazok egyesitése.

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy az $A = (A, F, \delta)$ kváziautomata minimálisan generálható, s legyen G A egy minimális generátorrendszere. Nyilvánvaló, hogy $A = \bigcup_{a \in G} A_a$. Megmutatjuk, hogy A_a $(a \in G)$ halmaz maximális. Legyen $A_a \subseteq A_b$ $(b \in A)$. Vannak olyan $c(\in G)$ és $f(\in F)$ elemek, hogy $b = \delta(c,f)$, azaz $A_b \subseteq A_c$, s igy $A_a \subseteq A_c$, tehát van olyan $g \in F$, hogy $a = \delta(c,g)$. Mivel G A minimális generátorrendszere, ezért $a = c$. Ellenkező esetben ugyanis $G \setminus \{a\}$ is generátorrendszere lenne A -nak. Kaptuk, hogy $A_a = A_b$, ami azt jelenti, hogy az A_a halmaz maximális.

Forditva, legyen A maximális halmazok egyesitése. Könnyen látható, hogy van olyan G $(\subseteq A)$ halmaz, amely teljesiti a következő feltételeket:

$A = \bigcup_{a \in G} A_a$ és $A_a = A_b$ $(a, b \in G) \Rightarrow a = b$.

Megmutatjuk, hogy G $\mathcal{A}$ minimális generátorrendszere. Az látható, hogy G $\mathcal{A}$ generátorrendszere. Ha G nem minimális, akkor van G -nek olyan K valódi részhalmaza, amely szintén generátorrendszere $\mathcal{A}$ -nak. Legyen $a \in G \setminus K$. Vannak olyan $c\,(\in K)$ és $f\,(\in F)$ elemek, hogy $a = \delta(c, f)$, így $A_a \subseteq A_c$. Mivel az A_a halmaz maximális, ezért $A_a = A_c$, amiből $a = c$ következik. Ez azonban lehetetlen, így G valóban minimális generátorrendszere $\mathcal{A}$ -nak.

A következő lemmát Yu.I.SOKIN [21] végesen generált automatákra bizonyította be.

3.Lemma./BABCSÁNYI I. [4] / Ha G_1 és G_2 az $\mathcal{A} = (A, F, \delta)$ minimálisan generálható kváziautomata minimális generátorrendszerei, akkor $|G_1| = |G_2|$.

Bizonyítás. Legyen az $\mathcal{A} = (A, F, \delta)$ kváziautomata minimálisan generálható és G_1 , G_2 $\mathcal{A}$ két minimális generátorrendszere. Minden $a_j\,(\in G_j)$ állapothoz van olyan $a_i\,(\in G_i)$ állapot és $f\,(\in F)$, amelyekre $\delta(a_i, f) = a_j$ $(i, j = 1, 2\,;\ i \neq j)$. Könnyen belátható, hogy a

$$G_{ij} = \langle a \mid a \in G_i \text{ és } \exists_{f \in F} f\,[\delta(a, f) \in G_j] \rangle \quad (i, j = 1, 2\,;\ i \neq j)$$

halmazok is generátorrendszerei $\mathcal{A}$ -nak. Mivel $G_{ij} \subseteq G_i$ és G_1, G_2 $\mathcal{A}$ minimális generátorrendszerei, ezért $G_{ij} = G_i$. Tegyük fel, hogy $\delta(a_1, f)$, $\delta(a_1, h) \in G_2$ $(a_1 \in G_1\,;\ f, h \in F)$, akkor van olyan $k\,(\in F)$, amelyre

$$\delta(a_1, fk) = \delta(\delta(a_1, f), k) \in G_1 .$$

Mivel G_1 minimális, ezért $\delta(a_1, fk) = a_1$, azaz

$$\delta(\delta(a_1, f), kh) = \delta(\delta(a_1, fk), h) = \delta(a_1, h) \in G_2 .$$

Mivel G_2 is minimális, nyerjük, hogy

$$\delta(a_1, h) = \delta(\delta(a_1, f), kh) = \delta(a_1, f) .$$

Továbbá, ha $\delta(a_1, f) = \delta(a_1', g) \in G_2$ $(a_1' \in G_1, g \in F)$, akkor $a_1 = \delta(a_1, fk) = \delta(a_1', gk)$, azaz $a_1 = a_1'$. Következésképpen az a $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezés, amelyre

$$\varphi(a_1) = a_2 \iff \exists_{f \in F} f \,[\, \delta(a_1, f) = a_2 \,]$$

teljesül, G_1 G_2-re való egy-egyértelmű leképezése. Ez viszont azt jelenti, hogy $|G_1| = |G_2|$. Q.e.d.

Legyen a $\mathcal{B} = (B, F, \delta')$ kváziautomata az $\mathcal{A} = (A, F, \delta)$ kváziautomata homomorf képe a φ homomorfizmus mellett. Ha $\mathcal{A}$ generálható, akkor $\mathcal{B}$ is generálható. Ha G $\mathcal{A}$ egy generátorrendszere, akkor $\varphi(G) = \langle \varphi(c) \mid c \in G \rangle$ halmaz $\mathcal{B}$ egy generátorrendszere. Ha φ izomorfizmus, úgy $\varphi(G)$ akkor és csak akkor minimális, ha G is minimális. Könnyen belátható, hogy ha a φ homomorfizmus identikus $\mathcal{A}$ valamelyik generátorrendszerén, akkor identikus az egész állapothalmazon. Ez azt jelenti, hogy ha φ_1 és φ_2 $\mathcal{A}$ két homomorfizmusa és $\varphi_1 \neq \varphi_2$, akkor $\mathcal{A}$ egy G generátorrendszerének minden c állapotára nem állhat fenn a $\varphi_1(c) = \varphi_2(c)$ egyenlőség.

Az $\mathcal{A} = (A, F, \delta)$ kváziautomatát az $\mathcal{A}_\lambda = (A_\lambda, F, \delta_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ kváziautomaták <u>direkt összegének</u> nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek: 1. $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, 2. $\lambda \neq \nu \ (\lambda, \nu \in \Lambda) \Rightarrow A_\lambda \cap A_\nu = \emptyset$ 3. $\delta|_{A_\lambda} = \delta_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$. A 3. feltétel azt jelenti, hogy δ az A_λ halmazon megegyezik δ_λ-val. A Λ halmazt szokás indexhalmaznak hívni, az $\mathcal{A}_\lambda$ kváziautomatákat pedig $\mathcal{A}$ <u>komponenseinek</u>.

Az $\mathcal{A} = (A, F, \delta)$ kváziautomatát <u>**reverzibilisnek**</u> mondjuk, ha bármely $a (\in A)$, $f (\in F)$ párhoz van olyan $g (\in F)$, hogy $\delta(a, fg) = a$ teljesül.

A következő tétel bizonyitásából látható, hogy minden reverzibilis kváziautomata minimálisan generálható. A tételt automatákra V.M.GLUSKOV [16] bizonyitotta be.

3.Tétel. Minden reverzibilis kváziautomata erősen összefüggő kváziautomaták direkt összegére bomlik.

Bizonyitás. Legyen $a(\in A)$ az $\mathcal{A}=(A, F, \delta)$ reverzibilis kváziautomata tetszőleges állapota. Megmutatjuk, hogy az $\mathcal{A}_a=(A_a, F, \delta_a)$ kváziautomata erősen összefüggő, ahol A_a az a -ból elérhető halmazt jelöli /1.9.oldal/. Minden $f(\in F)$ -hez van olyan $g(\in F)$, hogy $\delta(a, fg)=a$, azaz $a \in A_a$, igy A_a ciklikus. Minden $b(\in A_a)$-hez van olyan $f(\in F)$, amelyre $b=\delta(a, f)$. Mivel $\mathcal{A}$ reverzibilis, ezért van olyan $g(\in F)$, hogy $\delta(b, g)=a$, ami éppen azt jelenti, hogy A_a erősen összefüggő. Nyilvánvaló, hogy erősen összefüggő kváziautomatáknak nincs valódi A-részkváziautomatájuk /l. A.C.FLECK [11] /. Ezek szerint, ha $A_a \subseteq A_c$ $(c \in A)$, akkor $A_a = A_c$, azaz A_a maximális halmaz. A 2.Lemma szerint $\mathcal{A}$ minimálisan generálható. Legyen G $\mathcal{A}$ egy minimális generátorrendszere és $a, b \in G$. Tegyük fel, hogy $A_a \cap A_b \neq \emptyset$. Könnyen belátható, hogy $\mathcal{A}'=(A_a \cap A_b, F, \delta')$ A_a és A_b A-részkváziautomatája. Mivel A_a és A_b erősen összefüggő kváziautomaták, ez csak ugy lehetséges, ha $A_a = A_b$. G minimális volta miatt $a=b$ is igaz. Ezek éppen azt jelentik, hogy $\mathcal{A}$ erősen összefüggő kváziautomaták direkt összegére bontható. Q.e.d

Megjegyezzük, hogy minden erősen összefüggő kváziautomata reverzibilis. Reverzibilis kváziautomata bármely minimális generátorrendszerének számossága egyenlő erősen összefüggő A-részkváziautomatái halmazának számosságával.

Reverzibilis kváziautomata minimális generátorrendszereit úgy kapjuk meg, ha vesszük azokat a halmazokat, amelyek minden erősen összefüggő A-részkváziautomatának pontosan egy állapotát tartalmazzák.

1.Példa. Legyen az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ kváziautomata állapothalmaza $A=\langle 1,2,3,4,5\rangle$, a bemenő-félcsoport $F=F(X)$, ahol $F(X)$ az $X=\langle x,y\rangle$ halmaz által generált egységelem nélküli szabad félcsoport. A δ átmenet-függvényt az $A\times X$ szorzathalmazon a következő táblázat mutatja:

δ	1	2	3	4	5
x	2	1	1	5	4
y	3	2	2	4	5

/ A δ átmenet-függvény értelmezésének kiterjesztését az $A\times F(X)$ szorzathalmazra ismertnek tételezzük fel. /1. GÉCSEG F., PEÁK I. [15] // Könnyen belátható, hogy $\mathcal{A}$ az $\mathcal{A}_1=(A_1,F,\delta_1)$ és $\mathcal{A}_4=(A_4,F,\delta_4)$ A-részkváziautomatáinak direkt összege, ahol $A_1=\langle 1,2,3\rangle$ és $A_4=\langle 4,5\rangle$. A_1 és A_4 erősen összefüggő kváziautomaták, ami azt jelenti, hogy $\mathcal{A}$ reverzibilis. Nem nehéz számolással belátható, hogy $\mathcal{A}$ karakterisztikus félcsoportja nem csoport.

Az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ kváziautomatát <u>invertálhatónak</u> nevezzük, ha bármely $f(\in F)$-hez van olyan $g(\in F)$, hogy

$$\bigwedge_{a\in A} a\,[\,\delta(a,fg)=a\,]$$

Nyilvánvaló, hogy minden invertálható kváziautomata reverzibilis.

<u>4.Tétel. Az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ generálható kváziautomata akkor és csak akkor invertálható, ha F karakterisztikus félcsoportja csoport.</u>

Bizonyítás. Legyen az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata invertálható, akkor bármely $f(\in F)$ -hez van olyan $g(\in F)$, hogy

$$\bigwedge_{a\in A} a\,[\,\delta(a,fg)=a\,]$$

teljesül. Legyen $\bar{e}=\overline{fg}=\bar{f}\,\bar{g}$. Könnyen belátható, hogy $\bar{e}$ $\bar{F}$ egységeleme és $\bar{g}$ $\bar{f}$ inverze.

Fordítva, ha A generálható, $\bar{F}$ csoport és $\bar{e}$ $\bar{F}$ egységeleme, akkor a 3.Lemma szerint

$$\bigwedge_{a\in A} a\,[\,\delta(a,e)=a\,]\quad,$$

amiből már adódik, hogy A invertálható. Q.e.d.

2.Példa. Változtassuk meg az 1.Példában szereplő A kváziautomata δ átmenet-függvényét a következő módon:

δ	1	2	3	4	5
x	2	1	3	5	4
y	2	3	1	4	5

Nyilvánvaló, hogy A továbbra is az A_1 és A_4 A-részkváziautomatáinak direkt összege.

$$\overline{F(X)}=\langle \bar{x},\ \bar{y},\ \overline{x^2},\ \overline{y^2},\ \overline{xy},\ \overline{yx}\rangle,$$

$\overline{x^2}$ $\overline{F(X)}$ egységeleme, az $\bar{x}$, $\overline{xy}$ és $\overline{yx}$ elemek saját maguk inverzei, $\bar{y}$ inverze pedig $\overline{y^2}$, azaz $\overline{F(X)}$ karakterisztikus félcsoport csoport. A 4.Tétel szerint az A kváziautomata invertálható.

A KVÁZIAUTOMATÁK HOMOMORFIZMUSAIRÓL

Ebben a részben megmutatjuk, hogy bármely $A=(A,F,\delta)$ kváziautomatához megadható olyan egységelemes bemenő-félcsoportú generálható kváziautomata, amelynek homomorfizmusai /endomorfizmusai/ pontosan megegyeznek A homomorfizmusaival /endomorfizmusaival/.

Legyen $A_1=\langle \delta(a,f) \mid a\in A, f\in F\rangle$. Könnyen belátható, hogy az $A_1=(A_1,F,\delta_1)$ kváziautomata az $A=(A,F,\delta)$ A-részkváziautomatája. Az A_1 kváziautomatát A /első/ magjának nevezzük. Legyen $I\ (\notin F)$ tetszőleges jel. Jelöljük F^I -vel F -ből a szokásos módon származtatott monoidot. Legyen továbbá φ A önmagába való /egyértelmű/ leképezése és δ_φ az $A\times F^I$ szorzathalmaznak A -ba való következő leképezése:

$$(4)\qquad \delta_\varphi(a,f)=\begin{cases}\delta(a,f) & \text{ha } f\in F,\\ \varphi(a) & \text{ha } f=I\end{cases}\qquad (a\in A).$$

4.Lemma. *Az $A_\varphi=(A,F^I,\delta_\varphi)$ kváziautomata akkor és csak akkor jól-definiált, ha φ az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata olyan idempotens endomorfizmusa, amely identikus A A_1 magján. Ebben az esetben A A_φ részkváziautomatája.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az A_φ kváziautomata jól-definiált, s legyen $a\ (\in A)$ tetszőleges állapot, akkor

$$\varphi(a)=\delta_\varphi(a,I)=\delta_\varphi(a,I^2)=$$
$$=\delta_\varphi(\delta_\varphi(a,I),I)=\delta_\varphi(\varphi(a),I)=\varphi^2(a),$$

azaz $\varphi^2=\varphi$. Továbbá, ha $f\in F$, akkor

$$\delta_\varphi(a,If)=\delta_\varphi(a,fI)=\delta_\varphi(a,f)=\delta(a,f),$$
$$\delta_\varphi(\delta_\varphi(a,f),I)=\delta_\varphi(\delta(a,f),I)=\varphi(\delta(a,f)),$$
$$\delta_\varphi(\delta_\varphi(a,I),f)=\delta_\varphi(\varphi(a),f)=\delta(\varphi(a),f).$$

Mivel az A_φ kváziautomata jól-definiált, ezért

$$\delta(a,f) = \varphi(\delta(a,f)) = \delta(\varphi(a),f) .$$

Ez viszont azt jelenti, hogy φ A olyan idempotens endomorfizmusa, amely identikus A_1 -en. Az állitás megfordítása hasonlóan igazolható. A A_φ részkváziautomatája, mivel F F^I részfélcsoportja és δ_φ az $A\times F$ szorzathalmazon megegyezik δ -val. Q.e.d.

5.Tétel. Az $A_\varphi=(A,F^I,\delta_\varphi)$ kváziautomata minden homomorfizmusa az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomatának is homomorfizmusa. Forditva, ha ψ az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata homomorf leképezése a $B=(B,F,\delta')$ kváziautomatára, úgy ψ A_φ -t akkor és csak akkor képezi le homomorf módon $B_{\varphi'}$ -re, ha $\psi\varphi=\varphi'\psi$ teljesül.

Bizonyitás. Nyilvánvaló, hogy A_φ minden homomorfizmusa A -nak is homomorfizmusa, mivel a két kváziautomata állapothalmaza megegyezik és A A_φ részkváziautomatája.

Forditva, legyen ψ az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata homomorf leképezése a $B=(B,F,\delta)$ kváziautomatára, φ és φ' (4)-ben megkövetelt leképezések. Könnyen belátható, hogy ψ akkor és csak akkor képezi le homomorf módon A_φ -t $B_{\varphi'}$ -re, ha

$$\bigwedge_{a\in A} a\,[\,\psi\varphi(a)=\psi(\delta_\varphi(a,I))=\delta'_{\varphi'}(\psi(a),I)=\varphi'\psi(a)\,] ,$$

azaz $\psi\varphi=\varphi'\psi$. Q.e.d.

Ha φ A identikus leképezése, ψ A homomorf leképezése B -re és φ' B identikus leképezése, akkor az 5.Tétel szerint ψ A_φ -t homomorf módon leképezi $B_{\varphi'}$ -re. Ebben az esetben A_φ teljesiti a (3) feltételt, tehát az 1.Lemma szerint generálható kváziautomata. Igy, ha φ identikus A -n, akkor A és a generálható, egységelemes

bemenő-félcsoportu A_φ kváziautomata homomorfizmusai megegyeznek.

1.Következmény. *A_φ minden endomorfizmusa A-nak is endomorfizmusa. Fordítva, az A kváziautomata α endomorfizmusa akkor és csak akkor endomorfizmusa A_φ-nak, ha $\alpha\varphi = \varphi\alpha$ teljesül.*

Ha φ identikus A-n, akkor A_φ egyeégelemes bemenő-félcsoportu, generálható kváziautomata és A endomorfizmusai megegyeznek A_φ endomorfizmusaival.

3.Példa. Legyen az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata állapothalmaza $A=\langle 1,2,3\rangle$, a bemenő-félcsoport $F=\{f,g\}$, amelyben a müveletet az $f^2=g^2=fg=gf=g$ egyenletekkel definiáljuk. A δ átmenet-függvényt a következő táblázattal adjuk meg:

δ	1	2	3
f	3	3	3
g	3	3	3

Jelöljük abc -vel azt az $\alpha : A \to A$ leképezést, amelyre $\alpha(1)=a$, $\alpha(2)=b$ és $\alpha(3)=c$ / $a,b,c = 1,2,3$ / teljesül. Számolással ellenőrizhető, hogy A endomorfizmusai a következő leképezések:

$$\alpha_0=123,\ \alpha_1=113,\ \alpha_2=133,\ \alpha_3=213,\ \alpha_4=223,$$
$$\alpha_5=233,\ \alpha_6=313,\ \alpha_7=323,\ \alpha_8=333.$$

Az A kváziautomata magjának állapothalmaza $A_1=\langle 3\rangle$. A minden endomorfizmusa identikus A_1-n, α_0, α_1, α_2, α_4, α_7 és α_8 endomorfizmusok idempotensek, de csak α_0 és α_8 cserélhető fel A minden endomorfizmusával. Az alábbi táblázatok az A_{α_0}, A_{α_1} és A_{α_8} kváziautomaták átmenet-függvényeit mutatják:

δ_{α_0}	1	2	3
I	1	2	3
f	3	3	3
g	3	3	3

δ_{α_1}	1	2	3
I	1	1	3
f	3	3	3
g	3	3	3

δ_{α_2}	1	2	3
I	3	3	3
f	3	3	3
g	3	3	3

Az 1.Következmény szerint A_{α_0} és A_{α_2} endomorfizmusai megegyeznek A endomorfizmusaival. Az A_{α_1} kváziautomata endomorfizmusai α_0, α_1 és α_2, azaz $E(A_{\alpha_1}) \subset E(A)$.

6.Tétel./BABCSÁNYI I.[4]/ Ha az $A=(A,F,\delta)$ A-véges kváziautomata reverzibilis, akkor

$$(5) \qquad \sigma(E(A)) \geq \prod_{i=1}^{k} \sigma(E(A_{a_i})) \quad ,$$

ahol $G=\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ A egy minimális generátorrendszere.

Bizonyítás. A 3.Tétel szerint A az A_{a_i} $(a_i \in G)$ erősen összefüggő kváziautomaták direkt összegére bontható. Jelölje $\alpha = \bigcup_{a_i \in G} \alpha_{a_i}$ A önmagába való következő leképezését:

$$(6) \qquad \alpha(a) = \alpha_{a_i}(a) \iff a \in A_{a_i}$$

ahol $\alpha_{a_i} \in E(A_{a_i})$. Nyilvánvaló, hogy $\alpha \in E(A)$. Továbbá, ha $\alpha = \bigcup_{a_i \in G} \alpha_{a_i}$ $(\alpha_{a_i} \in E(A_{a_i}))$ és $\beta = \bigcup_{a_i \in G} \beta_{a_i}$ $(\beta_{a_i} \in E(A_{a_i}))$ olyanok, hogy $\alpha = \beta$, akkor minden $a_i (\in G)$ generátorelemre $\alpha_{a_i} = \beta_{a_i}$ teljesül, amiből már következik a tétel állítása.

Azt, hogy (5)-ben az egyenlőség el is érhető, a 14. oldalon lévő 2.Példa is mutatja.

Megjegyezzük, hogy egy kváziautomatát akkor mondunk A-végesnek, ha állapothalmaza véges. Véges kváziautomatáról akkor beszélünk, ha még a kváziautomata bemenő-félcsoportja is véges.

A GENERÁLHATÓ KVÁZIAUTOMATÁK KONGRUENCIARELÁCIÓIRÓL

A kváziautomaták homomorfiatétele /1.Tétel/ szerint bármely $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata homomorf képei izomorfiától eltekintve egyértelműen megadhatók a kongruenciarelációi segítségével. Ebben a fejezetben a generálható kváziautomaták kongruenciái és bemenő-félcsoportjuk jobbkongruenciái között keresünk kapcsolatot, majd bevezetünk a kváziautomaták állapothalmazán néhány fontosabb relációt.

Legyen τ az $A=(A,F,\delta)$ generálható kváziautomata relációja és χ az F bemenő-félcsoporton értelmezett reláció. Definiáljuk A τ_χ relációját a következő módon: $a\,\tau_\chi\,b$ $(a,b\in A)$ akkor és csak akkor, ha vannak olyan $a_1,a_2,\dots,a_n(\in A)$ állapotok és $f_1,g_1,f_2,g_2,\dots,f_n,g_n(\in F)$ elemek, amelyekre

$$(7)\qquad \begin{aligned} &a\,\tau\,\delta(a_1,f_1),\ f_1\,\chi\,g_1,\ \delta(a_1,g_1)\,\tau\,\delta(a_2,f_2),\ f_2\,\chi\,g_2,\dots\\ &\dots,\delta(a_{n-1},g_{n-1})\,\tau\,\delta(a_n,f_n),\ f_n\,\chi\,g_n,\ \delta(a_n,g_n)\,\tau\,b \end{aligned}$$

teljesül.

Nem nehéz számolással meggyőződhetünk arról, hogy ha τ és χ reflexiv relációk, akkor $\tau\leq\tau_\chi$; továbbá ha τ és χ szimmetrikusak, akkor τ_χ is az. Ha τ ekvivalencia /kongruencia/ és χ ekvivalencia /jobbkongruencia/, akkor τ_χ is ekvivalencia /kongruencia/. Megjegyezzük, hogy az állitás bizonyitásánál nem használjuk ki χ tranzitiv tulajdonságát.

Jelöljük A kongruenciáinak halmazát $\mathcal{K}$-val, jobbkongruenciáinak halmazát pedig $\mathcal{J}$-vel. Legyen $\{\mathcal{J}\}$ a

$\mathcal{T}$ halmaz elemei által generált félcsoport, amelyben a művelet a relációk szorzása.

7.Tétel. Ha az $A=(A, F, \delta)$ kváziautomata generálható, akkor az $\mathcal{K}=(\mathcal{K}, \{\mathcal{T}\}, \Delta)$ kváziautomata is generálható, ahol

$$\Delta(\tau, \chi) = \tau\chi \quad (\tau \in \mathcal{K}, \chi \in \{\mathcal{T}\}) .$$

Bizonyitás. Először megmutatjuk, hogy bármely $\tau(\in\mathcal{K})$ és χ , η $(\in\{\mathcal{T}\})$ relációkra $\tau\chi\cdot\eta = (\tau\chi)\eta$ teljesül.

$a\ \tau\chi\cdot\eta\ b$ $(a, b \in A)$ azt jelenti, hogy vannak olyan $a_i (\in A)$ állapotok és f_i , g_i $(\in F)$ $(i=1,2,\dots,n)$, amelyek teljesitik a (7) feltételt. $f_i\ \chi\cdot\eta\ g_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ definició szerint azt jelenti, hogy vannak olyan $h_i (\in F)$ elemek, amelyekre $f_i\ \chi\ h_i$ és $h_i\ \eta\ g_i$ fennállnak, ezért

$$a\ \tau\ \delta(a_1, f_1),\ f_1\ \chi\ h_1,\ \delta(a_1, h_1)\ \tau\ \delta(a_1, h_1),\ h_1\ \eta\ g_1,$$
$$\delta(a_1, g_1)\ \tau\ \delta(a_2, f_2),\ f_2\ \chi\ h_2,\ \delta(a_2, h_2)\ \tau\ \delta(a_2, h_2),\ h_2\ \eta\ g_2,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\delta(a_{n-1}, g_{n-1})\ \tau\ \delta(a_n, f_n),\ f_n\ \chi\ h_n,\ \delta(a_n, h_n)\ \tau\ \delta(a_n, h_n),\ h_n\ \eta\ g_n,$$
$$\delta(a_n, g_n)\ \tau\ b .$$

Tehát

$$a\ \tau\chi\ \delta(a_1, h_1),\ h_1\ \eta\ g_1,\ \delta(a_1, g_1)\ \tau\chi\ \delta(a_2, h_2),\ h_2\ \eta\ g_2,\ \dots$$
$$\dots,\ \delta(a_{n-1}, g_{n-1})\ \tau\chi\ \delta(a_n, h_n),\ h_n\ \eta\ g_n,\ \delta(a_n, g_n)\ \tau\chi\ b,$$

azaz $a\ (\tau\chi)\eta\ b$, ami azt jelenti, hogy $\tau\chi\cdot\eta \leqq (\tau\chi)\eta$.

A $(\tau\chi)\eta \leqq \tau\chi\cdot\eta$ egyenlőtlenség a (7) definició felhasználásával azonnal adódik a következő két állitásból:

Ha ξ_1 és ξ_2 F reflexiv relációi, akkor $\xi_1, \xi_2 \leqq \xi_1\cdot\xi_2$.

Továbbá, ha $\xi_1 \leqq \xi_2$, akkor A bármely τ relációjára $\tau_{\xi_1} \leqq \tau_{\xi_2}$ teljesül.

Ahhoz, hogy az $\mathcal{K}=(\mathcal{K}, \{\mathcal{T}\}, \Delta)$ kváziautomata jól-definiált legyen, igaznak kell lennie annak, hogy bármely $\tau(\in\mathcal{K})$ és $\chi(\in\{\mathcal{T}\})$ relációkra $\tau\chi \in \mathcal{K}$.

Legyen $\chi = \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_k$ $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k \in \mathcal{F})$. Mivel τ A kongruenciája és χ_1 F jobbkongruenciája, ezért $\tau_{\chi_1} \in \mathcal{K}$. De $\tau_{\chi_1} \in \mathcal{K}$ és $\chi_2 \in \mathcal{F}$ miatt $\tau_{\chi_1\chi_2} = (\tau_{\chi_1})_{\chi_2} \in \mathcal{K}$. Ezt folytatva, kapjuk, hogy $\tau_\chi = \tau_{\chi_1\chi_2\cdots\chi_k} = (\tau_{\chi_1\chi_2\cdots\chi_{k-1}})_{\chi_k} \in \mathcal{K}$. Végül megmutatjuk, hogy $\mathcal{K}$ generálható. Vezessük be az F bemenő-félcsoporton a következő relációt:

$$(8) \quad f \tau_A g \quad (f, g \in F) \Longleftrightarrow \bigwedge_{a \in A} a\,[\delta(a,f)\,\tau\,\delta(a,g)],$$

ahol $\tau \in \mathcal{K}$. /Megjegyezzük, hogy (8) tulajdonképpen A τ által indukált faktorkváziautomatájának Myhill-féle kongruenciája./ Az nyilvánvaló, hogy $\tau \leqq \tau_{\tau_A}$. Legyen most $a\,\tau_{\tau_A}\,b$ $(a, b \in A)$, azaz vannak olyan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(\in A)$ állapotok és f_i, g_i $(\in F)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, amelyekre (7) teljesül. Mivel $f_i \tau_A g_i$, így

$$\delta(a_i, f_i)\,\tau\,\delta(a_i, g_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

amiből adódik, hogy $a \tau b$, azaz $\tau = \tau_{\tau_A}$, ami éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{K}$ generálható. Q.e.d.

Ha (7)-ben megköveteljük, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(\in A)$ állapotok generátorelemek legyenek, akkor olyan τ'_χ relációt kapunk, amelyre $\tau \leqq \tau'_\chi \leqq \tau_\chi$ teljesül, ha χ kongruencia, akkor $\tau'_\chi = \tau_\chi$. Ha A minimálisan generálható és $a_1, a_2, \ldots, a_m$ A G minimális generátorrendszerének elemei, akkor (7) olyan $\tau_{G\chi}$ relációt definiál, amelyre $\tau \leqq \tau_{G\chi} \leqq \tau'_\chi$, ha χ kongruencia, akkor $\tau_{G\chi} = \tau'_\chi$.

Szükségünk lesz az $A = (A, F, \delta)$ kváziautomata F bemenő-félcsoportján értelmezett következő $\varrho_{A,a}$ $(a \in A)$ jobbkongruenciákra:

$$(9) \quad f \equiv g\,(\varrho_{A,a}) \Longleftrightarrow \delta(a,f) = \delta(a,g) \quad (f, g \in F).$$

Legyen most az $A = (A, F, \delta)$ kváziautomata ciklikus és a_0 A egy generátorelem, továbbá χ F egy /binér/ relá-

éja. Definiáljuk az A állapothalmazon a következő $\varrho(\chi)$ relációt:

(10) $$\delta(a_0, f)\ \varrho(\chi)\ \delta(a_0, g) \iff f \chi g \quad (f, g \in F).$$

5.Lemma. Ha $\varrho(\chi)$ az $A=(A, F, \delta)$ ciklikus kváziautomata tranzitiv relációja és $\chi \geq \varrho_{A,a_0}$, akkor $\varrho(\chi)$ megegyezik az $=_{\{a_0\}\chi}$ relációval.

Bizonyítás. Legyen az $A=(A, F, \delta)$ kváziautomata ciklikus, a_0 A egy generátoreleme, $\varrho(\chi)$ A tranzitiv relációja és $\chi\ (\geq \varrho_{A,a_0})$ F relációja.
Ha $a\,\varrho(\chi)\,b$ $(a, b \in A)$, akkor vannak olyan f, g $(\in F)$ elemek, hogy

$$a = \delta(a_0, f),\ f \chi g,\ \delta(a_0, g) = b,$$

azaz $a =_{\{a_0\}\chi} b$.
Fordítva, ha $a =_{\{a_0\}\chi} b$ $(a, b \in A)$, akkor vannak olyan $f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_n, g_n$ $(\in F)$, amelyekre

$$a = \delta(a_0, f_1),\ f_1 \chi g_1,\ \delta(a_0, g_1) = \delta(a_0, f_2),\ f_2 \chi g_2, \dots$$
$$\dots,\ \delta(a_0, g_{n-1}) = \delta(a_0, f_n),\ f_n \chi g_n,\ \delta(a_0, g_n) = b$$

teljesül. Mivel $f_i \chi g_i$, ezért (10) szerint

$$\delta(a_0, f_i)\ \varrho(\chi)\ \delta(a_0, g_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Továbbá $\delta(a_0, g_j) = \delta(a_0, f_{j+1})$ miatt $g_j \chi f_{j+1}$, ezért (10) alapján

$$\delta(a_0, g_j)\ \varrho(\chi)\ \delta(a_0, f_{j+1}) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$

$\varrho(\chi)$ tranzitiv reláció, így az előzőekből kapjuk, hogy $a\,\varrho(\chi)\,b$. Q.e.d.

A következő tétel magába foglalja R.H.ORMSBY [19] 8. tételét:

8.Tétel. $\varrho(\chi)$ akkor és csak akkor kongruenciája az $A=(A, F, \delta)$ ciklikus kváziautomatának, ha χ F olyan jobbkongruenciája, amelyre $\chi \geq \varrho_{A,a_0}$ teljesül. Továbbá, A minden τ kongruenciájához van F-nek olyan χ jobbkongru-

enciája, amelyre $\tau = \varsigma(\chi)$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen χ F olyan jobbkongruenciája, amelyre fennáll a $\varsigma_{A,a_0} \leqq \chi$ egyenlőtlenség. Bármely $a(\in A)$ állapothoz van olyan $f(\in F)$, hogy $a = \delta(a_0, f)$, ahol a_0 $\mathfrak{A}$ egy generátoreleme. $\delta(a_0, f) = \delta(a_0, g)$ $(g \in F)$ akkor és csak akkor, ha $f \equiv g(\varsigma_{A,a_0})$. A $\varsigma_{A,a_0} \leqq \chi$ feltétel miatt $f \equiv g(\chi)$, azaz $\delta(a_0, f)\, \varsigma(\chi)\, \delta(a_0, g)$, ami azt jelenti, hogy $\varsigma(\chi)$ reflexiv. Mivel χ szimmetrikus, ezért $\varsigma(\chi)$ is az. Legyen most $a\, \varsigma(\chi)\, b$ és $b\, \varsigma(\chi)\, c$ $(a, b, c \in A)$. Ha $a = \delta(a_0, f)$ és $c = \delta(a_0, h)$ $(f, h \in F)$, akkor van olyan $g(\in F)$, hogy $f \equiv g(\chi)$ $g \equiv h(\chi)$ és $b = \delta(a_0, g)$. χ tranzitiv reláció, ezért $f \equiv h(\chi)$ s így $a\, \varsigma(\chi)\, c$, tehát $\varsigma(\chi)$ tranzitiv. Abból, hogy χ jobbkongruencia könnyen adódik, hogy $\varsigma(\chi)$ kongruencia. Hasonlóan látható be, hogy ha $\varsigma(\chi)$ $\mathfrak{A}$ kongruenciája, akkor χ F jobbkongruenciája. Ha $f \equiv g(\varsigma_{A,a_0})$ $(f, g \in F)$, akkor $\delta(a_0, f) = \delta(a_0, g)$. Mivel $\varsigma(\chi)$ reflexiv, ezért $f \equiv g(\chi)$, azaz $\varsigma_{A,a_0} \leqq \chi$.

Tekintsük most $\mathfrak{A}$ tetszőleges τ kongruenciáját, s definiáljuk a következő τ_{A,a_0} relációt:

(11) $\quad f\, \tau_{A,a_0}\, g \quad (f, g \in F) \Longleftrightarrow \delta(a_0, f)\, \tau\, \delta(a_0, g)$.

Az előzőekből nyilvánvaló, hogy τ_{A,a_0} F olyan jobbkongruenciája, amelyre $\tau_{A,a_0} \geqq \varsigma_{A,a_0}$ és $\tau = \varsigma(\tau_{A,a_0})$ teljesülnek. Q.e.d.

Az előbbi tétel szerint az $\mathfrak{A}$ ciklikus kváziautomatának pontosan annyi /egymással nem izomorf/ homomorf képe van, mint amennyi ς_{A,a_0}-nál nem kisebb jobbkongruenciája F-nek. Minden $a(\in A)$ állapotra $\tau_A \leqq \tau_{A,a}$ /l. (8) és (11)./. Ha a_0 $\mathfrak{A}$ egy generátoreleme, úgy $\tau_A = \tau_{A,a_0}$ akkor és csak akkor, ha τ_{A,a_0} $\mathfrak{A}$ kongruenciarelációja.

Tulajdon-

képpen (1) reláció (8) tipusu, (9) pedig (11)tipusu, amelyekben τ az egyenlőség relációja.

2.Következmény. *Ha χ az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kvázi-automata F bemenő-félcsoportjának kongruenciája és $\varrho_{A,a_0} \leqq \chi$, akkor χ az A kváziautomata $A/\varrho(\chi)$ faktorkvá-ziautomatájának Myhill-féle kongruenciája.*

Ha τ_1 és τ_2 a tetszőleges A kváziautomata kongru-enciarelációi és $\tau_1 \leqq \tau_2$, akkor $\tau_{1A} \leq \tau_{2A}$. Igy, ha τ A kongruenciája, akkor $\varrho_A \leq \tau_A$. Felmerül az a kér-dés, hogy ha χ F olyan kongruenciája, amelyre $\varrho_A \leqq \chi$ teljesül, akkor van-e A -nak olyan τ kongruenciája, hogy $\chi = \tau_A$? Ha ϱ_{A,a_0} az A ciklikus kváziautomata kongruenciája, akkor a 2.Következmény szerint a válasz pozitiv, mivel ebben az esetben $\varrho_{A,a_0} = \varrho_A$.

Most néhány fontosabb relációt definiálunk az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata állapothalmazán:

(12) $$a \sim b \iff \bigwedge_{f\in F} f\,[\delta(a,f)=\delta(b,f)],$$

(13) $$a\,\varrho_f\,b \iff \delta(a,f)=\delta(b,f),$$

(14) $$a \curlywedge b \iff \bigvee_{f\in F} f\,[\delta(a,f)=\delta(b,f)] \quad (a,b\in A).$$

Az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata **centrumának** nevezzük azt a $Z(A)$ halmazt, amely azokból és csak azokból az $f(\in F)$ elemekből áll, amelyek minden $a(\in A)$ és $g(\in F)$ esetén teljesitik a

$$\delta(a,fg)=\delta(a,gf)$$

feltételt. Ha $Z(A)$ nem üres, akkor F részfélcsoportja. A -t **kommutativnak** hivjuk, ha $Z(A)=F$.

Könnyen belátható, hogy (12) és (13), ha A kommuta-tiv, akkor (14) is ekvivalenciák. A (12) reláció A kong-ruenciája. Ha $f \in Z(A)$, akkor (13) , ha A kommutativ,

akkor (14) szintén $\mathbb{A}$ kongruenciái. Legyenek

$\bar{a}=\langle b \mid b\sim a,\ b\in A\rangle$, $\bar{A}=\langle \bar{a} \mid a\in A\rangle$, $a_f=\langle b \mid b\,\varrho_f\,a,\ b\in A\rangle$,

$A_f=\langle a_f \mid a\in A\rangle$, $\hat{a}=\langle b \mid b\wedge a,\ b\in A\rangle$, $\hat{A}=\langle \hat{a} \mid a\in A\rangle$.

A kvázioutomaták homomorfiatétele szerint az $\bar{\mathbb{A}}=(\bar{A},F,\bar{\delta})$, $\mathbb{A}_f=(A_f,F,\delta_f)$ $(f\in Z(A))$ és $\hat{\mathbb{A}}=(\hat{A},F,\hat{\delta})$ /ha $\mathbb{A}$ kommutativ/ kvázioutomaták $\mathbb{A}$ homomorf képei, ahol $\bar{\delta}(\bar{a},h)=\overline{\delta(a,h)}$, $\delta_f(a_f,h)=\delta(a,h)_f$ és $\hat{\delta}(\hat{a},h)=\widehat{\delta(a,h)}$ $(a\in A,\ h\in F)$. Az is látható, hogy $\bar{a}\subseteq a_f\subseteq\hat{a}$ $(a\in A)$, azaz $|\bar{A}|\geq|A_f|\geq|\hat{A}|$.

6.Lemma. *Ha az $\mathbb{A}=(A,F,\delta)$ generálható kvázioutomata $\bar{F}$ karakterisztikus félcsoportja jobbegységelemes, akkor $\mathbb{A}\cong\bar{\mathbb{A}}$.*

Bizonyítás. Legyen $\bar{e}$ $\bar{F}$ egy jobbegységeleme és $a\sim b$ $(a,b\in A)$, így (12) szerint $\delta(a,e)=\delta(b,e)$ is fennáll. Ha G A egy generátorrendszere, akkor vannak olyan a_0, b_0 $(\in G)$ és h, k $(\in F)$ elemek, hogy $a=\delta(a_0,h)$ és $b=\delta(b_0,k)$. Így

$$a=\delta(a_0,h)=\delta(a_0,he)=\delta(\delta(a_0,h),e)=\delta(a,e)=$$
$$=\delta(b,e)=\delta(\delta(b_0,k),e)=\delta(b_0,ke)=\delta(b_0,k)=b.$$

Amiből már látható, hogy az $a\longrightarrow\bar{a}$ $(a\in A)$ leképezés izomorfizmus. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy ha az $\mathbb{A}=(A,F,\delta)$ generálható kvázioutomata $\bar{F}$ karakterisztikus félcsoportja jobbegységelemes, akkor egységelemes is. Ebben az esetben a $\sim$ és a ϱ_e /$\bar{e}$ $\bar{F}$ egységeleme/ relációk megegyeznek, hiszen mindkettő identikus.

9.Tétel. *Ha az $\mathbb{A}=(A,F,\delta)$ kvázioutomata generálható, akkor $E(A)$ izomorf $E(\bar{A})$ egy részfélcsoportjával.*

Bizonyítás. Definiáljuk a $\varphi_\alpha:\bar{A}\longrightarrow\bar{A}$ leképezést a következő módon:

$$\varphi_\alpha(\bar{a})=\overline{\alpha(a)}\quad(\alpha\in E(A)).\tag{15}$$

φ_α az $\overline{A}$ halmaz önmagába való egyértelmű leképezése. Minthogy

$$\varphi_\alpha(\overline{\delta}(\bar{a},f)) = \varphi_\alpha(\overline{\delta(a,f)}) = \overline{\alpha(\delta(a,f))} =$$
$$\overline{\delta(\alpha(a),f)} = \overline{\delta}(\overline{\alpha(a)},f) = \overline{\delta}(\varphi_\alpha(\bar{a}),f)$$

$(\bar{a}\in\overline{A}, f\in F)$, ezért $\varphi_\alpha \in E(\overline{A})$. Megmutatjuk, hogy az $\eta : \alpha \longrightarrow \varphi_\alpha$ $(\alpha\in E(A))$ megfeleltetés egy-egyértelmű. Valóban, tetszőleges $\alpha,\beta\in E(A)$ esetén

$$\varphi_\alpha = \varphi_\beta \iff \bigwedge_{a\in A} a\,[\overline{\alpha(a)} = \overline{\beta(a)}] \iff$$
$$\iff \bigwedge_{a\in A}\bigwedge_{f\in F}(a,f)\,[\alpha(\delta(a,f)) = \beta(\delta(a,f))]\,.$$

Legyen G A egy generátorrendszere, s a fusson végig G-n, akkor az előzőekből azonnal adódik, hogy $\alpha=\beta$. Végül a

$$\varphi_{\alpha\beta}(\bar{a}) = \overline{\alpha\beta(a)} = \varphi_\alpha(\overline{\beta(a)}) = \varphi_\alpha\varphi_\beta(\bar{a})$$

számolással nyerjük, hogy η művelettartó. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy ha $\alpha\in G(A)$, akkor $\varphi_\alpha\in G(\overline{A})$, így a tétel állítása automorfizmuscsoportokra is érvényes. Ha $\alpha\in E(A)$, akkor $\alpha(\bar{a}) = \langle\alpha(b)\mid b\in\bar{a}\rangle \subseteq \overline{\alpha(a)}$ $(a\in A)$, ha pedig $\alpha\in G(A)$, akkor $\alpha(\bar{a}) = \overline{\alpha(a)}$. Továbbá, ha G A minimális generátorrendszere és $c\neq d$ $(\in G)$, akkor $\bar{c}\neq\bar{d}$. A 4.Lemmában szereplő $\varphi : A\to A$ idempotens leképezés, amely identikus A magján, akkor és csak akkor endomorfizmusa A-nak, ha

$$\bigwedge_{a\in A} a\,[\varphi(a)\in\bar{a}]\,.$$

Legyen most az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata olyan, amelynek F bemenő-félcsoportja balegységelemes és $e\in F$ egy balegységeleme. Könnyen belátható, hogy

$$\bar{a} = \overline{\delta(a,e)} = \overline{\delta}(\bar{a},e) \quad (a\in A)$$

azaz $\overline{A}$ generálható és $\overline{A}$ karakterisztikus félcsoportja monoid. Akkor is igaz az eredmény, ha általánosabban azt

tesszük csak fel, hogy A karakterisztikus félcsoportja balegységelemes.

10.Tétel. Minden erősen összefüggő $A=(A,F,\delta)$ kváziautomatára $\theta(E(A)) \leqq |\hat{A}|$ teljesül.

Bizonyitás. Legyen $a(\in A)$ tetszőleges állapot és $\alpha, \beta \in E(A)$. Ha van olyan $f(\in F)$, hogy

$$\alpha(\delta(a,f)) = \delta(\alpha(a),f) = \delta(\beta(a),f) = \beta(\delta(a,f)),$$

akkor $\alpha = \beta$, mivel $\delta(a,f)$ is generátoreleme A-nak. Tehát minden $\alpha(a)$-t $(\alpha \in E(A))$ $\hat{A}$ különböző eleme tartalmazza. Nyilvánvaló, hogy az $\alpha \to \alpha(a)$ $(\alpha \in E(A))$ leképezés egy-egyértelmü. Q.e.d.

Az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata $E(A)$ endomorfizmusfélcsoportjának részfélcsoportjai segitségével további relációk vezethetők be az A állapothalmazon. Legyen L $E(A)$ tetszőleges részfélcsoportja. Az L által indukált $\mathcal{L}$ relációt a következőképpen értelmezzük:

$$(16) \qquad a \mathcal{L} b \quad (a,b \in A) \Longleftrightarrow \underset{\alpha \in L}{\exists} \alpha\,[\alpha(a) = b].$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}$ tranzitiv δ-reláció. Ha L monoid, akkor $\mathcal{L}$ reflexiv, ha pedig L csoport, akkor $\mathcal{L}$ szimmetrikus.

7.Lemma. Az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata $\mathcal{L}$ relációja akkor és csak akkor kongruencia, ha L a $G(A)$ automorfizmuscsoport részcsoportja.

Bizonyitás. Szükségesség. Legyen $\mathcal{L}$ az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata kongruenciarelációja és a_0 A egy generátoreleme. $a_0 \mathcal{L} a_0$, azaz van olyan $\alpha \in L$, hogy $\alpha(a_0) = a_0$, amiből könnyen belátható, hogy $\alpha = \iota$ / ι A identikus leképezése/, tehát $\iota \in L$. Bármely $\alpha(\in L)$-ra $a_0 \mathcal{L} \alpha(a_0)$ teljesül. Mivel $\mathcal{L}$ szimmetrikus $\alpha(a_0) \mathcal{L} a_0$, azaz van olyan $\beta \in L$, hogy $\beta\alpha(a_0) = a_0$,

tehát $\beta\alpha = \varepsilon$, amiből már következik, hogy L csoport. Az is látható, hogy L $G(A)$ részcsoportja.
A lemma elegendőségének bizonyitása nyilvánvaló.

A következő tételt A.C. FLECK [13] erősen összefüggő kváziautomatákra mondta ki, de bizonyitása érvényes ciklikus kváziautomatákra is.

11. Tétel. *Az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata $G(A)$ automorfizmuscsoportjának bármely N normálosztójára a $G(A)/N$ faktorcsoport izomorf $G(A/\nu)$ egy részcsoportjával.*

Bizonyitás. Megjegyezzük, hogy ν (16) tipusu reláció és $A/\nu=(A/\nu,F,\delta_\nu)$ A ν által indukált faktorkvázi-automatája.
Legyen a_ν az ν által indukált osztályozás $a(\in A)$ által reprezentált osztálya és ψ_α $(\alpha\in G(A))$ (15) tipusu leképezés, azaz $\psi_\alpha(a_\nu)=\alpha(a)_\nu$. Először belátjuk, hogy ψ_α $(\alpha\in G(A))$ jól-definiált. Ha $a_\nu=b_\nu\ (\in A/\nu)$, akkor van olyan $\beta\ (\in N)$, hogy $\beta(a)=b$ Igy, ha $\gamma=\alpha\beta\alpha^{-1}$, akkor $\gamma(\alpha(a))=\alpha(b)$, azaz $\alpha(a)_\nu=\alpha(b)_\nu$. Most megmutatjuk, hogy ψ_α egy-egyértelmü leképezés. Tegyük fel, hogy $\psi_\alpha(a_\nu)=\psi_\alpha(b_\nu)$ $(a,b\in A)$, akkor létezik olyan $\beta\in N$, hogy $\beta(\alpha(a))=\alpha(b)$, amiből $\alpha^{-1}\beta\alpha(a)=b$ következik. Mivel N normálosztó, ez azt jelenti, hogy $a_\nu=b_\nu$. ψ_α A/ν önmagára való leképezése, mert bármely $b_\nu\ (\in A/\nu)$-hez van olyan $a_\nu\ (\in A/\nu)$, hogy $\psi_\alpha(a_\nu)=b_\nu$, tudniillik $a_\nu=\alpha^{-1}(b)_\nu$.

$$\psi_\alpha(\delta_\nu(a_\nu,f))=\psi_\alpha(\delta(a,f)_\nu)=\alpha(\delta(a,f))_\nu=$$
$$=\delta(\alpha(a),f)_\nu=\delta_\nu(\alpha(a)_\nu,f)=\delta_\nu(\psi_\alpha(a_\nu),f)$$

$(a_\nu\in A/\nu\ ,f\in F)$, tehát ψ_α $(\alpha\in G(A))$ A/ν automorfizmusa.
A $\varphi(N\alpha)=\psi_\alpha$ $(\alpha\in G(A))$ leképezés $G(A)/N$ -nek $G(A/\nu)$-be

való leképezése. Tegyük fel, hogy $N\alpha = N\beta$ $(\alpha, \beta \in G(A))$, akkor $\beta = \alpha'\alpha$, ahol $\alpha' \in N$, így bármely $a (\in A)$-ra $\alpha'\alpha(a) = \beta(a)$, azaz $\alpha(a)_W = \beta(a)_W$, ami azt jelenti, hogy $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$. Ezzel megmutattuk, hogy φ egyértelmű. Legyen most $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$ és a_0 A egy generátoreleme, akkor $\varphi_\alpha(a_{0W}) = \varphi_\beta(a_{0W})$. Ebből következik, hogy van olyan $\gamma \in N$, amelyre $\gamma(\alpha(a_0)) = \beta(a_0)$ teljesül, így $\gamma\alpha = \beta$, ami azt jelenti, hogy $N\alpha = N\beta$. Tehát φ $G(A)/N$ $G(A/W)$-be való egy-egyértelmű leképezése.

$$\varphi_{\alpha\beta}(a_W) = \alpha\beta(a)_W = \alpha(\beta(a))_W =$$

$$= \varphi_\alpha(\beta(a)_W) = \varphi_\alpha(\varphi_\beta(a_W)) = \varphi_\alpha\varphi_\beta(a_W) ,$$

$(\alpha, \beta \in G(A)$, $a_W \in A/W)$, azaz $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha\varphi_\beta$, tehát φ $G(A)/N$ $G(A/W)$-be való izomorf leképezése. Q.e.d.

Ciklikus illetve erősen összefüggő kváziautomatákkal kapcsolatos további eredmények találhatók például R.H.OEHMKE [19], A.C.FLECK [11] , [13] , G.P.WEEG [23] , [24], [25] , G.FEICHTINGER [10] és BABCSÁNYI I. [1] munkákban.

ÁLLAPOT-FÜGGETLEN, REVERZIBILIS ÁLLAPOT-FÜGGETLEN ÉS CIKLIKUS ÁLLAPOT-FÜGGETLEN KVÁZIAUTOMATÁK

Legyen $A=(A,F,\delta)$ tetszőleges kvázi automata. Ha bármely $a,b(\in A)$ állapot-párra $\varrho_{A,a}=\varrho_{A,b}$ teljesül /l. a (9) relációt/, akkor az A kvázi automatát <u>állapot-függetlennek</u> nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben minden $a(\in A)$-ra $\varrho_{A,a}=\varrho_A$. Az A -t <u>csoport-típusúnak</u> mondjuk, ha állapot-független és karakterisztikus félcsoportja csoport. Ha A erősen összefüggő és csoport-típusú, akkor <u>félperfektnek</u> nevezzük. Végül az erősen összefüggő kommutatív kvázi automatát <u>perfektnek</u> hívjuk. A.C.PLECK [12] egyik tételéből következik, hogy minden perfekt kvázi automata olyan félperfekt kvázi automata, amelynek karakterisztikus félcsoportja Ábel-csoport. Könnyű belátni másfelől, hogy ha az A félperfekt kvázi automata karakterisztikus félcsoportja Ábel-csoport, akkor A perfekt.

A következő lemma egy elegendő feltételt ad arra, hogy egy kvázi automata mikor állapot-független.

<u>8.Lemma</u>. /CH.A.TRAUTH [22] / <u>Ha az</u> $A=(A,F,\delta)$ <u>kvázi automata endomorfizmus-félcsoportja tranzitiv, akkor</u> A <u>állapot-független</u>.

<u>Bizonyítás</u>. Az A kvázi automata $E(A)$ endomorfizmus-félcsoportját <u>tranzitivnak</u> nevezzük, ha bármely $a,b(\in A)$ állapot-párhoz van olyan $\alpha(\in E(A))$, hogy $\alpha(a)=b$.
Legyen $\delta(a,f)=\delta(a,g)$ $(a\in A;\ f,g\in F)$. Az előzőek szerint bármely $b(\in A)$ állapothoz van olyan $\alpha(\in E(A))$, hogy $\alpha(a)=b$. Így

$$\delta(b,f) = \delta(\alpha(a),f) = \alpha(\delta(a,f)) =$$
$$= \alpha(\delta(a,g)) = \delta(\alpha(a),g) = \delta(b,g) \quad ,$$

ami azt jelenti, hogy $\mathcal{A}$ állapot-független. Q.e.d.

9.Lemma. *Legyen az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ kváziautomata állapot-független. Ha vannak olyan $a(\in A)$ és $e(\in F)$, hogy $\delta(a,e)=a$, akkor $\overline{e}$ $\mathcal{A}$ karakterisztikus félcsoportjának balegységeleme, és $\overline{\mathcal{A}}$ karakterisztikus félcsoportja monoid.*

Bizonyítás. Legyenek $a(\in A)$ és $e(\in F)$ olyanok, amelyekre $\delta(a,e)=a$ teljesül. Ebből következik, hogy

$$\bigwedge_{f\in F} f\,[\,\delta(a,ef)=\delta(a,f)\,] \quad .$$

Mivel $\mathcal{A}$ állapot-független, ezért

$$\bigwedge_{b\in A}\bigwedge_{f\in F}(b,f)\,[\delta(b,ef)=\delta(b,f)] \quad ,$$

azaz $\overline{e}\,\overline{f}=\overline{f}$, s így $\overline{e}$ $\overline{F}$ balegységeleme. Továbbá

$$\bigwedge_{b\in A} b\,[\,\overline{b}=\overline{\delta(b,e)}=\overline{\delta}(\overline{b},e)\,] \quad .$$

Ebből viszont könnyen belátható, hogy $\overline{\mathcal{A}}$ karakterisztikus félcsoportja egységelemes. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy ha az állapot-független $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ kváziautomata karakterisztikus félcsoportja balegységelemes, akkor $\overline{\mathcal{A}}$ karakterisztikus félcsoportja egységelemes. $\overline{\mathcal{A}}$ karakterisztikus félcsoportjának egységeleme $\mathcal{A}$ karakterisztikus félcsoportja balegységelemeinek egyesítése.

A 9.Lemma alapján nyilvánvalóan igaz a

3.Következmény. *Ha az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ állapot-független kváziautomata miniméliasan generálható, akkor $\mathcal{A}$ karakterisztikus félcsoportja balegységelemes és $\overline{\mathcal{A}}$ karakterisztikus félcsoportja monoid.*

Könnyen belátható a

10.Lemma. *Állapot-független kváziautomata karakterisztikus félcsoportja megegyezik bármely A-részkváziautomatájának karakterisztikus félcsoportjával.*

12.Tétel. *Bármely reverzibilis állapot-független kváziautomata izomorf erősen összefüggő állapot-független kváziautomaták direkt összegére bomlik.*

Bizonyítás. Legyen G az $A=(A,F,\delta)$ reverzibilis állapot-független kváziautomata egy minimális generátorrendszere. A 3.Tétel szerint A az $A_{a_0}(a_0\in G)$ erősen összefüggő kváziautomaták direkt összegére bomlik. Mivel állapot-független kváziautomata minden részkváziautomatája is állapot-független, ezért az $A_{a_0}(a_0\in G)$ kváziautomaták állapot-függetlenek. Definiáljuk a $\varphi_{a_0,b_0}: A_{a_0}\longrightarrow A_{b_0}$ $(a_0,b_0\in G)$ leképezést a következő módon:

(17) $$\varphi_{a_0,b_0}(\delta(a_0,f))=\delta(b_0,f)\quad(f\in F).$$

A állapot-függetlenségéből az is következik, hogy φ_{a_0,b_0} A_{a_0} A_{b_0}-re való egy-egyértelmű leképezése. Legyen $a\in A_{a_0}$ és $g(\in F)$, akkor van olyan $f(\in F)$, hogy $a=\delta(a_0,f)$, így

$$\varphi_{a_0,b_0}(\delta(a,g))=\varphi_{a_0,b_0}(\delta(\delta(a_0,f),g))=\varphi_{a_0,b_0}(\delta(a_0,fg))=$$
$$=\delta(b_0,fg)=\delta(\delta(b_0,f),g)=\delta(\varphi_{a_0,b_0}(\delta(a_0,f)),g)=\delta(\varphi_{a_0,b_0}(a),g),$$

azaz φ_{a_0,b_0} izomorfizmus. Q.e.d.

Ezek szerint, ha az $A=(A,F,\delta)$ reverzibilis állapot-független kváziautomata A-véges, akkor $|A|=|G|\cdot|A_{a_0}|$, $(a_0\in G)$.

11.Lemma./CH.A.TRAUTH [22] / *Erősen összefüggő állapot-független kváziautomata akkor és csak akkor félperfekt, ha karakterisztikus félcsoportja egységelemes.*

Bizonyítás. Legyen $\bar{e}$ az $A=(A,F,\delta)$ erősen összefüggő állapot-független kváziautomata $\overline{F}$ karakterisztikus

kus félcsoportjának egységeleme, akkor az 1.Lemma szerint

$$\bigwedge_{a\in A} a\,[\,\delta(a,e)=a\,]\ .$$

Minden $f(\in F)$ -hez van olyan $g(\in F)$, hogy

$$\delta(a,fg)=\delta(a,e)\qquad (a\in A)\ .$$

Mivel $\mathbb{A}$ állapot-független, ezért $\overline{f}\,\overline{g}=\overline{e}$. Könnyen belátható az is, hogy $\overline{g}\,\overline{f}=\overline{e}$, azaz $\overline{F}$ csoport, tehát $\mathbb{A}$ félperfekt.

Fordítva, ha $\mathbb{A}$ félperfekt, akkor $\overline{F}$ nyilvánvalóan egységelemes, hiszen definició szerint csoport. Q.e.d.

4.Következmény. Reverzibilis állapot-független kváziautomata akkor és csak akkor generálható csoport-tipusu, ha karakteriasztikus félcsoportja egységelemes.

12.Lemma./BABCSÁNYI I.[3] / Ha az $\mathbb{A}=(A,F,\delta)$ kváziautomata állapot-független, akkor az $\overline{\mathbb{A}}=(\overline{A},F,\overline{\delta})$ kváziautomata is állapot-független.

Bizonyitás. Legyenek $\bar{a}(\in\overline{A})$ és $f,g\,(\in F)$ olyanok, hogy

$$\overline{\delta(a,f)}=\overline{\delta}(\bar{a},f)=\overline{\delta}(\bar{a},g)=\overline{\delta(a,f)}\ .$$

Akkor $\bigwedge_{h\in F} h\,[\,\delta(a,fh)=\delta(a,gh)\,]$.

Mivel $\mathbb{A}$ állapot-független, ezért tetszőleges $b(\in A)$ állapotra

$$\bigwedge_{h\in F} h\,[\,\delta(b,fh)=\delta(b,gh)\,]$$

teljesül, azaz

$$\overline{\delta}(\overline{b},f)=\overline{\delta(b,f)}=\overline{\delta(b,g)}=\overline{\delta}(\overline{b},g)\ .$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\overline{\mathbb{A}}$ is állapot-független.

5.Következmény. Ha $\mathbb{A}$ reverzibilis állapot-független kváziautomata, akkor $\overline{\mathbb{A}}$ generálható csoport-tipusu, azaz izomorf félperfekt kváziautomaták direkt összege.

Az 5.Következmény bizonyitása a 12.Lemma, a 3. és 4.Következmény, a 10. és 11.Lemma, valamint a 12.Tétel alapján nyilvánvaló. A bizonyitásban felhasználjuk még, hogy erősen összefüggő kváziautomata homomorf képe is erősen összefüggő.

13.Lemma. Ha az $A=(A,F,\delta)$ állapot-független kvázi-automata reverzibilis és $\mathcal{B}$ $\overline{F}$ halegységelemeinek halmaza, akkor

$$\bigwedge_{a\in A} a\,[\,\overline{a}=\langle \delta(a,e)\mid \overline{e}\in\mathcal{B}\rangle\,]$$

és bármely $a,b\,(\in A)$ állapot-párra $|\overline{a}|=|\overline{b}|$ teljesül.

Bizonyitás. Ha $\overline{e}\in\mathcal{B}$, akkor nyilvánvaló, hogy $\delta(a,e)\in\overline{a}$. Legyen most $\overline{a}=\overline{b}$ $(a,b\in A)$, azaz

$$\bigwedge_{f\in F} f\,[\,\delta(a,f)=\delta(b,f)\,].$$

Válaszuk ki F egy g elemét, akkor g-re is fennáll, hogy $\delta(a,g)=\delta(b,g)$. Mivel A reverzibilis, ezért van olyan $h\,(\in F)$, hogy $\delta(a,gh)=\delta(b,gh)=b$. Tehát

$$\bigwedge_{f\in F} f\,[\,\delta(a,f)=\delta(a,ghf)\,],$$

azaz $\overline{gh}$ $\overline{F}$ halegységeleme.

$$\overline{e}_1=\overline{e}_2\ (\overline{e}_1,\overline{e}_2\in\mathcal{B}) \Longleftrightarrow \bigvee_{a\in A} a\,[\,\delta(a,e_1)=\delta(a,e_2)\,],$$

mivel A állapot-független. Ez azt jelenti, hogy bármely $a,b\,(\in A)$ pár esetén $|\overline{a}|=|\overline{b}|$. Q.e.d.

6.Következmény. Ha az $A=(A,F,\delta)$ reverzibilis állapot-független kváziautomata A-véges és van olyan $a\,(\in A)$, amelyre $|A_a|$ primszám, akkor A karakterisztikus félcsoportja csoport vagy minden eleme halegységelem.

Bizonyitás. A 13.Lemma bizonyitásából látható, hogy minden $a\,(\in A)$-ra $|\overline{a}|$ osztója $|A_a|$-nak. Ha $|A_a|$ primszám, akkor $|\overline{a}|=1$ vagy $|\overline{a}|=|A_a|$. Ha $|\overline{a}|=1$, akkor szin-

tén a 13.Lemma szerint minden $b\,(\in A)$-re $|\overline{b}| = 1$. Ebből már adódik, hogy $\overline{F}$ egységelemes. A 4.Következmény szerint A generálható csoport-tipusu kváziautomata, ami azt jelenti, hogy $\overline{F}$ csoport. Ha $|\overline{a}| = |A_a|$, akkor bármely $b\,(\in A_a)$ állapotra

$$\bigwedge_{f\in F} f\,[\,\delta(a,f) = \delta(b,f)\,]$$

teljesül. Mivel minden $h\,(\in F)$-ra $\delta(a,h)\in A_a$, ezért

$$\bigwedge_{f\in F} f\,[\,\delta(a,f) = \delta(a,hf)\,],$$

azaz

$$\bigwedge_{f\in F} f\,[\,\overline{f} = \overline{h}\,\overline{f}\,],$$

tehát $\overline{h}$ $\overline{F}$ balegységeleme. Q.e.d.

A 12.Tétel szerint minden reverzibilis állapot-független kváziautomata izomorf, erősen összefüggő állapot-független kváziautomaták direkt összegére bomlik. Megmutatjuk, hogy a direkt összeg tagjainak automorfizmusai és egymásra való izomorf leképezései segitségével megadhatók a direkt összeg endomorfizmusai. Ezért először az erősen összefüggő állapot-független kváziautomaták endomorfizmusait kell megadni. Most általánosabban a ciklikus állapot-független kváziautomaták endomorfizmusait konstruáljuk meg. Ebből speciális esetként adódnak az erősen összefüggő állapot-független kváziautomaták endomorfizmusai.

13.Tétel./BARCSÁNYI I.[3] / Az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus állapot-független kváziautomata minden endomorfizmusa egy-egyértelmü, továbbá $E(A)\cong E(\overline{A})$ és $\Theta(E(\overline{A})) = |\overline{A}|$.

Bizonyitás. Legyen a_0 A egy generátorelem és $h\,(\in F)$. Definiáljuk az $\alpha_{a_0,h}: A \longrightarrow A$ leképezést a következő módon:

$$(18)\qquad \alpha_{a_0,h}(\delta(a_0,f)) = \delta(a_0,hf) \quad (f\in F)\,.$$

Mivel A ciklikus állapot-független kváziautomata, ezért

$\alpha_{a_0,h}$ $(h\in F)$ A önmagába való egy-egyértelmű leképezése. Most megmutatjuk, hogy $\alpha_{a_0,h}$ A endomorfizmusa:

$$\alpha_{a_0,h}(\delta(c,g))=\alpha_{a_0,h}(\delta(\delta(a_0,k),g))=\alpha_{a_0,h}(\delta(a_0,kg))=\delta(a_0,hkg)=$$
$$=\delta(\delta(a_0,hk),g)=\delta(\alpha_{a_0,h}(\delta(a_0,k)),g)=\delta(\alpha_{a_0,h}(c),g)$$

$(c=\delta(a_0,k)\in A;\ k,g\in F)$. Legyen $\alpha\in E(A)$, akkor van olyan $h(\in F)$, hogy $\alpha(a_0)=\delta(a_0,h)$, így

$$\alpha_{a_0,h}(\delta(a_0,f))=\delta(a_0,hf)=\delta(\delta(a_0,h),f)=$$
$$=\delta(\alpha(a_0),f)=\alpha(\delta(a_0,f)) \qquad (f\in F),$$

azaz $\alpha=\alpha_{a_0,h}$. Tehát A minden endomorfizmusa (18) típusu. Mivel ciklikus kváziautomata homomorf képe is ciklikus, ezért a 12.Lemmát is felhasználva kapjuk, hogy $\overline{A}$ is ciklikus állapot-független kváziautomata. Továbbá $\overline{a}_0$ $\overline{A}$ egy generátoreleme. Ezek után nyilvánvaló, hogy az

$$\overline{\alpha}_{a_0,h}(\overline{\delta}(\overline{a}_0,f))=\overline{\delta}(\overline{a}_0,hf) \qquad (f\in F)$$

minden $h(\in F)$-ra $\overline{A}$ endomorfizmusa, és $\overline{A}$ minden endomorfizmusa ilyen alaku. Ezenkivül

$$\alpha_{a_0,h}=\alpha_{a_0,k}\Longrightarrow\bigwedge_{f\in F}f\,[\delta(a_0,hf)=\delta(a_0,kf)]\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\overline{\delta}(\overline{a}_0,h)=\overline{\delta}(\overline{a}_0,k)\Longrightarrow\overline{\alpha}_{a_0,h}=\overline{\alpha}_{a_0,k}\quad(h,k\in F).$$

Fordítva, ha $\overline{\alpha}_{a_0,h}=\overline{\alpha}_{a_0,k}$ $(h,k\in F)$, akkor

$$\bigwedge_{f\in F}f\,[\,\overline{\delta}(\overline{a}_0,hf)=\overline{\delta}(\overline{a}_0,kf)\,].$$

A 3.Következmény szerint $\overline{A}$ karakterisztikus félcsoportja egységelemes, így van olyan $e(\in F)$, hogy

$$\bigwedge_{\overline{a}\in\overline{A}}\overline{a}\,[\,\overline{\delta}(\overline{a},e)=\overline{a}\,].$$

Az előzőek szerint akkor

$$\overline{\delta(a_0,h)}=\overline{\delta}(\overline{\delta}(\overline{a}_0,h),e)=\overline{\delta}(\overline{\delta(a_0,k)},e)=\overline{\delta(a_0,k)},$$

igy $\bigwedge_{f\in F}f\,[\,\delta(\delta(a_0,h),f)=\delta(\delta(a_0,k),f)\,]$,

amiből már látható, hogy $\alpha_{a_0,h}=\alpha_{a_0,k}$. Tehát a

$$\psi:\ \alpha_{a_0,h}\longrightarrow\overline{\alpha}_{a_0,h}$$

leképezés $E(A)$ -nak $E(\overline{A})$ -ra való egy-egyértelmű leképezése. Legyenek $a=\delta(a_0,f)\in A$ és $\alpha_{a_0,h}, \alpha_{a_0,k}\in E(A)$, akkor

$$\alpha_{a_0,h}\alpha_{a_0,k}(a)=\alpha_{a_0,h}\alpha_{a_0,k}(\delta(a_0,f))=\alpha_{a_0,h}(\delta(a_0,kf))=$$
$$=\delta(a_0,hkf)=\alpha_{a_0,hk}(\delta(a_0,f))=\alpha_{a_0,hk}(a).$$

Így $\alpha_{a_0,h}\alpha_{a_0,k}=\alpha_{a_0,hk}$, $h,k\in F$. Hasonlóan látható be, hogy $\overline{\alpha}_{a_0,h}\overline{\alpha}_{a_0,k}=\overline{\alpha}_{a_0,hk}$. Tehát

$$\Psi(\alpha_{a_0,h}\alpha_{a_0,k})=\Psi(\alpha_{a_0,hk})=\overline{\alpha}_{a_0,hk}=$$
$$=\overline{\alpha}_{a_0,h}\overline{\alpha}_{a_0,k}=\Psi(\alpha_{a_0,h})\Psi(\alpha_{a_0,k}),$$

azaz $E(A)\cong E(\overline{A})$. Az is látható, hogy $\vartheta(E(\overline{A}))=|\overline{A}|$, ugyanis a $\overline{\delta(a_0,h)}\longrightarrow\overline{\alpha}_{a_0,h}$ megfeleltetés egy-egyértelmű. Q.e.d.

7.Következmény. *Ha az* $A=(A,F,\delta)$ *állapot-független kvázi automata ciklikus, akkor* $E(A)$ *izomorf* $\overline{A}$ *karakterisztikus félcsoportjával.*

Bizonyítás. Jelöljük $\overline{A}$ karakterisztikus félcsoportját $\overline{F}$ -sal és $\overline{F}$ $f(\in F)$ által reprezentált elemét $\overline{f}$ -sal. Legyen $\overline{f}=\overline{g}$ $(f,g\in F)$, akkor $\overline{\delta}(\overline{a}_0,f)=\overline{\delta}(\overline{a}_0,g)$, azaz

$$\bigwedge_{l\in F} l[\,\delta(a_0,fl)=\delta(a_0,gl)\,],$$

tehát $\alpha_{a_0,f}=\alpha_{a_0,g}$. Hasonlóan látható be, hogy ha $\alpha_{a_0,f}=\alpha_{a_0,g}$ $(f,g\in F)$, akkor $\overline{f}=\overline{g}$. Ez azt jelenti, hogy a $\Psi:\alpha_{a_0,f}\longrightarrow\overline{f}$ $E(A)$-nak $\overline{F}$ -ra való egy-egyértelmű leképezése. Mivel $\alpha_{a_0,f}\alpha_{a_0,g}=\alpha_{a_0,fg}$, ezért Ψ izomorfizmus. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy a $\overline{h}\longrightarrow\overline{\overline{h}}$ $(\overline{h}\in\overline{F})$ leképezés homomorfizmus, mivel $\overline{h}\subseteq\overline{\overline{h}}$, ezért ciklikus állapot-független kvázi automata endomorfizmus-félcsoportja a kvázi automata karakterisztikus félcsoportjának homomorf képe.

8.Következmény./BABCSÁNYI I.[3]/ *Bármely* $A=(A,F,\delta)$

ciklikus kvázi automata esetén az összes (18) tipusu leképezés akkor és csak akkor endomorfizmusa $\mathcal{A}$ -nak, ha a ϱ_{A,a_0} reláció /1.(9) / kongruencia.

Bizonyitás. Legyen a_0 az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ ciklikus kvázi automata generátoreleme, továbbá az összes (18) tipusu leképezés $\mathcal{A}$ endomorfizmusa. Igy tetszőleges $h\,(\in F)$ elemre $\alpha_{a_0,h} \in E(\mathcal{A})$. Ha $f \equiv g\ (\varrho_{A,a_0})$ $(f,g\in F)$, azaz $\delta(a_0,f)=\delta(a_0,g)$, akkor

$$\delta(a_0,hf)=\alpha_{a_0,h}(\delta(a_0,f))=\alpha_{a_0,h}(\delta(a_0,g))=\delta(a_0,hg),$$

ami azt jelenti, hogy $hf \equiv hg\ (\varrho_{A,a_0})$, tehát ϱ_{A,a_0} kongruencia.

Forditva, ha ϱ_{A,a_0} kongruencia, akkor könnyen belátható, hogy minden $h\,(\in F)$-ra a (18) leképezés egyértelmü. A 13.Tétel bizonyitása során láttuk, hogy ezek a leképezések müvelettartók. Q.e.d.

Az nyilvánvaló, hogy ciklikus kvázi automata minden endomorfizmusa (18) tipusu.

R.H.OEHMKE [19] bebizonyitotta, hogy minden ciklikus kvázi automatára $\mathfrak{o}(E(\mathcal{A})) \leqq |A|$. A következő tétel ennél jobb becslést ad.

14.Tétel./BARCSÁNYI I.[3]/ Minden $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ ciklikus kvázi automatára $\mathfrak{o}(E(\mathcal{A})) \leqq |\overline{A}|$ teljesül.

Bizonyitás. Legyen a_0 $\mathcal{A}$ egy generátoreleme. Nem nehéz számolással belátható, hogy az $\alpha \longrightarrow \alpha(a_0)$ $(\alpha \in E(\mathcal{A}))$ hozzárendelés egy-egyértelmü. Ha $\alpha,\beta\,(\in E(\mathcal{A}))$ olyanok, amelyekre $\overline{\alpha(a_0)}=\overline{\beta(a_0)}$ teljesül, akkor

$$\bigwedge_{f\in F} f\,[\alpha(\delta(a_0,f))=\delta(\alpha(a_0),f)=\delta(\beta(a_0),f)=\beta(\delta(a_0,f))],$$

azaz $\alpha=\beta$. Tehát, ha $\alpha\neq\beta$, akkor $\overline{\alpha(a_0)}\neq\overline{\beta(a_0)}$, ami éppen azt jelenti, hogy $\mathfrak{o}(E(\mathcal{A})) \leqq |\overline{A}|$.

Jelöljük az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata generátorelemeinek halmazát G -vel. Bebizonyítható, hogy G $\overline{A}$ -beli osztályok egyesítése. Legyen ezeknek az osztályoknak a halmaza $\overline{G}$.

15.Tétel./BABCSÁNYI I.[3]/ Ha az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata állapot-független, akkor

$$\alpha_{a_0,q} \in G(A) \Longleftrightarrow \delta(a_0,q) \in G ,$$

igy $\Theta(G(A)) = |\overline{G}|$.

Bizonyitás. Ha $\alpha_{a_0,q}$ $(q \in F)$ automorfizmus, akkor bármely $b(\in A)$ állapothoz van olyan $f \in F$, hogy $\alpha_{a_0,q}(\delta(a_0,f)) = b$, azaz $b = \delta(a_0,qf) = \delta(\delta(a_0,q),f)$. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy $\delta(a_0,q) \in G$. Tegyük fel most, hogy $\delta(a_0,q) \in G$, akkor $\alpha_{a_0,q}$ A önmagára való leképezése. Igy a 13.Tétel szerint $\alpha_{a_0,q} \in G(A)$. Szintén a 13.Tétel alapján kapjuk, hogy $\Theta(G(A)) = |\overline{G}|$. Q.e.d.

Ha az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata erősen összefüggő, akkor minden endomorfizmusa az A állapothalmazt önmagára képezi le. Ez azért van, mert erősen összefüggő kvázi-automatának nincs valódi A-részkváziautomatája. / l. A.C. FLECK [11] / Ha még A A-véges is, akkor minden endomorfizmusa automorfizmus. A 15.Tételből azonnal következik a

9.Következmény./BABCSÁNYI I.[3]/ Erősen összefüggő állapot-független kvázíautomata minden endomorfizmusa automorfizmus.

A 6.Lemmát felhasználva adódik a

10.Következmény./BABCSÁNYI I.[3]/ Ha az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus állapot-független kvázíautomata karakterisztikus félcsoportja monoid, akkor $\Theta(G(A)) = |G|$.

16.Tétel./BABOSÁNYI I.[3]/ Az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus állapot-független kvázi-automata $E(A)$ endomorfizmus-félcsoportja izomorf az $\overline{F}$ karakterisztikus félcsoport egy részfélcsoportjával.

Bizonyítás. Legyen $\overline{F}'$ az olyan $\overline{f}\,(\in\overline{F})$ osztályok halmaza, amelyekre $\delta(a_0,f)=\alpha(a_0)$ $(f\in\overline{f})$ teljesül valamilyen $\alpha\,(\in E(A))$-ra, ahol a_0 A egy rögzített generátoreleme. Belátható, hogy $\overline{F}'$ $\overline{F}$ részfélcsoportja. Definiáljuk a $\psi:\overline{F}'\longrightarrow E(A)$ leképezést a következő módon:

$$\psi(\overline{f})=\alpha \quad , \text{ ha } \quad \delta(a_0,f)=\alpha(a_0)$$

Könnyen belátható, hogy ψ $\overline{F}'$ $E(A)$-ra való izomorf leképezése.

17.Tétel./BABOSÁNYI I.[3]/ Ha az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kvázi-automata állapot-független, akkor az

$\overline{E}(A)=(E(A),F,\delta')$ kvázi-automata jól-definiált, ahol

$$\delta'(\alpha_{a_0,k},f)=\alpha_{a_0,kf} \quad (f\in F)$$

és $\overline{E}(A)\cong\overline{A}$.

Bizonyítás. Mivel

$$\alpha_{a_0,k}=\alpha_{a_0,l}\Longleftrightarrow\bigwedge_{f\in F}f\,[\delta(a_0,kf)=\delta(a_0,lf)]\,,$$

ezért

$$\alpha_{a_0,k}=\alpha_{a_0,l}\Longrightarrow\bigwedge_{f\in F}f\,[\alpha_{a_0,kf}=\alpha_{a_0,lf}]$$

Továbbá $\delta'(\alpha_{a_0,k},fg)=\alpha_{a_0,kfg}=\delta'(\alpha_{a_0,kf},g)=\delta'(\delta'(\alpha_{a_0,k},f),g)$ / $k,f,g\in F$, a_0 A egy generátoreleme/, azaz $\overline{E}(A)$ jól-definiált.

A $\psi:\alpha_{a_0,k}\longrightarrow\overline{\delta(a_0,k)}$ leképezés $E(A)$-nak $\overline{A}$-ra való egy-egyértelmű leképezése. Végül megmutatjuk, hogy ψ homomorfizmus:

$$\psi(\delta'(\alpha_{a_0,k},f))=\psi(\alpha_{a_0,kf})=\overline{\delta(a_0,kf)}=$$

$$= \overline{\delta(\delta(a_0,k),f)} = \overline{\delta}\,(\overline{\delta(a_0,k)},f) = \overline{\delta}\,(\psi(\alpha_{a_0,k}),f)$$

$(f \in F)$. Q.e.d.

Egy S félcsoport λ transzformációját S **baltranszlációjának** nevezzük, ha $\lambda(s\cdot t) = \lambda(s)\cdot t \quad (s,t \in S)$ teljesül. A félcsoportok elméletéből ismeretes, hogy bármely monoid izomorf baltranszlációinak félcsoportjával.

18.Tétel./BABCSÁNYI I. [3]/ **Ha az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata állapot-független, akkor $E(E(A))$ az $E(A)$ endomorfizmus-félcsoport baltranszlációinak félcsoportja és $E(E(A)) \cong E(A)$.**

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $E(E(A))$ az $E(A)$ kváziautomata endomorfizmus-félcsoportját jelöli. Legyenek $\alpha_{a_0,k}$, $\alpha_{a_0,k} (\in E(A))$ tetszőlegesek és $\mu \in E(E(A))$. Akkor

$$\mu(\alpha_{a_0,k}\alpha_{a_0,k}) = \mu(\alpha_{a_0,kk}) = \mu(\delta'(\alpha_{a_0,k},k)) = \delta'(\mu(\alpha_{a_0,k}),k) =$$
$$= \delta'(\alpha_{a_0,g},k) = \alpha_{a_0,gk} = \alpha_{a_0,g}\alpha_{a_0,k} = \mu(\alpha_{a_0,k})\alpha_{a_0,k},$$

ahol $k,k,g \in F$ és $\mu(\alpha_{a_0,k}) = \alpha_{a_0,g}$, azaz μ $E(A)$ baltranszlációja.

Legyen most μ $E(A)$ baltranszlációja. Akkor

$$\mu(\delta'(\alpha_{a_0,k},f)) = \mu(\alpha_{a_0,kf}) = \mu(\alpha_{a_0,k}\alpha_{a_0,f}) = \mu(\alpha_{a_0,k})\alpha_{a_0,f} =$$
$$= \alpha_{a_0,g}\alpha_{a_0,f} = \alpha_{a_0,gf} = \delta'(\alpha_{a_0,g},f) = \delta'(\mu(\alpha_{a_0,k}),f),$$

ahol $f,k \in F$ és $\mu(\alpha_{a_0,k}) = \alpha_{a_0,g}$, azaz μ $E(A)$ endomorfizmusa. Mivel $E(A)$ monoid, ezért izomorf baltranszlációinak félcsoportjával. Q.e.d.

19.Tétel./BABCSÁNYI I. [3]/ **Ha a $B=(B,F,\delta')$ állapot-független kváziautomata az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata homomorf képe, akkor $E(A)$ homomorf módon beágyazható $E(B)$-be.**

Bizonyítás. Legyen a $\mathcal{B}=(B, F, \delta')$ állapot-független kváziautomata az $\mathcal{A}=(A, F, \delta)$ ciklikus kváziautomata homomorf képe a φ homomorfizmus mellett. Minden $\alpha\ (\in E(\mathcal{A}))$-ra definiáljuk a következő leképezést:

$$\psi_\alpha : \varphi(a) \longrightarrow \varphi(\alpha(a)) \quad (a \in A).$$

Legyen most $\varphi(a)=\varphi(b)$ $(a, b \in A)$. Vannak olyan f, $g\ (\in F)$ elemek, hogy $a=\delta(a_0, f)$ és $b=\delta(a_0, g)$, ahol a_0 $\mathcal{A}$ egy generátoreleme. Így

$$\delta'(\varphi(a_0), f) = \varphi(a) = \varphi(b) = \delta'(\varphi(a_0), g).$$

Mivel $\mathcal{B}$ állapot-független, ezért

$$\varphi(\alpha(a)) = \varphi(\alpha(\delta(a_0, f))) = \varphi(\delta(\alpha(a_0), f)) = \delta'(\varphi(\alpha(a_0)), f) =$$
$$= \delta'(\varphi(\alpha(a_0)), g) = \varphi(\delta(\alpha(a_0), g)) = \varphi(\alpha(\delta(a_0, g))) = \varphi(\alpha(b)),$$

azaz ψ_α B önmagába való egyértelmű leképezése. Minthogy

$$\psi_\alpha(\delta'(\varphi(a), f)) = \psi_\alpha(\varphi(\delta(a, f))) = \varphi(\alpha(\delta(a, f))) =$$
$$= \varphi(\delta(\alpha(a), f)) = \delta'(\varphi(\alpha(a)), f) = \delta'(\psi_\alpha(\varphi(a)), f)$$

$(a \in A;\ f \in F)$, ezért $\psi_\alpha \in E(\mathcal{B})$. Így az $\alpha \longrightarrow \psi_\alpha$ leképezés $E(\mathcal{A})$-nak $E(\mathcal{B})$-be való egyértelmű leképezése. Végül

$$\psi_{\alpha\beta}(\varphi(a)) = \varphi(\alpha\beta(a)) = \varphi(\alpha(\beta(a))) =$$
$$= \psi_\alpha(\varphi(\beta(a))) = \psi_\alpha \psi_\beta(\varphi(a)) \quad (a \in A),$$

így $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \psi_\beta$ $(\alpha, \beta \in E(\mathcal{A}))$, azaz az $\alpha \longrightarrow \psi_\alpha$ $(\alpha \in E(\mathcal{A}))$ leképezés homomorfizmus. Q.e.d.

Legyen az $\mathcal{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomata ciklikus és a_0 $\mathcal{A}$ egy generátoreleme. Definiáljuk F $F_{a_0 a}$ részhalmazát a következő módon:

$$f \in F_{a_0 a} \iff \delta(a_0, f) = a \quad (a \in A).$$

Nyilvánvaló, hogy $F_{a_0 a} \neq \emptyset$ $(a \in A)$. Legyen

$$F_{a_0} = \langle F_{a_0 a} \mid a \in A \rangle .$$

Látható, hogy $|F_{a_0}| = |A|$. Tekintsük az F_{a_0} halmaz

$$R_{a_0} = \langle F_{a_0\alpha(a_0)} \mid \alpha \in E(A) \rangle \quad \text{és}$$

$$T_{a_0} = \langle F_{a_0\alpha(a_0)} \mid \alpha \in G(A) \rangle \quad (T_{a_0} \subseteq R_{a_0})$$

részhalmazait, és definiáljuk R_{a_0} -ban a $*_{a_0}$ műveletet az

$$F_{a_0\alpha(a_0)} *_{a_0} F_{a_0\beta(a_0)} = F_{a_0\alpha\beta(a_0)} \quad (\alpha, \beta \in E(A))$$

összefüggéssel. Ez lehetséges, hiszen nyilvánvaló, hogy az

$$F_{a_0\alpha(a_0)} F_{a_0\beta(a_0)} \subseteq F_{a_0\alpha\beta(a_0)}$$

tartalmazás fennáll. Az R_{a_0} halmazt a $*_{a_0}$ művelettel együtt jelölje $R^*_{a_0}$.

14.Lemma. *Ha $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata és $a_0 \in A$ egy generátoreleme, akkor R_{a_0} a $*_{a_0}$ műveletre nézve félcsoportot alkot, amelynek $T^*_{a_0}$ részcsoportja, továbbá $R^*_{a_0} \cong E(A)$ és $T^*_{a_0} \cong G(A)$.*

A lemma bizonyítása nagyon egyszerű, azt kell megmutatni, hogy az $\alpha \longrightarrow F_{a_0\alpha(a_0)}$ $(\alpha \in E(A))$ leképezés izomorfizmus. A lemmát G.P.WEBB [24] A-véges erősen összefüggő kváziautomaták automorfizmuscsoportjaira bizonyította be eléggé hosszadalmas uton. A lemma eredményei kiterjeszthetők $E(A)$ tetszőleges részfélcsoportjára is.

Megjegyezzük, hogy a $*_{a_0}$ művelet parciális műveletként az

$$F_{a_0a} *_{a_0} F_{a_0b} = F_{a_0c} \iff \exists_{c \in A} c \left[F_{a_0a} F_{a_0b} \subseteq F_{a_0c} \right]$$

definícióval kiterjeszthető az egész F_{a_0} halmazra is. Ekkor könnyen adódik, hogy a ϱ_{A,a_0} reláció /1.(9) / akkor és csak akkor kongruencia, ha F_{a_0} a $*_{a_0}$ műveletre nézve félcsoportot alkot. Valóban, ha ϱ_{A,a_0} kongruencia, akkor $\varrho_{A,a_0} = \varrho_A$ /1.(1)/ és így $F^*_{a_0} = \overline{F}$. Megfordítva, legyen

$F_{a_0}^*$ félcsoport és $f \equiv g\,(\varrho_{A,a_0})$ $(f, g \in F)$. Akkor valamilyen $a\,(\in A)$-ra $f, g \in F_{a_0 a}$. Legyen $h\,(\in F)$ tetszőleges és $h \in F_{a_0 b}$. Akkor létezik olyan $c\,(\in A)$, hogy $F_{a_0 b} F_{a_0 a} \subseteq F_{a_0 c}$, azaz

$$\delta(a_0, hf) = c = \delta(a_0, hg) \Longrightarrow hf \equiv hg\,(\varrho_{A,a_0}),$$

tehát ϱ_{A,a_0} kongruencia. Ezzel azt is kaptuk, hogy az $A = (A, F, \delta)$ erősen összefüggő kváziautomata akkor és csak akkor állapot-független, ha F_a^* minden $a\,(\in A)$-ra félcsoport.

<u>20.Tétel.</u>/BABCSÁNYI I.[3]/ <u>Minden A-véges ciklikus állapot-független kváziautomata erősen összefüggő.</u>

<u>Bizonyítás.</u> Legyen az $A = (A, F, \delta)$ A-véges ciklikus kváziautomata állapot-független és a_0 A egy generátoreleme. Akkor bármely $a\,(\in A)$ állapotra $F_a = F_{a_0}$ és $(|F_{a_0}| =)$ $|F_a| = |A|$. Ez azt jelenti, hogy bármely $b\,(\in A)$ állapothoz van olyan $f\,(\in F)$, hogy $b = \delta(a, f)$, azaz A erősen összefüggő. Q.e.d.

A 13.Tétel szerint a (18) típusu leképezések a ciklikus állapot-független, s ezzel együtt az erősen összefüggő állapot-független kváziautomaták endomorfizmusait szolgáltatják. A következő lemmában megmutatjuk, hogy a reverzibilis állapot-független kváziautomaták endomorfizmusai hogyan adhatók meg erősen összefüggő állapot-független A-részkváziautomatáik (17) és (18) típusu leképezései segítségével.

<u>15.Lemma.</u> <u>Ha G az $A = (A, F, \delta)$ reverzibilis állapot-független kváziautomata minimális generátorrendszere, $\pi : G \to G$ és $\omega : G \to F$, akkor a</u>

$$(19) \qquad \varphi_{\pi\omega}(\delta(a_0, f)) = \delta(\pi(a_0), \omega(a_0) f) \qquad (a_0 \in G,\ f \in F)$$

<u>leképezés A endomorfizmusa, és</u>

(20) $$\varphi_{\pi\omega} = \bigcup_{a_0 \in G} \varphi_{a_0,\pi(a_0)} \alpha_{a_0,\omega(a_0)}$$

ahol $\varphi_{a_0,\pi(a_0)}$ **(17) és** $\alpha_{a_0,\omega(a_0)}$ **(18) tipusu leképezések. Továbbá** A **minden endomorfizmusa (19) tipusu.**

Bizonyitás. Mivel A reverzibilis, ezért ha

$$\delta(a_0, f) = \delta(b_0, g) \quad (f, g \in F;\ a_0, b_0 \in G),$$

akkor van olyan $h \in F$, hogy

$$b_0 = \delta(\delta(b_0, g), h) = \delta(\delta(a_0, f), h) = \delta(a_0, fh)$$

Ebből azonnal következik, hogy $a_0 = b_0$, mivel G A minimális generátorendszere /1.2.Lemma bizonyitásában/.

A állapot-független, igy $\overline{f} = \overline{g}$, tehát

$$\delta(\pi(a_0), \omega(a_0)f) = \delta(\delta(\pi(a_0), \omega(a_0)), f) = \delta(\delta(\pi(b_0), \omega(b_0)), g) = \delta(\pi(b_0), \omega(b_0)g),$$

ami azt jelenti, hogy a $\varphi_{\pi\omega}$ A önmagába való egyértelmü leképezése.

Legyenek most $a (\in A)$ és $f (\in F)$ tetszőlegesek, akkor van olyan $h (\in F)$ és $a_0 (\in G)$, hogy $a = \delta(a_0, h)$, igy

$$\varphi_{\pi\omega}(\delta(a, f)) = \varphi_{\pi\omega}(\delta(a_0, hf)) = \delta(\pi(a_0), \omega(a_0)hf) =$$
$$= \delta(\delta(\pi(a_0), \omega(a_0)h), f) = \delta(\varphi_{\pi\omega}(\delta(a_0, h)), f) = \delta(\varphi_{\pi\omega}(a), f),$$

azaz $\varphi_{\pi\omega}$ A endomorfizmusa.

Forditva, ha $\alpha \in E(A)$, $a_0 \in G$ és $\alpha(a_0) \in A_{b_0}$ $(b_0 \in G)$, akkor legyen $\pi(a_0) = b_0$ és $\omega(a_0) = h$, ahol h $F_{b_0\alpha(a_0)}$ egy rögzitett eleme. A az A_{c_0} $(c_0 \in G)$ kváziautomaták direkt összege, ezért minden $\alpha (\in E(A))$-hoz pontosan egy olyan A_{b_0} $(b_0 \in G)$ van, hogy $\alpha(a_0) \in A_{b_0}$. Ez azt jelenti, hogy a π és ω leképezések egyértelmüek. Továbbá, ha $\delta(a_0, f)$ A tetszőleges állapota, akkor

$$\alpha(\delta(a_0, f)) = \delta(\alpha(a_0), f) = \delta(\delta(\pi(a_0), \omega(a_0)), f) =$$
$$= \delta(\pi(a), \omega(a_0)f) = \varphi_{\pi\omega}(\delta(a_0, f) \quad (a_0 \in G;\ f \in F),$$

azaz $\alpha = \varphi_{\pi\omega}$. Kaptuk, hogy A minden endomorfizmusa (19) tipusu.

Legyen $\varphi_{\pi\omega} \in E(A)$ és $\delta(a_0, f)$ $(f \in F)$ A_{a_0} tetszőleges állapota, akkor

$$\varphi_{\pi\omega}(\delta(a_0, f)) = \delta(\pi(a_0), \omega(a_0)f) =$$
$$= \varphi_{a_0,\pi(a_0)}(\delta(a_0, \omega(a_0)f)) = \varphi_{a_0,\pi(a_0)} \alpha_{a_0,\omega(a_0)}(\delta(a_0, f)),$$

azaz $\varphi_{\pi\omega}|_{A_{a_0}} = \varphi_{a_0,\pi(a_0)} \alpha_{a_0,\omega(a_0)}$ $(a_0 \in G)$, ami azt jelenti, hogy $\varphi_{\pi\omega} = \bigcup_{a_0 \in G} \varphi_{a_0,\pi(a_0)} \alpha_{a_0,\omega(a_0)}$. / Emlékeztetünk arra, hogy $\varphi_{\pi\omega}|_{A_{a_0}}$ $\varphi_{\pi\omega}$ A_{a_0}-ra való restrikcióját jelenti./ Q.e.d.

21.Tétel. **Ha az $A = (A, F, \delta)$ reverzibilis kvázigépautomata állapot-független, akkor $E(A) \cong E(\bar{A})$.**

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha G A minimális generátorrendszere, akkor $\bar{G} = \langle \bar{a}_0 \mid a_0 \in G \rangle$ $\bar{A}$ minimális generátorrendszere. Az nyilvánvaló, hogy $\bar{G}$ $\bar{A}$ generátorrendszere /l. 11.oldalt/. Legyenek $\bar{a}_0, \bar{b}_0 (\in \bar{G})$ és $f (\in F)$ olyanok, hogy $\bar{b}_0 = \bar{\delta}(\bar{a}_0, f)$, azaz

$$\bigwedge_{h \in F} h\,[\delta(a_0, fh) = \delta(b_0, h)] .$$

G A minimális generátorrendszere, így ebből $a_0 = b_0$ következik. Ez azt jelenti, hogy $\bar{G}$ $\bar{A}$ minimális generátorrendszere. Ezek szerint a (19) típusú

$$\varphi_{\bar{\pi}\bar{\omega}}(\bar{\delta}(\bar{a}_0, f)) = \bar{\delta}(\bar{\pi}(\bar{a}_0), \bar{\omega}(\bar{a}_0)f) \quad (\bar{a}_0 \in \bar{G}, f \in F)$$

leképezések, ahol $\bar{\pi} : \bar{G} \to \bar{G}$ és $\bar{\omega} : \bar{G} \to F$, $\bar{A}$ endomorfizmusai, s $\bar{A}$ minden endomorfizmusa ilyen alakú. Ezek az eredmények az 5.Következmény felhasználásával azonnal adódnak 15.Lemmából.

Definiáljuk a $\Psi : E(A) \to E(\bar{A})$ leképezést a következő módon:

$$\Psi(\varphi_{\pi\omega}) = \varphi_{\bar{\pi}\bar{\omega}} \iff \bigwedge_{a_0 \in G} a_0\,[\bar{\pi}(\bar{a}_0) = \overline{\pi(a_0)} \quad \text{és} \quad \bar{\omega}(\bar{a}_0) = \omega(a_0)] .$$

Mivel az $a_0 \to \bar{a}_0$ $(a_0 \in G)$ hozzárendelés egy-egyértelmű, ezért a $\bar{\pi}$ és az $\bar{\omega}$ leképezések jól-definiáltak.

$$\varphi_{\pi\omega} = \varphi_{\pi'\omega'} (\in E(A)) \Rightarrow \bigwedge_{a_0 \in G} a_0 \left[\bigwedge_{f \in F} f\,[\delta(\pi(a_0), \omega(a_0)f) = \delta(\pi'(a_0), \omega'(a_0)f)]\right] \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \underset{a_0\in G}{\forall} a_0\,[\,\overline{\delta(\pi(a_0),\omega(a_0))}=\overline{\delta(\pi'(a_0),\omega'(a_0))}\,]\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underset{\bar a_0\in \bar G}{\forall} \bar a_0\,[\,\bar\delta(\bar\pi(\bar a_0),\bar\omega(\bar a_0))=\bar\delta(\bar\pi'(\bar a_0),\bar\omega'(\bar a_0))\,]\Rightarrow \varphi_{\bar\pi\bar\omega}=\varphi_{\bar\pi'\bar\omega'}\,.$$

Fordítva:

$$\varphi_{\bar\pi\bar\omega}=\varphi_{\bar\pi'\bar\omega'}\Longrightarrow \underset{\bar a_0\in\bar G}{\forall}[\,\underset{f\in F}{\forall} f\,[\,\bar\delta(\bar\pi(\bar a_0),\bar\omega(\bar a_0)f)=\bar\delta(\bar\pi'(\bar a_0),\bar\omega'(\bar a_0)f)\,]\,]\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underset{\bar a_0\in\bar G}{\forall}\bar a_0\,[\,\underset{f\in F}{\forall} f\,[\,\bar\delta(\overline{\pi(a_0)},\bar\omega(\bar a_0)f)=\bar\delta(\overline{\pi'(a_0)},\bar\omega'(\bar a_0)f)\,]\,]\,.$$

Mivel $\overline{\pi(a_0)}\,,\ \overline{\pi'(a_0)}\in\bar G$ és $\bar G$ $\bar A$ minimális generátorrendszere, ezért

$$\underset{a_0\in G}{\forall} a_0\,[\,\overline{\pi(a_0)}=\overline{\pi'(a_0)}\,]\ ,$$

azaz

$$\underset{f\in F}{\forall} f\,[\,\underset{a_0\in G}{\forall} a_0\,[\,\delta(\pi(a_0),f)=\delta(\pi'(a_0),f)\,]\,]\ ,$$

de $\pi(a_0)\,,\ \pi'(a_0)\in G$ és G A minimális generátorrendszere, így

$$\underset{a_0\in G}{\forall} a_0\,[\,\pi(a_0)=\pi'(a_0)\,]\ ,$$

azaz $\pi=\pi'$. $\bar\omega(\bar a_0)=\omega(a_0)$ és $\bar\omega'(\bar a_0)=\omega'(a_0)$ $(a_0\in G)$ felhasználásával kapjuk, hogy $\varphi_{\pi\omega}=\varphi_{\pi'\omega'}$. Tehát Ψ egy-egyértelmű leképezés. Ha π végigfut G transzformációin, akkor $\bar\pi$ is végigfut $\bar G$ transzformációin. Ez azt jelenti, hogy Ψ $E(A)$ -t $E(\bar A)$ -ra képezi le.

Végül megmutatjuk, hogy Ψ izomorfizmus. Legyenek $\varphi_{\pi_1\omega_1}$, $\varphi_{\pi_2\omega_2}\in E(A)$, $\delta(a_0,f)$ $(a_0\in G,\ f\in F)$ A tetszőleges állapota, $\pi=\pi_1\pi_2$ és $\omega(a_0)=\omega_1(\pi_2(a_0))\,\omega_2(a_0)$, akkor

$$\varphi_{\pi_1\omega_1}\varphi_{\pi_2\omega_2}(\delta(a_0,f))=\varphi_{\pi_1\omega_1}(\delta(\pi_2(a_0),\omega_2(a_0)f)=$$
$$=\delta(\pi_1\pi_2(a_0),\omega_1(\pi_2(a_0))\,\omega_2(a_0)f)=\varphi_{\pi\omega}(\delta(a_0,f))\ ,$$

azaz $\varphi_{\pi_1\omega_1}\varphi_{\pi_2\omega_2}=\varphi_{\pi\omega}$.

De $\bar\pi_1\bar\pi_2(\bar a_0)=\bar\pi_1(\overline{\pi_2(a_0)})=\overline{\pi_1\pi_2(a_0)}=\overline{\pi(a_0)}=\bar\pi(\bar a_0)$ és

$$\bar\omega_1(\bar\pi_2(\bar a_0))\,\bar\omega_2(\bar a_0)=\bar\omega_1(\overline{\pi_2(a_0)})\,\bar\omega_2(\bar a_0)=\omega_1(\pi_2(a_0))\,\omega_2(a_0)\ ,$$

ezért

$$\varphi_{\bar\pi_1\bar\omega_1}\varphi_{\bar\pi_2\bar\omega_2}(\bar\delta(\bar a_0,f))=\varphi_{\bar\pi_1\bar\omega_1}(\bar\delta(\bar\pi_2(\bar a_0),\bar\omega_2(\bar a_0)f)=$$
$$=\bar\delta(\bar\pi_1\bar\pi_2(\bar a_0),\bar\omega_1(\bar\pi_2(\bar a_0))\,\bar\omega_2(\bar a_0)f)=\varphi_{\bar\pi\bar\omega}(\bar\delta(\bar a_0,f))\ ,$$

azaz $\varphi_{\bar{\pi}_1\bar{\omega}_1}\varphi_{\bar{\pi}_2\bar{\omega}_2} = \varphi_{\overline{\pi\pi}\,\overline{\omega\omega}}$. Tehát Ψ valóban izomorfizmus. Q.e.d.

A tétel bizonyitásából látható, hogy ha $\pi \neq \pi'$, akkor $\varphi_{\pi\omega} \neq \varphi_{\pi'\omega'}$. Továbbá, könnyen belátható, hogy

(21) $\varphi_{\pi\omega} = \varphi_{\pi\omega'} \Longleftrightarrow \underset{a_0\in G}{\forall} a_0\,[\,\overline{\overline{\omega(a_0)}} = \overline{\overline{\omega'(a_0)}}\,]$.

/Megjegyezzük, hogy $\overline{\overline{f}}$ -sal jelöltük $\overline{A}$ $\overline{F}$ karakterisztikus félcsoportjának $f\,(\in F)$ által reprezentált elemét./

11.Következmény. Ha az $A=(A,F,\delta)$ reverzibilis kváziautomata állapot-független, akkor $\overline{A}$ karakterisztikus csoportja izomorf módon beágyazható A automorfizmuscsoportjába.

Bizonyitás. Az 5.Következmény szerint $\overline{A}$ generálható csoport-tipusu kváziautomata, ezért $\overline{\overline{F}}$ karakterisztikus félcsoportja csoport. Legyen π A G minimális generátorrendszerének identikus leképezése, és ω G minden elemét F ugyanazon elemére képezze le. Jelöljük ebben az esetben $\varphi_{\pi\omega}$ -t φ_h -val, ha $\underset{a_0\in G}{\forall} a_0[\omega(a_0)=h]$. Az előző megjegyzésből következik, hogy a $\overline{\overline{h}} \longrightarrow \varphi_h$ $(h\in F)$ leképezés egy-egyértelmü. Legyenek $h,k,f\in F$ és $a_0 \in G$, akkor

$$\varphi_h\varphi_k(\delta(a_0,f)) = \varphi_h(\delta(a_0,kf)) = \delta(a_0,hkf) = \varphi_{hk}(\delta(a_0,f)),$$

azaz $\varphi_h\varphi_k = \varphi_{hk}$, amiből már látható, hogy a $\overline{\overline{h}} \to \varphi_h$ $(h\in F)$ leképezés izomorfizmus. $\varphi_h \in G(A)$ $(h\in F)$, mivel $\varphi_h = \bigcup_{a_0\in G}\varphi_{a_0,h}$ és $\varphi_{a_0,h}$ $(a_0\in G)$ a 9.Következmény szerint A_{a_0} automorfizmusa. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy $\overline{\overline{F}}$ $\overline{F}$// és $\overline{F}$ F / homomorf képe, az A reverzibilis állapot-független kváziautomata $\overline{F}$ karakterisztikus félcsoportja / és F bemenő-félcso-

portja/homomorf/módon beágyazható A $G(A)$ automorfizmuscsoportjába. Ha A generálható csoport-tipusu kvázi-automata, akkor a 6.Lemma szerint $A \cong \overline{A}$, igy $\overline{F}$ izomorf módon beágyazható $G(A)$ -ba. Ha A reverzibilis állapot-független kváziautomata, akkor $\overline{A}$ generálható csoport-tipusu kváziautomata /1.5.Következményt/, ezért a 21. Tétel szerint, ha ismerjük a generálható csoport-tipusu kváziautomaták endomorfizmusait, akkor a reverzibilis állapot-független kváziautomaták endomorfizmusait is ismerjük. Megjegyezzük, hogy ha φ az $A=(A,F,\delta)$ reverzibilis állapot-független kváziautomata A állapothalmazának identikus leképezése, akkor a 4.Lemma és az 1.Következmény szerint A -t kiegészithetjük olyan egységelemes bemenő-félcsoportu generálható kváziautomatává, amelynek endomorfizmusai megegyeznek A endomorfizmusaival. Sajnos A_φ nem biztos, hogy csoport-tipusu kváziautomata. Erre vonatkozóan tekintsük a következő példát:

4.Példa. Legyen az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata állapothalmaza $A=\langle 1,2\rangle$, a bemenő-félcsoport $F=\{f_1,f_2\}$, amelyben a müveletet az $f_i f_j=f_j$ $(i,j=1,2)$ egyenletekkel definiáljuk. A δ átmenet-függvényt a következő táblázattal adjuk meg:

δ	1	2
f_1	1	1
f_2	2	2

Az A kváziautomata reverzibilis állapot-független, de nem csoport-tipusu. /l.BARCSÁNYI I. [3] / Megadjuk az A_φ kváziautomata átmenet-függvényét is, amiből látható, hogy A_φ nem állapot-független:

SZEGED

δ_φ	1	2
I	1	2
f_1	1	1
f_2	2	2

.

Ezzel a példával szemléltethetjük a 21.Tétel állitását is. Az $\bar{\mathcal{A}}=(\bar{A}, F, \bar{\delta})$ generálható csoport-tipusu kváziautomata $\bar{A}$ állapothalmaza és $\bar{\bar{F}}$ karakterisztikus csoportja egyelemü halmazok, igy $\bar{A}$ identikus leképezése $\bar{\mathcal{A}}$ egyetlen endomorfizmusa. Könnyen látható, hogy $\mathcal{A}$ egyetlen endomorfizmusa A identikus leképezése.

A (20) leképezés

$$\varphi_{\pi\omega} = \left(\bigcup_{a_0 \in G} \varphi_{a_0, \pi(a_0)}\right)\left(\bigcup_{a_0 \in G} \alpha_{a_0, \omega(a_0)}\right) \tag{22}$$

alakban is irható. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\varphi_\pi = \bigcup_{a_0 \in G} \varphi_{a_0, \pi(a_0)} \quad , \quad \alpha_\omega = \bigcup_{a_0 \in G} \alpha_{a_0, \omega(a_0)} .$$

/Megjegyezzük, hogy $\varphi_\pi = \varphi_{\pi\omega_0}$, ahol ω_0 G -nek az $\bar{F}$ karakterisztikus félcsoport balegységelemei egyesitésébe való leképezése; $\alpha_\omega = \varphi_{\iota_G \omega}$, ahol ι_G G identikus leképezése./ Jelöljük a φ_π $(\pi : G \to G)$ leképezések halmazát T -vel és az α_ω $(\omega : G \to F)$ leképezések halmazát H -val.

<u>22.Tétel</u>. <u>Ha az</u> $\mathcal{A}=(A, F, \delta)$ <u>reverzibilis kváziautomata állapot-független, akkor</u> T <u>az</u> $E(A)$ <u>endomorfizmus-félcsoport olyan részfélcsoportja,</u> H <u>pedig az</u> $G(A)$ <u>automorfizmuscsoport olyan részcsoportja, amelyekre</u>

$$E(A) = TH \quad , \quad T \cap H = \{\iota\}$$

<u>teljesül, ahol</u> ι $E(A)$ <u>egységeleme.</u>

<u>Továbbá,</u> T <u>-nek van olyan</u> P <u>részcsoportja, amelyre</u>

$$G(A) = PH = HP \quad , \quad P \cap H = \{\iota\} .$$

<u>Bizonyitás</u>. A bizonyitás során a tétel előtt és a 15.Lemmában bevezetett jelöléseket használjuk.

A 12.Tétel és a 9.Következmény szerint minden $a_0 (\in G)$-re $\alpha_{a_0,\omega(a_0)}$ A_{a_0} automorfizmusa. Ebből már könnyen belátható, hogy H a $G(A)$ automorfizmuscsoport részcsoportja. Legyenek $\varphi_{\pi_1}, \varphi_{\pi_2} \in T$ és $a = \delta(a_0, f)$ $(a_0 \in G, f \in F)$ A tetszőleges állapota, akkor

$$\varphi_{\pi_1}\varphi_{\pi_2}(a) = \varphi_{\pi_1}\varphi_{\pi_2}(\delta(a_0,f)) = \varphi_{\pi_1}(\delta(\pi_2(a_0),f)) =$$
$$= \delta(\pi_1\pi_2(a_0),f) = \varphi_{\pi_1\pi_2}(\delta(a_0,f)) = \varphi_{\pi_1\pi_2}(a) ,$$

azaz $\varphi_{\pi_1}\varphi_{\pi_2} = \varphi_{\pi_1\pi_2} \in T$, tehát T $E(A)$ részfélcsoportja. Mivel $E(A)$ bármely eleme előállítható (22) alakban, ezért $E(A) = TH$ $(T \cap H = \{\iota\})$.

Legyen π G permutációja. A az A_{a_0} $(a_0 \in G)$ kváziautomaták direkt összege és $\varphi_{a_0,\pi(a_0)}$ (17) típusú leképezés, azaz A_{a_0} $A_{\pi(a_0)}$-ra való izomorf leképezése, ezért $\varphi_\pi \in G(A)$. Jelöljük az ilyen φ_π leképezések halmazát P-vel, $P \subseteq T$. Nyilvánvaló, hogy P $G(A)$ részcsoportja $/\iota = \varphi_{\iota_G}$ és $\varphi_\pi^{-1} = \varphi_{\pi^{-1}}$ /, továbbá $P \cap H = \{\iota\}$ és $PH, HP \subseteq G(A)$. Tegyük fel, hogy $\beta = \varphi_\pi \alpha_\omega \in G(A)$. Mivel $\alpha_\omega \in G(A)$, ezért $\varphi_\pi = \beta\alpha_\omega^{-1} \in G(A)$. amiből már adódik, hogy π G permutációja. Kaptuk, hogy $G(A) = PH$. Végül megmutatjuk, hogy $PH = HP$. Legyenek $\varphi_\pi (\in P)$ és $\alpha_\omega (\in H)$ tetszőleges automorfizmusok, akkor az

$$(23) \qquad \alpha_{\omega'} = \bigcup_{a_0 \in G} \alpha_{a_0,\omega'(a_0)} , \quad \omega'(a_0) = \omega(\pi^{-1}(a_0))$$

leképezés is eleme H-nak. Ha $\delta(a_0, f)$ $(a_0 \in G, f \in F)$ A tetszőleges állapota, akkor

$$\alpha_{\omega'}\varphi_\pi(\delta(a_0,f)) = \alpha_{\omega'}(\delta(\pi(a_0),f)) = \delta(\pi(a_0), \omega(\pi^{-1}\pi(a_0))f) =$$
$$= \varphi_\pi(\delta(a_0, \omega(a_0)f)) = \varphi_\pi \alpha_{a_0,\omega(a_0)}(\delta(a_0,f)) = \varphi_\pi \alpha_\omega(\delta(a_0,f)),$$

azaz

$$(24) \qquad \alpha_{\omega'}\varphi_\pi = \varphi_\pi \alpha_\omega ,$$

ami azt jelenti, hogy $PH = HP$. Q.e.d.

A 11.Következmény bizonyitásából látszik, hogy ha A reverzibilis állapot-független kvázisautomata, akkor $\overline{A}$ karakterisztikus félcsoportja izomorf módon beágyazható H -ba. A 21.Tétel bizonyitásából következik, hogy ha $\varphi_{\pi_1}\alpha_{\omega_1}=\varphi_{\pi_2}\alpha_{\omega_2}$ $(\varphi_{\pi_1},\varphi_{\pi_2}\in T,\alpha_{\omega_1},\alpha_{\omega_2}\in H)$, akkor $\pi_1=\pi_2$, azaz $\varphi_{\pi_1}\alpha_{\omega_1}=\varphi_{\pi_1}\alpha_{\omega_2}$. (21) szerint, akkor $\bigwedge_{a_0\in C} a_0\left[\overline{\overline{\omega_1(a_0)}}=\overline{\overline{\omega_2(a_0)}}\right]$, ami éppen azt jelenti, hogy $\alpha_{\omega_1}=\alpha_{\omega_2}$.

12.Következmény. Legyen az $A=(A,F,\delta)$ reverzibilis kvázisautomata állapot-független. Ha $\vartheta(\overline{\overline{F}})>1$, akkor P izomorf H automorfizmuscsoportjának egy részcsoportjával. Ha $\vartheta(\overline{\overline{F}})=1$, akkor $H=\{\iota\}$.

Bizonyitás. Legyen $\varphi_\pi\in P$ és $\Theta_\pi(\alpha_\omega)=\alpha_{\omega'}$ akkor és csak akkor, ha $\alpha_\omega,\alpha_{\omega'}(\in H)$ kielégitik a (24) feltételt. Nyilvánvaló, hogy Θ_π H permutációja. Ha $\alpha_{\omega_1},\alpha_{\omega_2}$ H tetszőleges elemei, akkor

$$\varphi_\pi\alpha_{\omega_1}\alpha_{\omega_2}=\alpha_{\omega_1'}\varphi_\pi\alpha_{\omega_2}=\alpha_{\omega_1'}\alpha_{\omega_2'}\varphi_\pi,$$

amiből látható, hogy Θ_π H automorfizmusa.

Tegyük fel, hogy $\Theta_{\pi_1}=\Theta_{\pi_2}$ $(\varphi_{\pi_1}\neq\varphi_{\pi_2}\in P)$, azaz

$$\varphi_{\pi_1}\alpha_\omega=\alpha_{\omega'}\varphi_{\pi_1}\iff\varphi_{\pi_2}\alpha_\omega=\alpha_{\omega'}\varphi_{\pi_2}\quad(\alpha_\omega,\alpha_{\omega'}\in H).$$

Ha $\alpha_\omega,\alpha_{\omega'}(\in H)$ elemekre $\varphi_{\pi_1}\alpha_\omega=\alpha_{\omega'}\varphi_{\pi_1}$ és $\varphi_{\pi_2}\alpha_\omega=\alpha_{\omega'}\varphi_{\pi_2}$, akkor $\alpha_{\omega'}=\varphi_{\pi_2}\alpha_\omega\varphi_{\pi_2}^{-1}$, igy $\varphi_{\pi_1}\alpha_\omega=\varphi_{\pi_2}\alpha_\omega\varphi_{\pi_2}^{-1}\varphi_{\pi_1}$, azaz

$\alpha_\omega\varphi_{\pi_2}^{-1}\varphi_{\pi_1}=\varphi_{\pi_2}^{-1}\varphi_{\pi_1}\alpha_\omega$ $(\alpha_\omega\in H)$.

Legyen most $\vartheta(\overline{\overline{F}})>1$, továbbá $\alpha_\omega=\bigcup_{a_0\in C}\alpha_{a_0,\omega(a_0)}(\in H)$ olyan, hogy legalább egy $a_0(\in C)$ elemre

$$\overline{\overline{\omega(a_0)}}\neq\overline{\overline{\omega(\pi_2^{-1}\pi_1(a_0))}}$$

teljesüljön. Mivel $\pi_1\neq\pi_2$, ezért $A_{a_0}\neq A_{\pi_2^{-1}\pi_1(a_0)}$, azaz $\omega:C\to F$ választható az előbbi feltétel szerint. Ezek szerint minden $f(\in F)$-re

$$\delta(\pi_2^{-1}\pi_1(a_0),\omega(a_0)f)=\varphi_{\pi_2}^{-1}\varphi_{\pi_1}(\delta(a_0,\omega(a_0)f))=\varphi_{\pi_2}^{-1}\varphi_{\pi_1}\alpha_{a_0,\omega(a_0)}(\delta(a_0,f))=$$

$= \varphi_{\pi_2}^{-1}\varphi_{\pi_1}\alpha_w(\delta(a_0,f)) = \alpha_w\varphi_{\pi_2}^{-1}\varphi_{\pi_1}(\delta(a_0,f)) = \alpha_w(\delta(\pi_2^{-1}\pi_1(a_0),f)) =$

$= \alpha_{\pi_2^{-1}\pi_1(a_0),\,\omega(\pi_2^{-1}\pi_1(a_0))}(\delta(\pi_2^{-1}\pi_1(a_0),f)) = \delta(\pi_2^{-1}\pi_1(a_0),\,\omega(\pi_2^{-1}\pi_1(a_0))f)$,

amiből $\overline{\omega(a_0)} = \overline{\omega(\pi_2^{-1}\pi_1(a_0))}$ következik. Ellentmondás.

Ez azt jelenti, hogy ha $\varphi_{\pi_1} \neq \varphi_{\pi_2} (\in P)$ akkor $\Theta_{\pi_1} \neq \Theta_{\pi_2}$, azaz a $\varphi_\pi \to \Theta_\pi$ leképezés egy-egyértelmű.

Most megmutatjuk, hogy ez a leképezés izomorfizmus. Legyenek $\varphi_{\pi_1}, \varphi_{\pi_2} (\in P)$ és $\alpha_w\ (\in H)$ tetszőlegesek, ha

$\varphi_{\pi_2}\alpha_w = \alpha_{w_1}\varphi_{\pi_2}$ és $\varphi_{\pi_1}\alpha_{w_1} = \alpha_{w_2}\varphi_{\pi_1}$ $(\alpha_{w_1}, \alpha_{w_2} \in H)$,

akkor $\varphi_{\pi_1\pi_2}\alpha_w = \varphi_{\pi_1}\varphi_{\pi_2}\alpha_w = \varphi_{\pi_1}\alpha_{w_1}\varphi_{\pi_2} = \alpha_{w_2}\varphi_{\pi_1}\varphi_{\pi_2} = \alpha_{w_2}\varphi_{\pi_1\pi_2}$,

tehát $\Theta_{\pi_1}\Theta_{\pi_2}(\alpha_w) = \Theta_{\pi_1}(\alpha_{w_1}) = \alpha_{w_2} = \Theta_{\pi_1\pi_2}(\alpha_w)$,

így $\Theta_{\pi_1}\Theta_{\pi_2} = \Theta_{\pi_1\pi_2}$, ami éppen azt jelenti, hogy a

$\varphi_\pi \longrightarrow \Theta_\pi$ leképezés izomorfizmus.

Ha $\theta(\overline{F}) = 1$, akkor

$$\bigwedge_{f\in F}\bigwedge_{\bar a\in\overline{A}} \bar a\,[\,\bar a = \bar\delta(\bar a, f) = \overline{\delta(a,f)}\,] \ .$$

A 13.Lemma ezerint $\overline{F}$ minden eleme balegységelem,ezért bárhogyan is választjuk az $\omega : G \to F$ leképezést,

$$\bigwedge_{f\in F}\bigwedge_{a_0\in G} a_0\,[\,\alpha_{a_0,\omega(a_0)}(\delta(a_0,f)) = \delta(a_0,\omega(a_0)f) = \delta(a_0,f)\,] \ ,$$

azaz $\alpha_w = \bigcup_{a_0\in G}\alpha_{a_0,\omega(a_0)} = \nu$. /Megjegyezzük, hogy ebben az esetben $E(A) = T$ és $G(A) = P$ ./ Q.e.d.

Legyen G az $A = (A, F, \delta)$ reverzibilis állapot-független kvázautomata minimális generátorrendszere, akkor $\alpha(G) = \langle \alpha(a_0) \mid a_0 \in G\rangle$ $(\alpha \in H)$ is minimális generátorrendszere A -nak. Ha $\alpha \neq \beta\ (\in H)$, akkor $\alpha(G) \neq \beta(G)$. Mivel bármely generálható csoport-tipásu kvázautomata félperfekt kvázautomaták direkt összegére bomlik, ezért a 23.Tételből adódni fog, hogy ha G_1 és G_2 az A generálható csoport-tipusu kvázautomata két minimális generátorrendszere, akkor van olyan $\alpha\ (\in H)$, hogy $\alpha(G_1) = G_2$.

FÉLPERFEKT KVÁZIAUTOMATÁKRÓL

Az előző fejezetben láttuk, hogy a generálható csoport-tipusu kváziautomaták izomorf félperfekt kvázi-automaták direkt összegeként állnak elő. CH.A. TRAUTH [22] megmutatta, hogy egy erősen összefüggő kváziautomata akkor és csak akkor félperfekt, ha automorfizmus-csoportja tranzitiv. A következő tétel ezt az eredményt általánositja ciklikus kváziautomatákra.

23.Tétel./BABCSÁNYI I.[2] / Az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata akkor és csak akkor félperfekt, ha $G(A)$ tranzitiv.

Bizonyitás. Szükségesség. Legyen az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata félperfekt, továbbá $a,b\,(\in A)$ tetszőleges, de rögzitett állapotok. Mivel A erősen összefüggő, igy van olyan $h\,(\in F)$, hogy $b=\delta(a,h)$. A 13.Tétel és a 9. Következmény szerint az

$$\alpha(\delta(a,f))=\delta(b,f)=\delta(a,hf)\quad(f\in F)$$

leképezés A automorfizmusa. Ha $\bar{e}$ $\bar{F}$ egységeleme, akkor az 1.Lemmát is felhasználva, kapjuk, hogy

$$\alpha(a)=\alpha(\delta(a,e))=\delta(b,e)=b,$$

ami azt jelenti, hogy $G(A)$ tranzitiv.

Elegendőség. Legyen az A ciklikus kváziautomata $G(A)$ automorfizmuscsoportja tranzitiv. A 8.Lemma szerint A állapot-független. Legyen a_0 A egy generátoreleme. Van olyan $e\,(\in F)$, hogy $\delta(a_0,e)=a_0$. Tekintsük A egy további a állapotát. $G(A)$ tranzitivitása miatt van olyan $\alpha\,(\in G(A))$, amelyre $a=\alpha(a_0)$ teljesül. Akkor

$$\delta(a,e)=\delta(\alpha(a_0),e)=\alpha(\delta(a_0,e))=\alpha(a_0)=a.$$

Könnyen belátható, hogy $\bar{e}$ $\bar{F}$ karakterisztikus félcsoport egységeleme. Tekintsük most F tetszőleges f elemét, és azt az $\alpha(\in G(A))$ automorfizmust, amelyre $\delta(a_0, f) = \alpha(a_0)$ teljesül. A ciklikus volta miatt létezik olyan $g(\in F)$, hogy $\delta(a_0, g) = \alpha^{-1}(a_0)$. Igy $\delta(a_0, fg) = \delta(\delta(a_0, f), g) = \delta(\alpha(a_0), g) = \alpha(\delta(a_0, g)) = \alpha\alpha^{-1}(a_0) = a_0$, azaz $\bar{f}\bar{g} = \overline{fg} = \bar{e}$. Hasonlóan mutatható meg, hogy $\bar{g}\bar{f} = \bar{e}$. Ez azt jelenti, hogy $\bar{g}$ $\bar{f}$ inverze, tehát $\bar{F}$ csoport. Ciklikus csoport-tipusu kváziautomata félperfekt. Q.e.d.

<u>16.Lemma.</u>/BABCSÁNYI I. [2] / <u>Bármely</u> $\mathbb{A} = (A, F, \delta)$ <u>ciklikus kváziautomatára</u> $o(\bar{F}) \geqq |A|$ <u>teljesül.</u>

<u>Bizonyitás.</u> Ha a_0 $\mathbb{A}$ egy generátoreleme, akkor bármely $a(\in A)$ állapothoz van olyan $f(\in F)$, hogy $a = \delta(a_0, f)$. Az $\bar{f} \longrightarrow \delta(a_0, f)$ hozzárendelés egyértelmü, ezért $o(\bar{F}) \geqq |A|$. Q.e.d.

<u>17.Lemma.</u>/G.P.WEEG [25] / <u>Bármely</u> $\mathbb{A} = (A, F, \delta)$ <u>erősen összefüggő kváziautomata</u> $G(A)$ <u>automorfizmuscsoportja</u> A <u>reguláris permutációcsoportja.</u>

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $\alpha \in G(A)$. Elegendő megmutatni, hogy ha valamely $a(\in A)$ állapotra $\alpha(a) = a$, akkor α A identikus leképezése. Legyen e célból $b(\in A)$ tetszőleges állapot és $f \in F$, amelyre $b = \delta(a, f)$, akkor

$$\alpha(b) = \alpha(\delta(a, f)) = \delta(\alpha(a), f) = \delta(a, f) = b,$$

amivel a lemmát bebizonyitottuk.

A félcsoportok elméletéből ismeretes a

<u>18.Lemma.</u> <u>Ha az</u> A <u>halmaz egy</u> G <u>reguláris permutációcsoportja tranzitiv, akkor</u> $|A| = o(G)$. <u>Forditva, ha a véges</u> A <u>halmaz egy</u> G <u>reguláris permutációcsoportjára</u> $|A| = o(G)$ <u>teljesül, akkor</u> G <u>tranzitiv.</u>

A következő tétel kapcsolatot teremt a félperfekt kváziautomaták automorfizmus- és karakterisztikus csoportja között. A tétel első állitását CH.A.TRAUTH [22] bizonyitotta be.

24.Tétel./RADCSÁNYI I.[2] / Ha az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata félperfekt, akkor $G(A)\cong\overline{F}$. Megforditva, ha egy erősen összefüggő A-véges $A=(A,F,\delta)$ kváziautomatára $G(A)\cong\overline{F}$ teljesül, akkor A félperfekt.

Bizonyitás. Tekintsük $G(A)$ tetszőleges α elemét. Legyen $a(\in A)$ egy rögzitett állapot, valamint $\overline{f}_\alpha(\in\overline{F})$ olyan, hogy ha $f_\alpha\in\overline{f}_\alpha$, akkor $\delta(a,f_\alpha)=\alpha(a)$. Könnyen belátható, hogy a $\psi(\alpha)=\overline{f}_\alpha$ leképezés $G(A)$ $\overline{F}$ -ra való egy-egyértelmü leképezése. Most megmutatjuk, hogy ψ homomorfizmus. Mivel $\overline{F}$ csoport, ezért van olyan $\overline{g}\in\overline{F}$, bármely $\alpha,\beta(\in G(A))$automorfizmusokhoz, hogy $\overline{f}_{\alpha\beta}=\overline{f}_\alpha\,\overline{g}$. Akkor

$$\alpha\beta(a)=\delta(a,f_{\alpha\beta})=\delta(a,f_\alpha g)=\delta(\delta(a,f_\alpha),g)=\delta(\alpha(a),g)=\alpha(\delta(a,g)),$$

azaz $\delta(a,g)=\beta(a)$. Ebből következik, hogy $g\in\overline{f}_\beta$, tehát $\overline{g}=\overline{f}_\beta$, s igy $\overline{f}_{\alpha\beta}=\overline{f}_\alpha\,\overline{f}_\beta$, tehát ψ izomorfizmus. A tétel második felének bizonyitásához legyen $A=(A,F,\delta)$ olyan erősen összefüggő A-véges kváziautomata, amelyre $G(A)\cong\overline{F}$ teljesül. A 16.Lemma és a 14.Tétel felhasználásával nyerjük, hogy

$$|A|\leqq\sigma(\overline{F})=\sigma(G(A))=\sigma(E(A))\leqq|A|,$$

tehát $\sigma(G(A))=|A|$. Következésképpen a 17. és 18.Lemmák szerint $G(A)$ tranzitiv, ahonnan a 23.Tétel segitségével adódik, hogy az A kváziautomata félperfekt. Q.e.d.

A 24.Tételt és a 10.Lemmát felhasználva nyilvánvalóan igaz a

13.Következmény. *Ha az* $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ *csoport-tipusu kváziautomata generálható, akkor* $\overline{F}\cong G(A_a)$ $(a\in A)$.

Ha az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ csoport-tipusu kváziautomata generálható, akkor $\mathcal{A}$ az $\mathcal{A}_{a_0}$ $(a_0\in G)$ egymással izomorf félperfekt kváziautomaták direkt összege, ahol G $\mathcal{A}$ egy minimális generátorrendszere. Ebből a 13.Következményt felhasználva kapjuk a

14.Következményt./BABCSÁNYI I.[4] / *Ha az* $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ *A-véges csoport-tipusu kváziautomata generálható, akkor* $|A|$ *osztható* $\sigma(\overline{F})$*-gal.*

15.Következmény./BABCSÁNYI I.[4] / *Ha az* $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ *A-véges csoport-tipusu kváziautomata generálható és* $|A|$ *primszám, akkor* $\mathcal{A}$ *félperfekt vagy* $\overline{F}$ *egyelemü.*

Bizonyitás. A 14.Következmény szerint, ha $|A|$ primszám, akkor $\sigma(\overline{F})=1$ vagy $|A_a|=\sigma(G(A_a))=\sigma(\overline{F})=|A|$ $(a\in A)$. Ha $|A|=|A_a|$ $(a\in A)$, akkor az $\mathcal{A}$ kváziautomata ciklikus. Ciklikus csoport-tipusu kváziautomata pedig félperfekt. Q.e.d.

25.Tétel./BABCSÁNYI I.[4] / *Ha az* $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ *A-véges csoport-tipusu kváziautomata generálható,* $|A|=n$ *és* $|G|=k$, *akkor*

$$\sigma(G(\mathcal{A}))=\left(\frac{n}{k}\right)^k\cdot k!\ ,\qquad \sigma(E(\mathcal{A}))=n^k\ ,$$

ahol G $\mathcal{A}$ *egy minimális generátorrendszere.*

Bizonyitás. Az $\mathcal{A}$ kváziautomata az $\mathcal{A}_{a_0}$ $(a_0\in G)$ izomorf félperfekt kváziautomaták direkt összege, ezért $|G|\cdot|A_{a_0}|=|A|$ $(a_0\in G)$, igy $|A_{a_0}|=\frac{n}{k}$. Mivel $\mathcal{A}_{a_0}$ $(a_0\in G)$ félperfekt, ezért $\sigma(G(A_{a_0}))=|A_{a_0}|=\frac{n}{k}$. A 22.Tétel bizonyitásában H -t ugy definiáltuk, mint $\mathcal{A}$ olyan $\alpha_\omega=\bigcup_{a_0\in G}\alpha_{a_0,\omega(a_0)}$ automorfizmusainak halmazát, ahol $\alpha_{a_0,\omega(a_0)}$ $\mathcal{A}_{a_0}$ tetszőleges

automorfizmusa. Az A_{a_0} $(a_0 \in G)$ halmazok száma k, ezért $\mathcal{O}(H) = \left(\frac{n}{k}\right)^k$. Szintén a 22.Tétel szerint $\mathcal{O}(T)$ egyenlő G transzformációinak számával, $\mathcal{O}(P)$ pedig G permutációinak számával, azaz $\mathcal{O}(T) = k^k$ és $\mathcal{O}(P) = k!$. A 22.Tétel és az utána következő megjegyzés szerint $E(A) = TH$, $G(A) = PH$, s ha $\varphi_{\pi_1}\alpha_{\omega_1} = \varphi_{\pi_2}\alpha_{\omega_2}$ $(\in E(A))$, akkor $\varphi_{\pi_1} = \varphi_{\pi_2}$ és $\alpha_{\omega_1} = \alpha_{\omega_2}$. Mindezek felhasználásával kapjuk, hogy $\mathcal{O}(G(A)) = \mathcal{O}(P)\mathcal{O}(H) = k! \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^k$ és $\mathcal{O}(E(A)) = \mathcal{O}(T)\mathcal{O}(H) = k^k \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^k = n^k$. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy generálható csoport-tipusu kvázi-automatákra a 22.Tételt és a 12.Következményt is bebizonyitottuk [4] dolgozatunkban.

5.Példa. Definiáljuk az $A = (A, F, \delta)$ generálható csoport-tipusu kváziautomatát a következőképpen: $A = \langle 1,2,3,4 \rangle$, $F = \{e, f\}$ másodrendü Abel-csoport, ahol e az egységelem,

δ	1	2	3	4
e	1	2	3	4
f	2	1	4	3

Jelöljük $abcd$ -vel $(a, b, c, d = 1,2,3,4)$ azt a $\varphi : A \to A$ leképezést, amelyre $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = b$, $\varphi(3) = c$ és $\varphi(4) = d$ teljesül. Számolással meggyőződhetünk arról, hogy

$$H = \{\iota = 1234, \alpha_1 = 1243, \alpha_2 = 2134, \alpha_3 = 2143\},$$
$$T = \{\iota = 1234, \varphi_{\pi_1} = 3412, \varphi_{\pi_2} = 1212, \varphi_{\pi_3} = 3434\},$$
$$P = \{\iota = 1234, \varphi_{\pi_1} = 3412\}.$$

Ebben a példában $n = 4$ és $k = 2$, azaz $\mathcal{O}(G(A)) = 2^2 \cdot 2! = 8$ és $\mathcal{O}(E(A)) = 4^2 = 16$. $E(A) = TH \neq HT$, mivel $|HT| = 12$. Megmutatható, hogy H automorfizmuscsoportja hatodrendü, és P izomorf H automorfizmuscsoportjának $\{\theta_\iota, \theta_{\pi_1}\}$ részcsoportjával, ahol θ_ι H identikus leképezése és $\theta_{\pi_1} = \begin{pmatrix} \iota & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \iota & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{pmatrix}$.

Most a 43. oldalon bevezetett $*_{a_0}$ művelet segítségével ismét egy szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy ciklikus kváziautomata mikor félperfekt.

26.Tétel../BABCSÁNYI I. [2] / Az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata akkor és csak akkor félperfekt, ha van olyan a_0 generátorelem, hogy $F_{a_0}^*$ csoport.

Bizonyítás. Szükségesség. Ha az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata félperfekt, akkor minden $a(\in A)$ állapotra $\delta_{A,a}=\delta_A$, s így a 43. oldalon tett megjegyzés szerint $F_a^*=\overline{F}$, azaz F_a^* $(a\in A)$ is csoport.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata ciklikus, és valamelyik $a_0(\in A)$ generátorelemre $F_{a_0}^*$ csoport. Legyen $c(\in A)$ tetszőleges állapot, valamint $f\in F_{a_0b}$ $(b\in A)$ és

$$F_{a_0c} *_{a_0} F_{a_0b} = F_{a_0d} \quad (d\in A).$$

Akkor $f\in F_{cd}$, azaz $F_{a_0b}\subseteq F_{cd}$. Legyen most $f\in F_{cd}$. Nyilvánvaló, hogy van olyan $b'(\in A)$, hogy $f\in F_{a_0b'}$. Így

$$F_{a_0c} *_{a_0} F_{a_0b'} = F_{a_0d'} \quad (d'\in A).$$

Ha $g\in F_{a_0c}$, akkor

$$d'=\delta(a_0,gf)=\delta(\delta(a_0,g),f)=\delta(c,f)=d.$$

Ebből következik, hogy

$$F_{a_0c} *_{a_0} F_{a_0b'} = F_{a_0d}.$$

Mivel $F_{a_0}^*$ csoport, ezért $F_{a_0b'}=F_{a_0b}$. Ezek szerint $F_{cd}\subseteq F_{a_0b}$. Kaptuk, hogy $F_{cd}=F_{a_0b}$. Bármely $d(\in A)$ állapothoz van olyan $b(\in A)$ állapot, hogy

$$F_{a_0c} *_{a_0} F_{a_0b} = F_{a_0d},$$

azaz $F_{a_0b}=F_{cd}$, mivel $F_{a_0}^*$ csoport. Ez azt jelenti, hogy $F_c=F_{a_0}$. Tehát A állapot-független. Nyilvánvaló most már, hogy $\overline{F}=F_{a_0}^*$, így $\overline{F}$ is csoport. Ciklikus csoport-

-típusu kvázicsoport pedig félperfekt. Q.e.d.

19.Lemma./CH.A.TRAUTH [22] / Legyen az $A=(A,F,\delta)$ **kvázicsoport félperfekt és** $f\in F$ **. Az** $\alpha_f: a \longrightarrow \delta(a,f)$ $(a\in A)$ **leképezés akkor és csak akkor automorfizmusa** A **-nak, ha** $f\in Z(A)$ **.**

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $Z(A)$ jelöli az A kvázicsoport centrumát. /l. 24.oldalt/

Legyen $f\in Z(A)$. Könnyen belátható, hogy α_f A önmagára való egy-egyértelmü leképezése. Legyenek $a(\in A)$ és $g(\in F)$ tetszőlegesek. Van olyan $h(\in F)$, hogy $\overline{g}=\overline{h}\,\overline{f}$, igy

$$\alpha_f(\delta(a,g))=\alpha_f(\delta(a,hf))=\delta(\delta(a,hf),f)=\delta(\delta(a,fh),f)=$$
$$=\delta(\delta(a,f),hf)=\delta(\alpha_f(a),hf)=\delta(\alpha_f(a),g),$$

azaz α_f automorfizmus.

Forditva, tegyük fel, hogy $\alpha_f\in G(A)$ $(f\in F)$. Tetszőleges $g(\in F)$ -re és $a(\in A)$ -ra

$$\delta(a,fg)=\alpha_f(\delta(\alpha_f^{-1}(a),fg))=\delta(\delta(\alpha_f^{-1}(a),fg),f)=$$
$$=\delta(\delta(\alpha_f^{-1}(a),f),gf)=\delta(\alpha_f\alpha_f^{-1}(a),gf)=\delta(a,gf),$$

azaz $f\in Z(A)$. Q.e.d.

A 24. oldalon már megjegyeztük, hogy ha $Z(A)\neq\emptyset$, akkor részfélcsoportja F -nek. Ennél azonban több is igaz:

20.Lemma./BABCSÁNYI I.[2] / Ha az $A=(A,F,\delta)$ **kvázicsoport** $Z(A)$ **centruma nem üres, akkor** $\overline{F}$ **-beli osztályok egyesitése.**

Bizonyitás. Legyen $Z(A)\neq\emptyset$, $f\in Z(A)$ és $g\in\overline{f}$. Akkor tetszőleges $a(\in A)$ és $h(\in F)$ esetén

$$\delta(a,gh)=\delta(\delta(a,g),h)=\delta(\delta(a,f),h)=\delta(a,fh)=$$
$$=\delta(a,hf)=\delta(\delta(a,h),f)=\delta(\delta(a,h),g)=\delta(a,hg),$$

azaz $q \in Z(A)$. Q.e.d.

Jelöljük $\overline{Z(A)}$ -sal azon $\overline{f}\,(\in \overline{F})$ osztályok halmazát, amelyekre $\overline{f} \subseteq Z(A)$ teljesül. Ha $Z(A) \neq \emptyset$, akkor $\overline{Z(A)}$ az $\overline{F}$ karakterisztikus félcsoport centruma. Csoportelméletből ismeretes, hogy ha $\overline{F}$ csoport, akkor $\overline{Z(A)}$ részcsoportja.

Jelöljük a 19.Lemmában definiált α_f $(f \in Z(A))$ leképezések halmazát G_Z -vel.

27.Tétel. *Ha az* $A=(A,F,\delta)$ *kváziautomata félperfekt, akkor* G_Z *a* $G(A)$ *automorfizmuscsoport centruma és* $G_Z \cong \overline{Z(A)}$.

Bizonyítás. Legyen $\alpha_f \in G_Z$ $(f \in Z(A))$ és $\alpha \in G(A)$, továbbá $a\,(\in A)$ tetszőleges állapot. Akkor

$$\alpha_f \alpha(a) = \delta(\alpha(a), f) = \alpha(\delta(a,f)) = \alpha\alpha_f(a) ,$$

azaz $\alpha_f \alpha = \alpha \alpha_f$. Ez azt jelenti, hogy G_Z $G(A)$ centruma. (Könnyen belátható, hogy az $\overline{f} \to \alpha_f$ $(f \in Z(A))$ $\overline{Z(A)}$ G_Z -re való izomorf leképezése.) Q.e.d.

A-véges félperfekt kváziautomatákra teljesül a 11. Tétel egy erősebb alakja:

28.Tétel./A.C.FLECK [13] / *Legyen* $A=(A,F,\delta)$ *A-véges félperfekt kváziautomata. Ha* N $G(A)$ *normálosztója, akkor* $G(A)/N \cong G(A/\mathcal{N})$.

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $G(A)$ tetszőleges L részcsoportjára az $A/\mathcal{L}$ kváziautomata /1.(16) / erősen összefüggő, ezért $\sigma(G(A/\mathcal{L})) \leq |A/\mathcal{L}|$.

Ha az $A=(A,F,\delta)$ félperfekt kváziautomata A-véges és $A = \langle 1, 2, \ldots, n \rangle$, akkor $\sigma(G(A)) = n$. Legyen N $G(A)$ normálosztója és $\sigma(N) = k$. A véges csoportok Lagrange-féle tételéből következik, hogy $k \mid n$, azaz

valamilyen r természetes számra $n=k\cdot r$, valamint az, hogy $o(G(A)/N)=r$. Az azonban nyilvánvaló, hogy bármely $i_W \in A/W$ $(i\in A)$ k darab A-beli állapotból áll. Hiszen $i_W=\langle \alpha(i) \mid \alpha\in N\rangle$ és $o(N)=k$, így $|i_W|\leqq k$. De az $\alpha(i)=\beta(i)$ $(\alpha,\beta\in N)$ egyenlőségből következik, hogy $\alpha=\beta$, Tehát valóban $|i_W|=k$. Ebből viszont az következik, hogy $|A/W|=r\,(=o(G(A)/N))$. A bizonyitás elején tett megjegyzésből és a 11.Tételből adódik a tétel állitása.

Megjegyezzük, hogy a 28.Tétel konkrétan G_Z -re is érvényes, mivel G_Z is normálosztója $G(A)$ -nak.

Mivel $o(G(A/W))=|A/W|$, ezért a 18.lemma és a 24.Tétel alapján nyilvánvaló, hogy A/W félperfekt.

KVÁZIAUTOMATÁK GENERÁLHATÓ A-RÉSZKVÁZIAUTOMATÁIRÓL

Legyen az $A=(A,F,\delta)$ tetszőleges kváziautomata. Definiáljuk az A_i $(i=0,1,2,\dots)$ halmazokat a következő módon:

$A_0=A$ és $A_i=\langle \delta(a,f) \mid a\in A_{i-1}, f\in F\rangle$ $(i=1,2,\dots)$.

Nyilvánvaló, hogy $A_i\supseteq A_{i+1}$ $(i=0,1,2,\dots)$, továbbá az $A_{i+1}=(A_{i+1},F,\delta_{i+1})$ az $A_i=(A_i,F,\delta_i)$ kváziautomata magja /l. 15. oldalt/, ahol $\delta_0=\delta$. Az $A_i=(A_i,F,\delta_i)$ kváziautomatát A i-edik magjának nevezzük. Ha $\overline{F}$ jobbegyságelemes félcsoport, akkor $A_i=A_{i+1}$ $(i=1,2,\dots)$, tehát A -nak csak első magja van. Generálható kváziautomata esetén $A_i=A_{i+1}$ $(i=0,1,2,\dots)$.

Megjegyezzük, hogy ha $M_1=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i\neq\emptyset$, akkor az $M_1=(M_1,F,\delta_1)$ A -nak egy részkváziautomatája. Ha van olyan $A_i=(A_i,F,\delta_i)$, hogy $A_i=M_1$, akkor az $A_i=M_1$ kváziautomata generálható. Ebben az esetben A_i-t A /elsőrendű/ alsó magjának nevezzük.

21. Lemma. Ha a $\mathcal{B}=(B,F,\delta')$ kváziautomata az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata generálható A-részkváziautomatája, akkor $B\subseteq\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i$.

Bizonyítás. Legyen G $\mathcal{B}$ generátorrendszere, A_i $(i=1,2,\dots)$ i-edik magja és $a_0\in G$. Mivel $\mathcal{B}$ generálható, ezért van olyan $a_1\in G$ és $f_1\in F$, hogy $a_0=\delta(a_1,f_1)$. $a_1(\in G)$ -hez is van olyan $a_2\in G$ és $f_2\in F$, hogy $a_1=\delta(a_2,f_2)$. Ezt folytatva, kapjuk, hogy vannak olyan $a_i\in G$ és $f_1,f_2,\dots,f_i\in F$, hogy $a_0=\delta(a_i,f_i\cdots f_2f_1)$. Ez viszont azt jelenti, hogy $a_0\in A_i$. Mivel $a_0(\in G)$ tetszőle-

ges, így $G \subseteq A_i$, amiből már következik, hogy $B \subseteq A_1$, $(i=1,2,\dots)$, azaz $B \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$. Q.e.d.

16.Következmény. Ha $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$, akkor az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomatának nincs generálható A-részkváziautomatája.

Most néhány példával megmutatjuk, hogy $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$ lehet üres, véges vagy végtelen halmaz. Továbbá M_1 akkor is lehet generálható kváziautomata, ha egyetlen A_i-re sem teljesül az $A_i = M_1$ egyenlőség. Minden példában az állapothalmaz a természetes számok halmaza, a bemenő-félcsoport pedig az x elem által generált szabad félcsoport. (egységelem nélküli)

6.Példa.

δ	1	2	3	...	n	...
x	2	3	4	...	n+1	...

$A_1=\langle 2,3,\dots\rangle$, $A_2=\langle 3,4,\dots\rangle$, ... , $A_n=\langle n+1,n+2,\dots\rangle$, ... , azaz $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$.

7.Példa.

δ	1	2	3	...	n	...
x	1	3	4	...	n+1	...

Könnyen belátható, hogy $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \langle 1\rangle$.

8.Példa.

δ	1	2	3	4	5	6	...
x	1	3	1	5	1	7	...

$A_1=\langle 1,3,5,7,\dots\rangle$, $A_2=\langle 1\rangle$. A_2 A alsó magja.

9.Példa.

δ	1	2	3	4	5	6	...
x	1	4	3	6	5	8	...

$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \langle 1,3,5,\dots\rangle$, azaz végtelen sok elemből áll. Nincs olyan A_j , hogy $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = A_j$, ennek ellenére M_1 generálható.

10.Példa.

$$\delta(i,x)=\begin{cases}1 & \text{ha } i=1,2,\\ 2 & \text{ha } i=k_j=k_{j-1}+j \quad (k_1=3;\ j=2,3,\dots),\\ i+1 & \text{a többi esetben},\end{cases}$$

azaz

δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 ...
x	1	1	2	5	2	7	8	2	10	11	12	2	14	15 ...

$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \langle 1,2\rangle$, de M_1 nem generálható.

29.Tétel. *Az $A=(A,F,\delta)$ A-véges kváziautomata olyan A-részkváziautomatáinak száma, amelyeknek A_i $(i\geq 1)$ A-részkváziautomatája, nagyobb vagy egyenlő, mint*

$$\sum_{k=1}^{i} 2^{|A_{k-1}\setminus A_k|} - i + 1 \quad .$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha $V\subseteq A_{k-1}\setminus A_k$ $(k=1,2,\dots)$ akkor $A_V=(A_k\cup V,\ F,\ \delta_V)$ A olyan A-részkváziautomatája, amelynek A_k A-részkváziautomatája. Ez azt jelenti, hogy A -nak legalább $2^{|A_{i-1}\setminus A_i|}$ olyan A-részkváziautomatája van, amelynek A_k A-részkváziautomatája. Mivel $A=A_0\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\dots\supseteq A_i$, ezért A olyan A-részkváziautomatáinak száma, amelyekben A_i A-részkváziautomatája, valóban $\sum_{k=1}^{i} 2^{|A_{k-1}\setminus A_k|} - (i-1)$. / $(i-1)$-et azért kell levonni, mert A_k $(k=1,2,\dots,i-1)$ A_{k-1}-nek is, és önmagának is A-részkváziautomatája./ Q.e.d.

11.Példa. Az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata állapothalmaza $A=\langle 1,2,3,4,5,6,7\rangle$, a bemenő-félcsoportja az x által generált szabad félcsoport (egységelem nélküli).

δ	1	2	3	4	5	6	7
x	4	5	6	6	7	6	7

$A_1=\langle 4,5,6,7\rangle$, $A_2=\langle 6,7\rangle$, azaz $A\setminus A_1=\langle 1,2,3\rangle$ és $A_1\setminus A_2=\langle 4,5\rangle$.

$$\sum_{k=1}^{2} 2^{|A_{k-1}\setminus A_k|} - 2 + 1 = 2^{|A\setminus A_1|} + 2^{|A_1\setminus A_2|} - 1 = 2^3 + 2^2 - 1 = 11 .$$

Tehát $\mathcal{A}$ -nak legalább 11 olyan A-részkváziautomatája van, amelynek A_2 A-részkváziautomatája. A 29.Tétel bizonyitása alapján ilyen kváziautomaták állapothalmazai az A_2, $A_2 \cup \langle 4 \rangle$, $A_2 \cup \langle 5 \rangle$, A_1, $A_1 \cup \langle 1 \rangle$, $A_1 \cup \langle 2 \rangle$, $A_1 \cup \langle 3 \rangle$, $A_1 \cup \langle 1,2 \rangle$, $A_1 \cup \langle 1,3 \rangle$, $A_1 \cup \langle 2,3 \rangle$, A halmazok. Könnyen belátható, hogy $\mathcal{A}$ -nak vannak még olyan A-részkváziautomatái, amelyeknek A_2 A--részkváziautomatája.

12.Példa. Az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata állapothalmaza $A=\langle 1,2,3 \rangle$, a bemenő-félcsoportja az x elem által generált szabad félcsoport. /egységelem nélküli/.

δ	1	2	3
x	2	3	3

$A_1=\langle 2,3 \rangle$, $A_2=\langle 3 \rangle$, azaz $A \setminus A_1=\langle 1 \rangle$ és $A_1 \setminus A_2=\langle 2 \rangle$, $2^{|A \setminus A_1|}+2^{|A_1 \setminus A_2|}-2+1=3$. Ebben az esetben $\mathcal{A}$ -nak pontosan 3 olyan A-részkváziautomatája van, amelynek A_2 A-részkváziautomatája / $\mathcal{A}$, A_1, A_2/.

Az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomatát nilpotensnek nevezzük, ha van olyan n természetes szám, hogy $|A_n|=1$. Ha n a legkisebb ilyen tulajdonságu természetes szám, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ nilpotencia-foka n.

A következő tételt L.N.SEVRIN automatákra bizonyitotta be, de a tétel és bizonyitása könnyen átfogalmazható kváziautomatákra. / L.N.SEVRIN tételének bizonyitását l. például GÉCSEG F.-PEÁK I. [15] 230-231 o./

30.Tétel. Az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata karakterisztikus félcsoportja akkor és csak akkor nilpotens, ha A nilpotens kváziautomatáknak direkt összegére bomlik és van olyan N természetes szám, amelynél minden komponens nilpotencia-foka kisebb.

A 63. oldalon már megjegyeztük, hogy ha $M_1=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i\neq\emptyset$, akkor M_1 az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata A-részkváziautomatája. Képezhetjük az M_1 kváziautomata magjait is. Jelöljük ezeket $A_{1,i}$ -vel / $i=0,1,2,\cdots$; $A_{1,0}=M_1$ /, továbbá legyen $M_2=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_{1,i}$. Ezt folytathatjuk tovább, azaz, ha $M_{r-1}\neq\emptyset$ / $r\geq 1$, $M_0=A$, $A_{0,i}=A_i$ /, akkor legyen $M_r=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_{r-1,i}$ / $i\geq 0$; $A_{r-1,0}=M_{r-1}$ /. Az $A_{r-1,e}$ kváziautomatát A <u>r-edrendű alsó magjának</u> nevezzük, ha $A_{r-1,e}=M_r$. Ebben az esetben $A_{r-1,e}=M_r$ generálható.

<u>13.Példa</u>. Az A kváziautomata állapothalmaza a természetes számok halmaza, a bemenő-félcsoportja az x elem által generált szabad félcsoport/ egységelem nélküli/.

$$\delta(i,x)=\begin{cases} i & \text{ha } i \text{ páratlan},\\ 1 & \text{ha } i=2,\\ 2 & \text{ha } i=k_j=k_{j-1}+2j \ (k_1=4;\ j=2,3,\cdots),\\ i+2 & \text{a többi esetben}. \end{cases}$$

$M_1=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i=\langle 1,2,3,5,7,\cdots\rangle$ és $M_2=A_{1,1}=\langle 1,3,5,7,\cdots\rangle$. $A_{1,1}$ az A kváziautomata másodrendű alsó magja.

<u>14.Példa</u>. Az A kváziautomata állapothalmaza az egész számok halmaza, a bemenő-félcsoportja az x elem által generált szabad félcsoport/ egységelem nélküli/.

$$\delta(i,x)=\begin{cases} i & \text{ha } i(>0) \text{ páratlan},\\ i+2 & \text{ha } i(\geq 0) \text{ páros},\\ 0 & \text{ha } i=k_j=k_{j-1}-j \ (k_1=-1;\ j=2,3,\cdots),\\ i+1 & \text{a többi esetben}. \end{cases}$$

Könnyen belátható, hogy $M_1=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i=\langle 1,2,3,4,5,\cdots\rangle$, $M_2=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_{1,i}=\langle 1,3,5,\cdots\rangle$ és M_2 A generálható A-részkváziautomatája.

Nyilvánvalóan igazak a 21.Lemma és a 16.Következ-

mény általánositásai:

17.Következmény. Ha a $\mathcal{B}=(B,F,\delta')$ kváziautomata az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ kváziautomata generálható $\mathcal{A}$-részkváziautomatája, akkor $B \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} A_{r,i}$ $(r=0,1,2,\dots)$.

18.Következmény. Ha van olyan $r(\geq 0)$ egész szám, amelyre $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_{r,i} = \emptyset$, akkor az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ kváziautomatának nincs generálható $\mathcal{A}$-részkváziautomatája.

Legyen a $\mathcal{B}=(B,F,\delta')$ kváziautomata az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ $\mathcal{A}$-részkváziautomatája, $\overline{F}^B$ $\mathcal{B}$ karakterisztikus félcsoportja és $\overline{f}^B$ $\overline{F}^B$ $f(\in F)$ által reprezentált eleme. Nyilvánvaló, hogy $\overline{F}^B$ $\mathcal{A}$ $\overline{F}$ karakterisztikus félcsoportjának homomorf képe. / Az $\overline{f} \to \overline{f}^B$ $(\overline{f} \in \overline{F}^B)$ leképezés $\overline{F}$ -nak $\overline{F}^B$-re való homomorf leképezése./

Legyen $\langle \mathcal{A}_\lambda=(A_\lambda,F,\delta_\lambda), \lambda\in\Lambda\rangle^{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$-részkváziautomatáinak egy halmaza. Az $\mathcal{E}_\Lambda=(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda, F, \delta_\Lambda)$, és ha $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda \neq \emptyset$, akkor a $\mathcal{K}_\Lambda=(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda, F, \delta'_\Lambda)$ kváziautomaták $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$-részkváziautomatái. Továbbá

$$\bigwedge_{f\in F} f\left[\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{f}^{A_\lambda} \subseteq \overline{f}^{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda} \text{ és } \overline{f}^{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{f}^{A_\lambda}\right] .$$

Ha $A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, akkor

$$\bigwedge_{f\in F} f\left[\overline{f}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{f}^{A_\lambda}\right] .$$

Végül egy szükséges és elégséges feltétel adunk arra, hogy egy kváziautomatának mikor van ciklikus $\mathcal{A}$-részkváziautomatája.

22.Lemma. Az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ kváziautomatának akkor és csak akkor van ciklikus $\mathcal{A}$-részkváziautomatája, ha van olyan $a_0(\in A)$ állapota és $e(\in F)$, hogy $a_0=\delta(a_0,e)$.

Bizonyitás. Szükségesség. Legyen az $\mathcal{A}_1=(A_1,F,\delta_1)$ kváziautomata az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ kváziautomata ciklikus $\mathcal{A}$-

-részkváziautomatája, és $a_0 (\in A_1)$ A_1 generátoreleme. Nyilvánvaló, hogy van olyan $e (\in F)$, hogy $a_0 = \delta(a_0, e)$. Elegendőség. Tegyük fel, hogy valamilyen $a_0 (\in A)$-ra és $e (\in F)$-re $a_0 = \delta(a_0, e)$ teljesül. Az $A_{a_0} = (A_{a_0}, F, \delta_{a_0})$ kváziautomata A ciklikus A-részkváziautomatája, ahol A_{a_0} az a_0 állapotból elérhető halmazt jelenti. Q.e.d.

Ezek szerint minimálisan generálható kváziautomatának legalább annyi ciklikus A-részkváziautomatája van, mint egy minimális generátorrendszerének számossága./l. 9. oldalt/

19.Következmény. Ha az $A = (A, F, \delta)$ kváziautomata karakterisztikus félcsoportja jobbegységelemes, akkor A-nak van ciklikus A-részkváziautomatája.

Bizonyitás. Legyenek $a (\in A)$ és $f (\in F)$ tetszőlegesek, továbbá $\bar{e}$ F jobbegységeleme, akkor

$$\delta(a, f) = \delta(a, fe) = \delta(\delta(a, f), e),$$

azaz $\delta(a, f)$ és e teljesitik a 22.Lemma feltételét.Q.e.d.

CIKLIKUS KVÁZIAUTOMATÁK FÉLPERFEKT RÉSZKVÁZIAUTOMATÁIRÓL

A 43. oldalon a $*_{a_0}$ müveletet parciális müveletként kiterjesztettük az F_{a_0} halmazra.

31.Tétel./BABCSÁNYI I.[2]/ Ha az $\mathbb{A}=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata valamilyen a_0 generátorelemére $F'_{a_0}(\subseteq F_{a_0})$ a $*_{a_0}$ müveletre nézve csoportot alkot, akkor van $\mathbb{A}$ -nak olyan $\mathbb{A}'=(A',F',\delta')$ félperfekt részkváziautomatája, amelyre $F'^{*}_{a_0}\cong G(A')$ teljesül.

Bizonyitás. Legyen valamilyen $a_0(\in A)$ generátorelemre $F'^{*}_{a_0}(\subseteq F_{a_0})$ a $*_{a_0}$ müveletre nézve csoport. Az $\mathbb{A}$ kváziautomata $\mathbb{A}'=(A',F',\delta')$ részkváziautomatáját definiáljuk a következő módon:

$$b\in A' \Longleftrightarrow F_{a_0b}\in F'_{a_0} \quad ; \quad F'=\bigcup_{b\in A'} F_{a_0b} .$$

Nyilvánvaló, hogy F' F részfélcsoportja. Legyenek $b(\in A')$ és $f(\in F')$ tetszőlegesek. Van olyan $F_{a_0c}(\in F'_{a_0})$, hogy $f\in F_{a_0c}$, azaz $\delta'(a_0,f)=c$. Bármely $g(\in F_{a_0b})$-re $\delta'(a_0,g)=b$. Ha $F_{a_0b}*_{a_0}F_{a_0c}=F_{a_0d}$, akkor

$$\delta'(b,f)=\delta'(\delta'(a_0,g),f)=\delta'(a_0,gf)=d\in A',$$

azaz $\mathbb{A}'$ jól-definiált. Tekintsük A' tetszőleges b és c elemét, akkor $b=\delta'(a_0,f)$ $(f\in F_{a_0b})$ és $c=\delta'(a_0,g)$ $(g\in F_{a_0c})$. Mivel $F'^{*}_{a_0}$ csoport, ezért van olyan $F_{a_0x}(\in F'_{a_0})$, hogy

$$F_{a_0b}*_{a_0}F_{a_0x}=F_{a_0c} .$$

Ez azt jelenti, ha $h\in F_{a_0x}$, akkor

$$\delta'(b,h)=\delta'(\delta'(a_0,f),h)=\delta'(a_0,fh)=\delta'(a_0,g)=c .$$

Tehát $\mathbb{A}'$ erősen összefüggő. Legyenek most $b(\in A')$ és $f,g(\in F')$ olyanok, hogy $\delta'(b,f)=\delta'(b,g)=d$. Van olyan $h\in F'$, amelyre $b=\delta'(a_0,h)$, azaz $\delta'(a_0,hf)=\delta'(a_0,hg)=d$,

igy h_f, $h_g \in F_{a_0 d}$ $(\in F'_{a_0})$. Legyen most $f \in F_{a_0 c}$ és $g \in F_{a_0 c'}$ $(F_{a_0 c}, F_{a_0 c'} \in F'_{a_0})$. Mivel $F'^{*}_{a_0}$ csoport, ezért

$$F_{a_0 b} *_{a_0} F_{a_0 c} = F_{a_0 d} \quad , \quad F_{a_0 b} *_{a_0} F_{a_0 c'} = F_{a_0 d} \quad ,$$

azaz $F_{a_0 c} = F_{a_0 c'}$. Tekintsük most már A' egy további b' állapotát és F' olyan h' elemét, amelyekre $b' = \delta'(a_0, h')$ teljesül. Akkor

$$\delta'(b', f) = \delta'(\delta'(a_0, h'), f) = \delta'(a_0, h'f) = \delta'(a_0, h'g) = \delta'(b', g),$$

mivel van olyan $d' (\in A')$, hogy

$$F_{a_0 b'} *_{a_0} F_{a_0 c} = F_{a_0 d'} \quad , \quad \left(d' = \delta'(a_0, h'f) = \delta'(a_0, h'g)\right) .$$

Tehát A' állapot-független. Másrészt, ha $f, g \in F_{a_0 c}$ / $c (\in A')$ tetszőleges állapot/ és $b (\in A')$ olyanok, hogy $\delta'(b, f) = \delta'(b, g)$, akkor $\delta'(a_0, hf) = \delta'(a_0, hg)$ / $b = \delta'(a_0, h)$ /. Bármely $b' = \delta'(a_0, h') (\in A')$ állapotra

$$\delta'(b', f) = \delta'(a_0, h'f) = \delta'(a_0, h'g) = \delta'(b', g) ,$$

tehát $\overline{F'}$ elemei megegyeznek $F'^{*}_{a_0}$ elemeivel, így $\overline{F'} = F'^{*}_{a_0}$, azaz $\overline{F'}$ is csoport, ami azt jelenti, hogy A' félperfekt. A 24.Tételből következik, hogy $F'^{*}_{a_0} \cong G(A')$. Q.e.d.

Az $A = (A, F, \delta)$ kváziautomata egy $A' = (A', F', \delta')$ részkváziautomatáját A <u>teljes részkváziautomatájának</u> nevezzük, ha minden $a (\in A')$-ra és $f (\in F)$-re igaz a

$$\delta(a, f) \in A' \implies f \in F'$$

implikáció.

<u>32.Tétel.</u>/DARÓCZY I. 2 / <u>Az $A = (A, F, \delta)$ ciklikus kváziautomata $G(A)$ automorfizmuscsoportjának bármely L részcsoportjához van A-nak olyan $A' = (A', F', \delta')$ teljes félperfekt részkváziautomatája, hogy $G(A') \cong L$</u> .

<u>Bizonyítás.</u> Legyen L tetszőleges részcsoportja $G(A)$-nak. Tekintsük valamilyen a_0 generátorelemre a

$$T'_{a_0} = \langle F_{a_0 \alpha(a_0)} \mid \alpha \in L \rangle \quad (\subseteq F_{a_0})$$

halmazt. Nyilvánvaló, hogy T'_{a_0} -ben is bevezethető a $*_{a_0}$ művelet, s erre a műveletre nézve T'_{a_0} csoportot alkot. Jelöljük ezt a csoportot $T'^*_{a_0}$-gal. A 14.lemma kiterjesztése szerint $T'^*_{a_0} \cong L$. A 31.Tétel szerint A következő $A'=(A',F',\delta')$ részkváziautomatája félperfekt:

$$A'=\langle \alpha(a_0) \mid \alpha \in L \rangle \ , \quad F'=\bigcup_{\alpha\in L} F_{a_0\alpha(a_0)} \ ,$$

és $T'^*_{a_0} \cong G(A')$, azaz $G(A') \cong L$. Megmutatjuk, hogy az A' félperfekt kváziautomata teljes. Legyen $b \in A'$ és $\delta(b,f)\in A'$ $(f\in F)$. Ez azt jelenti, hogy $F_{a_0\delta(b,f)} \in T'_{a_0}$ és $F_{a_0 b} \in T'_{a_0}$ teljesülnek. Tekintsük L azon α elemét, amelyre $\alpha(a_0)=b$. Van olyan $c(\in A')$, hogy

$$F_{a_0 b} *_{a_0} F_{a_0 c} = F_{a_0\delta(b,f)} \ ,$$

mivel $T'^*_{a_0}$ csoport. Tehát $F_{a_0 c} \subseteq F_{b\,\delta(b,f)}$, azaz ha $h \in F_{a_0 c}$, akkor

$$\delta(b,h)=\delta(b,f) \Rightarrow \delta(\alpha(a_0),h)=\delta(\alpha(a_0),f) \Rightarrow \alpha(\delta(a_0,h)) = \alpha(\delta(a_0,f)) \Rightarrow \delta(a_0,h)=\delta(a_0,f) \Rightarrow f\in F_{a_0 c} \Rightarrow f\in F'.$$

Ezzel a bizonyitást befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a 26., 31. és 32. Tételek B. BARNES [5] erősen összefüggő A-véges kvázigautomatákra vonatkozó eredményeinek általánositásai ciklikus kvázigautomatákra.

<u>23.Lemma.</u> <u>Ha $A'=(A',F',\delta')$ az $A=(A,F,\delta)$ kvázigautomata teljes részkvázigautomatája, akkor A $\overline{F}$ karakterisztikus félcsoportjának van olyan részfélcsoportja, amely homomorf módon leképezhető A' $\overline{F'}$ karakterisztikus félcsoportjára.</u>

<u>Bizonyitás.</u> Először megmutatjuk, hogy F' $\overline{F}$ -beli osztályok egyesitése. Ha $F'=F$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $F'\neq F$. Legyen $f\in F'$ és $g\in F\setminus F'$ olyan, ho[illegible], azaz

olyan, hogy $\overline{f} = \overline{g}$, azaz

$$\overset{\forall}{a \in A} a\,[\,\delta(a,f) = \delta(a,g)\,] .$$

Igy, ha $a \in A'$, akkor is $\delta(a,f) = \delta(a,g)$. Mivel $f \in F'$, ezért $\delta(a,f) \in A'$, de akkor $\delta(a,g) \in A'$. Az A' teljes volta miatt $g \in F'$. Ellentmondás. Azaz F' valóban $\overline{F}$ --beli osztályok egyesitése. Jelöljük ezeknek az osztályoknak a halmazát $\overline{F'}$ -val. Nyilvánvaló, hogy $\overline{f} \subseteq \overline{\overline{f}}$ $(\overline{f} \in \overline{F'}, \overline{\overline{f}} \in \overline{\overline{F'}})$. $\overline{F'}$ $\overline{F}$ részfélcsoportja, mivel F' is részfélcsoportja F -nek. Egyszerüen megmutatható, hogy az $\overline{f} \longrightarrow \overline{\overline{f}}\ (\overline{f} \in \overline{F'})$ leképezés $\overline{F'}$ $\overline{\overline{F'}}$ -ra való homomorf leképezése. Q.e.d.

<u>20.Következmény. Ha A' az A állapot-független kváziautomata teljes részkváziautomatája, akkor A' karakterisztikus félcsoportja izomorf A karakterisztikus félcsoportjának egy részfélcsoportjával.</u>

A bizonyitáshoz csupán azt kell megjegyezni, hogy $\overline{f} = \overline{\overline{f}}\ (\overline{f} \in \overline{F'})$.

Megjegyezzük, hogy ha egy ciklikus kváziautomata generátoreleme eleme a ciklikus kváziautomata egy részkváziautomatájának, akkor a részkváziautomata minden generátoreleme az eredeti kváziautomatának is generátoreleme.

Mivel a 32.Tételben szereplő minden teljes félperfekt részkváziautomata tartalmazza az eredeti kváziautomatának ugyanazt a generátorelemét, ezért a következő tétel ciklikus állapot-független kváziautomatákra a 32.Tétel megforditásának tekinthető. Egyelőre nincs eldöntve az a kérdés, hogy a 32.Tétel megforditása tetszőleges ciklikus kváziautomatára érvényes-e?

33.Tétel. Legyen az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kvázi-automata állapot-független, és a_0 A egy generátoreleme. Ha $A'=(A',F',\delta')$ A olyan teljes erősen összefüggő részkváziautomatája, amelyre $a_0\in A'$, akkor van $G(A)$-nak olyan L részcsoportja, hogy $G(A')\cong L$.

Bizonyitás. Mivel állapot-független kváziautomata részkváziautomatája is állapot-független, ezért A' erősen összefüggő állapot-független kváziautomata. A 9.Következmény szerint A' minden endomorfizmusa automorfizmus. Definiáljuk $\alpha_{a_0,h}$-t $(h\in F')$ ugy, mint a 13.Tétel bizonyitásában a (18) leképezést. A 13.Tétel szerint igy A' minden automorfizmusát megkapjuk. Terjesszük ki az $\alpha_{a_0,h}$ $(h\in F')$ értelmezését az A kváziautomatára a következő módon:

$$\alpha'_{a_0,h}(\delta(a_0,f))=\delta(a_0,hf)\quad(f\in F).$$

A 13.Tétel szerint $\alpha'_{a_0,h}$ A egy-egyértelmü endomorfizmusa. Könnyen belátható, hogy A' minden eleme A-nak generátoreleme. Igy a 15.Tétel szerint $\alpha'_{a_0,h}\in G(A)$. Ha $h,k\in F'$, akkor a 37. oldalon 13.Tétel bizonyitásában láttuk, hogy $\alpha'_{a_0,h}\alpha'_{a_0,k}=\alpha'_{a_0,hk}$, azaz $L=\{\alpha'_{a_0,h}\mid h\in F'\}$ $G(A)$ részfélcsoportja. Nyilvánvaló, hogy $\alpha_{a_0,h}\longrightarrow\alpha'_{a_0,h}$ $(h\in F')$ $G(A')$ L-re való izomorf leképezése. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy ha a 33.Tételben A' félperfekt, akkor A' karakterisztikus csoportja izomorf $G(A')$-vel. /1.24.Tételt/ A 20.Következmény szerint $G(A')$ izomorf $\overline{F}$ egy részcsoportjával, azaz $G(A)$-nak van olyan részcsoportja, amely izomorf $\overline{F}$ egy részcsoportjával.

Legyen az $A=(A,F,\delta)$ ciklikus kváziautomata két generátoreleme a_1 és a_2, továbbá L $G(A)$ tetszőleges részcsoportja. Ha L és a_1 illetve a_2 segitségével meg-

konstruáljuk a 32.Tétel bizonyitásában látott módon az $A_1=(A_1, F_1, \delta_1)$ illetve $A_2=(A_2, F_2, \delta_2)$ teljes félperfekt részkvéziautomatákat, akkor a két részkvéziautomata állapothalmaza diszjunkt vagy egyenlő. Sőt, ha $A_1=A_2$, akkor $F_1=F_2$ is fennáll, vagyis a két kvéziautomata megegyezik. Legyen ugyanis $c\in A_1\cap A_2$. Akkor $c=\alpha(a_1)=\alpha'(a_2)$ $(\alpha,\alpha'\in L)$. Ezek szerint $a_1\in A_2$ és $a_2\in A_1$. Legyen $b(\in A_1)$ tetszőleges további állapot, akkor $b=\beta(a_1)$ $(\beta\in L)$, de $a_1=\alpha^{-1}\alpha'(a_2)$, azaz $b=\beta\alpha^{-1}\alpha'(a_2)\in A_2$. Ez azt jelenti, hogy $A_1=A_2$. Minden $F_{a_1\alpha(a_1)}$ osztályhoz található olyan $F_{a_2\gamma(a_2)}$ osztály, hogy közös részük nem üres. Legyen ugyanis $f\in F_{a_1\alpha(a_1)}$ és $\beta(a_1)=a_2$. Ugy

$$\delta(a_2,f)=\beta(\delta(a_1,f))=\beta\alpha(a_1)=\beta\alpha\beta^{-1}(a_2),$$

azaz $\gamma=\beta\alpha\beta^{-1}$. Ebből következik, hogy $F_{a_1\alpha(a_1)}\subseteq F_{a_2\gamma(a_2)}$. A másik irányú tartalmazás is könnyen belátható. A bizonyitásban a_1 és a_2 szerepét felcserélve, kapjuk, hogy $F_1=F_2$. Ezek szerint igaz a

21.Következmény./BADCSÁNYI I.[2]/ Ha az $A=(A,F,\delta)$ kvéziautomata erősen összefüggő, akkor $G(A)$ minden L részcsoportja segitségével megadható az A állapothalmaznak olyan osztályozása, amelynek minden osztálya az A egy teljes félperfekt részkvéziautomatájának állapothalmaza, és L izomorf ennek a részkvéziautomatának a karakterisztikus csoportjával.

A következmény bizonyitása a 24. és a 32.Tétel, valamint az előző megjegyzés alapján nyilvánvaló.

Természetesen a 21.Következmény feltételei mellett, ha K az L valódi részcsoportja, akkor A K -szerinti osztályozása finomabb, mint L -szerinti osztályozása.

Ha ι $G(A)$ egységeleme, akkor $\{\iota\}$ is részcsoportja $G(A)$ -nak. Az $\{\iota\}$ -szerinti osztályozás a legfinomabb, minden részkváziautomatának egy állapota van. A 21.Következményben leirt osztályozások közül a legdurvább a $G(A)$ -szerinti osztályozás.

Legyen $A'_a = \langle \delta(a,f) \mid f \in Z(A) \rangle$, ahol $Z(A)$ az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata centruma /1.24.oldalt/ és a A tetszőleges, de rögzitett állapota.

34.Tétel./BABCSÁNYI I.[2]/ Az $A'_a=(A'_a, Z(A), \delta'_a)$ kváziautomata az $A=(A,F,\delta)$ félperfekt kváziautomata perfekt részkváziautomatája.

Bizonyitás. Nyilvánvaló, hogy A'_a jól-definiált. A'_a konstrukciójából következik, hogy A'_a ciklikus. Mivel A állapot-független, ezért A'_a is az. A 20.Lemma szerint $Z(A)$ $\overline{F}$ -beli osztályok egyesitése. Jelöljük ezeknek az osztályoknak a halmazát $\overline{Z(A)}$ -sal. $\overline{Z(A)}$ $\overline{F}$ centruma /1. 61.oldalt/. Az állapot-függetlenségből azonnal következik, hogy $\overline{Z(A)}$ A'_a karakterisztikus csoportja. Ciklikus csoport-tipusu kváziautomata félperfekt. Mivel $\overline{Z(A)}$ Abel-csoport, igy A'_a valóban perfekt. Q.e.d.

A 34.Tételben szereplő konstrukciót minden $a(\in A)$-ra elvégezve, a kapott perfekt részkváziautomaták egybeesnek, vagy páronként idegenek, de bemenő-félcsoportjuk közös / $Z(A)$ /, állapothalmazaik egyesitése kiadja A -t.

Mivel minimálisan generálható kváziautomatának van ciklikus A-részkváziautomatája /1.69.oldalt/, és a 32.Tétel szerint ciklikus kváziautomatának van félperfekt részkváziautomatája, ezért a 34.Tételt felhasználva kapjuk,

hogy minimálisan generálható kváziautomatának van perfekt részkváziautomatája.

Megjegyezzük, hogy ha az $A=(A,F,\delta)$ kváziautomata $Z(A)$ centruma nem üres, akkor az $A'=(A,Z(A),\delta')$ kváziautomata A kommutativ részkváziautomatája. Továbbá a 34.Tételben definiált A'_a $(a\in A)$ kváziautomata az $A_a=(A_a,F,\delta_a)$ kváziautomata kommutativ részkváziautomatája, ahol A_a az $a(\in A)$ állapotból elérhető halmazt jelöli /1. 9. oldalt/.

KVÁZIAUTOMATÁK A-DIREKT SZORZATÁRÓL

Az $A_i=(A_i, F, \delta_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ kváziautomaták A-direkt szorzatának nevezzük azt az $A=(A, F, \delta)$ kváziautomatát, amelyre $A=A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ és

$$\delta((a_1,a_2,\dots,a_n), f)=(\delta_1(a_1,f), \delta_2(a_2,f),\dots,\delta_n(a_n,f))$$

$(a_i\in A_i, f\in F)$ teljesülnek. Az A_i kváziautomatákat szokás A komponenseinek hivni.

Az A-direkt szorzat fontos szerepet játszik kváziautomaták olyan egyszerübb, közös bemenő-félcsoportu kváziautomatákból való felépitésében, amelynek során a bemenő-félcsoport nem változik. Ilyen tulajdonságu a kváziautomaták direkt összege is /l. ll. oldalt/. A két kompozició „müködése" különböző. Mig bármely „bemenő jel" hatására az A-direkt szorzat minden komponense, addig a direkt összegnek csak egy komponense „müködik".

Ebben a fejezetben annak a kérdésnek a vizsgálatával foglalkozunk, hogy a kváziautomaták A-direkt szorzata mikor örzi meg a komponensek bizonyos közös tulajdonságait, illetve egy kváziautomata mikor bontható fel ugyanolyan tipusu kváziautomaták A-direkt szorzatára. Továbbá vizsgáljuk a kváziautomaták A-direkt szorzatának endomorfizmusait.

Az $A_i=(A_i, F, \delta_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ kváziautomatákat / maximálisan, végesen, ciklikusan / kapcsoltaknak nevezzük, ha vannak az A_i kváziautomatáknak olyan G_i / minimális, véges, egyelemü / generátorrendszerei, amelyek teljesitik a következő feltételt:

Minden $a_i\,(\in A_i)$-hez van olyan $a_{i0} \in G_i$ és $f \in F$, hogy

$$\delta_i(a_{i0}, f) = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) .$$

A definícióból látható, hogy a / maximálisan, végesen / kapcsolt kváziautomaták / minimálisan, végesen / generálhatók, ciklikusan kapcsolt kváziautomaták pedig ciklikusak. A 11. oldalon tett megjegyzés szerint nyilvánvaló, hogy / végesen, ciklikusan / kapcsolt kváziautomaták homomorf képe is / végesen, ciklikusan / kapcsolt. Maximálisan kapcsolt kváziautomaták izomorf képe is maximálisa kapcsolt.

<u>35.Tétel.</u> <u>Az</u> $A_i = (A_i, F, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ <u>kváziautomaták</u> $A = (A, F, \delta)$ <u>A-direkt szorzata akkor és csak akkor generálható / generálható végesen, ciklikus /, ha az</u> A_i <u>kváziautomaták kapcsoltak / végesen kapcsoltak, ciklikusan kapcsoltak /.</u>

<u>Bizonyítás.</u> Legyenek az $A_i = (A_i, F, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ kváziautomaták kapcsoltak és a G_i generátorrendszerek a definícióban megkövetelt tulajdonságuak..Megmutatjuk, hogy $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ az A_i kváziautomaták $A = (A, F, \delta)$ A-direkt szorzatának egy generátorrendszere. Legyen ugyanis $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ A tetszőleges állapota. Mivel az A_i kváziautomaták kapcsoltak, így van olyan $f\,(\in F)$ és minden i-re $(i = 1, 2, \dots, n)$ van olyan $a_{i0}\,(\in G_i)$ állapot, hogy $a_i = \delta_i(a_{i0}, f)$ teljesül, azaz

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \delta((a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}), f) .$$

Nyilvánvaló, hogy $(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}) \in G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$.
Ha a G_i generátorrendszerek végesek / egyelemüek /, akkor a $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ generátorrendszer is véges / egyelemü /.

Fordítva, tegyük fel, hogy az A_i $(i = 1, 2, \dots, n)$

kváziautomaták $A=(A, F, \delta)$ A-direkt szorzata generálható, és legyen G A egy generátorrendszere. Definiáljuk a G_i $(i=1,2,\dots,n)$ halmazokat a következő módon:

$$b_i \in G_i \Longleftrightarrow (b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n) \in G ,$$

ahol $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in A$. A G_i halmazok az A_i kváziautomaták olyan generátorrendszerei, amelyek teljesitik a definició feltételeit, ezért az A_i kváziautomaták kapcsoltak. Ha G véges /egyelemü /, akkor G_i $(i=1,2,\dots,n)$ is véges / egyelemü /. Q.e.d.

A 35.Tétel szerint generálható / végesen generálható, ciklikus / kváziautomata csak kapcsolt / végesen kapcsolt, ciklikusan kapcsolt / kváziautomaták A-direkt szorzatára bontható fel.

<u>22.Következmény. Ha az</u> $A_i=(A_i, F, \delta_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ <u>kváziautomaták maximálisan kapcsoltak, akkor</u> $A=(A, F, \delta)$ <u>A-direkt szorzatuk minimálisan generálható.</u>

<u>Bizonyitás.</u> Ha a G_i $(i=1,2,\dots,n)$ minimális generátorrendszerek a definicióban megkövetelt tulajdonságuak, akkor a 35.Tétel bizonyitása szerint $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ A egy generátorrendszere. Tegyük fel, hogy $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ nem minimális generátorrendszere A -nak, akkor van a $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ generátorrendszernek olyan valódi G részhalmaza, amely szintén generátorrendszere A -nak. Legyen $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n) \setminus G$. Mivel G A generátorrendszere, igy van olyan $(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}) \in G$ és $f \in F$, hogy

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \delta((a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}), f) .$$

Mivel $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n) \setminus G$ és $(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}) \in G$, igy vannak olyan a_i és a_{i0} $(1 \leqq i \leqq n)$ állapotok, amelyek

nem egyenlők. Az A-direkt szorzat definíciója miatt $a_i = \delta_i(a_{i0}, f)$. Ez azonban G_i minimális volta miatt csak úgy állhat fenn, ha $a_i = a_{i0}$. Ellentmondás. Ami azt jelenti, hogy $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$ szükségképpen A minimális generátorrendszere. Q.e.d.

A következő példa mutatja, hogy a 22.Következmény megfordítása nem igaz.

15.Példa. Legyen $F = \{e, f\}$ másodrendű Ábel-félcsoport / $f^2 = f$, $e^2 = e$ és $ef = fe = f$ /, továbbá $A_1 = \langle 1, 2 \rangle$. Definiáljuk az $A_1 = (A_1, F, \delta_1)$ átmenet-függvényét a következő táblázattal:

δ_1	1	2
e	1	2
f	2	2

Az A_1 kváziautomata ciklikus, $\langle 1 \rangle$ az egyetlen minimális generátorrendszere. Legyen az $A = (A, F, \delta)$ kváziautomata A_1 önmagával alkotott A-direkt szorzata, azaz $A = A_1 \times A_1$ és

δ	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
e	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
f	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)

Az A kváziautomata is minimálisan generálható, egy minimális generátorrendszere van: $\langle (1,1), (1,2), (2,1) \rangle$. Az A_1 kváziautomata azonban nem maximálisan kapcsolt önmagával. / Nincs olyan $g \in F$, hogy $2 = \delta_1(1, g)$ és $1 = \delta_1(1, g)$ teljesülne./

Az $A_i = (A_i, F, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ kváziautomatákat erősen kapcsoltaknak nevezzük, ha bármely $a_i, b_i (\in A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ n számú állapot-párhoz van olyan $f \in F$,

hogy $\delta_i(a_i, f) = b_i$.

Ha a kváziautomaták erősen kapcsoltak, akkor erősen összefüggők is /A.C.FLECK [11] /.

Az erősen kapcsolt kváziautomaták fogalmát A.C. FLECK [11] vezette be, ebből kaptuk természetes általánosításával a / maximálisan, végesen, ciklikusan / kapcsolt kváziautomaták fogalmát.

36.Tétel./A.C.FLECK [11] / Az A_i $(i=1,2,\dots,n)$ kváziautomaták A-direkt szorzata akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha az A_i kváziautomaták erősen kapcsoltak.

A tétel bizonyitása egyszerü.

37.Tétel./BABCSÁNYI I.[1]/ Állapot-független kváziautomaták A-direkt szorzata is állapot-független.

Bizonyitás. Az $A_i=(A_i, F, \delta_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ állapot-független kváziautomaták A-direkt szorzata legyen az $A=(A, F, \delta)$ kváziautomata. Ha az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $(\in A)$ állapotra és az f, g $(\in F)$ elemekre

$$\delta((a_1, a_2, \dots, a_n), f) = \delta((a_1, a_2, \dots, a_n), g)$$

teljesül, akkor az A-direkt szorzat definiciója miatt

$$\delta_i(a_i, f) = \delta_i(a_i, g) \quad (i=1,2,\dots,n) .$$

Legyen most $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ A egy további állapota. Mivel az A_i kváziautomaták állapot-függetlenek, ezért

$$\delta_i(b_i, f) = \delta_i(b_i, g) \quad (i=1,2,\dots,n),$$

amiből adódik, hogy

$$\delta((b_1, b_2, \dots, b_n), f) = \delta((b_1, b_2, \dots, b_n), g) ,$$

azaz A valóban állapot-független. Q.e.d.

Ebből következik, hogy állapot-független kváziautomaták A-direkt szorzatára csak állapot-független kvázi-

automata bontható fel. Állapot-független kváziautomaták azonban nem csak állapot-független kváziautomaták A-direkt szorzatára bonthatók fel. Erre vonatkozóan tekintsük a

16.Példát./A.C.PLECK [11] , CH.A.TRAUTH [22] /

Legyen az $F(X)$ bemenő-félcsoport az $X=\langle x,y\rangle$ halmaz által generált egységelem nélküli szabad félcsoport, $A_1=\langle 1,2,3\rangle$ és $A_2=\langle 4,5\rangle$. Az $\mathcal{A}_1=(A_1,F(X),\delta_1)$ és az $\mathcal{A}_2=(A_2,F(X),\delta_2)$ kváziautomaták átmenet-függvényét az $A_1\times X$ illetve az $A_2\times X$ szorzathalmazon a következő táblázatok adják:

δ_1	1	2	3
x	2	1	3
y	2	3	1

δ_2	4	5
x	5	4
y	4	5

Legyen az $\mathcal{A}=(A,F(X),\delta)$ kváziautomata $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ A-direkt szorzata, akkor

δ	(1,4)	(1,5)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)
x	(2,5)	(2,4)	(1,5)	(1,4)	(3,5)	(3,4)
y	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(1,4)	(1,5)

Könnyen belátható, hogy $\mathcal{A}$ félperfekt / így állapot-független is /, de $\mathcal{A}_1$ nem állapot-független. / Megjegyezzük, hogy a 2.Példában szereplő kváziautomata $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ direkt összege./

Igaz viszont a

38.Tétel./BABCSÁNYI I.[1]/ Legyen az $\mathcal{A}=(A,F,\delta)$ állapot-független kváziautomata az $\mathcal{A}_1=(A_1,F,\delta_1)$ és az $\mathcal{A}_2=(A_2,F,\delta_2)$ kváziautomaták A-direkt szorzata. Ha $\mathcal{A}_2$ teljesiti a

$$\delta_1(a_1,f)=\delta_1(a_1,g)\quad (a_1\in A_1\,;\,f,g\in F)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \underset{a_2\in A_2}{\exists a_2}\,[\delta_2(a_2,f)=\delta_2(a_2,g)]$$

feltételt, akkor A_1 állapot-független.

Bizonyitás. Legyenek $a_1 (\in A_1)$, $f, g (\in F)$ olyanok, amelyekre $\delta_1(a_1, f) = \delta_1(a_1, g)$ teljesül. A feltétel szerint van olyan $a_2 (\in A_2)$ állapot, hogy $\delta_2(a_2, f) = \delta_2(a_2, g)$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\delta((a_1, a_2), f) = \delta((a_1, a_2), g) .$$

Legyen most b_1 A_1 egy további állapota. Mivel A állapot-független, ezért

$$\delta((b_1, a_2), f) = \delta((b_1, a_2), g) ,$$

amiből következik, hogy $\delta_1(b_1, f) = \delta_1(b_1, g)$, azaz A_1 is állapot-független. Q.e.d.

23.Következmény./BABCSÁNYI I.[1]/ Legyen az $A = (A, F, \delta)$ állapot-független kváziautomata az $A_1 = (A_1, F, \delta_1)$ és az $A_2 = (A_2, F, \delta_2)$ kváziautomaták A-direkt szorzata. Ha bármely $f, g (\in F)$ párra

$$\exists_{a_1 \in A_1} a_1 [\delta_1(a_1, f) = \delta_1(a_1, g)] \iff \exists_{a_2 \in A_2} a_2 [\delta_2(a_2, f) = \delta_2(a_2, g)]$$

teljesül, akkor A_1 és A_2 is állapot-független.

A következő lemmát A.C.PLECK [11] automorfizmus-csoportokra bizonyitotta be, de a bizonyitás endomorfizmus-félcsoportok esetén is ugyanugy végezhető el.

24.Lemma. Ha az $A = (A, F, \delta)$ kvázinautomata az $A_1 = (A_1, F, \delta_1)$ és az $A_2 = (A_2, F, \delta_2)$ kvázinautomaták A-direkt szorzata, akkor

$$E(A_1) \otimes E(A_2) \subseteq E(A) .$$

Bizonyitás. Legyen $(\alpha, \beta) \in E(A_1) \otimes E(A_2)$ és $(a_1, a_2) \in A$. Akkor $(\alpha, \beta)(a_1, a_2) = (\alpha(a_1), \beta(a_2))$, és

$$(\alpha, \beta)(\delta((a_1, a_2), f)) = (\alpha, \beta)(\delta_1(a_1, f), \delta_2(a_2, f)) =$$
$$= (\alpha(\delta_1(a_1, f)), \beta(\delta_2(a_2, f))) = (\delta_1(\alpha(a_1), f), \delta_2(\beta(a_2), f)) =$$
$$= \delta((\alpha(a_1), \beta(a_2)), f) = \delta((\alpha, \beta)(a_1, a_2), f) \quad (f \in F) ,$$

azaz $(\alpha, \beta) \in E(A)$. Q.e.d.

. Azt, hogy általában az $E(A_1) \otimes E(A_2) = E(A)$ egyenlőség nem áll fenn a 16.Példa is mutatja /l.A.C.FLECK [11] /.

39.Tétel./BABCSÁNYI I.[3]/ Ha az $A = (A, F, \delta)$ ciklikus kvázinautomata az $A_i = (A_i', F, \delta_i')$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ állapot-független kvázinautomaták A-direkt szorzata, akkor

$$E(A) = E(A_1) \otimes E(A_2) \otimes \dots \otimes E(A_n) .$$

Bizonyitás. Az egyszerüség kedvéért a tételt $n = 2$ esetre bizonyitjuk be, $n > 2$ esetben a bizonyitás ugyanugy végezhető el.

A 24.Lemma szerint $E(A_1) \otimes E(A_2) \subseteq E(A)$. Legyen most $\alpha \in E(A)$, és definiáljuk az α_i $(i = 1, 2)$ leképezéseket a következő módon:

$$\alpha_i(a_i) = b_i \quad (a_i, b_i \in A_i') \iff \alpha(a_1, a_2) = (b_1, b_2) .$$

Megmutatjuk, hogy α_i A_i önmagába való egyértelmü leképezése. Rögzitsük az a_1 állapotot, s legyen

$$\alpha(a_1, a_2') = (b_1', b_2') \quad (a_2' \in A_2 , b_i' \in A_i')$$

Tekintsük A egy (a_0, b_0) generátorelemét. Vannak olyan f, $g (\in F)$, hogy $\delta((a_0, b_0), f) = (a_1, a_2)$ és $\delta((a_0, b_0), g) = (a_1, a_2')$. Igy $a_1 = \delta_1(a_0, f) = \delta_1(a_0, g)$.

A_1 állapot-függetlensége miatt

$$\bigwedge_{c_1 \in A_1} c_1 \, [\delta_1(c_1, f) = \delta_1(c_1, g)]$$

teljesül. Legyen $\alpha(a_0, b_0) = (d_1, d_2)$ $(d_i \in A_i')$, akkor

$$(b_1, b_2) = \alpha(a_1, a_2) = \alpha(\delta((a_0, b_0), f)) =$$
$$= \delta(\alpha(a_0, b_0), f) = \delta((d_1, d_2), f) = (\delta_1(d_1, f), \delta_2(d_2, f)) ,$$
$$(b_1', b_2') = \alpha(a_1, a_2') = \alpha(\delta((a_0, b_0), g)) =$$
$$= \delta((d_1, d_2), g) = (\delta_1(d_1, g), \delta_2(d_2, g)) .$$

Az előzőek szerint

$$b_1 = \delta_1(d_1, f) = \delta_1(d_1, g) = b_1' ,$$

azaz α_1 egyértelmű. Hasonlóan látható be, hogy α_2 A_2 önmagába való egyértelmű leképezése. Ezek után megmutatjuk, hogy α_i endomorfizmus:

$$\alpha(\delta_1(a_1,f),\delta_2(a_2,f))=\alpha(\delta((a_1,a_2),f))=\delta(\alpha(a_1,a_2),f)=$$
$$=\delta((b_1,b_2),f)=(\delta_1(b_1,f),\delta_2(b_2,f)) \quad (a_i,b_i\in A_i;\ f\in F),$$

azaz

$$\alpha_i(\delta_i(a_i,f))=\delta_i(b_i,f)=\delta_i(\alpha_i(a_i),f).$$

Ez azt jelenti, hogy $\alpha_i\in E(A_i)$. Definició szerint minden $(a_1,a_2)\,(\in A)$ állapot-párra

$$\alpha(a_1,a_2)=(b_1,b_2)=(\alpha_1,\alpha_2)(a_1,a_2),$$

tehát $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in E(A_1)\otimes E(A_2)$. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy a tétel feltételei mellett az A és az A_i $(i=1,2,\dots,n)$ kváziautomaták mindegyike ciklikus állapot-független, sőt a 35.Tétel szerint az A_i kváziautomaták ciklikusan kapcsoltak.

A 39.Tétel állitása automorfizmuscsoportokra is igaz. Ha ugyanis $\alpha\in G(A)$, akkor könnyen látható, hogy α_i $(i=1,2)$ A_i önmagára való leképezése, ahol $(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha$. Továbbá, ha például $\alpha_1(a_1)=\alpha_1(a_1')$ $(a_1,a_1'\in A_1)$, akkor tetszőleges $a_2\,(\in A_2)$ állapotra $\alpha(a_1,a_2)=\alpha(a_1',a_2)$ teljesül. Mivel α automorfizmus, ezért $(a_1,a_2)=(a_1',a_2)$, azaz $a_1=a_1'$, tehát α_1 egy-egyértelmű leképezés. Ugyanigy látható be, hogy α_2 is egy-egyértelmű.

Legyen $A=(A,F,\delta)$ tetszőleges kvázisutomata, és A_a az $a\,(\in A)$ állapotból elérhető halmaz /1.9.oldalt/. Definiáljuk A_a -n a következő műveletet:

$$\delta(a,f)*^a\delta(a,g)=\delta(a,fg) \quad (f,g\in F).$$

Ha A állapot-független, akkor A_a a $*^a$ műveletre nézve félcsoportot alkot. Ebben az esetben $(A_a,*^a)\cong\overline{F}$, ahol

az izomorfizmust a $\delta(a,f) \longrightarrow \overline{f}$ $(f \in F)$ leképezés szolgáltatja. Ha az $\mathbb{A}$ kváziautomata csoport-tipusu, akkor bármely $a(\in A)$ -ra az $\mathbb{A}_a=(A_a, F, \delta_a)$ kváziautomata félperfekt. Az ugyanis nyilvánvaló, hogy $\mathbb{A}_a$ erősen összefüggő és állapot-független. A 10.Lemma szerint $\mathbb{A}_a$ karakterisztikus félcsoportja csoport. Ha $\mathbb{A}$ ciklikus csoport-tipusu / azaz félperfekt / kváziautomata, akkor bármely $a(\in A)$ -ra $A_a = A$, s igy $(A, *^a) \cong \overline{F}$. A 24.Tétel alapján kapjuk, hogy $G(A) \cong (A, *^a)$ $(a \in A)$. / Könnyen belátható, hogy egy megfelelő izomorfizmus az $\alpha \longrightarrow \alpha(a)$ $(\alpha \in G(A))$ leképezés.//1.CH.A.TRAUTH [22] /

<u>40.Tétel</u>./CH.A.TRAUTH [22]/ <u>Az $\mathbb{A}=(A, F, \delta)$ félperfekt kváziautomata akkor és csak akkor áll elő az $\mathbb{A}_i=(A_i, F, \delta_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ félperfekt kváziautomaták A-direkt szorzataként, ha</u>

$$G(A) \cong G(A_1) \otimes G(A_2) \otimes \dots \otimes G(A_n)$$

<u>teljesül.</u>

<u>Bizonyitás.</u> A tételt $n=2$ esetre bizonyitjuk, $n>2$ esetben a bizonyitás hasonlóan történik.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy $G(A)=G_1 \otimes G_2$ / az izomorfia helyett az egyszerüség kedvéért egyenlőséget veszünk./ A tétel előtti megjegyzések szerint rögzitett $a(\in A)$ -ra $\psi(\alpha)=\alpha(a)$ $(\alpha \in G(A))$ $G(A)$ -nak $(A, *^a)$-ra való izomorfizmusa. Definiáljuk a következő $\delta_i' : G_i \times F \longrightarrow G_i$ $(i=1,2)$ leképezéseket, amelyekre $(\delta_1(\alpha_1, f), \delta_2(\alpha_2, f)) = \psi^{-1}(\delta(\psi(\alpha_1, \alpha_2), f))$ $(\alpha_i \in G_i, f \in F)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a δ_i leképezések jól-definiáltak. A 23.Tétel szerint bármely $f(\in F)$ -re $\delta(a,f)=\beta_f(a)$ teljesül, ahol $\beta_f=(\beta_1^f, \beta_2^f) \in G(A)$. Legyen $(\alpha_1, \alpha_2)(\in G(A))$

tetszőleges, akkor

$$(\delta_1(\alpha_1,f),\delta_2(\alpha_2,f)) = \psi^{-1}(\delta(\psi(\alpha_1,\alpha_2),f)) =$$
$$= \psi^{-1}(\delta((\alpha_1,\alpha_2)(a),f)) = \psi^{-1}((\alpha_1,\alpha_2)(\delta(a,f))) =$$
$$= \psi^{-1}((\alpha_1,\alpha_2)(\beta_1^f,\beta_2^f)(a)) = \psi^{-1}((\alpha_1\beta_1^f,\alpha_2\beta_2^f)(a)) =$$
$$= \psi^{-1}(\psi(\alpha_1\beta_1^f,\alpha_2\beta_2^f)) = (\alpha_1\beta_1^f,\alpha_2\beta_2^f),$$

tehát $\delta_i(\alpha_i,f) = \alpha_i\beta_i^f$ $(i=1,2)$. Így δ_i $(i=1,2)$ jól-definiált, mivel β_i^f csak f-től függ. Mivel $\beta_{fg} = \beta_f\beta_g$ $(f,g\in F)$, ezért az $A_i=(G_i,F,\delta_i)$ kváziautomaták jól-definiáltak. Jelöljük az A_1 és az A_2 kváziautomaták A-direkt szorzatát $A_1 \otimes A_2$-vel. A δ_i $(i=1,2)$ függvények definíciójából az is látható, hogy ψ $A_1 \otimes A_2$-nek A-ra való izomorf leképezése. A 36.Tételből következik, hogy az A_i $(i=1,2)$ kváziautomaták erősen összefüggőek. Az előzőek szerint

$$\delta_i(\alpha_i,f) = \delta_i(\alpha_i,g) \iff \beta_i^f = \beta_i^g \quad (f,g\in F).$$

A második feltétel azonban független α_i-től, azaz A_i $(i=1,2)$ állapot-független. Világos, hogy van olyan $e\in F$, hogy $\delta_i(\alpha_i,e) = \alpha_i$ $(i=1,2)$ teljesül minden α_i $(\in G_i)$-re, azaz A_i karakterisztikus félcsoportja egységelemes, így a 11.Lemma szerint A_i félperfekt.

Mivel minden félperfekt kváziautomata ciklikus állapot-független, ezért a tétel szükségessége a 39.Tétel és az utána lévő megjegyzés szerint nyilvánvaló. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy félperfekt kváziautomaták nem csak félperfekt kváziautomaták A-direkt szorzatára bonthatók fel, ezért is szükséges a tételben a komponensekre kikötni, hogy legyenek maguk is félperfektek /l. a 16. Példát /.

A 36.Tétel alapján nyilvánvaló, hogy perfekt kvá-ziautomata csak perfekt kváziautomaták A-direkt szorzata-ként állítható elő. Ezért a 40.Tételt perfekt kváziauto-matákra elegendő a következőképpen kimondani:

24.Következmény./A.C.FLECK [11] / Az $A=(A, F, \delta)$ perfekt kváziautomata akkor és csak akkor áll elő kvázi-automaták A-direkt szorzataként, ha $G(A)$ csoportok direkt szorzatára bontható.

A véges Abel-csoportok alaptételét felhasználva könnyen belátható a

25.Következmény. /A.C.FLECK [11] / Bármely A-véges perfekt kváziautomata felbontható olyan kváziautomaták A-direkt szorzatára, amelyek automorfizmuscsoportjai / primhatványrendű / ciklikus csoportok.

Ha A félperfekt, akkor a 24.Tétel szerint $G(A) \cong \overline{F}$, így a 40.Tételben, a 24. és a 25.Következményekben az automorfizmuscsoport helyett karakterisztikus csoportot is mondhatunk.

Kváziautomaták A-direkt szorzatának karakterisztikus félcsoportja és a komponensek karakterisztikus fél-csoportjai közötti kapcsolatot általános esetben a kö-vetkező tétel mondja ki:

41.Tétel. Ha az $A=(A, F, \delta)$ kváziautomata az $A_i=(A_i, F, \delta_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ kváziautomaták A-direkt szorzata, akkor az A_i kváziautomaták $\overline{F}^{A_i}$ karakterisztikus félcsoportjai az A kváziautomata $\overline{F}$ karakterisztikus félcsoportjának homomorf képei, továbbá $\overline{F}$ homomorf módon beágyazható az $\overline{F}^{A_i}$ félcsoportok direkt szorzatába.

Bizonyítás. Legyen az $A=(A, F, \delta)$ kváziautomata az

$\mathcal{A}_i = (A_i, F, \delta_i)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ kváziautomaták $\mathcal{A}$-direkt szorzata. Jelölje, mint a tételben is, $\overline{F}^{A_i}$ $\mathcal{A}_i$ karakterisztikus félcsoportját és $\overline{F}$ szokás szerint $\mathcal{A}$ karakterisztikus félcsoportját. Legyen $h \in \overline{f}\,(\in \overline{F})$, azaz

$$\bigwedge_{(a_1,a_2,\dots,a_n)\in A} (a_1,a_2,\dots,a_n)\,[\delta((a_1,a_2,\dots,a_n),f) = \delta((a_1,a_2,\dots,a_n),h)] .$$

Ebből következik, hogy minden i-re $(1 \leqq i \leqq n)$

$$\bigwedge_{a_i\in A_i} a_i\,[\,\delta_i(a_i,f) = \delta_i(a_i,h)\,]$$

teljesül, tehát $h \in \overline{f}^{A_i}$, ami azt jelenti, hogy $\overline{f} \subseteq \overline{f}^{A_i}$ $(i = 1,2,\dots,n)$, azaz $\overline{f} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \overline{f}^{A_i}$. Legyen most $h \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{f}^{A_i}$, akkor az előbbi bizonyítás menetét megfordítva, kapjuk, hogy $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{f}^{A_i} \subseteq \overline{f}$, így

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{f}^{A_i} = \overline{f} . \tag{25}$$

Definiáljuk a φ_i $(i = 1,2,\dots,n)$ leképezéseket a következő módon:

$$\varphi_i : \overline{f} \longrightarrow \overline{f}^{A_i} \quad (\overline{f} \in \overline{F},\ \overline{f}^{A_i} \in \overline{F}^{A_i}). \tag{26}$$

Nyilvánvaló, hogy φ_i $\overline{F}$ $\overline{F}^{A_i}$-re való egyértelmű leképezése. Továbbá

$$\varphi_i(\overline{f}\,\overline{g}) = \varphi_i(\overline{fg}) = \overline{fg}^{A_i} = \overline{f}^{A_i}\overline{g}^{A_i} = \varphi_i(\overline{f})\varphi_i(\overline{g})$$

$(\overline{f}, \overline{g} \in \overline{F})$, azaz φ_i homomorf leképezés.

Legyen φ az $\overline{F}$-nak $\overline{F}^{A_1} \otimes \overline{F}^{A_2} \otimes \dots \otimes \overline{F}^{A_n}$-be való következő leképezése:

$$\varphi(\overline{f}) = (\overline{f}^{A_1}, \overline{f}^{A_2}, \dots, \overline{f}^{A_n}) \quad (\overline{f} \in \overline{F}).$$

Látható, hogy φ egyértelmű leképezés. Ha $\overline{f}, \overline{g} \in \overline{F}$, akkor

$$\varphi(\overline{f}\,\overline{g}) = \varphi(\overline{fg}) = (\overline{fg}^{A_1}, \overline{fg}^{A_2}, \dots, \overline{fg}^{A_n}) =$$
$$= (\overline{f}^{A_1}\overline{g}^{A_1}, \overline{f}^{A_2}\overline{g}^{A_2}, \dots, \overline{f}^{A_n}\overline{g}^{A_n}) =$$
$$= (\overline{f}^{A_1}, \overline{f}^{A_2}, \dots, \overline{f}^{A_n})(\overline{g}^{A_1}, \overline{g}^{A_2}, \dots, \overline{g}^{A_n}) = \varphi(\overline{f})\varphi(\overline{g}),$$

azaz φ is homomorf leképezés. Q.e.d.

Ezek szerint, ha valamelyik $\mathcal{A}_i$ komponens karakte-

risztikus félcsoportja nem monoid / csoport /, akkor $\overline{F}$ sem lehet monoid / csoport /. Ennél azonban több is igaz:

26.Következmény. *Legyen az* $A=(A,F,\delta)$ *kvázi-automata az* $A_i=(A_i,F,\delta_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ *kvázi-automaták A-direkt szorzata, továbbá minden* $\overline{F}^{A_i}$ *monoid. Jelöljük* $\overline{F}^{A_i}$ *egységelemét* $\overline{e}_i^{A_i}$ *-vel.*

a/ *Ha* $\bigcap_{i=1}^{n}\overline{e}_i^{A_i}=\emptyset$, *akkor* $\overline{F}$ *nem lehet monoid.*

b/ *Ha* $\bigcap_{i=1}^{n}\overline{e}_i^{A_i}\neq\emptyset$, *akkor* $\bigcap_{i=1}^{n}\overline{e}_i^{A_i}$ $\overline{F}$ *egységeleme.*

Bizonyítás. a/ Tegyük fel, hogy $\bigcap_{i=1}^{n}\overline{e}_i^{A_i}=\emptyset$ és $\overline{F}$ mégis monoid. Legyen $\overline{e}$ $\overline{F}$ egységeleme, akkor (26) szerint $\varphi_i(\overline{e})=\overline{e}^{A_i}$ $(i=1,2,\dots,n)$. Mivel egységelem homomorf képe is egységelem, ezért $\overline{e}^{A_i}=\overline{e}_i^{A_i}$, így $\overline{e}\subseteq\overline{e}_i^{A_i}$ $(i=1,2,\dots,n)$, azaz $\overline{e}\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}\overline{e}_i^{A_i}$. Ellentmondás.

b/ Legyen $e\in\bigcap_{i=1}^{n}\overline{e}_i^{A_i}$ és $\overline{f}\in\overline{F}$, akkor

$$ef\in\overline{ef}\subseteq\overline{ef}^{A_i}=\overline{e}^{A_i}\overline{f}^{A_i}=\overline{e}_i^{A_i}\overline{f}^{A_i}=\overline{f}^{A_i},$$

azaz (25)szerint

$$\overline{e}\,\overline{f}=\overline{f}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{f}^{A_i}$$

Hasonlóan látható be, hogy $\overline{f}\,\overline{e}=\overline{f}$, tehát $\overline{e}$ $\overline{F}$ egységeleme. Szintén (25)szerint

$$\overline{e}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{e}^{A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{e}_i^{A_i}.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A 26.Következmény a/ állításának illusztrálásaként tekintsük a

17.Példát. Legyen $F(X)$ az $X=\langle x,y\rangle$ halmaz által generált (egységelem nélküli) szabad félcsoport, $A=\langle 1,2\rangle$. A δ_1 és δ_2 függvényeket az $A\times X$ szorzathalmazon definiáljuk a következő táblázatokkal:

δ_1	1	2
x	1	2
y	2	2

δ_2	1	2
x	2	2
y	1	2

Az $A_i=(A, F(X), \delta_i)$ $(i=1,2)$ kváziautomaták karakterisztikus félcsoportjai monoidok./ $\overline{F(X)}^{A_1}=\langle \overline{x}^{A_1}, \overline{y}^{A_1}\rangle$ és $\overline{F(X)}^{A_1}$ egységeleme $\overline{x}^{A_1}$. $\overline{F(X)}^{A_2}=\langle \overline{x}^{A_2}, \overline{y}^{A_2}\rangle$ és $\overline{F(X)}^{A_2}$ egységeleme $\overline{y}^{A_2}$. Könnyen belátható, hogy $\overline{x}^{A_1}=\langle x, x^2, \cdots\rangle$ és $\overline{y}^{A_2}=\langle y, y^2, \cdots\rangle$, így $\overline{x}^{A_1} \cap \overline{y}^{A_2} = \phi$. Ez azt jelenti, hogy az A_1 és az A_2 kváziautomaták $A=(A\times A, F(X), \delta)$ A-direkt szorzata nem monoid.

δ	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
x	(1,2)	(1,2)	(2,2)	(2,2)
y	(2,1)	(2,2)	(2,1)	(2,2)

$\overline{F(X)}=\langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{xy}\rangle$, amelyben a műveletet a következő táblázat mutatja:

	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{xy}$
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{xy}$	$\overline{xy}$
$\overline{y}$	$\overline{xy}$	$\overline{y}$	$\overline{xy}$
$\overline{xy}$	$\overline{xy}$	$\overline{xy}$	$\overline{xy}$

.

A 26.Következmény b/ részéhez tekintsük a 83. oldalon lévő 16.Példát. $\overline{F(X)}^{A_1}$ egységeleme $\overline{x^2}^{A_1}$, $\overline{F(X)}^{A_2}$ egységeleme $\overline{y}^{A_2}=\overline{x^2}^{A_2}$, s így $\overline{x^2}^{A_1} \cap \overline{y}^{A_2} = \overline{x^2}$ $\overline{F(X)}$ egységeleme.

27.Következmény. Legyen az $A=(A, F, \delta)$ kváziautomata az $A_i=(A_i, F, \delta_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ kváziautomaták A-direkt szorzata, továbbá minden $\overline{F}^{A_i}$ csoport és $\hat{\bigcap_{i=1}^{n}} \overline{e_i}^{A_i} \neq \phi$.

a/ Ha van olyan $f(\in F)$, hogy $\hat{\bigcap_{i=1}^{n}} (\overline{f}^{A_i})^{-1} = \phi$, akkor $\overline{F}$ nem csoport.

b/ Ha minden $f(\in F)$-re $\bigcap_{i=1}^{n}(\overline{f}^{A_i})^{-1} \neq \emptyset$, akkor $\overline{F}$ csoport. / $\overline{f}$ inverze éppen $\bigcap_{i=1}^{n}(\overline{f}^{A_i})^{-1}$. /

Bizonyítás. a/ Tegyük fel, hogy van olyan $f \in F$, hogy $\bigcap_{i=1}^{n}(\overline{f}^{A_i})^{-1}=\emptyset$, és $\overline{F}$ mégis csoport. Akkor van olyan $f' \in F$, hogy $\overline{f}\,\overline{f'} = \overline{e} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{e}_i^{A_i}$, azaz $ff' \in \overline{e}_i^{A_i}$ $(i=1,2,\dots,n)$, így $\overline{f}^{A_i}\,\overline{f'}^{A_i} = \overline{e}_i^{A_i}$, tehát $f' \in (\overline{f}^{A_i})^{-1}$ $(i=1,2,\dots,n)$, ami a feltevés miatt lehetetlen.

b/ Legyen továbbra is $\overline{e} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{e}_i^{A_i}$ és $\overline{f} \in \overline{F}$, továbbá $\overline{f'} = \bigcap_{i=1}^{n}(\overline{f}^{A_i})^{-1}$, akkor

$$\overline{f}\,\overline{f'} = \overline{ff'} \subseteq \overline{ff'}^{A_i} = \overline{f}^{A_i}\,\overline{f'}^{A_i} = \overline{f}^{A_i}(\overline{f}^{A_i})^{-1} = \overline{e}_i^{A_i} \quad (i=1,2,\dots,n),$$

így $\overline{f}\,\overline{f'} = \overline{ff'} = \overline{e}$, azaz $\overline{f'}$ $\overline{f}$ inverze. Q.e.d.

28.Következmény. Ha az $A_i=(A_i, F, \delta_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ kváziautomaták karakterisztikus csoportjainak közös az egységelemük, akkor az A_i kváziautomaták $A=(A, F, \delta)$ A-direkt szorzatának karakterisztikus félcsoportja is csoport.

Bizonyítás. Jelöljük az A_i $(i=1,2,\dots,n)$ kváziautomaták közös egységelemét $\overline{e}$-sal. A 26.Következmény szerint $\overline{e}$ A $\overline{F}$ karakterisztikus félcsoportjának egységeleme. Legyen $\overline{h}(\in F)$ tetszőleges és $\overline{h}^{A_i}(\in \overline{F}^{A_i})$ inverze $\overline{k}^{A_i}$, akkor (25) szerint

$$\overline{hk} = \overline{h}\,\overline{k} \subseteq \overline{h}^{A_i}\,\overline{k}^{A_i} = \overline{e},$$

azaz $\overline{h}\,\overline{k} = \overline{e}$, tehát $\overline{h}$ inverze $\overline{k}$. Q.e.d.

A 28.Következmény megfordítása nem igaz, ezt a 16.Példa is mutatja. / $\overline{x^2}^{A_1} \neq \overline{y}^{A_2}$, mivel $y \notin \overline{x^2}^{A_1}$. /

Végül megadjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy A-véges félperfekt kváziautomata mikor bontható fel kváziautomaták A-direkt szorzatára.

42.Tétel./A.C.FLECK [13] / Ha H és K az A-véges $A=(A,F,\delta)$ félperfekt kvázi automata $G(A)$ automorfizmuscsoportjának olyan részcsoportjai, amelyekre

$$H\cap K=\{\iota\}\quad,\quad HK=G(A)$$

teljesül, akkor A izomorf az $A/\mathcal{H}$ és az $A/\mathcal{K}$ kvázi automaták A-direkt szorzatával.

Bizonyitás. Megjegyezzük, hogy a tételben ι $G(A)$ egységelemét jelöli, $A/\mathcal{H}$ és $A/\mathcal{K}$ pedig a (16) tipusu $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ relációk által indukált faktorkvázi automatákat. /1. 5. és 27. oldalt/

Legyenek

$H=\langle \iota=\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\rangle$ és $K=\langle \iota=\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{m-1}\rangle$ $G(A)$ olyan részcsoportjai, amelyekre teljesülnek a tétel feltételei. Könnyen megmutatható, hogy

$$A/\mathcal{H}=\langle \beta_i(a)_{\mathcal{H}} \mid \beta_i\in K\rangle \text{ és } A/\mathcal{K}=\langle \alpha_j(a)_{\mathcal{K}} \mid \alpha_j\in H\rangle,$$

ahol $a\,(\in A)$ tetszőleges, de rögzitett állapot. / Itt például $\beta_i(a)_{\mathcal{H}}$ $A/\mathcal{H}$ $\beta_i(a)$ által reprezentált elemét jelöli./ Tegyük fel, hogy van olyan $\beta_i(a)_{\mathcal{H}}$ és $\alpha_j(a)_{\mathcal{K}}$ osztály, amelyeknek nincs közös elemük. $|\beta_i(a)_{\mathcal{H}}|=o(H)=n$ és $|A/\mathcal{K}|=o(H)=n$, igy van olyan $\alpha_\ell(a)_{\mathcal{K}}$ osztály, amelyben $\beta_i(a)_{\mathcal{H}}$ -nak legalább két eleme van. Legyenek ezek $\alpha_\ell\beta_i(a)$ és $\alpha_\lambda\beta_i(a)$ $(\ell\neq\lambda)$. Akkor van olyan $\beta_t\,(\in K)$, hogy $\beta_t\alpha_\ell\beta_i(a)=\alpha_\lambda\beta_i(a)$, azaz $\beta_t\alpha_\ell\beta_i=\alpha_\lambda\beta_i$, igy $\beta_t=\alpha_\lambda\alpha_\ell^{-1}\in H\cap K=\{\iota\}$, tehát $\beta_t=\iota$, $\alpha_\lambda=\alpha_\ell$, ami azonban a feltevés miatt lehetetlen. Kaptuk, hogy bármely $\mathcal{H}$ -szerinti és $\mathcal{K}$ -szerinti osztálynak pontosan egy közös eleme van. Ez azt jelenti, hogy a

$$\psi:(a_{\mathcal{H}},b_{\mathcal{K}})\longrightarrow a_{\mathcal{H}}\cap b_{\mathcal{K}}$$

leképezés $A/\mathcal{H}\times A/\mathcal{K}$ -nak A -ra való egy-egyértelmü leképezése.

Most megmutatjuk, hogy ψ homomorfizmus. Nyilvánvaló, hogy

$$a_{\mathcal{H}} \cap b_{\mathcal{K}} = \alpha(a) = \beta(b) \Leftrightarrow \delta(a,f)_{\mathcal{H}} \cap \delta(b,f)_{\mathcal{K}} = \alpha(\delta(a,f)) = \beta(\delta(b,f))$$

$(\alpha \in H,\ \beta \in K,\ f \in F)$. Jelöljük $\mathbb{A}/\mathcal{H}$ és $\mathbb{A}/\mathcal{K}$ A-direkt szorzatának átmenet-függvényét δ'-vel, akkor

$$\psi(\delta'((a_{\mathcal{H}}, b_{\mathcal{K}}), f)) = \psi(\delta_{\mathcal{H}}(a_{\mathcal{H}}, f), \delta_{\mathcal{K}}(b_{\mathcal{K}}, f)) =$$
$$= \psi(\delta(a,f)_{\mathcal{H}}, \delta(b,f)_{\mathcal{K}}) = \delta(a,f)_{\mathcal{H}} \cap \delta(b,f)_{\mathcal{K}} =$$
$$= \alpha(\delta(a,f)) = \delta(\alpha(a), f) = \delta(a_{\mathcal{H}} \cap b_{\mathcal{K}}, f) = \delta(\psi(a_{\mathcal{H}}, b_{\mathcal{K}}), f).$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

43.Tétel./A.C.FLECK [13] / Ha az $\mathbb{A} = (A, F, \delta)$ A-véges félperfekt kváziautomata az $\mathbb{B} = (B, F, \delta_1)$ és a $\mathbb{C} = (C, F, \delta_2)$ kváziautomaták A-direkt szorzata, akkor $G(A)$-nak vannak olyan H és K részcsoportjai, amelyekre

$$H \cap K = \{\iota\} \quad \text{és} \quad HK = G(A)$$

teljesülnek.

Bizonyítás. Legyen

$$\mathcal{B} = \langle b_0, b_1, \dots, b_k \rangle \quad \text{és} \quad C = \langle c_0, c_1, \dots, c_l \rangle,$$

továbbá $\alpha_{ij} \in G(A)$ $(i = 0,1,\dots,k;\ j = 0,1,\dots,l)$, amelyre $\alpha_{ij}(b_0, c_0) = (b_i, c_j)$. Az így definiált automorfizmusok kimeritik $G(A)$ elemeit. Ez abból következik, hogy $\mathbb{A}$ félperfekt, azaz $G(A)$ tranzitiv és $o(G(A)) = |A|$. /1. 24.Tételt/ Nyilvánvaló, hogy $\alpha_{0,0} = \iota$, ahol ι $G(A)$ egységeleme. Tekintsük a

$$H = \langle \alpha_{0,0}, \alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{k,0} \rangle \quad \text{és} \quad K = \langle \alpha_{0,0}, \alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,l} \rangle$$

halmazokat. Nem nehéz, de kissé hosszadalmas számolással megmutatható, hogy H és K $G(A)$-nak a tételben megkivánt tulajdonságu részcsoportjai. Q.e.d.

A 43.Tétel tulajdonképpen a 42.Tétel megforditása.

IRODALOM

[1] BABCSÁNYI I., Erősen összefüggő kváziautomaták, József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete, Szeged, 1967 / szakdolgozat-kézirat /.

[2] BABCSÁNYI I., A félperfekt kváziautomatákról, Matematikai Lapok, 21 /1970/ 95-102.

[3] BABCSÁNYI I., Ciklikus állapot-független kváziautomaták, Matematikai Lapok, 22 /1971/ 289-301.

[4] BABCSÁNYI I., Endomorphisms of group-type quasi--automata,

[5] B.BARNES, Groups of automomorphisms and sets of equivalence classes of input for automata, Journ. Assoc. Comp. Machinery, 12 /1965/, 561-565.

[6] B.BARNES, On the group of automorphisms of strongly connected automata, Math. Systems Theory, 4 /1970/, 289-294.

[7] W.BRAUER, Some remarks on a paper of G.Feichtinger, Computing, 3 /1968/ , 351-353.

[8] A.H.CLIFFORD, G.B.PRESTON, The algebraic theory of semigroups, vol.I /1961/, vol.II /1967/

[9] CSÁKÁNY B., Algebra, egyetemi jegyzet, 1974.

[10] G.FEICHTINGER, Some results on the relation between automata and their automorphism groups, Computing, 1 /1966/, 327-340.

[11] A.C.FLECK, Preservation of structure by certain classes of functions on automata and related group theoretic properties, Computer Laboratory, Michigan State University, 1961 /sokszorosítás-ban/.

[12] A.C.FLECK, Isomorphism groups of automata, Journ. Assoc. Comp. Machinery, 9 /1962/, 469-476.

[13] A.C.FLECK, On the automorphism group of an automaton, Journ. Assoc. Comp. Machinery, 12 /1965/ , 566-569.

[14] GÉCSEG F., PEÁK I., Az automaták algebrai elmélete, Matematikai Lapok, XVII /1966/,77-134.

[15] GÉCSEG F., PEÁK I., Algebraic theory of automata, /Budapest, 1972/.

[16] V.M.GLUSKOV, Abszstrakthaja tyeorija avtomatov, Uszpehi matem. nauk, 16:5 /1961/, 3-62.

[17] A.G.KUROS, Csoportelmélet, / Budapest, 1955 /.

[18] E.S.LJAPIN, Polugruppü, / Moszkva, 1960 /.

[19] R.H.OEHMKE, On the structures of an automaton and its input semigroup, Journ. Assoc. Comp. Machinery, 10 /1963/, 521-525.

[20] RÉDEI L., Algebra I., /Budapest, 1954/.

[21] Ju.I.SZORKIN, Tyeorija apregyeljájusih szaatnasényij dljá avtomatov, Probl. kibernyetyiki, 9 /1963/, 45-69.

[22] CH.A.TRAUTH, Group-type automata, Journ. Assoc. Comp. Machinery, 13 /1966/, 170-175.

[23] G.P.WEEG, Some group theoretic properties of strongly connected automata, Computer Laboratory, Michigan State University, 1961, /sokszorosításban/.

[24] G.P.WEEG, The structure of an automaton and its operation preserving transformation group, Journ. Assoc. Comp. Machinery, 9 /1962/ 345-349.

[25] G.P.WEEG, The group and semigroup associated with automata, Proc. Symp. Math. Theory of Automata, New York, 1962, 257-266.

[26] G.P.WEEG, The automorphism group of the direct product of strongly related automata, Journ. Assoc. Comp. Machinery, 12 /1965/, 187-195.