

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARA

EUKLIDESI TÉRBELI PARALLELTARTOMÁNYOK GEOMETRIAI

MÉRTÉKELMÉLETI SZEMPONTBÓL

S t a c h ó L á s z l ó

doktori értekezése

S Z E G E D

1977

B 1446



TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	1
1. § A Steiner-formula differenciálgeometriai szempontból	10
1.1	11
1.2	12
1.3	12
1.4	16
2. § A metrikus értelemben vett normális Prenormálisok	17
2.1	17
2.2	19
2.3	21
2.4	22
2.5	23
2.6	26
3. § A C^{1+} -sima határu halmazok esete	30
3.1	30
3.2	31
3.3	34
3.4	39
3.5	42
3.7	43
4. § A Steiner-Hadwiger tétel	47
4.1	47
4.2	49
4.3	52
4.4	55
4.5	57

5. § Általánosított irányított felületek	62
5.1	62
5.2	67
5.3	68
5.4	75
5.5	78
5.6	84
6. § A paralleltartományok határfelületének néhány konvexitási tulajdonsága	89
6.1	89
6.2	92
6.3	94
6.4	96
6.5	99
7. § A főtétel és közvetlen következményei	106
7.1	106
7.2	108
7.3	109
7.4	111
8. § Fizikai alkalmazás	119
8.1	119
8.2	122
8.3	127
8.4 Befejező megjegyzések	134
Irodalomjegyzék	136
Definíciók és jelölések jegyzéke	139

BEVEZETÉS

Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz $\varrho \neq 0$ sugarú paralleltartománya szokásosan az

$$A_\varrho = \begin{cases} \{x : \text{distance}(x, A) < \varrho\} & \text{ha } \varrho > 0 \\ \{x : \text{distance}(x, \mathbb{R}^n \setminus A) > |\varrho|\} & \text{ha } \varrho < 0 \end{cases}$$

halmaz. Az elnevezést a geometriai intuíció igazolja, ha a ϱ -t igen kicsinek képzeljük.

Innen is eredt az első alkalmazásuk a matematika történetében: Általánosítva azt a két észrevételt, hogy

ha $n=3$ és A egy sima görbe, akkor az A hossza

$$\lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\text{vol } A_\varrho}{\pi \varrho^2}$$

illetve ha ugyanígy a 3 dimenziós térünkben A egy sima felület, akkor az A felszíne $\lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\text{vol } A_\varrho}{2\varrho}$,

Cantor, Bouligand és Minkowski egy tetszőleges $\alpha > 0$ valós szám mellett az A halmazhoz a $\lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\text{vol } A_\varrho}{\omega_{n-\alpha} \varrho^{n-\alpha}}$ 1. számot

asszociálták mint annak " α -dimenziós" mérőszámát (mértékét), s így kívánták a felszínmérés geometriai elméletét kiépíteni (v.ö. [1], [2], [3]). Zárt elmélet ezen a

1. ω_β a " β -dimenziós gömb (β -dimenziós) térfogata" = $\Gamma(\frac{1}{2})^\beta / \Gamma(\frac{\beta}{2} + 1)$, ahol Γ az Euler-féle fgv. (azaz ha $m = 0, 1, 2, \dots$ akkor $\Gamma(m) = m!$, Γ meromorf, pólusai elsőrendűek és a $-1, -2, \dots$ helyeken vannak.

téren azonban mégsem jött létre végül, sőt sejtéseiket az imént definiált α -dimenziós ún. Minkowski térfogattal (Minkowski content of α dimension) kapcsolatban paradox módon később a Hausdorff-mértékek elmélete keretén belül igazolták. Ennek az oka egyszerűsítve, de eléggé találóan úgy fogalmazható meg, hogy a paralleltartományok határa közel sem követi olyan pontosan a kiindulásul vett A konturját az általánosabb esetekben, még zárt A -nál sem, mint azt az egyszerűbb példák alapján sejtették. Tudni illik egy ∂A_ϑ alakú halmaz meglepően sima és felületszerű - ahogyan az a dolgozatból ki fog derülni, - maguk az A_ϑ paralleltartományok pedig (differenciálgeometriai szempontból) igen közeli rokonságban vannak a konvex halmazokkal.

A paralleltartományok így érdekes új szerephez jutottak: kezelhetőségük és a Hausdorff-mértékekkel való szoros kapcsolatuk folytán hatásos segédeszközzé váltak geometriai mértékekre vonatkozó tételek bizonyításánál. Ez utóbbira példa [4]-ben az izoperimetrikus tétel bizonyításának módja.

Minazonáltal, az eddig említett alkalmazásokat általában az jellemezte, hogy bennük az $\{A_\vartheta\}$ vagy a $\{\partial A_\vartheta\}$ halmazseregnek csak a lokális (nevezetesen legtöbbször a $\vartheta = 0$ hely körüli) viselkedésének különböző tulajdonságait használták ki, s a tételek nehézsége és érdekessége főleg az A halmaz határának „simaságától” függött. Van azonban olyan terület is, amely a problémának éppen az ellenkező irányból való megközelítését kívánja meg. Úgy tűnik, ezek a vizsgálatok jóval nehezebbek az előbbieknél,

de szebbek és mélyebb eredményhez vezetnek. 1958-ban Makai Endre abból a sejtésből kiindulva, hogy egy kifeszített membránon kialakuló legkisebb frekvenciájú állóhullám azonos magasságú pontjai a hullám egyenletes terjedési sebessége következtében megközelítőleg azonos távolságra vannak a membrán peremétől és magasságuk is körülbelül ezzel a távolsággal egyenesen arányos (vagyis várhatóan kevésbé térnek el alakban a ∂A_φ halmazoktól) igen jó felső becslést adott egy kifeszített konvex síkmembrán alaphangjának magasságára (ld. [7]).

Tételének alapgondolata mechanikai részről az a több dimenzióra is közvetlenül általánosítható észrevétel volt, hogy minden olyan $A (\subset \mathbb{R}^2)$ sokszögre, amelynél a $\text{length } \partial A_\varphi$ függvény monoton növekvő a $(-\infty, 0)$ -n, az A alakú kifeszített membrán alaphangjának a frekvenciája nem nagyobb $\sqrt{3} \text{ length } A / \text{area } A$ -nál. Kicsit később Pólya György bebizonyította (ld. [8]), hogy az előbbi egyenlőtlenségben a $\sqrt{3}$ konstans $\frac{\pi}{2}$ -re javítható (és hogy a becslés ezzel kiélesedik). A cikkében használt módszer nemcsak matematikai szempontból figyelemreméltó: kis módosítással fizikailag igen érzékletes eredményre juthatunk vele (ld. a 8.2 Tételt és a 8.2 Megjegyzést).

Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ alakú pereménél rögzített rezgő test m -edik alaphangjának a frekvenciája felülről becsülhető egy olyan húr rezgésének az m -edik alapfrekvenciájával, amely az egyik végpontjában rögzített, a másiknál szabad, és amelynek a hossza $\text{vol}_n A / \sup \{ \text{vol}_{n-1} \partial A_\varphi : \varphi < 0 \}^2$. ($m=1, 2, \dots$).

2. vol_k a k dimenziós Hausdorff mértéket jelöli.

A becslések az összes m -re élesek.)

Ez a fizikai alkalmazás hívta fel a figyelmet a $\text{vol}_{n-1} \partial A_\varphi$ függvény menete globális (nemcsak egy adott φ érték körüli) tulajdonságai fontosságára és speciálisan olyan kérdésekre, hogy hogyan becsülhető pl. $\sup_{\varphi < 0} \text{vol}_{n-1} \partial A_\varphi$ fölülről az A alakzattól függően, vagy pl. hogy milyen feltételek mellett monoton csökkenő a $\text{vol}_{n-1} \partial A_{-\varphi}$ a $(0, \infty)$ -en stb. A válasz még a legegyszerűbb típusú alakzatok (pl. poliéderek) esetén is igen nehéz, s úgy tűnik kielégítő eredményekkel ezideig nem is rendelkezünk 2 dimenzió felett. A legmélyebb információ ebben az irányban Szőkefalvi-Nagy Béla következő tétele (ld. [9])³. Hogyha az $A \subset \mathbb{R}^2$ alakzat egyszeresen összefüggő és korlátos, akkor a $(\text{length } \partial A_\varphi) - 2\pi\varphi$ függvény ($\text{length} = \text{vol}_1$) monoton növekvő az $\{\varphi: \partial A_\varphi \neq \emptyset\}$ halmazon. A tétel erősségét leginkább az alábbi - Payne és Weinbergertől származó (ld. [10]) - szép interpretációja mutatja: Az $A \setminus A_\varphi$ alakzatot $\varphi < 0$ mellett felszintartó módon olyan szabályos körgyűrűvé lehet transzformálni, amelynek külső kerülete megegyezik az A halmazával (vagyis $\text{length } \partial A$ -val), és másrészt adott φ mellett a belső sugarát $r(\varphi)$ -val jelölve ennek a gyűrűnek, fennáll a $0 \leq dr \leq d\varphi$ ⁴.

3. A tétel [9]-ben másképp van kimondva, azonban egyszerű meggondolással igazolható (az 5.6 Megjegyzés segítségével), hogy ez a forma ekvivalens az eredetivel.

4. Azaz az $r(\cdot)$ függvény deriváltjára $0 \leq r'(\varphi) \leq 1$ teljesül minden $\varphi < 0$ -nál.

reláció. Innen közvetlenül adódik az izoperimetrikus tétel, fizikailag pedig az következik belőle, hogy ha egy egyszerűen összefüggő, A alakú ∂A -nál rögzített síkmembrán belsejébe lyukakat vágunk, akkor az így keletkezett fizikai rendszer sajátfrekvenciái sohasem haladják meg annak a körgyűrű alakú $area A (= vol_2 A)$ területű $length \partial A$ külső kerületű membránnak a megfelelő sajátfrekvenciáit, amely csak a külső határoló körénél van rögzítve. (Ez utóbbiak a Bessel-függvények segítségével kiszámíthatók.)

Jól ismert azonban, hogy a [9] -beli eredmények nem vihetők át már 3 dimenzióra sem, sőt még sejtések sem ismeretesek arra vonatkozóan, hogy mi lehet az idézett Szőkefalvi-Nagy tétel n dimenziós analogonja.

A jelen dolgozat szerzője [14] -ben általánosította a [9] néhány részeredményét n dimenzióra. A [14] legfontosabb geometriai eszközét az egy adott halmazhoz metrikusan kapcsolódó⁵ halmazok képezték, és az a tény, hogy $A(\subset \mathbb{R}^n)$ -hez $\mathbb{R}^n \setminus A$ mindig metrikusan kapcsolódik. A definíció szerint $B(\subset \mathbb{R}^n)$ metrikusan kapcsolódik $A(\subset \mathbb{R}^n)$ -hez, ha felbontható olyan egyenes szakaszok egyesítésére, amelyek egyik végpontja - mondjuk - A -ban van, és az összes többi p pontjai úgy helyezkednek el $\mathbb{R}^n \setminus A$ -ban, hogy $distance(p, a) = distance(p, A)$. [14] -ben lényegében ki van mutatva, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$ és a

5. [14] -ben ehelyett a "metrically associated" kifejezés volt használva.

metrikusan kapcsolódik az A halmazhoz, akkor a

$\varphi^{1-n} \overline{\text{vol}}_{n-1}(B \cap \partial A_\varphi)$ függvény ^{6.} mindig monoton csökkenő a $(0, \infty)$ - en. A mostani dolgozat ennek az észrevételnek egy erős továbbfejlesztésén alapszik:

(*) Ha a B alakzat $\varphi_0 (> 0)$ hosszúságú, A -hoz metrikusan kapcsolódó szakaszokból áll, akkor a $\overline{\text{vol}}_{n-1}(B \cap \partial A_\varphi)$ függvény egy $n-1$ -edfokú polinom a $0 < \varphi \leq \varphi_0$ intervallum felett. ^{7.}

Bár ez a tétel rendkívül egyszerűnek és a jól ismert Steiner-Cauchy formula alapján egészen plauzibilisnek tűnik, mindaddig még sejtésként sem fogalmazták meg, és egyedül arra a speciális esetre volt bebizonyítva (ld. [4]), amelyben $B = A_{\varphi_0} \setminus \bar{A}$, olyan integrálgeometriai módszerekkel, amelyek természetüknél fogva eleve nem lehetnek alkalmasak az itteni változat bizonyítására.

A (*) tételhez vezető út a dolgozatban egyenes és könnyen érthető heurisztikailag, azonban technikai szempontból a geometriai értékelméletnek - és ezen belül általában a Lipschitz feltételt teljesítő leképezésekre vonatkozó tételeknek - igen erős apparátusára támaszkodik:

Először észrevesszük, hogy ha a B egy olyan infinitenzimális vastagságú szakasznyaláb, amelyre $\bar{B} \cap \partial A$ -nak egy A -beli környezet egy olyan C^2 -sima felületdarab, amelynek a főgörbületei $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ (az A -ból kifelé mutató normálissal számolva) $\bar{B} \cap \partial A$ -nál, akkor

^{6.} Általában is, ha μ egy mérték, $\bar{\mu}$ -sal a μ által generált külső mértéket jelöljük.

^{7.} v.ö.: 4.4

$$\overline{\text{vol}}_{n-1}(B \cap \partial A_\vartheta) = (1 + \kappa_1 \vartheta) \dots (1 + \kappa_{n-1} \vartheta) \overline{\text{vol}}_{n-1}(\bar{B} \cap \partial A)$$

minden $0 < \vartheta < \vartheta_0$ -nál. Ezután (*) -ot bebizonyítjuk olyan A halmaz esetére, amelynek a határa lokálisan olyan C^1 -sima felületdarabokból áll, amelynek a normálisa Lipschitz feltételt elégíti ki. Ez történik az 1. és 3. §-okban, közöttük a 2. § néhány geometriai lemmát tárgyal egy rögzített halmazhoz metrikusan kapcsolódó szakaszokról. A dolgozatban nincs is szó a metrikus kapcsolódás fogalmáról, mert mint a későbbiekben kiderül, ezeknek a szakaszoknak a C^2 -sima határú halmaz határa kifelé mutató normálisaihoz hasonló szerepe a fontos a legáltalánosabb típusú A mellett is. A 4. § súlyponti része a Steiner-formulák Hadwiger féle ([21] -beli) általánosítottjának (a 4.1 Tétel) bizonyítása. Itt látható legvilágosabban a Lipschitz feltételt teljesítő gradiensű - amit a dolgozatban C^{1+} - simának mondunk - leképezések fontossága a paralleltartományok differenciálgeometriai és geometriai mértékelméleti vizsgálatánál. (*) -nak a legáltalánosabb típusú A halmaz esetére való bizonyításához a kulcsot a 4.1 Tételnek az a külön tételként (4.2 Tétel) kiemelt lemmája jelenti, miszerint ha az $A_{\vartheta_0} \setminus \bar{A}$ ($\vartheta_0 > 0$) paralleltartomány-rész csupa ϑ_0 hosszúságú, az A -hoz metrikusan kapcsolódó szakaszokból áll, akkor $0 < \vartheta < \vartheta_0$ mellett a ∂A_ϑ alakzat egy C^{1+} -sima felület. Egyben ez az a pont, ahol a dolgozatbeli eredmények továbblépnek a Steiner-Cauchy-Hadwiger féle formulák hagyományos integrálgeometriai ill. ad hoc approximációkat tartalmazó bizonyításain. Az 5. § a (*) -gal lényegében ekvivalens Fő-

tétel bizonyításához szükséges egyszerű technikai előkészítést (az általánosított irányított felületek és azok szorzatgörbületeinek bevezetése) végzi el. Végül a paralleltartományok konvexitási tulajdonságainak vizsgálatán - ami a 6. § tárgya - keresztül jutunk el a Főtételhez (7.1,

7.2), amelynek állítását legvilágosabban a következő jellegzetes speciális esetéből lehet megérteni: Legyen az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz határa C^2 -sima, és jelölje a befelé mutató k normális mellett vett főgörbületeit ∂A -nak

$\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$, az elemi felületdarabjának $n-1$ dimenziós mértékét pedig $d\sigma$. Ekkor léteznek olyan

$h_+, h_- : \partial A \rightarrow (0, \infty]$ függvények, hogy minden $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ -re

$$\int_{\mathbb{R}^n} u = \int_{\partial A} \left(\int_{h_-(x)}^{h_+(x)} u(x + gk(x))(1 + g\kappa_1(x)) \dots (1 + g\kappa_{n-1}(x)) dg \right) d\sigma(x).$$

Befejezéséppen a Főtétel közvetlen geometriai következményeit (7.2 - 7.4) és egy alkalmazását a rezgő n dimenziós testek alapfrekvenciáinak felső becslésére tárgyaljuk. Azonnal kiderül, hogy a Főtétel nemcsak a Steiner-Cauchy-Hadwiger formulákat általánosítja, hanem a Kneser egyenlőtlenséget is, amely kimondja, hogy $f(g) = \text{vol}_n A_g$

mellett $\lambda \geq 1$ és $0 < \alpha < \beta$ esetén mindig

$f(\lambda\beta) - f(\lambda\alpha) \leq \lambda^n [f(\beta) - f(\alpha)]$. Másrészt 2 dimenzióra lemenve, segítségével rá lehet mutatni Szőkefalvi-Nagy [9]-beli tételeinek a kapcsolatára a Gauss-Bonnet féle tétellel a [9] fő lemmájának egy új bizonyításán keresztül (ld. 7.4). A 8. §-ban elegendő feltételt adunk arra, hogy a

$\text{vol}_{n-1} \partial A_g$ függvény monoton növekvő legyen a $(-\infty, 0)$ intervallumon. Ez a feltétel különösen egyszerű, ha az A test



határa egy C^2 -sima (vagy C^{1+} -sima) felület: eszerint ha a ∂A Minkowski görbülete (a kifelé mutató normálissal számolva) nem-negatív, úgy a $\text{vol}_{n-1} \partial A_g$ függvény növekszik $(0, \infty)$ -en. Ennek alapján pedig rögtön tudjuk általánosítani Pólya György már említett [8]-beli becslését.

Mivel a geometriai mértékelmélet eredményei nem közismertek, a dolgozat úgy van felépítve, hogy rájuk (elsősorban a [15] könyvre) minél kevesebbet kelljen hivatkozni, s amennyiben (mint az természetesen elkerülhetetlen) ilyen hivatkozás van, mindig az említett tétel adott változatának a „szószerinti” idézésével történik (a jelölések megfelelő átírása mellett). Az ezzel járó terjedelemlnövekedés miatt nem törekedtem mindig a teljességre, azonban legalább utalva a még az adott ötletekből elérhető tételt (és esetleg annak változatos bizonyítását is) mindig igyekeztem megemlíteni (ld. általában a Megjegyzések).

Köszönetet szeretnék mondani Szőkefalvi-Nagy Béla professzor úrnak e munkám megírásához nyújtott igényes támogatásáért.

Szeged, 1977. szeptember 6.

1. § A STEINER-FORMULA DIFFERENCIÁLGEOMETRIAI
SZEMPONTBÓL

J. Steinernek (és Cauchynak) van egy nevezetes tétele, amely azt mondja ki, hogy ha A és K konvex korlátos részhalmazai $\mathbb{R}^n$ -nek, akkor a $\text{vol}_n(A + \varrho K)$ függvény a $[0, \infty)$ -en egy n -edfokú polinom ϱ -ban. Ez az állítás nagyon erősnek tűnik az ún. Kneser-egyenlőtlenséghez⁸. képest, ami a legmélyebb eddigi ismeretünk a $\text{vol}_n(A + \varrho K)$ függvényről, ha konvex helyett más tetszőleges halmazt tekintünk. Steiner tételének szokásos integrálgeometriai jellegű bizonyításai (ld. pl. [4] -ben vagy [15] -ben) nem tűnnek alkalmasnak arra, hogy adaptációjukkal a Kneser-egyenlőtlenséggel rokon vagy annál jobb eredményt érjünk el. Célunk olyan formula találása lesz, amelyben a két tételhez vezető utak találkoznak.

Az egyszerűség kedvéért végig a $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ esetre szorítkozunk. Az alkalmazások szempontjából valószínűleg ez a legfontosabb speciális eset, mivel most az $A + \varrho K$ halmazok, mint ismeretes (ld. pl. [4]), éppen az A_ϱ paralleltartományok ($\varrho > 0$). Kiindulási pontunk a következő differenciálgeometriai gondolatmenet lesz:

⁸. Ld. [13]-ban $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$, [14]-ben az origóra centrálszimmetrikus nyitott K mellett. Általános konvex K -ra még nincs publikálva.

1.1. Legyen A egy C^∞ -sima határu korlátos konvex nyitott részhalmaza $\mathbb{R}^n$ -nek. Jelölje $k(y)$ a kifelé mutató normálisát ⁹. ∂A -nak az y pontban. Vegyük észre, hogy most különböző $y \in \partial A$ pontok esetében az $y + [0, \infty) k(y)$ félegyenese a tér különböző irányjaiban haladnak, így nem metszik egymást. Ezért, ha T_ϑ -val jelöljük az $y \mapsto y + \vartheta k(y)$ leképezést, T_ϑ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a ∂A és ∂A_ϑ felületek között, ha $\vartheta \geq 0$, és ekkor ∂A_ϑ -nak egy $T_\vartheta y$ -beli ($y \in \partial A$) kifelé mutató normálisa az $y + [0, \infty) k(y)$ félegyenese irányvektora, $k(y)$ lesz. Sőt sejthető, hogy ha $y \in \partial A$ -nál egy $t (\perp k(y))$ főirányhoz tartozó főgörbületi középpont $z (\in y + [-\infty, 0) k(y))$, akkor a t főiránya lesz ∂A_ϑ -nak a $T_\vartheta y$ pontban, és hozzá az előbbi z tartozik mint főgörbületi középpont. Vagyis, ha τ_i az i -edik főgörbületi sugár ($i = 1, \dots, n-1$) $y \in \partial A$ -nál és R_i (az ennek megfelelő főiránybeli) i -edik főgörbületi sugár $T_\vartheta y (\in \partial A_\vartheta)$ -nál, akkor $R_i = \tau_i + \vartheta$. Ez annyit jelent, hogy az y -nál levő $d\sigma$ elemi felületdarabja ∂A -nak a T_ϑ leképezés alatt az i -edik főirányban

$$\frac{R_i}{\tau_i} = 1 + \frac{\vartheta}{\tau_i} = 1 + \kappa_i \vartheta \quad \text{-szoros nyújtást szenved.}$$

Igy az ő T_ϑ képe, a $T_\vartheta y$ -nál elhelyezkedő ∂A_ϑ -beli $d\sigma' = T_\vartheta(d\sigma)$ elemi felületdarab $n-1$ dimenziós térfogata $(1 + \kappa_1 \vartheta) \dots (1 + \kappa_{n-1} \vartheta)$ -szorosa lesz a $d\sigma$ -énak. Tehát azonosítva a felületdarab jelével az $n-1$ dimenziós mértékét, írhatjuk, hogy

⁹. Normális alatt mindig normális egységvektort értünk.

$$(1) \quad \text{vol}_{n-1} \partial A_\vartheta = \int_{\partial A_\vartheta} d\sigma' = \int_{\partial A} (1 + \kappa_1 \vartheta) \dots (1 + \kappa_{n-1} \vartheta) d\sigma =$$

$$= \int_{\partial A} (1 + \kappa_1(y) \vartheta) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y) \vartheta) d\text{vol}_{n-1}(y)$$

ami mutatja, hogy a $\text{vol}_{n-1} \partial A_\vartheta$ függvény a $\vartheta \geq 0$ szá-

kazon egy $n-1$ -edfokú polinom ϑ -ban. Innen már rögtön következik, hogy a $\text{vol}_n A_\vartheta$ függvény ugyanitt n -edfokú polinom, hiszen általában is igaz^{10.}, nemcsak konvex A halmazra, hogy

$$(2) \quad \text{vol}_n A_\vartheta - \text{vol}_n \bar{A} = \int_0^\vartheta \text{vol}_{n-1} \partial A_\tau d\tau \quad (\vartheta \geq 0).$$

1.2. Figyeljük meg, hogy az (1)-es formula azonnal adja a Kneser egyenlőtlenséget is a gondolatmenetbeli A -ra: A [14]-beli 1-es tétel után következő megjegyzés szerint ehhez elegendő bizonyítani, hogy a $\text{vol}_{n-1} \partial A_\vartheta / \vartheta^{n-1}$ függvény monoton csökkenő. Ez pedig világos, mert ha (1) igaz, akkor

$$\text{vol}_{n-1} \partial A_\vartheta / \vartheta^{n-1} = \int_{\partial A} \left(\frac{1}{\vartheta} + \kappa_1 \right) \dots \left(\frac{1}{\vartheta} + \kappa_{n-1} \right) d\sigma$$

1.3. Mielőtt megvizsgálánk az általánosítási lehetőségeket, igazoljuk az előbbiekben sejtésként megfogalmazott döntő fontosságú $d\sigma' = (1 + \kappa_1 \vartheta) \dots (1 + \kappa_{n-1} \vartheta) d\sigma$ relációt. Ezt a későbbiekhez szükséges legáltalánosabb formában tesszük meg:

10. Ld. [15]-ben a 3.2. 24-es lemma (271. old.)

Lemma: Tegyük fel, hogy G az $\mathbb{R}^{n-1}$ origójának egy nyitott környezete, $S \subset \mathbb{R}^n$, és F egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítő függvény G és S között, amely

a) C^1 -sima és $\text{Jac} F \neq 0$ ^{11.},

b) sőt, ha $k(y)$ az $y \in S$ -beli normálist jelöli (ami miatt létezik), akkor a $k \circ F$ vektorfüggvény komponensei totálisan deriválhatók a 0 pontban.

Legyen ekkor T_g az a leképezés, amely $y \in S$ -hez mindig $T_g y = y + g k(y)$ -t rendeli, és $F_g = T \circ F$.

Most fennáll, hogy

$$(3) \quad \text{Jac} F_g(0) = |1 + \kappa_1 g| \dots |1 + \kappa_{n-1} g| \cdot \text{Jac} F(0),$$

ahol $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ az S felületnek a k normálissal számított főgörbületei az $F(0)$ pontban.

^{11.} Általában is, egy $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -sima leképezésre $m \leq n$ esetén $\text{Jac} \phi = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ $n \times m$ -es mátrix

oszlopvektorai által ($\mathbb{R}^n$ -ben) kifeszített m dimenziós paralelepipedon m dimenziós térfogata. (Itt szokásosan ϕ_i a ϕ vektorfüggvény i -edik komponense.) A [15] 3.2.1-ben (241. old.) bevezetett jelölések közül $\text{Jac} \phi$ most a $J_m \phi$ szimbólumnak felel meg.

Bizonyítás: Jól ismert az elemi differenciálgeometriából, hogy egy ilyen állítást elég bebizonyítani arra a speciális esetére, amikor S egy olyan C^1 -sima $f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonja, amelyre $\text{grad } f(0) = 0$ és amelynek parciális deriváltjai a 0 -ban totálisan differenciálhatók (ez az utóbbi feltétel b)-nek felel meg), és az F leképezés az $x \mapsto (x, f(x))$ hozzárendelés, $k(\cdot)$ pedig pl. az f grafikonjának felfelé mutató normálisa (tehát $y = (x, f(x))$ -re $k(y)$ a $(-\text{grad } f(x), 1)$ vektor irányába mutató egységvektor $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ -ben).

Tekintve, hogy a főgörbületek létezésére vonatkozó tételt az irodalomban C^2 -sima felületekre szokták igazolni (aminek C^2 -sima f felelne meg), először ezt a lépést tesszük meg:

Mivel $k((0,0)) = (0,1)$, S -nek az érintőirányai a $(0,0) = F(0)$ pontjában az $(e,0)$ alakú vektorok, ahol $e \in \mathbb{R}^{n-1}$ és $\|e\| = 1$. Minthogy pedig a $\lambda \mapsto F(\lambda e)$ S -beli görbének az érintője a $(0,0)$ -ban éppen az $(e,0)$ vektor^{12.}, S -nek a $(0,0)$ -beli $(e,0)$ irányú k szerint vett κ^e főgörbületének értéke

$$\kappa^e = \left\langle \frac{d}{ds} k(F(\lambda e)) \Big|_{\lambda=0}, e \right\rangle$$

ahol $\langle \dots \rangle$ a skalárszorzatot jelöli $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ -ben, ds pedig $F(\lambda e)$ -ből $F((\lambda+d\lambda)e)$ -be mutató infinitézimális vektor $d\lambda$ előjelével vett hossza, azaz

^{12.} $\|e\| = 1$ most is fel van téve.

$$ds = [1 + (\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot e_i)^2]^{1/2} d\lambda.$$

Ebből $\frac{d}{ds} \Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} \Big|_0$ adódik. Másrésztől

$$(4) \quad \frac{d}{d\lambda} k(F(\lambda e)) \Big|_{\lambda=0} = \\ = \left(\left(-\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} \Big|_0 \cdot e^i, \dots, -\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{n-1}} \Big|_0 \cdot e^i \right), 0 \right)$$

(itt e^i az e vektor i -edik komponense; $i = 1, 2, \dots, n-1$),
ahonnan - mint az várható is volt -

$$(5) \quad \kappa^e = -\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 \cdot e^i e^j.$$

A $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ($j = 1, \dots, n-1$) függvények totális differenciálhatósága a 0 helyen adja, hogy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 =$
 $= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_0$ az összes i, j párra, ami biztosítja
a főgörbület létezését.

Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a koordinátarendszer $\mathbb{R}^{n-1}$ -ben olyan, hogy a tengelyei a főirányok, azaz hogy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 = 0$ ha

$i \neq j$ és (5) szerint

$$(6) \quad \kappa_i = \kappa^{e_i} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \Big|_0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

ahol e_i az i -edik koordinátájában $+1$ komponensű egységvektor.

$$\text{Tekintsük most a } v_i = \left. \frac{\partial F_\vartheta}{\partial x_i} \right|_0 = \left. \frac{d}{d\lambda} F_\vartheta(\lambda e_i) \right|_{\lambda=0}$$

vektort.

Mivel $F_\vartheta(\lambda e_i) = F(\lambda e_i) + \vartheta k(F(\lambda e_i)) = (\lambda e_i, f(\lambda e_i)) + \vartheta k(F(\lambda e_i))$, a v_i -re kapjuk (4) és (6) segítségével, hogy

$$v_i = (e_i, 0) + \kappa_i \vartheta (e_i, 0),$$

A Jacobi determináns definíciója szerint $\text{Jac } F_\vartheta(0)$ nem más most, mint a $v_1, \dots, v_{n-1}$ vektorok kifeszítette $n-1$ dimenziós paralelepipedon vol_{n-1} -mértéke. Tehát ebben az esetben $\text{Jac } F_\vartheta(0) = |1 + \kappa_1 \vartheta| \dots |1 + \kappa_{n-1} \vartheta|$, ami adja a tételt, hiszen $F = F_0$.

Ezzel tökéletesen alátámasztottuk a kiindulási gondolatmenetet is.

1.4. Természetesen vetődik fel azután a kérdés, min múlik, hogy pl. C^∞ -sima határu nem-konvex A -ra 1.1. nem ismételhető meg. A válasz egyszerű: azon, hogy az $y + [0, \infty)k(y)$ félegyenesek (ahol $y \in \partial A$) páronként diszjunktak voltak a konvex esetben, és hogy az $y + \vartheta k(y)$ pont mindig $-$ ba tartozott.

Figyeljük meg, hogy itt az első feltétel implikálja a másodikat:

Valóban, ha egy $y \in \partial A$ pont olyan helyzetű, hogy az $y + [0, \infty)k(y)$ félegyenest nem metszik a többi

$y' \in \partial A$ -nál vett $y' + [0, \infty) k(y')$ félegyenese, akkor az $y_s = y + s k(y)$ ponthoz (ahol $s \geq 0$!) a ∂A pontjai közül - és így az egész $\bar{A}$ pontjai közül - az y fekszik legközelebb, a többi $y' \in \partial A$ pontokra pedig $\text{distance}(y + s k(y), y') > s$. Ugyanis, ha volna y -től eltérő $y' \in \partial A$, melyre $\text{distance}(y_s, y') \leq s$, akkor egy olyan $y \neq z \in \partial A$ pontra, amely $\bar{A}$ -ban minimális távolságra található y_s -től, fennáll, hogy a $[z, y_s]$ szakasz merőleges ∂A -nak a z -beli érintőszikjára, és így $y_s \in z + [0, \infty) k(z)$, ellentétben feltevésünkkel.

2.1. Az előbbi észrevétel az $y + [0, \infty) k(y)$ félegyenese vizsgálatába egy új elemet hoz be: a metrikus tulajdonságaikra irányítja rá a figyelmet. Ebben a §-ban ezeket a szempontokat fogjuk kimunkálni.

Definíció. Legyen $A \neq \emptyset$ az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges részhalmaza és $x \in \mathbb{R}^n$. Azt fogjuk mondani, hogy az $y \in \bar{A}$ pont x (egyik) vetülete $\bar{A}$ -ra, ha nincs az y -nál közelebbi pont $\bar{A}$ -ban az x -hez. (Az elnevezés a C^1 -sima határu A -nál fellépő geometriai szituációra utal.) Az x pont $\bar{A}$ -ra való vetületeinek összességét $\text{pr}_{\bar{A}} x$ -szel fogjuk jelölni.

Tétel. A $\text{pr}_{\bar{A}} x$ halmaz madnem minden^{13.} x -re egyetlen elemből áll.

^{13.} Automatikusan úgy értendő, hogy az $\mathbb{R}^n$ egy vol_n szerint $\cdot 0$ mértékű halmazát kivéve.

Bizonyítás. $x \in \bar{A}$ -ra mindig nyilván $\text{pr}_{\bar{A}} x = \{x\}$,
 így rögtön tekinthetjük a $\text{distance}(x, A) > 0$ esetet.

Tudjuk, hogy az $f(\cdot) = \text{distance}(\cdot, A)$ függvény
 Lipschitz függvény. Ezért $\text{grad } f$ majdnem mindenütt léte-
 zik (Rademacher tétele [15] 3.1.6. 216. old.). Megmutat-
 juk, hogy a több pontból álló vetületü $x (\in \mathbb{R}^n \setminus \bar{A})$
 pontoknál nem lehet totálisan differenciálható az f .
 (Az, hogy $\text{pr}_{\bar{A}} x \neq \emptyset$ sohasem, evidens.)

Valóban. Legyen $y_1, y_2 \in \text{pr}_{\bar{A}} x$ úgy, hogy $y_1 \neq y_2$.
 Vegyük észre, hogy most $y_1, y_2 \in \partial A$, és hogy $z \in$
 $[y_i, x]$ -re mindig $y_i \in \text{pr}_{\bar{A}} z$ ($i=1,2$). Ez azt je-
 lenti, hogy $z \in [y_i, x]$ -re $\text{distance}(z, A) =$
 $= \text{distance}(z, y_i)$ teljesül. Ezért pedig - bevezetve az

$$e_i = \frac{y_i - x}{\|y_i - x\|} \quad \text{jelölést} \quad (i=1,2) \quad - \quad f \text{-nek az } e_i$$

irányú deriváltjára az $(y_i, x]$ szakasz összes z pont-
 jaiban, és így speciálisan x -ben, is fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_i} \Big|_z f &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(z + \varepsilon e_i) - f(z)] = \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\text{distance}(z + \varepsilon e_i, y_i) - \text{distance}(z, y_i)] = -1 \end{aligned}$$

Ha tehát volna $\text{grad } f(x)$, akkor

$$\langle e_i, \text{grad } f(x) \rangle = -1 \quad (i=1,2)$$

kellene, hogy legyen. Ez azonban lehetetlen, mert $f(z) =$
 $= \|y_1 - x\| = \|y_2 - x\|$ miatt az e_1 és e_2 különböző egy-
 ségvektorok, másrészt pedig jól tudott, hogy az f Lipschitz

konstansa a háromszögegyenlőtlenség folytán 1-nél nem nagyobb, és így $\| \text{grad } f(x) \| < 1$. $\square$

Következmény. Ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ és $f(\cdot) = \text{distance}(\cdot, A)$, akkor majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ -ra

$$\text{grad } f(x) = \frac{x - \text{pr}_{\bar{A}} x}{\|x - \text{pr}_{\bar{A}} x\|}$$

(Itt az előző tétel igazolja a formálisan konfúziv $x - \text{pr}_{\bar{A}} x$ jelölés létjogosultságát.)

Bizonyítás. Legyen x egy olyan pont, ahol $\text{grad } f(x)$ létezik. A tétel bizonyításában már kiderült, hogy az x pontnak pontosan egy vetülete van $\bar{A}$ -ra. Jelöljük ezt y -nal (azaz $\{y\} = \text{pr}_{\bar{A}} x$), és legyen $e = \frac{y - x}{\|y - x\|}$. Azt is láttuk, hogy most $\langle e, \text{grad } f(x) \rangle = -1$. Ujra kihasználva azt a tényt, hogy $\| \text{grad } f(x) \| \leq 1$, innen rögtön adódik, hogy $\text{grad } f(x) = -e$ szükségképpen.

2.2. Lehet-e az A normálisának metrikus definíciót adni? C^1 -sima határú konvex A esetében az $L_y = y + [0, \infty) k(y)$ ($y \in \partial A$) félegyenesekkel fogható meg a kérdés: L_y pontosan azokból a pontokból áll, amelyeknek y a vetülete $\bar{A}$ -ra. Másfelől, ha y az A belső pontja, akkor $\{x : y \in \text{pr}_{\bar{A}} x\}$ csak maga az y pontból álló halmaz, nem félegyenés vagy legalább is olyan szakasz, aminek irányítást lehetne adni. Ez mutatja a következő általános definíció hasznosságát:

Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges és y az $\bar{A}$ egy pontja. Vezessük be ekkor a $D_{\bar{A}} y$ szimbólumot az $\{x \in \mathbb{R}^n : y \in \text{pr}_{\bar{A}} x\}$ halmaz jelölésére. $D_{\bar{A}} y$ -t az y pont $\bar{A}$ -ra vonatkozó Dirichlet-cellájának fogjuk nevezni. A terminológiát a diszkrét geometriából kölcsönöztük, ahol (diszkrét A halmaz mellett) így nevezik őket (ld. pl. [16]).

Ugyanúgy, mint diszkrét A -nál, mindig igaz, hogy

a) a $D_{\bar{A}} y$ Dirichlet-cellák konvexek és zártak

b) az $\bar{A}$ összes Dirichlet-cellái lefedik a teret (azaz

$$\bigcup \{D_{\bar{A}} y : y \in \bar{A}\} = \mathbb{R}^n)$$

c) $\bar{A}$ Dirichlet-cellái majdnem diszjunktak egymástól.^{14.}

A bizonyításuk is azonos módon megy, mint diszkrét esetre:

a) Mivel $D_{\bar{A}} y$ a

$$H(y, y') = \{x : \text{distance}(x, y) \leq \text{distance}(x, y')\}$$

zárt félterek metszete $y' \in A$ -ra

^{14.} A $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmazok egymástól majdnem diszjunktak ha a K_1 lényeges belseje diszjunkt K_2 -től és viszont. (Egy $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz lényeges belseje - "intrinsic core" az elfogadott angol terminológia szerint - a K -nak az őt tartalmazó legszűkebb affin altér euklideszi topológiája szerinti belső pontjaiból áll. V.ö. [17] I. fejezet.)

- b) Mivel a tér minden pontjához van legalább egy legközelebbi $\bar{A}$ -ban.
- c) Mivel egy $D_{\bar{A}} y$ cella lényeges belseje azokból a pontokból áll, amelyek y -hoz közelebb vannak, mint bármely tőle különböző $y' \in \bar{A}$ ponthoz.

Könnyű látni, hogy a Dirichlet-cellák definíciója ekvivalens azzal, hogy $D_{\bar{A}} y$ pontosan azokból az $x (\in \mathbb{R}^n)$ pontokból áll, amelyekre $\text{distance}(x, y) = \text{distance}(x, A)$. Ez utóbbi verbálisan úgy is kifejezhető, hogy $D_{\bar{A}} y$ -t azok a pontok alkotják, amelyek $\bar{A}$ pontjai közül az y -hoz fekszenek legközelebb (abban az értelemben, hogy még más belső pont is lehet ugyanolyan távol x -től, mint y). Vagy pedig $D_{\bar{A}} y$ azoknak a maximális zárt egyenes szakaszoknak az egyesítése (félegyenest is beleértve az egyenes szakasz fogalmába), amelyek y -ból indulnak ki és rajtuk a $\text{distance}(\cdot, A)$ függvényeknek az irányukba eső direkciónális deriváltjának az értéke 1.

2.3. A fentiek egyszerűségük ellenére sokatmondók. Ha pl. az $A (\subset \mathbb{R}^n)$ C^1 -sima határú nyitott halmaz, akkor szerintük az A komplementere $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ felbontható olyan páronként diszjunkt lényeges belsejű zárt egyenes szakaszok egyesítésére, amelyek a ∂A pontjaiból indulnak ki a kifelé mutató normális irányában. De az általános típusú A esete sem bonyolultabb, mert az $y \in \partial A$ pontokhoz tartozó $D_{\bar{A}} y$ cellák uniója ekkor is nyilván $\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A}$ -t adja ($\overset{\circ}{A}$ = az A belseje), és mindegyik ilyen $D_{\bar{A}} y$

Dirichlet-cella felbontható 2.2. a) miatt γ -ból kiinduló zárt szakaszok egyesítésére, c) következtében pedig ezek a szakaszok egymással legfeljebb csak közös végpontjukban érintkezhetnek.

E megállapítások alapján ki tudjuk terjeszteni a kifelé mutató normális fogalmát egy tetszőleges $A (\subset \mathbb{R}^n)$ esetére is.

2.4. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \partial A$ és L egy γ kezdőpontú (zárt) egyenes szakasz.¹⁵ Azt fogjuk mondani, hogy L az A határának (A -ból) kifelé mutató (egyik) prenormálisa az γ pontnál (ehelyett röviden általában csak annyit fogunk írni, hogy "az kifelé mutató prenormálisa" vagy az " A külső prenormálisa"), hogyha található egy olyan γ kezdőpontú L' zárt félegyenes a $D_A \gamma$ -t tartalmazó legalacsonyabb dimenziójú altérben, amelyre $L = L' \cap D_A \gamma$, vagy pedig ha $L = \{\gamma\}$ abban az esetben, amikor $\{\gamma\} = D_A \gamma$. Egyik k egységvektoráról $\mathbb{R}^n$ -nek pedig azt mondjuk, hogy a ∂A (egyik) A -ból kifelé mutató normálisa (röviden: "az A kifelé mutató normálisa") γ -ban, ha van olyan L nem-elfajuló (azaz nem egyetlen pontból álló) kifelé mutató prenormálisa A -nak, amelyik az $\gamma (\in \partial A)$ pontból a k irányban indul ki.

15. Az egyenes szakaszok az egyenesek konvex részhalmazai (tehát egyenes szakasz a pont, a félegyenes és maga az egyenes is).

Világos a következő:

Lemma. Ha az $A \subset \mathbb{R}^n$ nyitott halmaz határa C^1 -sima felület (azaz $\mathbb{R}^n$ egy $n-1$ dimenziós C^1 -alsokasága), és ha az $y \in \partial A$ pontnál létezik az előbbi metrikus értelemben vett kifelé mutató normálisa, akkor csak egy ilyen van, és az egybeesik a szokásos differenciálgeometriai úton definiált y -beli kifelé mutató normálisával a ∂A -nak. $\square$

Megjegyzés. Azonban valóban megtörténhet még a C^1 -sima határ mellett is, hogy a ∂A -nak nem létezik a metrikus értelemben vett kifelé mutató normálisa (jóllehet differenciálgeometriai van) egy $y \in \partial A$ pontban. Példa: $n=2$, $A = \{(x_1, x_2) : x_2 < |x_1|^{3/2}\}$, $y = (0, 0)$. (A bizonyítást ld. a 3.2. Korolláriumban.)

2.5. A befelé mutató prenormálisait és normálisait egy $A \subset \mathbb{R}^n$ -nek természetes módon az $\mathbb{R}^n \setminus A$ kifelé mutató prenormálisai- ill. normálisaként definiálhatjuk. Így ez a fogalom technikai szempontból már nem jelent lényeges könnyítést. Ezzel szemben az együttes tárgyaásukkal néhány tény jobban megvilágítható.

Definíció. Vezessük be a

$$\text{sgndist}(x, A) = \begin{cases} \text{distance}(x, A) & \text{ha } x \notin A \\ -\text{distance}(x, \mathbb{R}^n \setminus A) & \text{ha } x \in A \end{cases} = \begin{cases} \text{distance}(x, \partial A) & \text{ha } x \notin \bar{A} \\ -\text{distance}(x, \partial A) & \text{ha } x \in \bar{A} \end{cases}$$

előjelezett távolságfüggvényt. (Így ugyanis akármilyen 0 -tól különböző ϱ -ra $A_\varrho = \{x : \text{sgndist}(x, A) < \varrho\}$.)

Definíció. Ha az $A \subset \mathbb{R}^n$ nem-üres, és $L \subset \mathbb{R}^n$ egy

olyan maximális egyenes szakasz, amelyen a $\text{sgndist}(\cdot, A)$ függvény 1 meredékségű lineáris (azaz $y, z \in L$ -re mindig $\text{distance}(y, z) = |\text{sgndist}(y, A) - \text{sgndist}(z, A)|$), akkor L -et az A (egyik) prenormálisának nevezzük. Ezt a következő motiválja:

Lemma. a) Ha az A -nak egy L_+ külső és egy L_- belső nem-elfajuló prenormálisa közös ∂A -beli y pontból indul ki, akkor ezek egy egyenesbe esnek (egymás "meghosszabbításaiként").

b) Egy L egyenes szakasz pontosan akkor prenormálisa A -nak, ha felbontható egy közös ∂A -beli kezdőponttal rendelkező (esetleg elfajuló) külső és belső prenormális egyesítésére.

Bizonyítás. a) Vegyünk egy $z \in L_- \setminus \{y\}$ pontot, és tekintsük a $G = \{x : \text{distance}(x, z) \leq \text{distance}(x, y)\}$ gömböt. A befelé mutató prenormálisok definíciója alapján most Minthogy kisebb halmaz Dirichlet-cellái nagyobbak mindig (azaz, ha $\emptyset \neq B \subset B'$ akkor $D_{\bar{B}} u > D_{\bar{B}'} u \quad \forall u \in \bar{B}$), az L_+ szakasz szükségképpen benne fekszik a

$D_G y = y + [0, \infty)(y - z)$ félegyenesben, ami pedig az L_- meghosszabbításában van.

b) Ha $L = L_+ \cup L_-$, ahol $L_+ \cap L_-$ egyetlen ∂A -beli pontból áll, akkor az a) állítás szerint L_+ és L_- egy egyenesbe esnek. Innen a külső ill. belső prenormálisok definíciója rögtön adja, hogy ilyenkor az L egy prenormális.

Az, hogy másfajta prenormális nincs, onnan jön, hogy ha e egy L prenormálissal párhuzamos egységvektor és x az L egy (tetszőleges) belső pontja^{16.}, akkor a prenormálisok definíciója szerint van olyan $\varepsilon > 0$, hogy a $g(.) = \text{sgndist}(. , A)$ függvényre

$$\text{vagy (i)} \quad g(x + \varepsilon e) - g(x - \varepsilon e) = 2$$

$$\text{vagy (ii)} \quad g(x + \varepsilon e) - g(x - \varepsilon e) = -2$$

teljesül, ami (azért mert a g Lipschitz-konstansa 1) azt jelenti, hogy x -ben a g függvény totálisan deriválható^{17.},

^{16.} Ha L csak egyetlen pontból áll, vagyis $L = \{y\}$ alakú, akkor az y pont nem lehet sem külső, sem belső prenormálison, és így ilyenkor $y \in \partial A$ és $D_A y = D_{\mathbb{R}^n \setminus A} y = \{y\}$

Tehát rögtön áttérhetünk arra az esetre, amikor az nem-elfajuló egyenes szakasz.

^{17.} Általában is, ha $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy M konstansú Lipschitz függvény (azaz ha $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$) és adott z_1, z_2 -re $\varphi(z_2) - \varphi(z_1) = M \|z_2 - z_1\|$, akkor

a (z_1, z_2) szakasz minden z pontjában $\text{grad } \varphi(z) = M \frac{z_2 - z_1}{\|z_2 - z_1\|}$. Bizonyítás: Véve a $\psi_1(.) = \varphi(z_1) + M \|.\| - z_1\|$

ill. $\psi_2(.) = \varphi(z_2) - M \|.\| - z_2\|$ függvényeket, a

Lipschitz feltétel miatt $\psi_1 \geq \varphi \geq \psi_2$, és az előbbi $z \in (z_1, z_2)$ pontra $\psi_1(z) = \varphi(z) = \psi_2(z)$.

Minthogy $\text{grad } \psi_1(z) = \text{grad } \psi_2(z) = M \frac{z_2 - z_1}{\|z_2 - z_1\|}$, a

közrefogás miatt φ is totálisan deriválható itt, és $\text{grad } \varphi(z) = \text{grad } \psi_1(z) = \text{grad } \psi_2(z)$.

3. § A C^{1+} -SIMA HATÁRU HALMAZOK ESETE

3.1. A 2. §-ban kapott kép a távolságfüggvény viselkedéséről természetes módon vezet a következő sejtéshez:

Ha egy (általános típusú) $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz határának minden kifelé mutató prenormálisa legalább $\varrho_0 > 0$ hosszú, akkor a $\text{vol}_{n-1} \partial A_\varrho$ függvény egy $n-1$ -edfokú po-

linomja ϱ -nak a $(0, \varrho_0)$ intervallumon. Mint látni fogjuk, ez igaznak is bizonyul^{18.}. Ha az A C^2 -sima határu és nyitott, rögtön látjuk az okát is:

$k(\cdot)$ -val jelölve a ∂A kifelé mutató normálisát (a C^2 -simaság miatt ez most mind differenciálgeometriai-, mind metrikus értelemben létezik, és ugyanaz), és mint az előbb is 1.3-ban $F_\varrho y = y + \varrho k(y)$ -t ($y \in \partial A$), $0 \leq \varrho < \varrho_0$ esetén az F_ϱ leképezés kölcsönösen egy-

^{18.} Nem nehéz belátni, hogy ez az állítás 2 dimenzióra ekvivalens H. Hadwiger [24] cikkének a főtételel, mert az összes külső prenormális ϱ_0 -nál nem rövidebb volta az ottani terminológiával úgy formulázható meg, hogy az halmaz " ϱ_0 -unterkonvex". (A [24] gondolatmenete lényegesen különbözik az ittenitől.)

Bizonyítás. Tekintsük A -nak egy tetszőleges L pre-normálisát. A 2.5. Lemma szerint az L felírható $L = y + [\alpha, \beta]k$ alakban ($\alpha = -\infty, \beta = \infty$ is megengedett), ahol $\alpha \leq 0 \leq \beta$ és k egy egységvektor úgy irányítva, hogy az $y + [\alpha, 0)k$ szakasz az A belsőjébe, az $y + (0, \beta]k$ pedig $\mathbb{R}^n \setminus A$ -ba essék. Vizsgáljuk most a $\varphi(s) = \text{sgndist}(y + sk, \mathbb{R}^n \setminus A_{s_1})$ függvény menetét.

a) Ha $\beta \geq s \geq s_1$, akkor a kifelé mutató pre-normális definícióját az $y + [0, \beta]k$ szakaszra alkalmazva kapjuk, hogy $y + sk \in D_A y$, és innen $\text{distance}(y + sk, A) = \text{distance}(y + sk, y) = s \geq s_1$, tehát $y + sk \in \mathbb{R}^n \setminus A_{s_1}$. Ezért most a sgndist függvény definíciója szerint $\text{sgndist}(y + sk, \mathbb{R}^n \setminus A_{s_1}) = -\text{distance}(y + sk, \partial A_{s_1})$.

De minden $y' \in \partial A_{s_1}$ -re $\text{distance}(y + sk, y') \geq \text{distance}(y + sk, A) - \text{distance}(y', A) = s - s_1$ és itt egyenlőség áll $y' = y + s_1 k$ ($\in \partial A_{s_1}$!) -re. Eszerint pedig $\text{distance}(y + sk, \partial A_{s_1}) = s - s_1$ ilyenkor, azaz $\varphi(s) = s_1 - s$.

b) Ha $s_1 > s \geq 0$, akkor ugyanúgy, mint az előbb $\text{distance}(y + sk, A) = s$, vagyis ebben az esetben $s_1 > s$ következtében $y + sk \notin \mathbb{R}^n \setminus A_{s_1}$

és így $\varphi(\varrho) = \text{distance}(y + \varrho k, \partial A_{\varrho_1})$. Megint

$y' \in \partial A_{\varrho_1}$ -et véve
 $\text{distance}(y + \varrho k, y') \geq \text{distance}(y', y) - \text{distance}(y + \varrho k, y) \geq \varrho_1 - \varrho$
 áll, $y' = y + \varrho_1 k$ mellett egyenlőséggel. Ebből
 $\text{distance}(y + \varrho k, \partial A_{\varrho_1}) = \varrho_1 - \varrho = \varphi(\varrho)$.

c) Ha $0 > \varrho \geq \alpha$, akkor $y + \varrho k \in \overset{\circ}{A}$,
 és így $y + \varrho k \notin \mathbb{R}^n \setminus A_{\varrho_1}$. Tehát most $\varphi(\varrho) =$
 $= \text{distance}(y + \varrho k, \partial A_{\varrho_1})$.

Legyen $y' \in \partial A_{\varrho_1}$ és $z \in [y', y + \varrho k] \cap \partial A$
 (az $[y', y + \varrho k]$ szakasznak kell, hogy legyen metszés-
 pontja az A határával, mert $y' \notin \bar{A}$, míg $y + \varrho k \in \bar{A}$).

Ekkor

$$\begin{aligned} \text{distance}(y + \varrho k, y') &= \text{distance}(y + \varrho k, z) + \text{distance}(y', z) \geq \\ &\geq \text{distance}(y + \varrho k, \partial A) + \text{distance}(y', \partial A) = \varrho_1 + |\varrho| = \varrho_1 - \varrho , \end{aligned}$$

úgy, hogy egyenlőség van $y' = y + \varrho k$ -nál (ilyenkor
 $z = y$ szükségképpen). Ez mutatja, hogy
 $\text{distance}(y + \varrho k, \partial A_{\varrho_1}) = \varrho_1 - \varrho = \varphi(\varrho)$.

Az a) b) és c) diszkussziók szerint a $\varphi(\varrho)$ függ-
 vény egybeesik $\varrho_1 - \varrho$ -val a $\beta \geq \varrho \geq \alpha$ inter-
 vallumon, azaz a $\text{sgndist}(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus A_{\varrho_1})$ függvény 1 meredek-

ségű az L -en. Mivel az L tetszőleges prenormálisa volt
 az A -nak, ez azt jelenti, hogy A halmaz minden L pre-
 normálisa benne van az $\mathbb{R}^n \setminus A_{\varrho_1}$ valamelyik L'

prenormálisában. Azonban a 2.5. Következmény szerint ez

csak úgy fordulhat elő, hogy $L = L'$ mindig. $\square$

Következmény. A Lemma feltételei mellett a $B = \mathbb{R}^n \setminus A_{\mathcal{S}_1}$ halmazra $\bar{A} = \mathbb{R}^n \setminus B_{\mathcal{S}_1}$ teljesül. Az $A_{\mathcal{S}_1}$ tartománynak is ugyanazok a prenormálisai, mint az A halmazéi (t.i. $A_{\mathcal{S}_1}$ az $\mathbb{R}^n \setminus A_{\mathcal{S}_1}$ komplementere), így az $A_{\mathcal{S}_1}$ külső prenormálisai $\mathcal{S}_1$ -gyel rövidebbek az A külső-, és a belső prenormálisai $\mathcal{S}_1$ -gyel hosszabbak az A belső prenormálisainál.

3. § A C^{1+} -SIMA HATÁRU HALMAZOK ESETE

3.1. A 2. §-ban kapott kép a távolságfüggvény viselkedéséről természetes módon vezet a következő sejtéshez:

Ha egy (általános típusú) $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz határának minden kifelé mutató prenormálisa legalább $\varrho_0 > 0$ hosszú, akkor a $\text{vol}_{n-1} \partial A_\varrho$ függvény egy $n-1$ -edfokú po-

linomja ϱ -nak a $(0, \varrho_0)$ intervallumon. Mint látni fogjuk, ez igaznak is bizonyul^{18.} Ha az A C^2 -sima határu és nyitott, rögtön látjuk az okát is:

$k(\cdot)$ -val jelölve a ∂A kifelé mutató normálisát (a C^2 -simaság miatt ez most mind differenciálgeometriai-, mind metrikus értelemben létezik, és ugyanaz), és mint az előbb is 1.3-ban $F_\varrho y = y + \varrho k(y)$ -t ($y \in \partial A$), $0 \leq \varrho < \varrho_0$ esetén az F_ϱ leképezés kölcsönösen egy-

^{18.} Nem nehéz belátni, hogy ez az állítás 2 dimenzióra ekvivalens H. Hadwiger [21] cikkének a főtételel, mert az összes külső prenormális ϱ_0 -nál nem rövidebb volta az ottani terminológiával úgy formulázható meg, hogy az halmaz " ϱ_0 -unterkonvex". (A [21] gondolatmenete lényegesen különbözik az ittenitől.)

értelmű megfeleltetést létesít ∂A és ∂A_g között. Az 1.3-ból adódó $d\sigma' = \text{vol}_{m-1} F_g d\sigma = |1 + \kappa_1 g| \dots |1 + \kappa_{m-1} g|$

reláció a ∂A $d\sigma$ elemi felületdarabjára, most is azt

adja, hogy $\text{vol}_{m-1} A = \int_{\partial A} |1 + \kappa_1 g| \dots |1 + \kappa_{m-1} g| d\sigma$

Ugyanakkor várható $1 + \kappa_i g > 0$ az összes i -re

($0 \leq g < g_0$), mert az a tény, hogy $F_g y \in D_{\bar{A}} y$ ha

$y \in \partial A$ és $0 \leq g < g_0$ (ez abból következik,

hogy a feltevésünk szerint a kifelé mutató prenormálisok mind legalább g_0 hosszúak), azt jelenti, hogy az $F_g y$ középpontú sugarú gömb ilyenkor a felülettel csak

az y pontjában érintkezik. Ez a tény pedig azt sugallja, hogy a ∂A összes y -beli normálgörbületi sugarai (a $k(\cdot)$

normálisnak megfelelő előjellel véve) nagyobbak g -nál, azaz a ∂A összes főgörbületeinek negatívjai kisebbek $\frac{1}{g}$ -

nál, ahonnan tehát

$$\text{vol}_{m-1} \partial A_g = \int_{\partial A} (1 + \kappa_1 g) \dots (1 + \kappa_{m-1} g) d\sigma.$$

A pontos bizonyításokat egyből a szükséges legnagyobb általánosságban végezzük el:

3.2. Lemma. Legyen az A az $\mathbb{R}^m$ térnek egy C^1 -sima felülettel határolt részhalmaza, és $k(\cdot)$ a ∂A kifelé mutató normálisa. Tegyük fel, hogy $y_0 \in \partial A$ -ban a kifelé mutató prenormális $g_0 > 0$ -nál hosszabb, és hogy az y_0 pontnak egy ∂A -beli S környezete egy olyan $F: G \rightarrow S$ leképezés szerinti képe egy $\mathbb{R}^{m-1}$ -beli G origókönyezetnek, amelyre $F(0) = y_0$ és amelyre

~~és amelyre~~ állnak az 1.3. Lemma a) ill. b) feltételei.

Állítás: ekkor ∂A összes y_0 -beli ($k(\cdot)$ -val számított) normálgörbületei nagyobbak $-\frac{1}{g_0}$ -nál.

Bizonyítás. Hasonlóképpen, mint az 1.3. Lemma bizonyításánál, most is feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy az F leképezés $x \mapsto (x, f(x))$, ahol az f egy olyan C^1 -sima $f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek a parciális deriváltjai totálisan deriválhatók a 0 -ban, és amelyre $f(0) = 0$, ill. $\text{grad } f(0) = 0$ $k(\cdot)$ -nak pedig vehető megint az f grafikonjának a felfelé mutató normálisa.

Rögzítsünk egy $(e, 0)$ irányt (ahol $e \in \mathbb{R}^{n-1}$ és $\|e\| = 1$), és tekintsük a ∂A felület k szerinti $(e, 0)$ irányú normálgörbületének κ^e értékét a $(0, 0) = y_0$ pontban. Bevezetve a $\varphi(\lambda) = f(\lambda e)$ függvényt, az 1.3-beli (5) alapján egyszerűen

$$(7) \quad \kappa^e = -\varphi''(0)$$

írható. Az f függvény viselkedésére az a tény szab korlátozó feltételt, hogy ∂A -nak az y_0 -beli kifelé mutató pre-normálisa g_0 -nál hosszabb. Figyelembe véve, hogy most

$k(y_0) = k((0, 0)) = (0, 1)$, ez azt jelenti, hogy valamely $g_1 > g_0$ -ra a $(0, g_1) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ pont a $D_A y_0$

Dirichlet-cellába tartozik, és így az S felület, azaz az

f függvény grafikonjának minden pontja legalább g_1 tá-

volságra van a $(0, \varrho_1)$ -től. Ez a szituáció geometriailag úgy fejezhető ki, hogy a $(0, \varrho_1)$ középpontú ϱ_1 sugarú gömbje $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ -nek az f grafikonja felett helyezkedik el. Így a $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ ϱ_1 sugarú környezetében minden x pontra

$$(8) \quad f(x) \leq \varrho_1 - (\varrho_1^2 - \|x\|^2)^{1/2},$$

vagyis

$$(8') \quad \varphi(\lambda) \leq \varrho_1 - (\varrho_1^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (-\varrho_1 < \lambda < \varrho_1)$$

Mivel a $\text{grad } f$ folytonos és $\text{grad } f(0) = 0$,

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi'(\vartheta) d\vartheta = \int_0^1 \frac{\varphi'(\lambda\tau)}{\lambda} d\tau = \int_0^1 \frac{\varphi'(\lambda\tau)}{\lambda\tau} d\frac{\tau^2}{2}$$

$(-\varrho_1 < \lambda < \varrho_1)$. Hasonló átalakítást elvégezhetünk a

$$\psi(\lambda) = \varrho_1 - (\varrho_1^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad \text{függvényen is, hiszen}$$

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0 \quad . \quad \text{Így (8') a}$$

$$(9) \quad \int_0^1 \frac{\varphi'(\lambda\tau) - \psi'(\lambda\tau)}{\lambda\tau} d\frac{\tau^2}{2} \leq 0 \quad (-\varrho_1 < \lambda < \varrho_1)$$

formában írható. $\lambda > 0$ mellett (9)-ben az integrandus egyenletesen tart $\varphi''(0) - \psi''(0)$ -hoz. Ebből

$$\varphi''(0) \leq \psi''(0) = \frac{1}{\varrho_1} \quad \text{következik, vagyis (7)}$$

szerint $\kappa^e \geq -\frac{1}{\varrho_1} > -\frac{1}{\varrho_0}$. $\square$

Korollárium. A 2.4. Megjegyzésnél vett A halmaznak



a $(0,0)$ -ban nem létezik a kifelé mutató normálisa metrikus értelemben, mert az ellenkező esetben volna olyan

$\varrho > 0$, amelynél hosszabb a ∂A $(0,0)$ -beli kifelé mutató prenormálisa, így pedig (8) szerint valamely környezetében a 0 -nak $|x_1|^{3/2} \leq \varrho - (\varrho^2 - x_1^2)^{1/2}$

kellene, hogy álljon, ami lehetetlen.

3.3. Ezután tegyük fel végig a 3. §-ban, hogy az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyitott halmaz, és a határa előáll véges sok olyan $F_1, \dots, F_\nu$ kölcsönösen egyértelmű C^1 -sima $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés képtartományának uniójaként, melyekre

a) $\text{Jac } F_i \neq 0$ ($\mathbb{R}^{n-1}$ egyetlen pontjában sem; $i=1, \dots, \nu$)

b) $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ -re $F_i^m(x)$ -szel jelölve az $F_i(x) \in \mathbb{R}^n$ pont m -edik koordinátáját, a $\frac{\partial F_i^m}{\partial x_j}$ ($i=1, \dots, \nu$

és $m, j=1, \dots, n$) függvények korlátosak és (első rendű) Lipschitz feltételt teljesítenek.

Jól ismert rutinbizonyítással belátható, hogy a), b) és a ∂A korlátossága ekvivalens pl. azzal, hogy a ∂A olyan $n-1$ dimenziós kompakt C^1 -alsokasága az $\mathbb{R}^n$ térnek, amelynek az A -ból kifelé mutató differenciálgometriai $k: \partial A \rightarrow \{e \in \mathbb{R}^n: \|e\|=1\}$ normálisa Lipschitz feltételt teljesít.

Tekintsük ekkor a $T_\varrho: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$y \mapsto y + \varrho k(y) \quad (-\infty < \varrho < \infty)$$

és az $F_{i,\varrho} = T_\varrho \circ F_i$ ($i=1, \dots, \nu$ ill. $-\infty < \varrho < \infty$)

leképezéseket. Rögzített ϱ esetén a b) feltevés azt je-

lenti, hogy az $F_{1,\vartheta}, \dots, F_{\nu,\vartheta}$ mind Lipschitz leképezések $\mathbb{R}^{n-1}$ -ből $\mathbb{R}^n$ -be. Ismeretes, hogy általában is egy $\mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz leképezés komponensfüggvényei (ezek $\mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ függvények) $\mathbb{R}^l$ -ben majdnem mindenütt (vol_l szerint m.m.) totálisan deriválhatók^{19.}

Ebből a tényből és az 1.3. Lemmából az következik, hogy

$\mathcal{J}ac F_{i,\vartheta}$ az $\mathbb{R}^{n-1}$ majdnem minden helyén létezik, és m.m. $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ -re értelmes és igaz a

$$(10) \mathcal{J}ac F_{i,\vartheta}(x) = [1 + \kappa_1(F_i x) \cdot \vartheta] \dots [1 + \kappa_{n-1}(F_i x) \cdot \vartheta] \cdot \mathcal{J}ac F_i x$$

($i = 1, \dots, \nu$)

egyenlőség, ahol $\kappa_1(y), \dots, \kappa_{n-1}(y)$ a ∂A felület $k(\cdot)$ szerinti főgörbületeinek értékei (pl. nagyság szerinti sorrendben elrendezve).

Megjegyezzük a következő számolásokhoz, hogy a $\mathcal{J}(\cdot) = [1 + \kappa_1(\cdot) \vartheta] \dots [1 + \kappa_{n-1}(\cdot) \vartheta]$ függvények (ϑ rögzített) a ∂A felett vol_{n-1} -mérhető. Ugyanis $M_i = \partial A \cap \text{range } F_i$,

$$\phi_i = F_i^{-1}|_{M_i}, \quad \mathcal{J}_i = \mathcal{J}ac F_{i,\vartheta} \quad \text{jelöléssel (10) szerint}$$

$$(10') \quad \mathcal{J}|_{M_i} = \frac{\mathcal{J}_{i,\vartheta} \circ \phi_i}{\mathcal{J}_i \circ \phi_i} \quad (i = 1, \dots, \nu) \quad .$$

19.

Rademacher tétele, ld. [15] 3.1.6 (216. old.)

Itt pedig a $f_i \circ \phi_i$ függvény nem-eltűnő és folytonos, továbbá egy (tetszőleges) B Borel részhalmazára az $\mathbb{R}^n$ -nek $(f_{i,s} \circ \phi_i)^{-1}(B) = F_i|_{\phi_i M_i}(f_{i,s}^{-1}(B)) = F_i(f_{i,s}^{-1}(B) \cap F_i^{-1}(M_i))$

egy vol_{n-1} -mérhető halmaz Lipschitz képe, tehát

vol_{n-1} -mérhető. Így a $f = f|_{M_1} \cup \dots \cup f|_{M_N}$ függvény szintén vol_{n-1} -mérhető az $y \in \partial A$ pontnál.

A továbbiakban az $(1 + \kappa_1 g) \dots (1 + \kappa_{n-1} g)$ függvény helyett (formálisan) $\text{Jac } T_g$ -t írunk röviden. Célunk annak a szemléletes ténynek a szigorú igazolása lesz most, hogy rögzített $g \in (-\infty, \infty)$ -re

$$(11) \quad \text{vol}_{n-1} \partial A_g = \int_{\partial A \cap T_g^{-1}(\partial A_g)} [\text{mult } T_g(T_g y)]^{-1} \text{Jac } T_g(y) d\sigma(y) \quad ^{20},$$

feltéve, hogy a $\text{mult } T_g(\cdot)$ függvény a ∂A_g halmaz felett vol_{n-1} -majdnem mindenütt véges ($d\sigma$ szokásosan a ∂A elemi felületdarabjának a vol_{n-1} -mértéke).

Ehelyett kényelmesebb a nála általánosabb

$$(11') \quad \int_{\partial A_g} v d\sigma' = \int_{\partial A \cap T_g^{-1}(\partial A_g)} \frac{v(T_g y)}{\text{mult } T_g(T_g y)} \text{Jac } T_g(y) d\sigma(y)$$

formula bizonyítása, ahol $v: \partial A_g \rightarrow \mathbb{R}$ olyan korlátos Borel függvény (tetszőleges), amely minden olyan $z \in \partial A_g$ pontban eltűnik, ahol $\text{mult } T_g(z) = \infty$ ($d\sigma'$ pedig a ∂A_g elemi

^{20.} Egy tetszőleges ϕ leképezésre a $\text{mult } \phi(\eta)$ szimbólum azon $\xi \in \text{dom } \phi$ helyek számát jelöli, amelyekre $\phi(\xi) = \eta$

felületdarabjának a vol_{n-1} -mértéke).

Ehhez induljunk ki a [15] -beli 3.2.3-as tételből (243. old.), amely speciálisan egy $F_{i,g}$ leképezésre és

$u_i: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos Borel-függvényre alkalmazva adja, hogy

$$(12) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_i \text{fac } F_{i,g} d\text{vol}_{n-1} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x: F_{i,g}x=y} u_i(x) d\text{vol}_{n-1}(y) \\ (i = 1, \dots, \nu) .$$

Helyettesítsük (12)-be az

$$(13) \quad u_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } F_{i,g}x \notin \partial A_g \\ 0 & \text{ha } F_i x = F_i y \text{ valamelyik } i\text{-nél kisebb} \\ & j \text{ indexre} \\ v(F_{i,g}x) & \text{egyébként} \end{cases} \\ (i = 1, \dots, \nu)$$

függvényeket (itt a v a (11') -ben szereplő függvényre; minden i indexre ugyanaz).

Kapjuk (10) segítségével, hogy

$$(14) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_i(x) \text{fac } T_g(F_i x) \cdot \text{fac } F_i(x) d\text{vol}_{n-1}(x) = \int_{\partial A_g} \left(\sum_{\substack{x: F_{i,g}x=y \text{ és} \\ i = \min\{j: F_j x = F_i x\}}} v(y) \right) d\text{vol}_{n-1}(y)$$

Itt a bal oldalt úgy írhatjuk át ∂A fölötti integrállá, hogy újra alkalmazzuk [15] 3.2.3-at, de most az F_i leképezésre és az $u_i(x) \cdot \text{fac } T_g(F_i x)$ függvényre:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_i(x) \cdot \text{fac } T_g(F_i x) \cdot \text{fac } F_i(x) d\text{vol}_{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x: F_i x=y} u_i(x) \cdot \text{fac } T_g(y) d\text{vol}_{n-1}(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_i(F_i^{-1}y) \cdot \text{Jac } T_S(y) d\text{vol}_{n-1}(y) = \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : u_i(F_i^{-1}y) \neq 0\}} u_i(F_i^{-1}y) \cdot \text{Jac } T_S(y) d\text{vol}_{n-1}(y)$$

Ugyanis az utóbbi kifejezésben (13) szerint

$$\{y : u_i(F_i^{-1}y) \neq 0\} \subset \{y : F_{i,S}(F_i^{-1}y) \in \partial A$$

és i a legkisebbike azon j indexeknek, melyekre

$$y \in \text{range } F_j\} \subset \partial A. \text{ Ezért } S_i \text{ -vel jelölve}^{21}. \text{ a}$$

$$\text{range } F_i \setminus \bigcup \{\text{range } F_j : j < i\} \text{ halmazokat } (i=1, \dots, \nu),$$

$$F_{i,S} = T_S \circ F_i \quad \text{miatt (14) mint}$$

$$(14') \quad \int_{S_i \cap T_S^{-1}(\partial A_S)} v(T_S y) \cdot \text{Jac } T_S(y) d\text{vol}_{n-1}(y) =$$

$$= \int_{\partial A_S} v(y) \cdot \text{card} \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : F_{i,S}x = y \text{ és } F_i x \in S_i\} d\text{vol}_{n-1}(y)$$

írható fel. Tekintve, hogy az F_i leképezések 1-1 leképezések,

$$\text{card} \{x : F_{i,S}x = y \text{ és } F_i x \in S_i\} =$$

$$= \text{card} \{z \in S_i : T_S z = y\}. \text{ Ezt a tényt kihasználva, ha}$$

(14')-t az i indexekre összegezzük (emlékezve arra, hogy az

$$S_1, \dots, S_\nu \text{ halmazok diszjunkt egyesítése } \partial A), \text{ a}$$

végeredmény

$$\int_{\partial A \cap T_S^{-1}(\partial A_S)} v(T_S y) \cdot \text{Jac } T_S(y) d\text{vol}_{n-1}(y) =$$

$$= \int_{\partial A_S} v(y) \cdot \text{card} \{z \in \partial A : T_S z = y\} d\text{vol}_{n-1}(y).$$

Innen (11') azonnal jön, csak a v helyébe a $v/\text{mult } T_S$ függvényt kell tenni (hiszen $\text{card} \{z \in \partial A_S : T_S z = y\} = \text{mult } T_S(y)$)

^{21.} Az i most (alsó) index az S_i szimbólumban, nem pedig paralleltartomány-sugár.

22.

3.4. Ennél azonban lényegesen többet is mondhatunk, hiszen eddig még nem használtuk ki azt a fontos tényt, hogy prenormálisok majdnem-diszjunktak (ld. 2.5. Következmény). Pedig ennek a tulajdonságnak lényeges kapcsolata van a (11) ill. (11') formulákkal, mert emiatt az $y \in \partial A_\vartheta$ pontokra nyilván $\vartheta > 0$ esetén

(16) $\text{mult } T_\vartheta(y) =$ az y -t tartalmazó A -ból kifelé mutató prenormálisok száma^{23.}

A (16) megállapítás viszont jól megfogható a következő gondolatmenettel:

Legyen B az $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ olyan véges vol_n -mértékű részhalmaza, amelynek minden pontját ∂A -nak csak véges sok A -ból kifelé mutató prenormálisa érinti. Ekkor [15] 3.2.11 (248. old.) és [15] 3.2.34 (271. old.) szerint

$$(17) \quad \text{vol}_n B = \int_0^\infty \text{vol}_{n-1}(B \cap \partial A_\vartheta) d\vartheta.$$

Bevezetve a

$$v_\vartheta = 1_B|_{\partial A_\vartheta} \quad 24. \quad (\vartheta > 0)$$

22. 3.3 közvetlen folytatása. Emlékeztetünk, hogy az összes ottani feltevés és jelölés érvényes az egész 3.§-on keresztül.

23. Ez természetesen igaz akármilyen A -ra, nemcsak a most tekintett fajtára.

24. 1_B a B halmaz karakterisztikus függvényének egyik tradicionális jelölése. (Azaz $1_B(y) = 1$ ha $y \in B$ és 0 egyébként.)

és a $w : (0, \infty) \times \partial A \rightarrow \mathbb{R}$

$$(18) \quad w(\vartheta, y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } T_\vartheta y \notin \partial A_\vartheta \\ \frac{1}{\text{mult } T_\vartheta(T_\vartheta y)} & \text{ha } T_\vartheta y \in \partial A_\vartheta \end{cases}$$

függvényeket, (11') segítségével (17) írható mint

$$(17') \quad \begin{aligned} \text{vol}_n B &= \int_0^\infty \int_{\partial A} w_\vartheta(T_\vartheta y) w(\vartheta, y) \cdot \text{Jac } T_\vartheta(y) d\sigma(y) d\vartheta = \\ &= \int_0^\infty \int_{\partial A} 1_B(T_\vartheta y) w(\vartheta, y) \cdot \text{Jac } T_\vartheta(y) d\sigma(y) d\vartheta. \end{aligned}$$

Tekintve, hogy általában is egy kompakt metrikus térről való folytonos leképezés multiplicitásfüggvénye mindig Borel-mérhető^{25.}, és így w is egy $(0, \infty) \times \partial A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, alkalmazható (17')-re Fubini tétele, ahonnan

$$(17'') \quad \text{vol}_n B = \int_{\partial A} \left(\int_0^\infty 1_B(T_\vartheta y) \cdot w(\vartheta, y) \cdot \text{Jac } T_\vartheta(y) d\vartheta \right) d\sigma(y)$$

25. T.i. ha X ill. X' kompakt metrikus terek és

$\phi : X \rightarrow X'$ folytonos, akkor az

$$E'_{m, \varepsilon} = \{x' \in X' : \exists x_1, \dots, x_m \quad \forall i, j \text{ distance}(x_i, x_j) \geq \varepsilon$$

és $\phi(x_i) = x'\}$ halmazok zártak, és

$$\{x' \in X' : \text{mult } \phi(x') > \xi\} = \bigcup_{S=1}^{\infty} E'_{\text{entier } \xi+1, \frac{1}{S}}.$$

Rögzített $y \in \partial A$ pont mellett vizsgáljuk meg a $w(\cdot, y)$ függvény menetét. Vegyük észre, hogy ha $h(y)$ -nal jelöljük a ∂A felület y -nál vett A -ból kifelé mutató prenormálisának a hosszát (csak egyetlen prenormális megy y -on keresztül, mert a ∂A C^1 -sima), akkor

$$(18) \quad w(\varrho, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < \varrho < h(y) \\ \frac{1}{\text{mult } T_\varrho(T_\varrho y)} & \text{ha } \varrho = h(y) \\ 0 & \text{ha } \varrho > h(y) \end{cases}$$

Ugyanis a) a $0 < \varrho < h(y)$ esetben a $T_\varrho(y)$ pont az $L = y + [0, h(y)]$ külső prenormálisban van, de annak nem végpontja, így egyrészt őt csak az L tartalmazhatja a prenormálisok közül, másrészt $L \subset D_{\bar{A}} y$ miatt $\text{distance}(T_\varrho y, A) = \varrho$, azaz $T_\varrho y \in \partial A_\varrho$. Innen (16) adja, hogy most $w(\varrho, y) = 1$.

b) $\varrho = h(y)$ -ra is még $T_\varrho y \in L$, így most is $T_\varrho y \in \partial A_\varrho$, ahonnan w definíciójából jön

$$w(\varrho, y) = (\text{mult } T_\varrho(T_\varrho y))^{-1}$$

c) $\varrho > h(y)$ -ra $T_\varrho y \notin L$, ezért $T_\varrho y \notin D_{\bar{A}} y$.

De így 2.2. b) szerint a $T_\varrho y$ pont közelebb van $\bar{A}$ -nak valamelyik pontjához, mint y -hoz. Ezért $\text{distance}(T_\varrho y, A) < \text{distance}(T_\varrho y, y) = \varrho$, azaz ekkor $T_\varrho y \notin \partial A_\varrho$. Vagyis megint a w definíciójából adódik $w(\varrho, y) = 0$.

(18) alapján (17") az egyszerűbb

$$(17''') \quad \text{vol}_n B = \int_{\partial A} \int_0^{h(y)} 1_B(T_s y) \cdot \text{Jac } T_s(y) \, ds \, d\sigma(y)$$

formába megy át. De maga $\text{vol}_n B$ úgy is felfogható, mint az 1_B függvény integrálja $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ felett. Ebből véges szuperpozícióval adódik, hogy a

$$(19) \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}} \varphi \, d\text{vol}_n = \int_{\partial A} \int_0^{h(y)} \varphi(T_s y) \cdot \text{Jac } T_s(y) \, ds \, d\sigma(y)$$

egyenlőség minden olyan $\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ egyszerű (vagy lépcsős) függvényre igaz, amelyre

$$(20) \quad \varphi(z) = 0 \text{ valahányszor } \text{card} \{L \text{ prenórmálisa } A\text{-nak} : z \in L\} = \infty$$

A Beppo Levi tétel szerint így (19) fennáll egyben minden, a (20) tulajdonsággal rendelkező, $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ -on értelmezett vol_n -integrálható függvényre.

3.5. Mivel $z \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ -ra $\text{card} \{L \text{ prenórmálisa } A\text{-nak} : z \in L\} = \text{card } \pi_{\bar{A}}^{-1} z$, a 2.1. Tétel miatt a (20) feltevés elhagyható az előző eredményből.

Valóban. Legyen $S = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{A} : \text{card } \pi_{\bar{A}}^{-1} z = \infty\}$,

$$\hat{S} = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{A} : \text{card } \pi_{\bar{A}}^{-1} z > 1\} \text{ és } \mathcal{U} = \{T_{h(y)} y : y \in \partial A\}.$$

A definíciókból rögtön következik, hogy

$$(21) \quad S = \hat{S} \subset U.$$

Ezután vegyünk egy tetszőleges vol_n - integrálható

$\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, és legyen $\varphi_1 = \varphi \cdot 1_S$ ill.

$\varphi_2: \varphi \cdot 1_{\mathbb{R}^n \setminus (\bar{A} \cup S)}$. Mivel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, és mivel

φ_2 -re teljesül (20), elég belátni, hogy

$$(22) \quad \int_{\partial A} \int_0^{h(y)} \varphi_1(T_\vartheta y) \cdot \text{Jac } T_\vartheta(y) d\vartheta d\sigma(y) = 0,$$

hiszen $\text{vol}_n S = 0$ következtében $\int_S \varphi_1 d\text{vol}_n =$
 $= \int_S \varphi d\text{vol}_n = 0$. (22) persze már világos (21)-ből,

mert egy tetszőleges $y \in \partial A$ pontnál $0 < \vartheta < h(y)$ esetén az U halmaz definíciója szerint $T_\vartheta y \in U$, és így ilyenkor $\varphi_1(T_\vartheta y) = 0$.

3.6. Végezetül összefoglaljuk egyetlen tételben (amit a dolgozatbeli pozíciója folytán Fő Lemmának fogunk hívni) a 3. §-ban találtakat. A könnyebb megjegyezhetőség kedvéért előzetesen még néhány megjegyzést teszünk.

Nevezzünk egy C^1 -sima leképezést C^{1+} -simának, ha a komponenseinek parciális deriváltjai korlátos Lipschitz függvények. Mivel C^{1+} -sima leképezések kompozíciója is

C^{1+} -sima, értelmezhetők az $\mathbb{R}^n$ tér C^{1+} -al sokaságai. Könnyű látni, hogy ha az $A \subset \mathbb{R}^n$ olyan kor-

látos nyitott halmaz vagy annak komplementere, amelynek határa az $\mathbb{R}^n$ egy $n-1$ dimenziós C^{1+} -alsokasága (mondjuk ezt C^{1+} -sima felületnek), akkor ∂A előállítható olyan $F_1, \dots, F_\nu$ C^{1+} -sima $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \partial A$ leképezések képhalmazainak uniójaként, amelyek kielégítik a 3.3-beli a) és b) feltételeket, vagyis speciálisan egy ilyen A halmazra igazak a 3.3 - 3.5-ben mondottak. Másrészt a 3.3 - 3.5 gondolatmeneteit egy ilyen A komplementerére is elvégezhetjük, kifelé mutató prenormálisok helyett befelé mutatókkal. (Mindezt csak azért nem tettük meg előbb, hogy elkerüljük a felesleges jelöléseket és esetdiszkussziókat. A 3. § megírható jóval rövidebben, de csak az olvashatóság rovására.) Így egy (19)-cel analóg formulát nyerünk:

$$(19') \quad \int_{\overset{\circ}{A}} \psi \, d\text{vol}_n = \int_{\partial A} \int_0^{g(y)} \psi(T_{-g}y) \cdot \text{Jac } T_{-g}(y) \, dg \, d\sigma(y) \quad \forall \psi \in L^1(\overset{\circ}{A})$$

(itt a T_{-g} leképezéseket a kifelé mutató normálissal vettük - innen a negatív előjel - nem a befelé mutatóval az egységesség kedvéért). És mivel egy C^{1+} -sima valódi alsokaság mindig 0 térfogatú, $\text{vol}_n \partial A = 0$ áll. Ezért pedig (19) és (19') összefoglalható az alábbi közös alakba:

Fő Lemma. Legyen A az $\mathbb{R}^n$ tér egy kompakt C^{1+} -sima felülettel határolt részhalmaza. Jelölje ekkor $k(\cdot)$ a ∂A -nak az A -ból kifelé mutató normálisát, T_g pedig a ∂A -n értelmezett $y \mapsto y + g \cdot k(y)$ leképezést.

Legyen továbbá $h_+(y)$ ill. $h_-(y)$ az $y \in \partial A$ pontból kiinduló külső ill. belső prenormálisnak a hossza. Ekkor állíthatjuk, hogy

a) ∂A -nak a $k(\cdot)$ normális szerint vett $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ főgörbületei vol_{n-1} -majdnem minden $y (\in \partial A)$ pontban léteznek és

$$-\frac{1}{h_+(y)} \leq \kappa_i(y) \leq \frac{1}{h_-(y)} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad 26.$$

b) Minden $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vol_{n-1} -integrálható függvényre

$$(19'') \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) d\text{vol}_n(z) = \int_{\partial A} \int_{h_-(y)}^{h_+(y)} \varphi(y + \kappa_1(y) \cdot \xi) [1 + \kappa_1(y) \cdot \xi] \dots [1 + \kappa_{n-1}(y) \cdot \xi] d\xi d\text{vol}_{n-1}(y)$$

áll. (19'') a konvencionálisnak mondható differenciálgeometriai jelölésmóddal röviden az

$$\int \varphi dv = \int_{\partial A} \int_{h_-}^{h_+} \varphi(T_\xi) (1 + \kappa_1 \cdot \xi) \dots (1 + \kappa_{n-1} \cdot \xi) d\xi d\sigma$$

formában is felírható.

Megjegyzés. A Fő Lemmánál egy kicsit erősebb eredmény foglaltatik a (11') formulában (ugyanis (11')-ből vezettük le a Fő Lemmát, míg az csak majdnem minden ξ -ra implikálja (11')-t), amelyet azonban technikailag kellemetlen kezelni. Kiemeljük azonban (11')-nek a következő jól használható speciális esetét:

Átvéve a Fő Lemmabeli jelöléseket és feltételeket, ha a ξ olyan érték, hogy a ∂A_ξ felület minden egyes pontján az A -nak pontosan egy prenormálisa halad keresztül,

26. Ld. a 3.2. Lemmában.

akkor a ∂A_g vol_{n-1} -mérhető F részhalmazaira

$$\begin{aligned}\text{vol}_{n-1} F &= \int_{\partial A} 1_F(y + k(y) \cdot g)(1 + \kappa_1(y) \cdot g) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y) \cdot g) d\text{vol}_{n-1}(y) = \\ &= \int_{\{y \in \partial A : y + g \cdot k(y) \in F\}} (1 + \kappa_1(y) \cdot g) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y) \cdot g) d\text{vol}_{n-1}(y) .\end{aligned}$$

4. § A STEINER-HADWIGER TÉTEL

4.1. Látszólag a Fő Lemma csak igen speciális esetekre terjed ki, hiszen az érvényességi köre alig megy túl a $\mathbb{C}^2$ -sima határu A halmazokon, s nagyon formálisan gondolkodva azt is mondhatná az ember, hogy még egy kockára sem alkalmazható. Hogy mégis itt van a kulcs a legáltalánosabb helyzethez is, mutatja, hogy segítségével egyenesen, minden szokásos approximációs eljárás nélkül bebizonyítható Steiner tételének a nem-konvex halmazokra Hadwiger által talált (ld. [21]) változata:

Tétel. Ha az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos határu halmaz, és mindegyik külső prenormálisa legalább $\varrho_0 > 0$ hosszúságú, akkor az $f(\varrho) = \text{vol}_n(A_\varrho \setminus \bar{A})$ függvény egy n -edfokú polinom a $(0, \varrho_0)$ intervallum felett, vagy ami ugyanaz, az $f'(\varrho) = \text{vol}_{n-1} \partial A_\varrho$ függvény egy $n-1$ -edfokú polinom a $(0, \varrho_0)$ -on.

Bizonyítás. Az egyszerűbb hivatkozás kedvéért a tétel kimondásában szereplő A ill. ϱ helyett használjunk B -t ill. ξ -t. Rögzítsünk egy $0 < \varrho_1 < \varrho_0$ számot, és A -val jelöljük a bizonyítás során a B_{ϱ_1} paralleltartományt. A 2.6. Lemma szerint most (mivel a B külső prenormálisai hosszabbak ϱ_1 -nél)

(23) az A -nak minden belső prenormálisa legalább ϱ_1 és minden külső prenormálisa legalább $\varrho_0 - \varrho_1$ hosszú

és (24) $B_{\xi} = (B_{g_1})_{\xi-g_1} = A_{\xi-g_1}$ ha $0 < \xi < g_0$.

Jóval érdekesebb az az észrevétel, hogy szintén mivel a B külső prenormálisai hosszabbak g_1 -nél,

(25) ∂A az $\mathbb{R}^n$ egy $n-1$ dimenziós C^{1+} -alsokasága.

Hogy ne szakítsuk meg a gondolatmenetet, (25)-öt döntő fontosságánál fogva külön tételként bizonyítjuk a következő pontban. (25)-ből ugyanis már gyorsan adódik a tétel, hiszen így alkalmazható A -ra a Fő Lemma a $\varphi = 1_{B_{\xi} \setminus \bar{B}}$ függvényvel (ahol a ξ változó tetszőlegesen rögzített a $(0, g_1)$ intervallumon). A Fő Lemma jelöléseit használva, (23) annyit jelent, hogy

(26) $h_-(y) \geq g_1$ és $h_+(y) \geq g_0 - g_1 \quad \forall y \in \partial A$

(24) pedig nem más, mint

(27) $1_{B_{\xi} \setminus \bar{B}}(T_{\xi} y) = 1_{(-g_1, \xi-g_1)}(\xi)$ ha $y \in \partial A$ és $0 < \xi < g_0$

(26) és (27)-ből pedig azt kapjuk, hogy

$$\text{vol}_n(B_{\xi} \setminus \bar{B}) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{B_{\xi} \setminus \bar{B}} d\text{vol}_n =$$

$$= \int_{\partial A} \left(\int_{-g_1}^{\xi-g_1} (1+k_1(y) \cdot \xi) \dots (1+k_{n-1}(y) \cdot \xi) d\xi \right) d\sigma(y) \quad \text{ha } 0 < \xi < g_0,$$

ami mutatja, hogy a $\text{vol}_n(B_{\xi} \setminus \bar{B})$ függvény ξ -ben n -edfokú polinom a $(0, g_0)$ -on.

Az pedig, hogy a $\text{vol}_n B_{\xi}$ függvény egy $n-1$ -edfokú polinom a $(0, g_0)$ -on, onnan következik, hogy

$\xi \in (0, g_0)$ -ra (26) szerint $\{y \in \partial A : y + (\xi - g_1) \cdot k(y) \in$

$\in \partial B_\xi \} = \partial A$, és így a 3.7. Megjegyzést alkalmazva

$$\text{vol}_{n-1} \partial B_\xi = \text{vol}_{n-1} A_{\xi-\xi_1} = \int_{\partial A} [1 + (\xi - \xi_1) \kappa_1(y)] \dots [1 + (\xi - \xi_1) \kappa_{n-1}(y)] d\sigma(y). \square$$

4.2. Most bebizonyítjuk (25)-öt, vagyis a következő tételt:

Tétel. Ha az $A \subset \mathbb{R}^n$ olyan, hogy mindegyik külső pre-normálisa legalább $\varrho_0 > 0$ hosszú, ϱ_1 pedig ϱ_0 -nál kisebb pozitív szám, akkor a ∂A_{ϱ_1} halmaz az $\mathbb{R}^n$ tér egy $n-1$ dimenziós C^{1+} -alsokasága.

Bizonyítás. Az $n-1$ dimenziós alsokaságok definíciója szerint azt kell kimutatnunk, hogy található minden $y \in \partial A_{\varrho_1}$ pontnak olyan $\mathbb{R}^n$ -beli nyitott G környezete, amelyre valamilyen C^{1+} -sima nem-eltűnő gradiensű $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel $G \cap \partial A_{\varrho_1} = \{x: f(x) = 0\}$.

Most könnyű a helyzet, mert mint az egyszerű példák alapján várható, a G direkt lehet a ∂A_{ϱ_1} összes pontjaira pl. a

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n: \frac{\varrho_1}{2} < \text{distance}(x, A) < \frac{\varrho_1 + \varrho_0}{2}\}$$

halmaz, f pedig az

$$f(\cdot) = \text{distance}(\cdot, A) - \varrho_1$$

függvény. Mivel a 2.1. Következmény szerint mindegyik $x \in G$ pontban

$$(28) \quad \text{grad } f(x) = \frac{x - \text{pr}_A x}{\|x - \text{pr}_A x\|} \quad 27.$$

csak annyit kell még bebizonyítanunk, hogy G felett a (28) jobb oldalán álló kifejezés Lipschitz feltételt teljesít. Ezt két lépésben tesszük meg: Először külön lemmában bebizonyítjuk (ld. 4.3.), hogy

(29) ha egy $B \subset \mathbb{R}^n$ halmaz külső prenormálisai legalább 2ε hosszúak, akkor ∂B_ε -on a B_ε -ből kifelé mutató normális Lipschitz feltételt teljesít, és a Lipschitz-konstansa $\frac{1}{\varepsilon}$.

Utána ebből a speciális esetből deriváljuk az általánosítást a következőképpen: Legyen $\varepsilon = \min\{\frac{s_1}{2}, \frac{s_0 - s_1}{2}\}$, p és q pedig a G két különböző pontja. Feltehetjük, hogy az A -hoz a p pont fekszik közelebb. Jelölje δ az A -tól való távolságuk különbségét, és legyen r a $[q, \text{pr}_A q]$ szá-

27. Most a $\text{pr}_A x$ halmaz szükségképpen egyelemű, mert

$y \in \text{pr}_A x$ -re a Dirichlet-cellák definíciója szerint $x \in D_A y$, és most amiatt, hogy $0 < \text{distance}(x, y) < \text{distance}(x, A) < s_0$, y a $D_A y$ lényeges belsejében fekszik, ami 2.2. c) alapján kizárja, hogy más pont is lehet $\text{pr}_A x$ -ben.

kasznak az a pontja, amelyik δ távolságban van a q tól. Most $\varrho = \text{distance}(p, A)$ -t véve, természetesen $\varrho = \text{distance}(r, A)$, sőt $B = A_{\varrho-\varepsilon}$ -ra (megjegyezzük, hogy az ε -t úgy definiáltuk, hogy $\varrho > \varepsilon$ lehessen csak) szintén $\text{distance}(p, B) = \text{distance}(r, B)$, és ez a közös távolságuk B -től éppen ε . De az is látszik (v.ö. pl. 2.6*), hogy a B halmaz B -ből kifelé mutató prenormálisai mind legalább 2ε hosszúak, hiszen (újra az ε definíciója szerint) $\varrho + \varepsilon < \varrho$. Vagyis (29)-et alkalmazva kapjuk, hogy

$$(29') \quad \|\text{grad } f(p) - \text{grad } f(r)\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|p - r\|$$

Ugyanakkor (28) alapján $\text{grad } f(q) = \text{grad } f(r)$, így

$$(29'') \quad \|\text{grad } f(p) - \text{grad } f(q)\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|p - r\|$$

Ez $\delta = 0$ -nál maga a bizonyítandó. Tehát feltehetjük, hogy $\delta > 0$. Két eset van: a) ha $\|p - r\| < 2\delta$ és b) ha $\|p - r\| \geq 2\delta$.

a)-nál 2.6-ot (ϱ_1 helyett ϱ -val) az A ill. $\mathbb{R}^n \setminus A_\varrho$ halmazra alkalmazva azt kapjuk, hogy a q pont rajta van az $\mathbb{R}^n \setminus A_\varrho$ -nak az r ponton keresztülhaladó prenormálisán. Mivel $q \in \mathbb{R}^n \setminus A_\varrho$ és $r \in \partial(\mathbb{R}^n \setminus A_\varrho) = \partial A_\varrho$, ez azt jelenti, hogy a q benne van az A_ϱ paralleltartománynak az r -ből kiinduló (egyedüli) külső prenormálisán, azaz, hogy

$$(30) \quad q \in D_{A_\varrho} r.$$

És minthogy $\varrho = \text{distance}(p, A) = \text{distance}(r, A)$, (30)-ból azt kapjuk, hogy

$$(31) \quad \delta = \text{distance}(q, r) \leq \text{distance}(q, p).$$

Most (29'') és (31) felhasználásával

$$\frac{\|\text{grad } f(p) - \text{grad } f(q)\|}{\|p - r\|} \leq \frac{\frac{1}{\varepsilon} \|p - r\|}{\delta} \leq \frac{2}{\varepsilon}$$

b)-nél a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva (29'')-ből

$$\frac{\|\text{grad } f(p) - \text{grad } f(q)\|}{\|p - q\|} \leq \frac{\frac{1}{\varepsilon} \|p - r\|}{\|p - r\| - \|p - q\|} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 - \frac{\delta}{\|p - r\|}} \leq \frac{2}{\varepsilon}$$

Tehát az f függvény a G tartományon $\frac{2}{\varepsilon} = \max\left\{\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_0 - g_1}\right\}$

konstansú Lipschitz függvény. $\square$

4.3. Ezennel bebizonyítjuk a 4.2. Tételhez szükséges, de önmagában is érdekes (29) állítást. Azaz

Lemma. Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ olyan, hogy az összes külső prenormalisai legalább $2\varepsilon (> 0)$ hosszúak, akkor az $y \in \partial A_\varepsilon$ pontbeli A_ε -ből kifelé mutató normálist $k(y)$ -nal jelölve^{28.}, a $K: \partial A_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés teljesíti a

$$\|k(y) - k(z)\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|y - z\| \quad \forall y, z \in \partial A_\varepsilon$$

Lipschitz feltételt.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\varepsilon = 1$ (hiszen a lemma állítása ekvivalens azzal, hogy a ∂A_ε $\frac{1}{\varepsilon}$ -szorosra nagyítottján a $k(\cdot)$ normális $\frac{1}{\varepsilon}$ -szorosa $\frac{1}{\varepsilon}$ konstansú Lipschitz leképezés).

^{28.} Létezését és egyértelműségét 2.6. implikálja.

Mivel tehát feltettük, hogy az A külső prenormálisai legalább 2 hosszúak, 2.6. következtében a $\partial A_{g_1} = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A_1)$ felület pontjainak egyértelmű a vetülete az $\bar{A}$ ill. $\mathbb{R}^n \setminus A_2$ halmazokra, ezért értelmesek a $\{p_i\} = \text{pr}_{\bar{A}} a_i$ ill. $\{q_i\} = \text{pr}_{\mathbb{R}^n \setminus A_2} a_i$ ($i = 1, 2$ és $a_1, a_2 \in \partial A_{g_1}$) definíciók. Sőt 2.6-ból az is látszik, hogy a p_i, a_i és q_i pontok egy egyenesen fekszenek egymástól 1 távolságban, úgy hogy középpont az a_i található ($i = 1, 2$), és hogy

$$[p_i, q_i] \subset D_{\bar{A}} p_i \quad (i = 1, 2)$$

ill., hogy $[a_i, q_i] \subset D_{\bar{A}} a_i$

Ezért ha $k_i = q_i - a_i (= a_i - p_i)$ -t írunk ($i = 1, 2$ mellett), akkor nyilván

$$k(a_i) = \frac{q_i - a_i}{\|q_i - a_i\|} = q_i - a_i = k_i \quad (i = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} 2 &= \text{distance}(a_1 - k(a_1), a_1 + k(a_1)) = \text{distance}(p_1, q_1) \leq \\ &\leq \text{distance}(p_1, q_2) = \text{distance}(a_1 - k(a_1), a_2 - k(a_2)) \text{ és} \\ 2 &= \text{distance}(a_2 - k(a_2), a_2 + k(a_2)) = \text{distance}(p_2, q_2) \leq \\ &\leq \text{distance}(p_2, q_1) = \text{distance}(a_2 - k(a_2), a_1 + k(a_1)). \end{aligned}$$

Igy a lemma állításához elég belátni, hogy általában is a

$$\frac{\|k_1 - k_2\|}{\|a_1 - a_2\|} \rightarrow \sup \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{ha } \|k_1\| = \|k_2\| = 1, a_1 \neq a_2, \|a_1 - k_1\| - \|a_2 + k_2\| &\geq 2, \\ \|a_2 - k_2\| - \|a_1 + k_1\| &\geq 2 \quad (k_1, k_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

variációs problémában a supremum értéke 1, vagy annál kisebb. Az $a_1 - a_2$ kifejezés helyébe x -et írva oldjuk meg először (32)-nek a következő részproblémáját:

$$k_1, k_2 \text{ rögzített, } (\|k_1\| = \|k_2\| = 1), \|x - k_1 - k_2\| > 2, \quad (32')$$

$$\|x - k_2 - k_1\| \geq 2 \quad \|x\| \rightarrow \min.$$

Egyszerű kompaktsági érv mutatja, hogy (32')-nek mindig van megoldása x -re (azaz van értelme $\inf$ helyett $\min$ -ot írni). De (32') még tovább egyszerűsíthető $k_1 + k_2 = c$ -t véve az

$$\|x \pm c\| \geq 2 \quad (\text{ahol } c \text{ adott, } \|c\| \geq 2)$$

$$(32'') \quad \|x\| \rightarrow \min$$

alakig. K -val jelölve az $\mathbb{R}^n$ origó középpontú nyitott egységömbjét, a (32'') feltételi része azt jelenti, hogy x -nek a $2K+c$ és a $2K-c$ gömbök uniójának komplementerében kell lennie. Az ilyen x -ek közül pedig nyilván a két gömb határának a metszetében (azaz a $(2\partial K+c) \cap (2\partial K-c) = \{z: \|z \pm c\| = 2\}$ halmazban) találhatók vannak a legközelebb az origóhoz.

Mint hogy egy $x \in (2\partial K+c) \cap (2\partial K-c)$ pont a c -vel és az origóval egy olyan derékszögű háromszöget alkot, melynek átfogója az $[x, c]$ szakasz, ilyenkor $\|x\| = \sqrt{2^2 - \|c\|^2}$.

Tehát ha φ -vel jelöljük a (32')-ben rögzített k_1 és k_2 egységvektorok által bezárt szöget, akkor (32'')-ben $\|c\| = \|k_1 + k_2\| = 2 \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$, és így a (32'') megoldása a minimum értékére $2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$. Természetesen ugyanez a megoldása (32')-nek is, és innen (32)-vel kapcsolatban azt mondhatjuk, hogy

$$\sup \left\{ \frac{\|k_1 - k_2\|}{\|a_1 - a_2\|} : \|k_1\| = \|k_2\| = 1; a_1 \neq a_2; \|a_1 - k_1 - (a_2 + k_2)\| \geq 2; \right. \\ \left. \|a_2 - k_2 - (a_1 + k_1)\| \geq 2 \right\} = \sup_{0 \leq \varphi \leq \pi} \frac{2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}} = 1$$

hiszen ha $\angle(k_1, k_2) = \varphi$, akkor $\|k_1 - k_2\| = 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$. $\square$

4.4. A Steiner-Hadwiger tételnek ez a bizonyítása igen valószínűvé teszi azt a sejtést, hogy igaz a következő:

Lokális Steiner Tétel. Ha az A az $\mathbb{R}^n$ tér egy nem-üres tetszőleges részhalmaza, B pedig az $\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A}$ -nek egy olyan vol_n -mérhető részhalmaza, amely előállítható A -nak (alkalmas) legalább $\varphi_0 > 0$ hosszúságú külső prenormálisai-
saiból egyesítéssel, akkor a $\text{vol}_n(B \cap A_\varphi)$ függvény a $[0, \varphi_0]$ intervallumon egy n -edfokú polinom.

Olyan A halmazra, amelynek a határa korlátos és az összes kifelé mutató prenormálisai legalább φ_0 hosszúak, a Lokális Steiner Tétel világos, hiszen a 4.1. gondolatmenete szerint ilyenkor pl.

$$(33) \quad \text{vol}_n(B \cap A_\varphi) = \int_{B \cap A_{\varphi_1}} \int_0^{\varphi - \varphi_1} (1 + \kappa_1(y) \cdot \xi) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y) \cdot \xi) d\xi d\text{vol}_{n-1}(y)$$

$$(0 < \varphi < \varphi_0),$$

ahol φ_1 egy tetszőlegesen rögzített hely a $(0, \varphi_0)$ intervallumon, $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ a ∂A_{φ_1} (C^{1+} -sima) felület főgörbületei (az A_{φ_1} -ből kifelé mutató normálissal számolva).

Vizsgáljuk meg először (33) következményeit. Ehhez technikailag könnyebb visszatérni a Fő Lemmának az (A helyett) A_{φ_1} -re alkalmazott

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\text{vol}_n &= \\
 (33') \quad &= \int_{\partial A_{g_1}} \int_{h'_-(y)}^{h'_+(y)} \varphi(y + k'(y) \cdot g') (1 + \kappa'_1(y) \cdot g') \dots (1 + \kappa'_{n-1}(y) \cdot g') d g' d\sigma'(y') \\
 &\quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)
 \end{aligned}$$

alakjához, ahol értelemszerűen $k'(y')$ a ∂A_{g_1} (C^{1+} -sima) felület A_{g_1} -ből kifelé mutató normálisa

$y' (\in \partial A_{g_1})$ -nél, $h'_+(y')$ ill. $h'_-(y')$ az A_{g_1} -

ből ki- ill. befelé mutató prenormálisok hossza ugyanitt,

$\kappa'_1(\cdot), \dots, \kappa'_{n-1}(\cdot)$ ∂A_{g_1} -nek a $k'(\cdot)$ szerinti főgörbületei, $d\sigma$ pedig a ∂A_{g_1} elemi felületdarabjának a vol_{n-1} -mértéke. Célunk az, hogy (33')-t egy g_0 -tól és g_1 -től független alakban fejezzük ki, hogy így a Fő Lemmabelivel analóg alakot kapjunk. Ez minden további nélkül megtehető akkor, hogyha az $y' \mapsto y' - k'(y') \cdot g_1$ leképezés kölcsönösen egyértelmű ∂A_{g_1} és ∂A között.

Ilyenkor csak egy $g' = g - g_1$ helyettesítést kell végrehajtunk, s máris elérkezünk a Fő Lemmának egy (egyelőre elég kis hatáskörű) kiterjesztéséhez. T.I. a Fő Lemmabeli jelöléseket használva az A halmaz külső ill. belső prenormálisainak a hosszára, a ∂A -nak az elemi felszindarabjára és az A -ból kifelé mutató normálisára, most a 2.6. Következmény szerint a ∂A -beli $y = y' - k'(y') \cdot g_1$ -gyel definiált helyen $h_+(y) = h'_+(y') + g_1$, $h_-(y) = h'_-(y') - g_1$,

$k(y) = k'(y')$, és végül az 1.3. Lemma alapján

$d\sigma(y) = (1 - \kappa'_1(y') \cdot g_1) \dots (1 - \kappa'_{n-1}(y') \cdot g_1) d\sigma'(y')$ áll. Ezért formálisan²⁹ úgy definiálva a $\kappa_1(\cdot), \dots, \kappa_{n-1}(\cdot)$ függvényeket ∂A -n, hogy

$$(34) \quad \kappa_i(y) = \frac{\kappa'_i(y')}{1 - \kappa'_i(y') \cdot g_1} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

legyen, (33')-ből pontosan a Fő Lemmában levő (19'') formulát kapjuk vissza (ha a $g' = g - g_1$ helyettesítést elvégezzük, és az iménti azonosságokat kihasználva a $'$ -tlen mennyiségekkel helyettesítjük a $'$ -söket), csak hogy az eredmény immár a Fő Lemmabelinél egy fokkal általánosabb típusú A halmazokra is érvényes.

4.5. A legutóbbi gondolatmenetből kiolvasható, hogy egyrészt hogyan járhatunk el az általános esetben az eredmények célszerű megformulázása szempontjából, másrészt pedig, hogy létezik a Fő Lemmának egy olyan kiterjesztett alakja, amely ekvivalens a Lokális Steiner Tétellel. Egyelőre azonban csak egy gyengébb változatot mutatunk be, amely mindazonáltal a dolgozat Főtételéhez kiindulásul szolgál, és ennek kapcsán új jelöléseket ill. fogalmakat vezetünk be.

²⁹. Meg lehet mutatni, hogy $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ valóban a ∂A főgörbületei (vol_{n-1}-majdnem mindenütt) differenciálgeometriailag, de a dolgozat további menete szempontjából ez a tény érdektelen.

Definíció. Jelöljük a továbbiakban dA -val ($\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$) azoknak az (y, k) pároknak az összeségét, amelyekre létezik olyan nem ponttá fajuló L prenормális a A halmaznak, hogy $\{y\} = L \cap \partial A$, és k az L -lel párhuzamos két egységvektor közül az, amelyik az y pontnál a ∂A -nak egy A -ból kifelé mutató normális vagy egy A -ba befelé mutató normálisának a negatívja. (A definíciót az a tény motiválja, hogy ha az y -ban van a ∂A -nak mind kifelé mind befelé mutató normális, akkor a 2.5. Lemma szerint ezek egyértelműen meg vannak határozva, és egymásnak ellentettjei.) A $dA \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ alakzatot az A irányított határának, és ezzel összhangban a $\partial_o A = \{y \in \partial A : A \text{-nak az } y \text{-t tartalmazó prenормális} = \{y\}\}$ -val értelmezett halmazt pedig az A határa nem-irányítható részének fogjuk nevezni.

$(y, k) \in dA$ -ra jelentse $h_+^A(y, k)$ az A -nak az y -ból a k irányban kiinduló külső, $h_-^A(y, k)$ pedig a $-k$ irányban kiinduló belső prenормálisának a hosszát, és legyen $L^A(y, k)$ az $y + [-h_-^A(y, k), h_+^A(y, k)]$ szakasz.

2.5. alapján világos, hogy az A prenормálisainak a halmaza nem más, mint $L^A(dA) \cup \partial_o A$.

Tétel. Ha az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos határu nem-üres halmaz minden külső prenормális legalább $\varphi_0 > 0$ hosszú, akkor létezik olyan μ mérték a dA felett (azaz egy dA -beli részhalmazokból álló σ -algebrán) és léteznek olyan $a_j: dA \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 0, \dots, n-1$) μ -mérhető függvények, amelyekre

$$(35) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\text{vol}_n = \int_{dA} \int_{-h_-^A(y,k)}^{h_+^A(y,k)} \varphi(y+gk) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot g^j dg d\mu(y,k)$$

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

és minden rögzített $(y,k) \in dA$ -ra a $\sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot g^j$ polinom csak valós gyökökkel rendelkezik, és a $(-h_-^A(y,k), h_+^A(y,k))$ intervallumon mindig pozitív értékeket vesz föl.

Bizonyítás. Lényegében szintén egyszerű helyettesítés: Fixáljunk egy tetszőleges $g_1 \in (0, g_0)$ számot. Mivel az A külső prenormálisai mind hosszabbak g_1 -nél a feltevés szerint, egyrészt $\partial_0 A = \emptyset$, vagyis az A bármely prenormálisa előáll most valamelyik $(y,k) \in dA$ párral $L^A(y,k)$ alakban, és így a prenormálisok definíciója szerint $\{(y,k) \in dA : (y+g_1 k) \in A\} = \partial A_{g_1}$, másrészt a ∂A_{g_1} egyik pontján sem halad át az A -nak egynél több prenormálisa. Ezért ha most T -vel jelöljük azt a transzformációt, amely az $(y,k) \in dA$ pároshoz mindig az $L^A(y,k)$ prenormálisnak a ∂A felülettel való metszéspontját rendeli, akkor a T 1-1 leképezés lesz dA és ∂A_{g_1} között. Tekintve, hogy (33') most is igaz (megint használjuk az ottani jelöléseket!), a T ∂A_{g_1} és dA közötti kölcsönösen egyértelmű volta alapján rögtön tudunk mondani egy megoldást a μ mértékre és az $a_0, \dots, a_{n-1}$ függvényekre:

Mivel a 2.6. Következmény szerint, $y' = T(y, k)$ -t véve, $h'_+(y') + g_1 = h^A_+(y, k)$ ill. $h'_-(y') - g_1 = h^A_-(y, k)$ és $k'(y') = k$, μ -nek vehető a $\sigma' \circ T$ mérték³⁰.

dA -n, az a_j függvények $(y, k) (\in dA)$ -nál felvett értékéül pedig választható $g' = g - g_1$ mellett az

$(1 + \kappa'_1(y') \cdot g') \dots (1 + \kappa'_{n-1}(y') \cdot g') (= [1 + \kappa'_1(T(y, k)) \cdot (g - g_1)] \dots [1 + \kappa'_{n-1}(T(y, k)) \cdot (g - g_1)])$ polinom j -edik együtthatója.

Azaz $\prod_{i=1}^{n-1} (1 + g' \cdot \kappa'_i \circ T) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot g'^j$ A definícióból azonnal látszik, hogy $\sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot g^j$ polinomok teljesítik a gyökeik elhelyezkedésére kiszabott feltételeket. $\square$

Korollárium. Ha $0 < g_1 < \inf h^A_+$, akkor a tételben μ -nek választható az a mérték, amelyre

$S \subset dA$ pontosan akkor μ -mérhető, ha az $\{y + g_1 k : (y, k) \in S\} \subset \partial A_{g_1}$ alakzat vol_{n-1} -mérhető,

30. A transzformált mérték általános definícióját ld. pl.

[27]-ben. A jelen speciális esetben egy $S \subset dA$ halmaz definíció szerint pontosan akkor $\sigma \circ T$ -mérhető, ha a

$T(S)$ képe σ' -mérhető (azaz vol_{n-1} -mérhető), és ilyenkor $\sigma \circ T(S) = \sigma'(T(S))$.

és egy ilyen μ -mérhető S halmazra

$$\mu(S) = \text{vol}_{n-1} \{y + g_1 \cdot k : (y, k) \in S\}.$$

Ekkor az a_j függvényeknek megfelel a következő választás:

$$a_0 \equiv 1, \quad \text{és } j = 1, \dots, n-1 \text{ ill. } (y, k) \in dA \text{ mellett}$$

$$a_j(y, k) = \sum_{\substack{J = \{1, \dots, n-1\} \\ \text{card } J = j}} \prod_{i \in J} \frac{\kappa_i(y + g_1 k)}{1 - g_1 \cdot \kappa_i(y + g_1 k)} \quad ,$$

ahol a $\kappa_1(\cdot), \dots, \kappa_{n-1}(\cdot)$ függvények a C^{1+} -sima ∂A_{g_1} felület főgörbületei (az A_{g_1} -ből kifelé mutató normális szerint).

5. § ÁLTALÁNOSÍTOTT IRÁNYÍTOTT FELÜLETEK

5.1. Természetesen (35)-ben a μ mérték és az $a_0, \dots, a_{n-1}$ függvények nincsenek egyértelműen meghatározva, hiszen pl. egy tetszőleges pozitív μ -mérhető f függvényt véve használhatjuk $d\mu$ helyett az $f d\mu$ ^{31.} mértéket és az a_j függvények helyett pedig az $\frac{a_j}{f}$ ($j=0, \dots, n-1$) függvényeket. De látszik ezzel szemben, hogy az $a_j d\mu$ ($j=0, \dots, n-1$) előjelezett mértékek már csak egyféleképpen választhatók úgy, hogy (35) teljesüljön. Vegyük észre, hogy a $\nu_j = a_j d\mu$ előjelezett mértékek kiszámításához nem szükséges az A halmaz tökéletes ismerete, elegendő ismerni dA -t. Ezért technikai okokból célszerű a ν_j mértékeket az A halmaztól teljesen függetlenül definiálni a dA -hoz hasonló strukturájú $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ -beli halmazokon.

Definíció. Legyen az $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ egy olyan (y, k) alakú rendezett párokból álló halmaz, amelynél $\|k\|=1$ mindig. Azt fogjuk mondani, hogy az S egy irányított felület,

^{31.} Általában is, ha μ egy mérték és f egy μ -mérhető függvény, akkor az $f d\mu$ szimbólum azt az előjelezett ν mértéket jelenti, melyre definíció szerint a ν -mérhető halmazok azonosak a μ -mérhetőekkel, és mindig $\nu(E) = \int_E f d\mu$.



ha minden $(y, k) \in S$ párra található olyan $\varepsilon > 0$, hogy
 $(y', k') \in S$ és $0 \leq \varrho < \varepsilon$ esetén mindig

$\text{distance}(y', y + \varrho k) \geq \varrho (= \text{distance}(y, y + \varrho k))$. Az $\mathbb{R}^n$ -beli

$\{y : (y, k) \in S\}$ alakzatot az S tartójának fogjuk
 nevezni, és $\text{supp } S$ -nek fogjuk írni.

Tipikus példa irányított felületre egy tetszőleges
 nem-üres határu $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz esetén az $\{(y, k) : y \in \partial A, \|k\| = 1$
 és az y pontból a k irányban kiindul az A -nak egy nem-
 elfajuló külső prenormálisa} alakzat. Ez utóbbit a tovább-
 biakban mindig d^+A -val fogjuk jelölni. A dA - annak
 ellenére, hogy a neve sugallja - nem irányított felület
 minden esetben ebben az értelemben. (Példa: $A \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)
 De az is látszik, hogy két irányított felület segítségével
 a következőképpen előállítható: Jelöljük a továbbiakban
 d^-A -val a $d^+(\mathbb{R}^n \setminus A)$ irányított felületet. Ekkor
 nyilván $dA = d^+A \cup \{(y, -k) : (y, k) \in d^-A\}$.

Az $\alpha_j d\mu$ előjelezett mértékek analogonjait két lé-
 pésben definiáljuk:

a) Nevezzük egyszerűnek az olyan S irányított felüle-
 tet, amelyre található olyan $\varrho_0 > 0$, hogy

$(y, k), (y', k') \in S$ és $0 < \varrho < \varrho_0$ esetén mindig
 $\text{distance}(y + \varrho k, y') \geq \varrho$,
 az $\{y + \varrho k : 0 < \varrho < \varrho_0 \text{ és } (y, k) \in S\}$ alakzat vol_n -

mérhető,

minden $S' \subset S$ -re a $V_{S'}(\varrho) = \overline{\text{vol}}_n \{y + \tau k : 0 < \tau < \varrho$

és $(y, k) \in S'$ -vel értelmezett^{32.} függvény a $[0, \varrho_0]$ intervallumon egy n -edfokú polinom (véges értékű!). Az alkalmas ϱ_0 értékek supremumát jelöljük a továbbiakban $\varrho_0(S)$ -sel.

Mielőtt továbbhaladnánk, figyeljük meg, hogy (az előbbi jelöléseket használva)

(i) ha $0 \leq \varrho < \varrho_0(S)$, akkor $(y, k) \in S'$ -re

$\text{distance}(y + \varrho k, \text{supp } S) = \varrho$, így $\{y + \tau k : 0 < \tau < \varrho \text{ és } (y, k) \in S'\} = \{y + \tau k : 0 < \tau < \varrho_0(S) \text{ és } (y, k) \in S'\} \cap [(\text{supp } S)_\varrho \setminus \overline{(\text{supp } S)}]$

(ii) $0 \leq \varrho \leq \varrho_0(S)$ -re a (i) tulajdonság miatt

$$V_S(\varrho) = \text{vol}_n \{y + \tau k : 0 < \tau < \varrho \text{ és } (y, k) \in S'\},$$

(iii) $0 \leq V_S(\varrho) \leq V_S(0) = 0$.

Legyenek ezután $\hat{V}_0(S), \dots, \hat{V}_n(S)$ a $V_S|_{[0, \varrho_0(S)]}$ polinom együtthatói, tehát azok a számok, amelyekre

$$V_S(\varrho) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{V}_j(S) \cdot \varrho^j \quad \text{ha } 0 \leq \varrho \leq \varrho_0(S) \quad . \quad (\text{Itt természetesen az } S \text{ egy egyszerű irányított felület, } \varrho_0 > 0$$

pedig egy olyan szám, amellyel teljesülnek a definícióbeli kikötések S -re.) (iii)-ből tudjuk, hogy $\hat{V}_0 = 0$ mindig.

b) Világos, hogy az egyszerű irányított felületek és a rajtuk definiált $\hat{V}_0, \dots, \hat{V}_n$ halmazfüggvények rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

^{32.} Általában is, ha μ egy mérték, akkor $\bar{\mu}$ -sal a μ által generált külső mértéket jelöljük.

(iv) Ha S_1 és S_2 egyszerű irányított felületek, akkor $S_1 \cap S_2$ és $S_1 \setminus S_2$ is azok, és $\hat{v}_j(S_1 \setminus S_2) = \hat{v}_j(S_1) - \hat{v}_j(S_1 \cap S_2)$ ($j = 0, \dots, n$)

(v) Ha $S_1 \supset S_2 \supset \dots$ egyszerű irányított felületeknek egy monoton csökkenő sorozata, akkor a közös részük is egyszerű irányított felület, és $\hat{v}_j(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{v}_j(S_i)$ ($j = 0, \dots, n$)

(Ugyanis (ii) miatt a $[0, g_0(S_1)]$ -en $V_{S_i} \rightarrow V_{\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i}$

pontonként. De n -edfokú polinomok egy intervallumon pontonkénti konvergens sorozatának az együtthatói is konvergálnak a limeszpolinom megfelelő együtthatóihoz.)

(vi) Ha $S_1, S_2, \dots$ páronként diszjunkt egyszerű irányított felületek és $S_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ is egy egyszerű irányított felület, akkor a $j = 0, \dots, n$ indexek mindegyikére abszolút konvergens a $\sum_{i=1}^{\infty} \hat{v}_j(S_i)$ sor, és az összege $\hat{v}_j(S_0)$.

(Bizonyítás: A $[0, g_0(S_0)]$ -on most is $\sum_{i=1}^{\infty} V_{S_i} \rightarrow V_{S_0}$ az (ii) tulajdonság következtében. Így a $V_{S_i} \Big|_{[0, g_0(S_0)]}$ polinomok együtthatóira $\sum_{i=1}^{\infty} \hat{v}_1(S_i) = \hat{v}_1(S_0), \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \hat{v}_n(S_i) = \hat{v}_n(S_0)$ áll feltételes konvergenciával.

Csak hogy ugyanez az eredmény adódik az i indexek akár-

milyen átrendezése mellett, így valóban abszolút konvergens is a $\sum_{i=1}^{\infty} \hat{v}_j(S_i)$ sorok.)

Ezután nevezzük $\mathcal{V}$ -mérhetőnek azokat a részhalmazait

az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ térnek, amelyek előállíthatók megszámlálhatóan sok páronként diszjunkt egyszerű irányított felület uniójaként. Ezt az elnevezést az motiválja, hogy (iv) és (v) következtében az imént definiált ν -mérhető halmazok alkotják egyben az egyszerű irányított felületek által generált σ -gyűrűt (a bizonyítás egyszerű, ld. pl. [27]-ben). Az olyan ν -mérhető $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ -eket pedig, amelyeket akárhogyan bontunk fel $S_1, S_2, \dots$ egyszerű irányított felületek páronként diszjunkt egyesítésére, mindig $\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{\nu}_j(S_i)| < \infty$ lesz az összes $j = 0, \dots, n$ indexekre, ν -szummálhatóknak fogjuk mondani.

A (vi) tulajdonság garantálja, hogy

(vii) az egyszerű irányított felületek ν -szummálhatóak,

(viii) ha az U ν -szummálható, akkor bármely két

$\{S_i : i = 1, 2, \dots\}, \{S'_m : m = 1, 2, \dots\}$ egyszerű irányított felületekre való particiójára $\sum_{i=1}^{\infty} \hat{\nu}_j(S_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\nu}_j(S'_m) \quad j = 0, \dots, n$

(T.i. most (iv) szerint $\{S_i \cap S'_m : i, m = 1, 2, \dots\}$ is particiója az U -nak egyszerű irányított felületekre, és így

$$\begin{aligned} \text{(vi)-t használva} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\nu}_j(S_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \hat{\nu}_j(S_i \cap S'_m) \right) = \\ &= \sum_{i,m=1}^{\infty} \hat{\nu}_j(S_i \cap S'_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \hat{\nu}_j(S_i \cap S'_m) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\nu}_j(S'_m) \end{aligned}$$

rögzített $j \in \{0, \dots, n\}$ mellett.)

Természetesen, az $a_j d\mu \quad (j = 0, \dots, n-1)$ előjelzett mértékek analogonjai nem a $\hat{\nu}_j$ halmazfüggvények, hanem a

$V_S|_{[0, \beta_0(S)]}$ polinomok deriváltjainak az együtthatói.

Ezek azonban nem mások nyilván, mint az $1 \cdot \hat{\nu}_1(S), 2 \cdot \hat{\nu}_2(S), \dots, n \cdot \hat{\nu}_n(S)$ halmazfüggvények, ha egyszerű irányított felületekről van szó. Ezért kézenfekvő, hogy hogyan definiáljuk az egyszerű irányított felületeken kívül is az $\alpha_j d\mu$ -k helyébe léptetendő előjelezett mértékeket:

Definíció. Legyen az $\mathcal{U}$ egy ν -szummálható halmaz ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ -ben), és vegyük az $\mathcal{U}$ -nak egy tetszőleges egyszerű irányított felületekre való $\{S_1, S_2, \dots\}$ particióját. Jelölje ekkor $\nu_0(\mathcal{U}), \dots, \nu_{n-1}(\mathcal{U})$ rendre a

$$\nu_j(\mathcal{U}) = (j+1) \hat{\nu}_{j+1}(S_i) \quad (j=0, \dots, n-1)$$

számokat. (A definíció önellentmondásmentessége (viii)-on alapszik.)

5.2. A ν_j halmazfüggvényeket mértékelméleti szempontból a következőképpen jellemezhetjük:

Lemma. a) Egy egyszerű irányított felület minden ν -mérhető részhalmaza egyszerű irányított felület,

és ha az $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges ν -szummálható halmaz, akkor

b) az $\mathcal{U}$ -ban levő egyszerű irányított felületek által generált σ -algebra pontosan az $\mathcal{U}$ ν -mérhető részhalmazából áll,

c) $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ pontosan akkor ν -szummálható, ha ν -mérhető,

d) a $\nu_0, \dots, \nu_{n-1}$ halmazfüggvények az $\mathcal{U}$ ν -mér-

hető részhalmazainak a σ -algebrája felett (azaz a $\nu_0|_{\mathcal{U}}, \dots, \nu_{n-1}|_{\mathcal{U}}$ halmazfüggvények) korlátos variációjú előjelezett mértékek.

Bizonyítás. a) Triviális.

b) Mivel (iv) és (v) miatt a ν -mérhető halmazok pontosan az egyszerű irányított felületek által generált σ -algebrát alkotják (mint már említettük), és mert az $\mathcal{U}$ definíció szerint ν -mérhető.

c) Tegyük fel, hogy az $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ halmaz ν -mérhető. Így b) következtében ν -mérhető az $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$ halmaz is. Ha most az $\{S_1', S_2', \dots\}$ egy egyszerű irányított felületekre való particiója $\mathcal{U}'$ -nek, $\{S_1, S_2, \dots\}$ pedig az $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$ -nek, akkor az $\{S_1, S_2, \dots\} \cup \{S_1', S_2', \dots\}$ egy egyszerű irányított felületekre való particiója az $\mathcal{U}$ -nak. Tehát az $\mathcal{U}$ ν -szummálhatósága folytán

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{\nu}_j(S_i')| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{\nu}_j(S_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{\nu}_j(S_i')| < \infty \quad (j = 0, \dots, n).$$

d) A $\nu_j|_{\mathcal{U}}$ halmazfüggvények σ -additivitása c) ismeretében (vi) és a definíciójuk következtében már világos. Ez pedig a [28] 1.3.2. Lemmája szerint (35. old.) maga után vonja, hogy korlátos variációjúak is. $\square$

5.3. Érdekesebb a ν_j halmazfüggvények vizsgálata geometriai szempontból.

Jelölés: Ha $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ egy irányított felület, legyen $B(S, \varrho) = \{y + \tau k : 0 < \tau < \varrho \text{ és } (y, k) \in S\}$,
 $B^*(S, \varrho) = \{y + \tau k : 0 \leq \tau \leq \varrho \text{ és } (y, k) \in S\}$ és
 $F(S, \varrho) = \{y + \varrho k : (y, k) \in S\}$.

Lemma. Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$.

a) $\varepsilon > 0$ esetén az $\{(y, k) \in d^+A : h_+^A(y, k) \geq \varepsilon\}$ halmaz zárt.

b) Ha az A minden külső prenormálisa legalább $\varphi_0 > 0$ hosszú, abban az esetben $S \subset d^+A$ pontosan akkor Borel (az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ topológiájában), hogyha tetszőleges $0 < \varphi \leq \varphi_0$ -ra a $B(S, \varphi)$ alakzat Borel-mérhető ($\mathbb{R}^n$ topológiájában), ami pedig azzal is ekvivalens, hogy tetszőleges $0 < \varphi < \varphi_0$ mellett az $F(S, \varphi) (\subset \partial A_\varphi)$ felületdarab Borel-mérhető.

Bizonyítás. a) Legyen $(y_1, k_1), (y_2, k_2), \dots \rightarrow (y, k)$ ^{$i=1, 2, \dots$} egy olyan sorozat d^+A -ban, hogy $h_+^A(y_i, k_i) \geq \varepsilon (> 0)$ ^{33.}

Természetesen, mivel mindegyik i -re $y_i \in \partial A$ és $\|k_i\| = 1$

$y \in \partial A$ és $\|k\| = 1$. Véve egy $0 \leq \varphi \leq \varepsilon$ számot és egy tetszőleges $y' \in A$ pontot, $y_i + \varphi k_i \in D_{\bar{A}} y_i$ (a külső prenormális definíciójából), és ezért $\text{distance}(y_i + \varphi k_i, y') \geq \varphi = \text{distance}(y + \varphi k, y)$ az összes $i = 1, 2, \dots$ -re.

Innen $i \rightarrow \infty$ -re $\text{distance}(y + \varphi k, y') \geq \varphi = \text{distance}(y + \varphi k, y)$ adódik, azaz $y + \varphi k \in D_{\bar{A}} y$. Mivel φ -t bárhol felvehettük a $[0, \varepsilon]$ -on, ez azt jelenti, hogy az $y + [0, \varepsilon]k$ szakasz benne van az $L^A(y, k) \setminus \dot{A}$ külső prenormálisában A -nak. Vagyis definíció szerint $(y, k) \in d^+A$ és $h_+^A(y, k) \geq \varepsilon$.

b) Ha az $\bar{S}$ zárt, akkor $B^*(S, \varphi_0)$ is zárt, mert egy

33. Az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ szeparabilitása miatt nem szükséges általánosított sorozatot használni (v.ö. [19] 18. old.) a továbbiakban sem.

$B^*(S, \varrho_0)$ -beli $y_1 + \tau_1 k_1, y_2 + \tau_2 k_2, \dots \rightarrow y + \tau k$ sorozatra
 $\|k_i\| = 1$ és $0 \leq \tau_i \leq \varrho_0$ miatt az $\{y_1, y_2, \dots\}$ sorozat is korlátos, ezért pedig létezik olyan $i_1 < i_2 < \dots$ indexsorozat, melyre valamilyen $y', k' \in \mathbb{R}^n$ és $\tau \in [0, \varrho_0]$ mellett $y_{i_j} \rightarrow y', k_{i_j} \rightarrow k', \tau_{i_j} \rightarrow \tau' (j \rightarrow \infty)$. Az S zártága folytán $(y', k') \in S$, ami $0 \leq \tau' \leq \varrho_0$ -al mutatja, hogy $y' + \tau' k' \in B(S^*, \varrho_0)$. Azonban nyilván $y' + \tau' k' = y + \tau k$ (hiszen $y_i + \tau_i k_i \rightarrow y + \tau k$ volt).

Tetszőleges $0 < \varrho \leq \varrho_0$ -ra $B(S, \varrho) = B^*(S) \cap (A_\varrho \setminus \bar{A})$, tehát ilyenkor a $B(S, \varrho)$ Borel halmaz, ha az S zárt. De $0 < \varrho \leq \varrho_0$ esetén $S_1, S_2, \dots \subset d^+A$ $B(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, \varrho) = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(S_i, \varrho)$ $B(S_1 \setminus S_2, \varrho) = B(S_1, \varrho) \setminus B(S_2, \varrho)$ teljesül mindig, mivel a külső prenormálisai A -nak legalább ϱ_0 hosszúak. Ezért azoknak az $S \subset d^+A$ irányított felületeknek a halmaza, melyekre minden $\varrho \in (0, \varrho_0]$ -nál a $B(S, \varrho)$ alakzat Borel halmaz, egy olyan σ -gyűrű, amely a d^+A összes zárt részhalmazait tartalmazza, vagyis a d^+A összes Borel részhalmazaira a $B(S, \varrho)$ Borel-mérhető, ha $0 < \varrho \leq \varrho_0$.

Vegyük észre, hogy (a prenormálisok és a ϱ_0 szám definíciója szerint) $0 < \varrho < \varrho_0$ -ra $F(S, \varrho) = B(S, \varrho_0) \cap \partial A_\varrho$ két Borel halmaz metszete mindig.

Visszafelé: Legyen $\varrho \in (0, \varrho_0)$ tetszőlegesen rögzített, és $\phi: d^+A \rightarrow \partial A_\varrho$ az a leképezés, amely az (y, k) párt az

$y + g^k$ pontba küldi. Most a prenormálisok páronként majdnem diszjunkt volta miatt a ϕ 1-1 leképezés, és

$S \subset d^+A$ -ra $\phi(S) = F(S, g)$, azaz $S = \phi^{-1}(F(S, g))$ mindig. Mivel a ϕ folytonos, ez azt jelenti, hogy ha $F(S, g)$ Borel-mérhető, akkor az S is Borel halmaz szükségképpen.

Végül, ha $0 < g \leq g_0$ és a $B(S, g)$ Borel halmaz, akkor $0 < g' < g$ -t véve $F(S, g') = B(S, g) \cap \partial A_g$ szintén Borel-mérhető, ahonnan az S Borel halmaz most is. $\square$

Tétel. Ha az $A \subset \mathbb{R}^n$ egy olyan korlátos határu halmaz, amelyiknek az összes külső prenormálisai legalább $g_0 > 0$ hosszúak, akkor a d^+A egy egyszerű irányított felület, $dA = d^+A$ és (bármely) $0 < g_1 < g_0$ -at véve, a 4.5. Korolláriumban megkonstruált $d\mu$ mértékkel és $a_0, \dots, a_{n-1}$ függvényekkel a $\nu_j^1 = \nu_j|_{dA}$ ($j = 0, \dots, n-1$) előjelezett mértékekre

$$(36) \quad d\nu_j|_{dA} = a_j d\mu \quad (j = 0, \dots, n-1),$$

azaz a ν_j halmazfüggvények abszolút folytonosak egy közös mértékre vonatkozóan dA -felett. Mivel a d^+A ν -szummálható, az $a_0, \dots, a_{n-1}$ függvények μ -integrálhatók is.

Bizonyítás. $dA = d^+A$ a 2.5. Lemma direkt következménye.

Vegyük észre mindenek előtt, hogy most $S \subset dA$ -ra $\mu(S) = \text{vol}_{n-1} F(S, g_1)$, $\nu_S(\cdot) = \overline{\text{vol}}_n B(S, \cdot)$ írható, és hogy a ∂A_{g_1} minden részhalmaza előáll $F(S, g_1)$ alakban alkalmas $S \subset dA$ -val (mivel az $(y, k) \mapsto y + g_1 k$

leképezés kölcsönösen egyértelmű dA és ∂A_{g_1} között).

Ha S a dA egy olyan részhalmaza, melyre $B(S, g_0)$ alakzat vol_n -mérhető (tehát pl. ha az $S \subset dA$ egy Borel halmaz $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ -ben) és $0 < g \leq g_0$, akkor (35)-ből

$$\begin{aligned} \text{vol}_n B(S, g) &= \int_{dA} \int_{-k_-^A(y, k)}^{k_+^A(y, k)} 1_{B(S, g)}(y + \tau k) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \tau^j d\tau d\mu(y, k) = \\ &= \int_S \int_0^g \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \tau^j d\tau d\mu(y, k) = \int_0^g \text{vol}_{n-1} F(S, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

mert a 3.6. Megjegyzést A helyett A_{g_1} -re alkalmazva,

$$\text{vol}_{n-1} F(S, \tau) = \int_{\partial A_{g_1}} 1_{F(S, \tau)}(y + (\tau - g_1)k) [1 + \kappa_1(y)(\tau - g_1)] \dots$$

$$\dots [1 + \kappa_{n-1}(y)(\tau - g_1)] d \text{vol}_{n-1}(y) =$$

$$= \int_{dA} 1_{F(S, \tau)}(y + (\tau - g_1)k) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \tau^j d\mu(y, k) =$$

$$= \int_S \sum_{j=0}^{n-1} \tau^j a_j d\mu = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int_S a_j d\mu \right) \tau^j$$

34.

$$(0 < \tau < g_0)$$

34.

$\kappa_1(\cdot), \dots, \kappa_{n-1}(\cdot)$ a ∂A_{g_1} kifelé mutató normálisával számított főgörbületei, mint a 4.5. Korolláriumban.

Ahhoz, hogy a dA egy egyszerű irányított felület, csak annyit kell még belátni, hogy $S' \subset dA$ esetén $\overline{\text{vol}}_n B(S', g)$ függvény egy n -edfokú polinom a $(0, g_0)$ intervallumon. Ehhez pedig elegendő megmutatni, hogy az előbbi S' -höz található olyan $S \supset S'$ Borel részhalmaza a dA -nak, hogy $\overline{\text{vol}}_n B(S', g_0) = \text{vol}_n B(S, g_0)$, mert ekkor $0 < g < g_0$ -ra is $\overline{\text{vol}}_n B(S', g) = \overline{\text{vol}}_n B(S', g_0) \cap A_g = \text{vol}_n B(S, g_0) \cap A_g = \text{vol}_n B(S, g) = \int_0^g \text{vol}_{n-1} F(S, \tau) d\tau$, és itt a $\text{vol}_{n-1} F(S, \tau)$ a τ változónak egy $n-1$ -edfokú polinomja a $(0, g_0)$ -on, mint láttuk.

S' -höz az S -et a következőképpen konstruáljuk meg: Legyenek $S_1, S_2, \dots$ olyan Borel halmazok dA -ban, amelyre $S_i \supset S'$ és $\text{vol}_n B(S_i, g_0) \leq \frac{1}{i} + \inf \{ \text{vol}_n B(S'', g) \mid S'' \text{ Borel } S'' \supset S' \}$ ($i=1, 2, \dots$), és vegyük S -nek az $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ irányított felületet. T.i. ekkor véve egy olyan B Borel részhalmazát $\mathbb{R}^m$ -nek, amelyre $B(S, g_0) \supset B \supset B(S', g_0)$ és

$$\overline{\text{vol}}_n B(S', g_0) = \text{vol}_n B \quad 35. \quad , \quad \text{vol}_n B = \int_0^{g_0} \text{vol}_{n-1} B \cap \partial A_\tau d\tau ,$$

35. Ilyen B létezését az garantálja, hogy a $B(S', g)$ alakzat benne foglaltatik ∂A korlátossága miatt korlátos

$$(\partial A)_{g_0} \supset A_{g_0} \setminus \bar{A} = B(dA, g_0) \text{ -ban, vagyis } \overline{\text{vol}}_n B(S', g) < \infty ,$$

másrészt, hogy a Hausdorff mértékek (kivülről) Borel regulárisak (v.ö. [22]).

és itt $B \cap \partial A_\tau \subset B(S, g_0) \cap \partial A_\tau = F(S, \tau)$ ($0 < \tau < g_0$). Ha azonban egy $\tau_0 \in (0, g_0)$ -ra $\text{vol}_{n-1} B \cap \partial A_{\tau_0} < \text{vol}_{n-1} F(S, \tau_0)$ volna, akkor tekintve azt az $S_0 \subset dA$ -t, melyre $B \cap \partial A_{\tau_0} = F(S_0, \tau_0)$, fennáll $S_0 \subset S$, és így a $\text{vol}_{n-1} F(S_0, \cdot)$ függvény a $(0, g_0)$ intervallumon egy olyan $n-1$ -edfokú polinom, amely egyrészt nem nagyobb a $\text{vol}_{n-1} F(S, \cdot)$ polinomnál, másrészt egy helyen (τ_0 -nál) az értéke határozottan kisebb az utóbbi értékénél, ahonnan 0 -tól g_0 -ig integrálva azt kapjuk, hogy $\text{vol}_n B(S_0, g_0) < \text{vol}_n B(S, g_0)$, ami pedig ellentmond az S definíciójának.

Vagyis a dA egy egyszerű irányított felület.

Ezután megmutatjuk, hogy a μ -mérhetősége egy irányított felületnek implikálja a ν -mérhetőségét:

Legyen az $S_1 \subset dA$ μ -mérhető. Tehát most az $F(S_1, g_1)$ felületdarabja ∂A_{g_1} -nek vol_{n-1} -mérhető. Így a Hausdorff mértékek Borel regularitása folytán léteznek olyan S_0 és S_2 irányított felületek dA -n belül, hogy $F(S_0, g_1) \subset F(S_1, g_1) \subset F(S_2, g_1)$ és $\text{vol}_{n-1} F(S_0, g_1) = \text{vol}_{n-1} F(S_1, g_1) = \text{vol}_{n-1} F(S_2, g_1)$.

Most $i=0, 2$ -re $0 < \tau < g_0$ -nál mindig az $F(S_i, \tau)$

Borel halmaz és

$$\text{vol}_{n-1} F(S_i, \tau) = \int_{S_i} \sum_{j=0}^{n-1} \tau^j a_j d\mu = \int_{F(S_i, g_1)} [1 + \kappa_1(y)(\tau - g_1)] \dots$$

$$\dots [1 + \kappa_{n-1}(y)(\tau - g_1)] d \text{vol}_{n-1}(y) .$$

Mivel itt az integrálási tartományok csak 0 -mértékű halmazban különböznek, minden $\tau \in (0, g_0)$ -ra $\text{vol}_{n-1} F(S_0, \tau) = \text{vol}_{n-1} F(S_2, \tau)$, következésképpen $\text{vol}_n B(S_0, g_0) = \text{vol}_n B(S_2, g_0)$, ami a közbezárás miatt mutatja, hogy a $B(S_1, g_0)$ halmaz is vol_n -mérhető. Ez pedig annyit jelent, hogy az S_1 egyszerű irányított felület, tehát ν -mérhető.

A (36) reláció bizonyítása mostmár nagyon könnyű, hiszen a mérhetőségi problémák elhárultak.

Legyen $S \subset dA$ ν -mérhető. Most az S egy egyszerű-irányított felület is persze (v.ö. 5.2. a)), és

$$\sum_{j=0}^n \hat{\nu}_j(S) g^j = V_S(g) = \text{vol}_n B(S, g) = \int_0^g \text{vol}_{n-1} F(S, \tau) d\tau$$

$$(0 < g < g_0) .$$

$$\text{Ezt differenciálva, } \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \hat{\nu}_{j+1}(S) g^j = \sum_{j=0}^{n-1} \nu_j(S) \cdot g^j =$$

$$= \text{vol}_{n-1} F(S, g) = \int_S \sum_{j=0}^{n-1} g^j \cdot a_j d\mu \quad (0 < g < g_0) .$$

5.4. Az előző tétellel elértük közvetett célunkat: a ν_j halmazfüggvények elegendően általánosak ahhoz, hogy a legbonyolultabb szerkezetű $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén is át tudják venni azt a szerepet, amelyet a Fő Lemmában C^{1+} -sima mellett a szorzatgörbületek játszottak, hiszen (36) alapján

már kimondható a 4.5. Tétel a ν_j halmazfüggvények segítségével:

4.5' Tétel. Ha az $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt határú és $\partial_o A = \emptyset$ és $\inf h_+^A > 0$ ^{36.}, akkor az A irányított határa egybeesik d^+A -val, amely pedig most egyszerű irányított felület, és minden vol_n -integrálható $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre

$$(35') \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\text{vol}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{dA} \int_{-h_-^A(y, k)}^{h_+^A(y, k)} \varphi(y + s k) \cdot s^j ds d\nu_j(y, k). \quad \square$$

De nem kevésbé fontos az 5.3. Tétel mértékelméleti következménye az ellenkező irányból:

Világos, hogy minden S irányított felület beágyazható valamilyen d^+A alakú irányított felületbe (pl. mindig vehető $A = \text{supp } S$, mert ilyenkor $S \subset d^+A$). Be fogjuk látni a későbbiekben, hogy a d^+A alakzat akármilyen $A (\subset \mathbb{R}^n)$ esetén összerakható megszámlálhatóan sok páronként diszjunkt olyan $S_1, S_2, \dots$ egyszerű irányított felületből, amelyek mindegyikéhez található $A_i \subset \mathbb{R}^n$ (az i itt index) úgy, hogy $\inf h_+^{A_i} > 0$, $\partial_o A_i = \emptyset$ és $S_i \subset d^+A_i$ ($i=1, 2, \dots$) legyen. Ezért ha az $U (\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ egy

^{36.} A 2.5. Lemmából látszik, hogy a $\partial_o A = \emptyset$ feltétel az $\inf h_+^A > 0$ tulajdonsággal együtt ekvivalens azzal, hogy valamilyen $\varphi_0 > 0$ -ra az $A (\subset \mathbb{R}^n)$ minden külső prenórmálisa legalább φ_0 hosszú.

ν -szummálható irányított felület, akkor a $\nu_0|_{\mathcal{U}}, \dots, \nu_{n-1}|_{\mathcal{U}}$ előjelezett mértékek mindig abszolút folytonosak egy közös $\mathcal{U}$ feletti μ mértékre vonatkozóan. Azaz (36)-tal analóg módon

$$(36') \quad d\nu_j|_{\mathcal{U}} = a_j d\mu \quad (j=0, \dots, n-1)$$

írható, ahol az $a_0, \dots, a_{n-1}$ függvények az $\mathcal{U}$ -n vannak értelmezve, ν -mérhetőek és rendelkeznek a következő "kevert" pozitivitási tulajdonsággal: minden rögzített (y, k) párra létezik olyan $h > 0$ (az (y, k) -től függően), hogy

$$(37) \quad \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot \varrho^j \geq 0 \quad \text{ha} \quad 0 \leq \varrho \leq h,$$

továbbá a $\sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot \varrho^j$ polinom gyökei mind valósak, tehát léteznek olyan

$\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus (0, h)$ számok,

hogy

$$(38) \quad \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot \varrho^j = a_s(y, k) \cdot \varrho^s (1 + \kappa_{s+1} \varrho) \dots (1 + \kappa_{n-1} \varrho)$$

$$\text{ha} \quad a_s(y, k) \neq 0 \text{ és } j < s\text{-re } a_j(y, k) = 0.$$

Bár itt $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ már nem játszanak azonos szerepet a főgörbűletekkel, még mindig lehet definiálni a szorzatgörbűletek analogonjait a ν -szummálható irányított felületekre:

C^2 -sima (differenciálgeometriai értelemben) irányítható $F \subset \mathbb{R}^m$ felület esetén vol_{n-1} -mérhető $E \subset F$ mel-

lett, $k(\cdot)$ -val jelölve az F egyik (folytonos) normálisát, az $\{(y, k(y)) : y \in E\}$ irányított felület v_j mértéke nem más, mint az F -nek a k szerinti főgörbületeiből alkotott j tényezős szorzatok összegének a vol_{n-1} mérték szerinti integrálja az E -n. Ezért egy általános v -szummálható S irányított felület esetén is a $v_j|_S$ előjelezett mértéket az S j -edik szorzatgörbületi mértékének nevezhetjük. (Maga a j -edik szorzatgörbület egy a $\text{vol}_{n-1}|_{\text{supp } S}$ mértékre vonatkozó disztribúciószerű konstrukciónak felel meg. Ez a téma a dolgozat céljaitól távol eső szempontokból figyelemreméltó, itt azonban a koncentrálttság megőrzése érdekében nem tudunk rá kitérni.)

5.5. Természetesen egy általános típusú $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra a (35') formula nem teljesülhet, hiszen az egyrészt legfeljebb csak a nem-elfajuló prenormálisok által lefedett térrészre lehet igaz, másrészt a v_j halmazfüggvények szerinti integrálás az egyes j indexekre általában külön-külön nem vihető véghez. Sejthető azonban, hogy a (35) továbbra is fenn fog állni pl. az A külső prenormálisai által lefedett térrészen, vagy ami ezzel ekvivalens, az $\bar{A}$ komplementerén. Megmutatjuk, hogy ez az utóbbi említett eset már visszavezethető a 4.5' Tételre.

Lemma. Legyen A az $\mathbb{R}^n$ tér egy nem-üres valódi részhalmaza. Ha sikerül találni olyan kompakt határú $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ halmazokat, amelyekre

$$a) \quad d^+A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} d^+A_i$$



$$b) \inf h_+^{A_i} = h_i > 0 \quad \text{és} \quad \partial_0 A_i = \emptyset \quad (i=1,2,\dots)$$

$$c) \text{ minden } (y,k) \in d^+A \quad \text{-ra} \quad h_+^A(y,k) \leq \sup\{h_i : (y,k) \in d^+A_i\}$$

akkor létezik olyan μ mérték d^+A -n, és léteznek olyan

$a_0, \dots, a_{n-1}$ μ -mérhető függvények, hogy

$$(35'') \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}} \varphi d\text{vol}_n = \\ = \int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y,k)} \varphi(y+gk) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot g^j dg d\mu(y,k) \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}),$$

és S_i -vel jelölve a $d^+A \cap d^+A_i$ egyszerű irányított felületet,

$$(36'') \quad d\nu_j|_{S_i} = a_j d\mu|_{S_i} \quad (j=0, \dots, n-1 \quad \text{és} \quad i=1,2,\dots).$$

Bizonyítás. A 4.5' Tétel szerint a d^+A_i alakzatok egyszerű irányított felületek, az 5.3 Lemma a) pontja következtében pedig a $d^+A (= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ irányított felület Borel mérhető, és ebből (az 5.3 b)-t A helyett A_i -re és g helyében h_i -re alkalmazva) a definíció alapján verifikálható, hogy az S_i -k ($i=1,2,\dots$) egyszerű irányított felületek. Ezzel egyrészt igazoltuk a lemma kimondásának a szóhasználatát, másrészt innen rögtön következtethetünk arra, hogy a d^+A ν -mérhető (t.i. particionálható az $S_1, S_2 \setminus S_1, \dots$

$\dots, S_i \setminus \bigcup_{j<i} S_j, \dots$ egyszerű irányítható felületekre), és léteznek valóban olyan μ mérték d^+A -n olyan $a_0, \dots, a_{n-1}$

függvényekkel együtt, amelyek teljesítik (36'')-t. (Ehhez elég a $\mu, a_0, \dots, a_{n-1}$ rendszert külön-külön definiálni pl.

az $S_1, S_2 \setminus S_1, \dots, S_i \setminus \bigcup_{j<i} S_j, \dots$ egyszerű irányított fe-

lülleteken.) Ez természetesen azt is jelenti, hogy

$$d\nu_j|_{d^+A} = a_j d\mu \quad (j=0, \dots, n-1).$$

Véve egy $(y, k) \in d^+A$ párost, a 4.5. Tételből láthatjuk, hogy olyan i indexre, amelyre $(y, k) \in S_i (\subset d^+A_i)$, a

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot \rho^j \quad \text{polinom nem-negatív a } 0 \leq \rho \leq h_+^{A_i}(y, k)$$

intervallumon. Ezért a c) feltevésből kifolyólag

$$(39) \quad \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot \rho^j \geq 0 \quad \text{ha } 0 \leq \rho \leq h_+^A(y, k) \quad \forall (y, k) \in d^+A$$

Ezután tekintsünk egy olyan $f: d^+A \rightarrow [0, \infty)$ függvényt,

melyre $f < h_+^A$, $\text{range } f = \{c_1, c_2, \dots\}$ megszámlálható, és az $U_m =$

$= f^{-1}(\{c_m\})$ ($m=1, 2, \dots$) halmazok mind Borel mérhetőek. Le-

gyen ekkor $G_f = \{y + \rho k : (y, k) \in d^+A \text{ és } 0 < \rho < f(y, k)\} (\subset$
 $\subset \{y + \rho k : (y, k) \in d^+A \text{ és } 0 < \rho \leq h_+^A(y, k)\} = \mathbb{R}^n \setminus \bar{A})$. A 4.5.

Tétel alapján most könnyen beláthatjuk, hogy

$$\int_{G_f} \varphi d\text{vol}_n = \int_{d^+A} \int_0^{f(y, k)} \varphi(y + \rho k) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot \rho^j d\rho d\mu(y, k) \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}),$$

azaz, hogy

$$(40) \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}} \varphi \cdot 1_{G_f} d\text{vol}_n =$$

$$= \int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y, k)} \varphi(y + \rho k) \cdot 1_{G_f}(y + \rho k) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot \rho^j d\rho d\mu(y, k)$$

$$\quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}).$$

Hogy ezt bebizonyítsuk, vegyük G_f -nek a következő $\{B_{im} : i, m=1, 2, \dots\}$

Borel halmazokra való particióját: Legyen rögzített i, m in-

dexpárnál $S_{im} = \{(y, k) \in U_m : i \text{ a legkisebb olyan index, hogy}$

$(y, k) \in S_i$ és $h_i \geq c_m$, és $B_{im} = B(S_{im}, c_m)$

($\subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{A}_i$ is!)^{37.} Mivel most $(y, k) \in d^+A$ -ra

37. $(i, m) \neq (i', m') \Rightarrow S_{im} \cap S_{i'm'} = \emptyset$ világos. Mivel mindegyik

$$S_i (\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \text{ Borel-mérhető, } \hat{S}_i = \begin{cases} \emptyset & \text{ha } h_i < c_m \\ S_i & \text{ha } h_i \geq c_m \end{cases} \text{-et}$$

irva, az $S_{im} = \mathcal{U}_m \cap (\hat{S}_i \setminus \bigcup_{j < i} S_j)$ reláció mutatja, hogy az

S_{im} -ek Borel halmazok. $S_{im} \subset d^+A_i$ miatt, az 5.3 Lemma

b) pontját g helyett h_i -re és A helyett A_i -re alkalmazva

jutunk ahhoz, hogy az összes $B_{im} (\subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{A})$ alakzatok Bo-

rel-mérhetőek. Az $\{S_{im} : i, m = 1, 2, \dots\}$ rendszer particiója

d^+A -nak, mert $\bigcup_{i,m=1}^{\infty} S_{im} \subset d^+A$, és a fordított tartal-

mazás onnan jön, hogy rögzített m és $(y, k) \in \mathcal{U}_m$ -nél a

c) feltevés $f(y, k) < h_+^A(y, k)$ szerint van olyan legkisebb

index, amelynél $h_i \geq f(y, k) = c_m$, azaz $(y, k) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{im}$,

ahonnan (lévén (y, k) tetszőleges az $\mathcal{U}_m$ -ben) $\mathcal{U}_m \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{im}$;

az m tetszőlegessége miatt pedig ebből $d^+A = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_m \subset \bigcup_{i,m=1}^{\infty} S_{im}$.

Ezért, minthogy $f < h_+^A$ minden $z \in G_f$ pont pontosan egy

módon írható $z = y + gk$ alakban úgy, hogy $(y, k) \in d^+A$ és

$0 < g < f(y, k)$ legyen. Ez mutatja, hogy az $\{y + gk :$

$(y, k) \in S_{im}, 0 < g < f(y, k)\} = \{y + gk : (y, k) \in S_{im}, 0 < g < c_m\} =$

alakzatok valóban particionálják G_f -et. $= B(S_{im}, c_m) = B_{im}$

és $0 < s \leq h_+^A(y, k)$ -ra

$$\begin{aligned} 1_{B_{im}}(y + sk) &= 1_{\{y' + \tau k' : (y', k') \in S_{im}, 0 < \tau < c_m\}}(y + sk) = \\ &= 1_{S_{im}}(y, k) \cdot 1_{(0, c_m)}(s) \end{aligned} \quad , \text{ a } \varphi \text{ függvény } B_{im} \text{ feletti}$$

integrálja

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}} \varphi \cdot 1_{B_{im}} d\text{vol}_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{S_{im}} \int_0^{c_m} \varphi(y + sk) \cdot s^j ds d\nu_j(y, k) = \\ (41) \quad &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y, k)} \varphi(y + sk) \cdot 1_{B_{im}}(y + sk) ds d\nu_j(y, k) = \\ &= \int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y, k)} \varphi(y + sk) \cdot 1_{B_{im}}(y + sk) \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot s^j \right) ds d\mu(y, k) \end{aligned}$$

alakban írható fel. (41) speciálisan a φ függvény helyett a $|\varphi|$ -re alkalmazva is igaz, ezért a Beppo Levi tétel (és (39)) szerint a

$$\begin{aligned} \sum_{i, m=1}^{\infty} \left(\int_0^{h_+^A(y, k)} \varphi(y + sk) \cdot 1_{B_{im}}(y + sk) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot s^j ds \right) &= \\ &= \int_0^{h_+^A(y, k)} \varphi(y + sk) \cdot 1_{G_f}(y + sk) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot s^j ds (= \psi(y, k)) \end{aligned}$$

d^+A feletti függvény abszolút értéke $\mathcal{M}$ -integrálható, ahonnan rögtön következik (40), hiszen eszerint (41) összegezhető i -re és m -re a bal és a jobb oldalán:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}} \varphi \cdot 1_{G_f} d\text{vol}_n = \sum_{i, m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}} \varphi \cdot 1_{B_{im}} d\text{vol}_n \quad \text{és}$$

$$\int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y,k)} \varphi(y+sk) \cdot 1_{G_f}(y+sk) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot s^j ds d\mu(y,k) =$$

$$= \sum_{i,m=1}^{\infty} \int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y,k)} \varphi(y+sk) \cdot 1_{B_{im}}(y+sk) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot s^j ds d\mu(y,k)$$

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}).$$

(40) alapján mostmár a következőképpen okoskodhatunk:

Az 5.3 Lemma a) pontja azt fejezi ki, hogy a h_+^A :

$d^+A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty]$ felülről félig folytonos, azaz speciálisan Borel-mérhető. Emiatt található nála kisebb nem-negatív egyszerű Borel függvényeknek egy olyan monoton növény $f_1, f_2, \dots$ sorozata, hogy $f_i \nearrow h_+^A$ (pontonként d^+A -n mindenütt $i \rightarrow \infty$ esetén). Vegyünk egy ilyen

$\{f_i\}$ sorozatot. Most $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{f_i} = \{y+sk : 0 < s < h_+^A(y,k) \text{ és } (y,k) \in d^+A\}$, ami előállítható $(\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}) \setminus B^*$ alakban $B^* = \{y + h_+^A(y,k) \cdot k : (y,k) \in d^+A\} (= \mathbb{R}^n \setminus \bar{A}!)$ -ot véve. Ujra a Beppo Levi tétellel érvelve (először megint a $\|\varphi$ -re át-
térve) láthatjuk, hogy

$$\int_{(\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}) \setminus B^*} \varphi d\text{vol}_n = \int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y,k)} \varphi(y+sk) \cdot 1_{\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{f_i}}(y+sk) \cdot$$

$$(40') \quad \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot s^j ds d\mu(y,k) =$$

$$= \int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y,k)} \varphi(y+sk) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot s^j ds d\mu(y,k).$$

Ezért egyetlen kérdést kell megválaszolniunk (35")-höz: 0 mértékű-e (a vol_n szerint) a B halmaz. Hogy a válasz pozitív, (és így a lemma is igaz), a következő pontban mutatjuk meg. $\square$

5.6. Lemma. Ha $\phi \neq A \subset \mathbb{R}^n$ és $B^* = \{y + h_+^A(y, k)k : (y, k) \in d^+A\}$, akkor majdnem minden $\delta > 0$ -ra $\text{vol}_{n-1} B^* \cap \partial A_\delta = 0$.

Bizonyítás. Vegyük észre mindennek előtt, hogy majdnem minden $\delta > 0$ -ra a ∂A_δ halmaz vol_{n-1} mértéke σ -véges. (Ez abból következik, hogy egy korlátos $A' (\subset \mathbb{R}^n)$ halmaz esetén minden $\delta > 0$ -ra $\text{vol}_n A'_\delta \setminus \bar{A}' = \int_0^\delta \text{vol}_{n-1} \partial A'_\delta d\delta$ (ld. [15] 3.3.34), és így ilyenkor $\text{vol}_{n-1} \partial A'_\delta < \infty$ legalábbis majdnem minden³⁸. $\delta > 0$ mellett. Mivel az $\mathbb{R}^n$ tér szeparábilis, az A halmaz felbontható megszámlálható sok korlátos $A'_1, A'_2, \dots$ halmaz egyesítésére. Ekkor $\partial A_\delta \subset \bigcup_{i=1}^\infty \partial(A'_i)_\delta$, vagyis a ∂A_δ vol_{n-1} mértéke σ -véges valahányszor $\text{vol}_{n-1} \partial(A'_i)_\delta < \infty$ ($i=1, 2, \dots$).

Vegyük ezután egy olyan (tetszőleges) $\delta > 0$ -t, ahol $\text{vol}_{n-1} \partial A_\delta$ σ -véges, és legyen $\delta > \delta$ -ra $\phi_\delta \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a következő binér reláció: $\phi_\delta = \{(y, z) : z \in \partial A_\delta, y \in \text{pr}_{\bar{A}_\delta} z\}$. Jól ismert (ld. [13], vagy részletesebben [26]), hogy a ϕ_δ

³⁸. Hogy $\text{vol}_{n-1} \partial A'_\delta < \infty$ minden $\delta > 0$ -ra, a lemma utáni Megjegyzésből kiderül.

reláció mindig egy olyan leképezést reprezentál (vagy más-
képpen szólva, egy olyan leképezésnek a grafikonja), amely a

$\pi_{A_\delta}^{-1} A (\subset \partial A_\delta)$ alakzatot ráviszi ∂A_δ -ra, és amely tel-
jesíti a $\|\phi_\delta(y_1) - \phi_\delta(y_2)\| \leq \frac{\delta}{\delta} \|y_1 - y_2\|$ ($\forall y_1, y_2 \in \pi_{A_\delta}^{-1} \partial A_\delta$)

Lipschitz feltételt.

Ha $\delta > \delta$ és $F \subset \partial A_\delta$, akkor $\phi_\delta^{-1}(F) = \{y' : \exists (y, k) \in d^+A,$

$L^A(y, k) \cap F \neq \emptyset$ és $y' \in L^A(y, k) \cap \partial A_\delta\} = \{y + \delta k : (y, k) \in d^+A,$

$h_+^A(y, k) \geq \delta, y + \delta k \in F\}$. Innen $\phi_\delta^{-1}(B^* \cap \partial A_\delta) = \{y + \delta k : h_+^A(y, k) = \delta\}$,

ami mutatja, hogy $\delta_1 \neq \delta_2$ -re $(\delta_1, \delta_2 > \delta)$ mindig

$\phi_{\delta_1}^{-1}(B^* \cap \partial A_{\delta_1}) \cap \phi_{\delta_2}^{-1}(B^* \cap \partial A_{\delta_2}) = \emptyset$. Így a $\{\phi_{\delta_1}^{-1}(B^* \cap \partial A_{\delta_1}) : \delta > \delta\}$

halmazrendszer particionálja a ∂A_δ -nak egy részhalmazát.

Mivel a $\phi_\delta^{-1}(B^* \cap \partial A_\delta)$ halmazok Borel mérhetőek⁴⁰, és mi-

vel $\text{vol}_{n-1} \partial A_\delta < \infty$, ez csak úgy lehet, ha

$\text{vol}_{n-1} \phi_\delta^{-1}(B^* \cap \partial A_\delta) = 0$ megszámlálható sok $\delta > \delta$ kivéte-

lével. De a Hausdorff mértékek leképezési tétele szerint (ld.

[22]) ezekre a δ -kra $\text{vol}_{n-1}(B^* \cap \partial A_\delta) = \text{vol}_{n-1} \phi_\delta(\phi_\delta^{-1}(B^* \cap \partial A_\delta)) \leq$

$$\leq \left(\frac{\delta}{\delta}\right)^{n-1} \text{vol}_{n-1} \phi_\delta^{-1}(B^* \cap \partial A_\delta) = 0.$$

Mint hogy a δ értéke akármilyen kicsire választható, lát-

39. Az 5.3 Lemma a) pontjából következik, hogy az $M(\varepsilon) =$

$\{y + \delta k : h_+^A(y, k) \geq \varepsilon\}$ halmazok zártak. Márpedig $\phi_\delta^{-1}(B^* \cap \partial A_\delta) =$

$$= \{y + \delta k : h_+^A(y, k) = \delta\} = M(\delta) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M\left(\delta + \frac{1}{i}\right).$$

láthatjuk, hogy $\text{vol}_{n-1}(B^* \cap \partial A_\varrho) = 0$ nemcsak hogy majdnem minden, hanem megszámlálható sok érték kivételével minden

$\varrho > 0$ -ra fennáll.

Következmény. Az 5.5 Lemma feltételei mellett $\text{vol}_n B^* = 0$ mert ekkor B^* Borel mérhető (hiszen most $B^* = \mathbb{R}^n \setminus (\bar{A} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{f_i})$).

- megjegyezzük azonban, hogy a Borel mérhetősége általában is kimutatható, nemcsak ebben a speciális esetben), és így [15] 3.2.11-et a $\text{distance}(\cdot, A)$ függvényre alkalmazva

$$B^* \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{A} \text{ következtében } \text{vol}_n B^* = \int_0^\infty \text{vol}_{n-1} B^* \cap \partial A_\varrho d\varrho = 0.$$

Megjegyzés. Láttuk, hogy korlátos $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén majdnem minden $\varrho_0 > 0$ -ra $\text{vol}_{n-1} \partial A_{\varrho_0} = \frac{d}{d\varrho} \Big|_{\varrho_0} \text{vol}_n A_\varrho$. Felvetődik a kérdés, mi a helyzet az olyan ϱ_0 helyeken, ahol a

$\text{vol}_n A_\varrho$ függvény nem differenciálható. [14] -ben be van bizonyítva, hogy e függvény bal- és jobboldali deriváltjai minden $\varrho_0 > 0$ -nál léteznek (és végesek), és hogy a ∂A_{ϱ_0} alakzat $n-1$ dimenziós Minkowski mértéke mindig ezeknek a számtani közepe. A [15] 3.2.39-es tétel azt mondja ki, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér $n-1$ rektifikálható részhalmazainak⁴⁰. vol_{n-1} mértéke

⁴⁰. Az, hogy egy $F \subset \mathbb{R}^n$ alakzat $n-1$ rektifikálható, azt jelenti, hogy található olyan kompakt $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ és $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz leképezés, hogy $F = \phi(K)$.

meg egyezik az $n-1$ dimenziós Minkowski mértékével. Ebből sejtethető, hogy korlátos $A \subset \mathbb{R}^n$ -re minden $\varrho > 0$ mellett a ∂A_ϱ alakzatok $n-1$ rektifikálhatók, és így $\text{vol}_{n-1} \partial A_{\varrho_0} =$

$$= \frac{1}{2} \left(\left. \frac{d^+}{d\varrho} \right|_{\varrho_0} + \left. \frac{d^-}{d\varrho} \right|_{\varrho_0} \right) \text{vol}_n A_{\varrho_0} . \text{ Hogy ez a sejtés igaz,}$$

a következőképp látható be: (Csak vázolhatjuk a bizonyítást, - bár az nem nehéz, - mert nem tartozik a dolgozat közvetlen témáihoz.) Rögzítve egy korlátos $A \subset \mathbb{R}^n$ -et és $\varrho > 0$ -t, bontsuk fel az A halmazt véges sok ϱ -nál kisebb átmérőjű részhalmazára. Legyenek ezek $A_1, \dots, A_N$. Meg lehet mutatni, hogy általában is, ha az $A' \subset \mathbb{R}^n$ halmaz átmérője ϱ -nál kisebb és $a_0 \in A'$, akkor az A' paralleltartomány csillagszerű az a_0 pontból nézve, és

$$A'_\varrho = \bigcup_{\|e\|=1} [a_0, a_0 + (\sup_{a \in A'} \psi_a(e))e]$$

$$\text{ahol} \quad \psi_a(e) = (a - a_0) \cdot e + \sqrt{[(a - a_0) \cdot e]^2 + \varrho^2 + \|a - a_0\|^2}$$

(T.i. $K(a)$ -val jelölve az a középpontú ϱ sugarú nyitott gömböt, $\|a - a_0\| < \varrho$ esetén $K(a) = \bigcup_{\|e\|=1} [a_0, a_0 + \psi_a(e) \cdot e]$ és

$$A'_\varrho = \bigcup_{a \in A'} K(a) .) \quad r = \text{diameter } a \text{ és } c = r \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 1}} \right) \text{-et ír-}$$

va $\|a - a_0\| < r$, és $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ mellett mindig áll

a $|\psi_a(e_1) - \psi_a(e_2)| \leq c \cdot \|e_1 - e_2\|$ Lipschitz feltétel, és így

szintén $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ -re $|\sup_{a \in A'} \psi_a(e_1) - \sup_{a \in A'} \psi_a(e_2)| \leq c \cdot \|e_1 - e_2\|$

is teljesül állandóan. Mivel nyilván

$$\partial A'_\varrho = \{ a + (\sup_{a \in A'} \psi_a(e))e : \|e\| = 1 \} ,$$

ez mutatja, hogy most a $\partial A'_\gamma$ felület előáll az $\{e \in \mathbb{R}^n : \|e\| = 1\} = S$ egységgömbfelület Lipschitz-folytonos képeként. Mivel az S $n-1$ rektifikálható, és mivel $n-1$ rektifikálható alakzat Lipschitz folytonos képe szintén $n-1$ rektifikálható, a $\partial A'_\gamma$ is - és így a $\partial(A_i)_\gamma$ felületek is - $n-1$ rektifikálhatók.

∂A_γ zártága adja $\partial A_\gamma \subset \bigcup_{i=1}^N \partial(A_i)_\gamma$ -n keresztül innen, hogy maga a ∂A_γ is $n-1$ rektifikálható.

Megjegyzés. Az 5.5 Lemmát be lehet bizonyítani a (11') formulából is egy a 4.5 Tétellel analóg tételen keresztül. Hogy mégis a kerülőutat választottuk, annak az volt az oka, hogy így a paralleltartományokkal kapcsolatos vizsgálati módszerek egész sokaságába bepillantást nyerhettünk. Másrészt ilyen módon jobban kiütközik, hogy a dolgozat Főtételében hogyan foglaltatnak benne a már eddig is ismert eredmények.

6. § A PARALLELTARTOMÁNYOK HATÁRFELÜLETÉNEK NÉHÁNY KONVEXITÁSI TULAJDONSÁGA

6.1. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy akármilyen $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén teljesíthetők valamilyen $A_1, A_2, \dots$ halmazrendszerrel az 5.5 Lemma feltételei, célszerű előbb tanulmányozni az A halmaz Dirichlet-cella struktúrájának néhány konvexitási tulajdonságát.

Kezdjük a $\text{distance}(\cdot, A)$ függvény ebből a szempontból való vizsgálatával.

Lemma. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ és $\varrho_0 > 0$. Ekkor a

$\text{distance}(\cdot, x_0) - \frac{1}{2\varrho_0} \|\cdot\|^2$ függvény konkáv a $G = \{x : \text{distance}(x, x_0) > \varrho_0\}$ halmazon^{41.}

Bizonyítás. A G halmazon $\text{distance}(x, x_0)$ az x pont koordinátáinak C^∞ -sima függvénye bármely derékszögű koordinátarendszert véve. Számítsuk ki a második parciális deriváltjaiból alkotott mátrixot egy $x_1 \in G$ helyen egy olyan koordinátarendszert használva, amelynek az első egységvektora az

$$e_1 = \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \text{ vektor. Könnyen látható, hogy ez az } e_2, \dots, e_n$$

(a többi bázisvektorok) választásától függetlenül a

^{41.} Egy $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz feletti konkávsága azt jelenti, hogy az f konkáv a hagyományos értelemben minden olyan egyenes-szakaszon, amely teljes egészében a H -ban fekszik.

$\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$ függvénynek az $(\|x_1 - x_0\|, 0, \dots, 0)$ helyen vett második parciális deriváltjaiból képzett mátrix, ami nem más, mint

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\|x_1 - x_0\|} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\|x_1 - x_0\|} \end{pmatrix}$$

(t.i. $\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2} = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 - \xi_i^2) (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{-3/2}$ és

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2} = -\xi_i \xi_j (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{-3/2} \text{ ha } i \neq j.$$

Mivel az $\|x\|^2$ függvény második parciális deriváltjaiból alkotott mátrix minden helyen és minden koordinátarendszerben az egységmátrix kétszerese (t.i. $\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) = 2$

és $\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) = 0$ ha $i \neq j$), a $\text{distance}(x, x_0) = \frac{1}{2g_0} \|x\|^2$

függvény második parciális deriváltjaiból alkotott mátrix (és így az illető függvény második-derivált tenzora) negatív definit $x_1 = x$ -nél (hiszen ekkor a sajátértékei $-\frac{1}{g_0}$ egyszeres, és $\frac{1}{\|x_1 - x_0\|} - \frac{1}{g_0}$ $n-1$ -szeres multiplicitással, mind

negativok). Vagyis $x_1 \in G$ tetszőleges volta miatt - mint az jól ismert, hogy negatív definit második-derivált tenzorral rendelkező függvény konkáv - a $\text{distance}(\cdot, x_0) = \frac{1}{2g_0} \|\cdot\|^2$

függvény valóban konkáv G -n. $\square$

Megjegyzés. A függvények konkávságának a definíciójából látszik, hogy a lemma állítása ekvivalens az $n=2$ dimenziós változatával. Ez a tény mutatja, hogy a lemma teljesül nemcsak az $\mathbb{R}^n$ véges dimenziós terekben, hanem akármilyen Hilbert térben. (Megjegyezzük még, hogy úgy tűnik, $n=2$ dimenzióban is az itteni a legegyszerűbb bizonyítás. Esetleg annyi-val lehet elemibben belátni a lemma síkbeli speciális esetét, hogy a második-derivált tenzor negatív definit voltára való hivatkozás direkt számolással elkerülhető. Így azonban veszít a gondolatmenet a természetességéből.) Sőt elemi úton - bár meglehetősen nehézkesen - meg lehet mutatni, hogy áll a következő a lemmánál kissé erősebb egyenlőtlenség: Ha $\|x\|, \|x'\|$, $\left\| \frac{x+x'}{2} \right\| \geq \varrho_0 (>0)$ akkor $\|x\| + \|x'\| - \|x+x'\| \leq \frac{1}{\varrho_0} \left\| \frac{x-x'}{2} \right\|^2$. A lemma bizonyításából kiderül az is, hogy az $\frac{1}{2\varrho_0}$ konstans nem javítható.

Tétel. Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ adott halmaz, akkor a $G' = \{x : \text{distance}(x, A) > \varrho_0\}$ halmazon a $\text{distance}(\cdot, A) - \frac{1}{2\varrho_0} \|\cdot\|^2$ függvény konkáv. ($\varrho_0 > 0$, mint előbb.)

Bizonyítás. A $\text{distance}(\cdot, A) - \frac{1}{2\varrho_0} \|\cdot\|^2$ függvény a $\{\text{distance}(\cdot, x_0) - \frac{1}{2\varrho_0} \|\cdot\|^2 : x_0 \in A\}$ függvénycsalád infimuma, ami a Lemma szerint G' -n konkáv függvényekből áll, és konkáv függvények infimuma mindig konkáv. $\square$

Következmény. A $\text{distance}(\cdot, A)$ függvénynek tetszőleges $x_0 \notin \bar{A}$ helyen léteznek az összes irány szerinti deri-

váltjai és ($v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ -ra $\frac{\partial}{\partial v}|_{x_0} f = \lim_{\tau \searrow 0} \frac{1}{\tau} [f(x_0 + \tau v) - f(x_0)]$

jelölés mellett) a $\frac{\partial}{\partial v}|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A)$ függvény rögzített

x_0 esetén a v -nek mint változónak pozitív homogén konkáv (azaz szuperlineáris) függvénye.

Bizonyítás. Legyen adott x_0 úgy, hogy $x_0 \notin \bar{A}$,

$\varphi_0 = \frac{1}{2} \text{distance}(x_0, A)$ -ra alkalmazzuk a Tételt. Ez mutatja, hogy

$\frac{\partial}{\partial v}|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A)$ létezik, mégpedig az $f(\cdot) = \text{distance}(\cdot, A) -$

$-\frac{1}{2\varphi_0} \|\cdot\|^2$ függvény segítségével $\frac{\partial}{\partial v}|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) =$

$= \frac{\partial}{\partial v}|_{x_0} f - \frac{1}{\varphi_0} x_0 \cdot v$. (Itt $x_0 \cdot v$ az x_0 pont helyvektorá-

nak és a v -nek a skaláris szorzatát jelöli.) Tudjuk,^{42.}

hogy akármilyen konkáv $\bar{f}$ függvényre (így tehát $\bar{f} = f$ -re

is, hiszen a G' alakzat nyitott) $\frac{\partial}{\partial v}|_{x_0} \bar{f}$ a v -nek

szuperlineáris függvénye (és minden $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ -ra értelmezve van), az $x_0 \cdot v$ kifejezés pedig lineáris. $\square$

6.2. Definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ és L egy x kezdőpontú félegyenes. Azt mondjuk, hogy az L az x pontnál (Bouligand-féle) félérintője az S halmaznak, ha található olyan $x \neq y_1, y_2, \dots \in S$ pontsorozat, melyre $y_i \rightarrow x$ és $\angle(y_i - x, L) \rightarrow 0$ (ha $i \rightarrow \infty$). (A $\angle(y_i - x, L)$ szimbólum a jelen esetben úgy értendő, hogy az $y_i - x$ vektornak az

^{42.} v.ö. a [17] 28. oldalán levő tétellel.

L félegyenes irányvektorával bezárt szöge.) A félérintő elnevezést az a speciális eset motiválja, amelynél az S egy $n-1$ dimenziós felület.

Lemma. Ha $A \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $B = \mathbb{R}^n \setminus A_\delta$, $x \in \partial A_\delta$, $x \neq y \in D_B x$ és az L egy olyan félegyenes, amelyik x -beli félérintője B -nek, akkor $\angle(y-x, L) \geq \frac{\pi}{2}$.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét, és legyen $x \neq x_1, x_2, \dots \in \partial A_\delta$ olyan sorozat, hogy $\angle(x_i - x, L) \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). Számítsuk ki az y és x_i pontok távolságát:

$$\|y_i - x_i\|^2 = \|(x_i - x) - (y - x)\|^2 = \|x_i - x\|^2 + \|y - x\|^2 - 2(x_i - x)(y - x) \\ (i = 1, 2, \dots)$$

Az a feltétel, hogy $\angle(x_i - x, L) \rightarrow 0$, úgy is megfogalmazható, hogy v -vel jelölve az L irány (egység)vektorát, és $v_i = \frac{x_i - x}{\|x_i - x\|}$ -t véve ($i = 1, 2, \dots$), $v_i \rightarrow v$ ($i \rightarrow \infty$). Ekkor látszik, hogy

$\|x_i - y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|x_i - x\| [\|x_i - x\| - 2v_i(y - x)]$ ($i = 1, 2, \dots$)
De ha $\angle(x - y, L) = \angle(y - x, v) < \frac{\pi}{2}$, akkor $(y - x)v > 0$, és mivel $v_i \rightarrow v$, valamilyen j indexre már $\|x_i - x\| \rightarrow 0$ miatt $\|x_i - x\| - 2v_j(y - x) < 0$ áll, ami most $\|x - y\|^2 > \|x_j - y\|^2$ -et jelent. Ez azonban $x, x_j \in B$ következtében ellentmond $y \in D_B x$ definíciójának.

Tétel. Ha $\delta > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$ és L a ∂A_δ alakzatnak x -beli félérintője, akkor van olyan $y \in \text{pr}_A x$, hogy $y - x \perp L$.

Bizonyítás. Legyen megint $x \neq x_1, x_2, \dots \in \partial A_\varrho$ olyan sorozat, hogy $x_i \rightarrow x$ és $\angle(x_i - x, L) \rightarrow 0$ (ha $i \rightarrow \infty$). Tudjuk, hogy $\text{distance}(x_i, A) = \varrho$ ($i=1, 2, \dots$) miatt van olyan $y_i \in \bar{A}$, hogy $\|x_i - y_i\| = \varrho$ ($i=1, 2, \dots$). Mivel az $\{x_i\}$ sorozat konvergens, az $\{y_i\}$ sorozat korlátos. Ezért $\{y_i\}$ -nek van konvergens részsorozata, vagyis az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy maga az $\{y_i\}$ konvergens, és $y_i \rightarrow y$. Minthogy $y_i \in \text{pr}_{\bar{A}} x_i$ most, a Dirichlet-cellák definíciója szerint $y_i \in D_{\partial A_\varrho} x_i$. Ezért $x \in \partial A_\varrho$ miatt $\|y_i - x\| \geq \|y_i - x_i\|$, azaz y_i a $H(x_i, x)$ féltérben⁴³ fekszik ($i=1, 2, \dots$). Ebből következik, hogy $(x_i - x)(y_i - x) \geq 0$. Vagy ami ugyanaz, v_i -t és v -t hasonlóan definiálva, mint az előző Lemma bizonyításánál, $v_i(y_i - x) \geq 0$ ($i=1, 2, \dots$), és a limeszre áttérve $v(y - x) \geq 0$. Csakhogy $y_i \in \bar{A}$ és $\|y_i - x_i\| = \varrho$ miatt $y \in \bar{A}$ és $\|y - x\| = \varrho$ is áll, így megint $y \in D_{\partial A_\varrho} x$, ami a Lemma szerint implikálja, hogy $(y - x)v \leq 0$ is teljesül. Tehát $y - x \perp v$, azaz $y - x \perp L$. $\square$

6.3. **Tétel.** Legyen $\varrho > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \partial A_\varrho$ és $C = \{t \in \mathbb{R}^n$:

$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) \geq 0\} \cup \{0\}$. Tegyük fel, hogy van olyan

⁴³• A továbbiakban végig $p, q \in \mathbb{R}^n$ -re $H(p, q) = \{z \in \mathbb{R}^n : \text{distance}(z, p) \leq \text{distance}(z, q)\}$.

$t_0 \in C$, hogy $\frac{\partial}{\partial t_0} \big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) > 0$. Most az $L =$
 $= x_0 + [0, \infty) \cdot t$ félegyenes pontosan akkor x_0 -beli félérin-
 töje ∂A_g -nak, ha $\frac{\partial}{\partial t} \big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) = 0$.

Bizonyítás. Mindenek előtt megjegyezzük, hogy mivel
 $\frac{\partial}{\partial t} \big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A)$ szuperlineáris függvénye a t változó-
 jának (ld. 6.1 Következmény), a feltevés miatt C egy olyan
 konvex kúp^{44.}, amely nem adja ki a teljes $\mathbb{R}^n$ -et (de nem is
 üres), és amelynek a belső pontjaira $\frac{\partial}{\partial t} \big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) > 0$,
 külső pontjaira $\frac{\partial}{\partial t} \big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) < 0$ határpontjaira
 $\frac{\partial}{\partial t} \big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) = 0$ áll.

Következő lépésként megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -
 hoz található olyan $x \in \partial A_g$, amelyre $0 < \|x - x_0\| < \varepsilon$ és
 $\angle(x - x_0, t) < \varepsilon$ hogyha $t \in \partial C$.

Ez utóbbi bizonyítása: Mivel a C kúp, az általánosság
 megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\|t\| = 1$. Most $t \in \partial C$
 miatt (és újra a C kúp voltából) van olyan t_1 belső- ill. t_2
 külső pontja C -nek, hogy $\angle(t_1, t), \angle(t_2, t) < \varepsilon$ és
 $t \in (t_1, t_2)$. Tudjuk, hogy $\frac{\partial}{\partial t_1} \big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) > 0$ és
 $\frac{\partial}{\partial t_2} \big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) < 0$. Ezért található olyan $\lambda_1 > 0$ és
 $\lambda_2 > 0$, hogy $\text{distance}(x_0 + \lambda_1 t_1, A) > \varepsilon$ és

^{44.} [17] az ilyet éknek (wedge) nevezi, de ez a terminológia
 tudtommal nem elterjedt nálunk.

$\text{distance}(x_0 + \lambda_2 t_2, A) < \vartheta$. Sőt választható λ_1 és λ_2 olyan kicsinek, hogy $\|\lambda_1 t_1\|, \|\lambda_2 t_2\| < \varepsilon$ legyen. A $\text{distance}(\cdot, A)$ függvény folytonossága miatt létezik olyan x belső pontja az $[x_0 + \lambda_1 t_1, x_0 + \lambda_2 t_2]$ szakasznak, hogy $\text{distance}(x, A) = \vartheta$. Tehát erre az x -re $x \in \partial A_\vartheta$. Mivel az $x_0 + \lambda_1 t_1$ ill.

$x_0 + \lambda_2 t_2$ pontok ε -nál kisebb távolságra voltak x_0 -tól, $\|x - x_0\| < \varepsilon$. És mivel $\varphi([x_0, x_0 + \lambda_1 t_1], t) = \varphi(t_1, t) < \varepsilon$ ill. $\varphi([x_0, x_0 + \lambda_2 t_2], t) = \varphi(t_2, t) < \varepsilon$ a $\varphi(x - x_0, t) < \varepsilon$

reláció is teljesül, amint állítottuk. Ez egyben magát a tételt is bizonyítja. $\square$

6.4. Definíció. Legyen K az $\mathbb{R}^n$ egy konvex zárt részhalmaza, és $p \in K$. A p pontot a K erős extrémális pontjának fogjuk mondani, hogyha található olyan $n-1$ dimenziós támasztó (hiper) síkje K -nak, amely K -val csak a p pontban érintkezik. (Világos, hogy minden erős extrémális pont tényleg extrémális pont is egyben. Példa olyan extrémális pontra, amely nem erősen extrémális pont: $K =$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq (x_1 + |x_1|)^2\} \text{ -nek a } (0,0) \text{ pontja.})$$

Analóg módon, ha $K \subset \mathbb{R}^n$ egy zárt konvex kúp és L egy a K csúcsából (vagyis az origóból) kiinduló ∂K -ban haladó félegyenes, akkor L -et a K erős extrémális félegyenesének (vagy csak röviden erős extrémálisának) nevezzük, ha található olyan $n-1$ dimenziós M sík $\mathbb{R}^n$ -ben, amelyre $M \cap K = L$. Az L irányvektorát (egységvektor) ekkor a K erős

extremális irányának mondjuk. Nyilván egy u egységvektor akkor és csak akkor erős extremális iránya a K -nak, ha a K ortogonális komplementerében, a $K^\perp = \{u: tu \leq 0\}$ -val definiált kúpban egy és csak egy irány merőleges a u -re.

Tétel. Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex és kompakt, akkor K -t generálják az erős extremális pontjai (azaz K a legszűkebb olyan zárt konvex halmaz, amely tartalmazza ezeket a pontokat).

Bizonyítás. Legyen K_1 a K erős extremális pontjai generálta halmaz. Nyilván $K \supset K_1$ és a K_1 kompakt.

Tegyük fel, hogy a tétel állítása nem igaz, azaz van olyan $p \in K$ pont, hogy $p \notin K_1$. Legyen q ekkor az a pont, amely a K_1 -beli pontok közül a legközelebb fekszik p -hez. (A q egyértelműsége a K_1 konvexitásából következik, létezése evidens.) Jelölje M azt az $n-1$ dimenziós síkot, amely áthalad q -n és merőleges a (p, q) szakaszra. Tudjuk, hogy K_1 abban az M által határolt zárt féltérben helyezkedik el, amely nem tartalmazza a p pontot. (Ugyanis ha volna olyan r pont az M határolta és p -t tartalmazó nyitott féltérben, amely K_1 -beli, akkor - mint könnyen látható - elegendően közel⁴⁵ a q -hoz a (q, r) szakaszon olyan s

⁴⁵. t -vel jelölve a p pont merőleges vetületét a (q, r) szakasz egyenesére, $\angle(r-p, p-q) < \frac{\pi}{2}$ miatt t a $q + [0, \infty)(r-q)$ félegyenesen van, így az $L = (q, r) \cap (q, t)$ szakasz nem üres. Most az L bármely pontja választható s -nek a gondolatmenetben.

pont, amelyre $\|s-p\| < \|p-q\|$. De a K_1 konvexitása miatt most $s \in K_1$, ami ellentmond a q definíciójából következő $\|s-p\| \geq \|q-p\|$ relációnak.)

Ezért található olyan G zárt gömb, amely K_1 -et teljes egészében a belsejében tartalmazza, p_1 -et pedig a határán. (Ilyen G gömböt pl. úgy konstruálhatunk, hogy vesszük a K_1 -nek az M -re való K_1' merőleges vetületét, és mivel ez korlátos, vehetünk egy olyan G' $n-1$ dimenziós gömböt M -ben, amelynek középpontja a q pont és amelynek a sugara nagyobb mind a K_1 átmérőjénél, mind pedig $\|p-q\|$ -nál. Most G -nek választva azt a zárt gömböt, amelynek a határa tartalmazza p -t és a G' M -beli határát, G nyilván a belsejében fogja tartalmazni a K alakzatot.)

Legyen q_1 a G középpontja. Tekintsük G -nek a q_1 -ből való nagyítottjait. Mivel a K kompakt és a G zárt, ezek között a nagyítottak között található egy legkisebb sugarú olyan, mondjuk F gömb, amelyik a K -t még tartalmazza. Ennek a határán biztosan fekszik legalább egy pontja a K -nak. Legyen így $p_1 \in K \cap \partial F$. Most $p_1 \notin K_1$, hiszen $K_1 \subset \overset{\circ}{G} \subset \overset{\circ}{F}$. Márpedig a p_1 pont erős extrémális pontja a K -nak, mert az F -et a p_1 -ben érintő $n-1$ dimenziós sík az F gömböt nyilván csak a p_1 pontban metszi, így annál inkább p_1 -ben metszi csak $K(\subset F)$ -et.

Tehát kizárólag $K=K_1$ állhat. $\square$

Következmény. Ha K olyan konvex kúp, amelynek az origó (a csúcsa) erős extrémális pontja, akkor a K -t generálják az erős extrémálisai (az erős extrémális félegyenesei).



Bizonyítás. A feltevés szerint van olyan $n-1$ dimenziós M' sík, amely a K kúpot csak a 0 pontban metszi. Legyen M egy olyan párhuzamos eltolja az M' -nek, amely a K -t metszi, de nem az origóban. Ekkor - mint jól tudott^{46.} - a $K_1 = K \cap M$ alakzat kompakt konvex halmaz. A Tétel szerint K_1 -et generálják az erős extrémális pontjai. Vegyük észre, hogy amennyiben p egy erős extrémális pontja a K_1 alakzatnak (az M síkbeli értelemben), akkor a $[0, \infty)p = L$ félegyenes erős extrémálisa a K kúpnak. (Hiszen ha egy N alakzat egy olyan $n-2$ dimenziós sík M -en belül, hogy $N \cap K_1 = \{p\}$, akkor az $M_1 = [0, \infty)N$ -nel definiált $n-1$ dimenziós $\mathbb{R}^n$ -beli sík a K -t nyilván L -ben metszi.)

Mivel $K = [0, \infty)K_1$, a K kúpot így valóban generálják az erős extrémálisai.

6.5. A következő tételt a paralleltartományok határfe-lülete direkt infinitézimális geometriája alaptételének lehet nevezni:

Tétel. Legyen $\delta > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B = \mathbb{R}^n \setminus A_\delta$, $x_0 \in \partial A_\delta$,

$$C = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) > 0 \right\} \cup \{0\} \text{ és}$$

$$C^* = \{ \lambda(y - x_0) : \lambda \in [0, \infty), y \in D_B x_0 \} \text{ (az } x_0\text{-ból a } D_B x_0 \text{.)}$$

Dirichlet-cella pontjaiba mutató vektorokat tartalmazó leg-szűkebb - nem feltétlenül konvex - kúp).

^{46.}

Ld. pl. [17]-ben a 36. oldalon levő Lemma bizonyításában.

Állítás: Ha létezik olyan $t_0 \in C$ hogy $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) > 0$ akkor a C^* kúp és a C kúp egymás adjungáltjai (vagy más terminológiával, egymás ortogonális komplementerei, azaz

$$C^* = \{u: \forall t \in C \quad t \cdot u \leq 0\}$$

Farkas tétele szerint ekkor áll a fordított $C = \{t: \forall u \in C^* \quad t \cdot u \leq 0\}$ egyenlőség is, hiszen a C -ről tudjuk, hogy konvex).

Bizonyítás. Jelölje $C^\perp$ a C kúp adjungáltját. Mivel az $x_0 + [0, \infty)t$ félegyenes mindig nyilván pontosan akkor fél-érintője a $B (= \{x: \text{distance}(x, A) \geq g = \text{distance}(x_0, A)\})$ alakzatnak, ha $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) \geq 0$ a 6.2-beli Lemma azt fejezi ki, hogy $C^\perp \supset C^*$. Tehát csak a $C^\perp \subset C^*$ tartalmazás bizonyításával kell foglalkoznunk. Mivel a $D_g x_0$ Dirichlet cella konvex és zárt volta ^{47.} miatt a C^* kúp is zárt és konvex, $C^\perp \subset C^*$ -hoz a 6.4 Követelmény szerint elegendő belátni, hogy a $C^\perp$ kúp minden erős extrémális iránya benne fekszik C^* -ban, hiszen t_0 -nak egy egész környezetében minden t vektornál pozitív a $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A)$ direkcionális derivált, ami a 6.2 Lemmát figyelembe véve mutatja, hogy a 0 erős extrémális pontja $C^\perp$ -nek.

Legyen tehát u egy erős extrémális iránya a $C^\perp$ kúp-nak ($\|u\| = 1$). Definíció szerint most van egy olyan $t \in C$, hogy $t \perp u$ és a többi $C^\perp$ -beli u' egységvektorra pedig $t \cdot u' < 0$. Természetesen, t csak C -nek a határán fekszen. Ekkor $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} \text{distance}(\cdot, A) > 0$, t.i. a C kúp határvektorai (határpontjai) irányában a

^{47.} Id. 2.2 a)-nál.

$\text{distance}(\cdot, A)$ függvény deriváltja 0 a direkcionális deriváltjai szuperlinearitási tulajdonsága (ld. a 6.1 Következményt) miatt. Vagyis az $L = x_0 + [0, \infty)t$ -vel definiált félegyenes (az előbbi t -vel) félérintője ∂A_g -nak az x_0 pontban. A 6.2 Tételt figyelembe véve kapjuk, hogy egy $y \in \bar{A}$ pontra $\text{distance}(x_0, y) = g$ és $y - x_0 \perp L$. Csakhogy erre az y -ra $\text{distance}(x_0, A) = g$ -ből most $y \in D_B x_0$, azaz

$y - x_0 \in C^*$ következik. De így $y - x_0 \in C^\perp$ is.

És mivel $y - x_0 \perp L$, azaz $y - x_0 \perp t$ az u vektor definíciója szerint az $y - x_0$ vektor nem lehet más, mint $g \cdot u$. Vagyis $u \in C^*$. Ez az utóbbi tény pedig, mint már előzetesen megjegyeztük, biztosítja a tételt. $\square$

Korollárium. Ha az u' vektor C^* -nak egy g hosszúságú extrémális vektora, akkor $x_0 + u' \in D_B x_0$.

Bizonyítás. Az alaptétel bizonyításából adódik, hogy ez igaz, ha az u' erősen extrémális. Az pedig, hogy egy konvex halmaz erős extrémális pontjainak a lezárása az extrémális pontjait adja, nyilvánvaló. $\square$

Következmény. Ha a $\mathcal{P}_{\bar{A}} x_0$ halmazt (a Tétel jelölései és feltételei mellett) bele lehet foglalni egy $r < g (= \text{distance}(x_0, A))$ sugarú gömbbe, akkor a $(D_{\mathbb{R}^n \setminus A_g} x_0 =) D_B x_0$ Dirichlet cella előállítható $\sqrt{g^2 - r^2}$ -nél nem rövidebb x_0 kezdőpontú szakaszok uniójaként, azaz $\mathbb{R}^n \setminus A_g$ -nak minden x_0 kezdőpontú kifelé mutató prenormálisa legalább $\sqrt{g^2 - r^2}$ hosszú.

Bizonyítás. A Korollárium szerint az $\{x_0\} \cup \text{pr}_{\bar{A}} x_0$ halmaz konvex burka - amit a továbbiakban jelöljön T - benne foglaltatik $D_{\mathbb{R}^n \setminus A_\varrho} x_0$ -ban és metszi az összes olyan $x_0 + [0, \infty)(y - x_0)$ félegyenest, amelynél $y \in D_{\mathbb{R}^n \setminus A_\varrho} x_0$. Így ahhoz, hogy az állítást bebizonyítsuk, elegendő belátni, hogy a T alakzat összetehető $\sqrt{\varrho^2 - r^2}$ -nél nem rövidebb x_0 kezdőpontú szakaszokból.

Tehát adott a következő geometriai szituáció: T egy olyan alakzat, amely előáll egy x_0 pont és az x_0 középpontú ϱ sugarú gömbfelület egy P (ami a $\text{pr}_{\bar{A}} x_0$ -nak felel meg) zárt részhalmazának a konvex burkaként, és a P alakzat benne fekszik egy ϱ -nál kisebb r sugarú gömbben. Kérdés: Legalább milyen hosszú egy $T \cap [x_0 + [0, \infty)(y - x_0)]$ szakasz $y \in T$ -re?

A válaszhoz az általánosság megszorítása nélkül korlátozhatjuk a vizsgálatunkat az $x_0 = 0$ esetre. Sőt mivel most T a $\{0\} \cup P$ véges részhalmazai konvex burkaként előáll poliéderek uniójának a lezártja, feltehetjük, hogy a P véges, vagyis, hogy a T egy poliéder. Ezután még egy megszorítást is tehetünk minden további nélkül Caratheodory jól ismert tétel^{48.} alapján: a T alakzat vehető egy $\{0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ alakú ponthalmaz konvex burkaként (emlékeztetünk, hogy n a dimenziószám), ahol $\|p_1\| = \dots = \|p_{n-1}\| = \varrho$ és a $p_1, \dots, p_{n-1}$ pontok köré írt $n-1$ dimenziós gömb sugara legfeljebb $r < \varrho$

^{48.} Ld. [20], vagy [17] 1.8 e) feladat (40. old.).

nagyságú. Most a kérdést úgy tehetjük fel, hogy milyen távol kell legyen legalább az origótól a $[p_1, \dots, p_{n-1}]$ lap legközelebbi pontja. Ez nem más természetesen, mint a következő szélsőérték-probléma:

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i p_i \right\| \rightarrow \min \\ \text{hogya} \quad \|p_1\| = \dots = \|p_{n-1}\| = \varrho, \exists z \quad \|p_1 - z\| = \dots = \|p_{n-1} - z\| \leq \\ \leq \tau, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \geq 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1. \end{array} \right.$$

Egyszerű kompaktsági érv mutatja, hogy a (42)-ben valóban felvétetik a minimum valamilyen $\lambda_1^*, \dots, \lambda_{n-1}^*, p_1^*, \dots, p_{n-1}^*$ (megengedett) konfiguráció mellett. Legyen q^* a $[p_1^*, \dots, p_{n-1}^*]$

$n-1$ dimenziós szimplexnek a O -hoz legközelebbi pontja, azaz a $\lambda_1^* p_1^* + \dots + \lambda_{n-1}^* p_{n-1}^*$ pont. Nyilván a q^* pont csak legfeljebb akkor esik egybe valamelyik p_i^* -gal, ha $\tau=0$ (de akkor persze $p_1^* = \dots = p_{n-1}^* = q^*$). Ezért minden további

nélkül feltehetjük, hogy $q^* = \lambda_1^* p_1^* + \dots + \lambda_k^* p_k^*$, ahol a $p_1^*, \dots, p_k^*$ pontok általános helyzetűek^{49.}, $2 \leq k \leq n-1$

és $\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^* > 0$ ill. $\sum_{i=1}^k \lambda_i^* = 1$. Azaz a q^*

a $P^* = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i^* : \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\} (= [p_1^*, \dots, p_k^*])$

^{49.} Azaz a $p_i - p_j$ ($1 \leq i, j \leq k$) alakú vektorok közt van $k-1$ lineárisan független.

által definiált $k-1$ dimenziós szimplexnek egy belső pontja. Ez mutatja, hogy a $(0, q^*)$ szakasz merőleges a P^* -ot tartó $k-1$ dimenziós M^* lineáris alsokaságra (síkra). (Az ellenkező esetben ugyanis a $(0, q^*)$ szakasz M^* -ra eső vetületének az irányában a q^* ponthoz elegendően közel volna P^* -nak a 0 -hoz q^* -nál közelebb fekvő pontja.) Ezért

$$\|q^* - p_1^*\| = \dots = \|q^* - p_k^*\| = \sqrt{\varrho^2 - \|q^*\|^2} \text{ vagyis a } p_1^*, \dots, p_k^*$$

köré irt M^* -beli gömb középpontja - a q^* pont - a $p_1^*, \dots, p_k^*$ pontok konvex burkán belül fekszik. Jól ismert, hogy ilyen esetben a $p_1^*, \dots, p_k^*$ pontok köré irt M^* -ba eső középpontú n dimenziós gömb a legkisebb sugarú mindazon (n dimenziós) gömbök közül, amelyek tartalmazzák $p_1^*, \dots, p_k^*$ mindegyikét. Ezért $r \leq \sqrt{\varrho^2 - \|q^*\|^2}$, azaz $\|q^*\| \geq \sqrt{\varrho^2 - r^2}$, ami bizonyítja a tételt. (Természetesen, valójában $\|q^*\| = \sqrt{\varrho^2 - r^2}$ mert látható a gondolatmenetből mostmár, hogy $k=2$ és p_1^* ill. p_2^* a $\{p: \|p\| = \varrho\}$ gömbfelületen egymástól $2r$ távolságra elhelyezkedő pontok, és $k \geq 3$ -ra $p_i^* = p_1$ vagy $p_i^* = p_2$ áll mindig.)

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy ha maga az A halmaz is belefoglalható $r \leq \frac{\varrho}{2}$ sugarú gömbbe, akkor z -vel jelölve az illető gömb középpontját, a Tételbeli t_0 -nak vehető akár-milyen $x_0 \in \partial A_\varrho$ mellett $t_0 = x_0 - z$. Így a Következmény szerint ilyenkor $h_+^{\mathbb{R}^n \setminus A_\varrho} \geq \sqrt{\varrho^2 - r^2}$.

(Bizonyítás: Vegyünk egy tetszőleges $a \in A$ pontot, és tekintsük a $[z, a, x_0]$ háromszöget rögzített $x_0 \in \partial A_\varrho$ -

nál. Az oldalaira ennek $\|a-z\| \leq r \leq \frac{\varrho}{2}$, $\|x_0-a\| \geq \varrho$,

$$\|x_0-z\| \geq \|x_0-a\| - \|a-z\| \geq \frac{\varrho}{2} \text{ áll. Így } \operatorname{tg} \angle(z, x_0, a) \leq \frac{\|x_0-a\|}{\|x_0-z\|} \leq \frac{1}{2}.$$

Ezért $t_0 = x_0 - z$ és $\alpha = \arctg \frac{1}{2}$ segítségével $\lambda > 0$

esetén $\angle(x_0 + \lambda t_0, x_0, a) = \pi - \angle(z, x_0, a) \geq \pi - \alpha$, innen pedig

$$\operatorname{distance}(x_0 + \lambda t_0, a) = [\|x_0-a\|^2 + \lambda^2 \|t_0\|^2 - 2\lambda \|x_0-a\| \cdot \|t_0\| \cdot$$

$$\cdot \cos \angle(x_0 + \lambda t_0, x_0, a)]^{1/2} \geq (\varrho^2 + \lambda^2 \frac{\varrho^2}{4} + \lambda \varrho^2 \cos \alpha)^{1/2}. \text{ Ebből}$$

$$\operatorname{distance}(x_0 + \lambda t_0, A) - \operatorname{distance}(x_0, A) = \inf_{a \in A} \operatorname{distance}(x_0 + \lambda t_0, a) -$$

$$- \varrho \geq \varrho \cdot \left[\left(\frac{\lambda^2}{4} + \lambda \cdot \cos \alpha + 1 \right)^{1/2} - 1 \right], \text{ vagyis } \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{x_0} \operatorname{distance}(\cdot, A) \geq$$

$$\geq \frac{d}{d\lambda} \Big|_0 \varrho \cdot \left(\frac{\lambda^2}{4} + \lambda \cdot \cos \alpha + 1 \right)^{1/2} = \frac{\cos \alpha}{2} > 0. \text{ A } h_+^{\mathbb{R}^n \setminus A_\varrho}$$

függvényre való állítás egyszerűen a 4.5 Definíció szerinti átfogalmazása a Következménynek. $\square$)

7. § A FŐTÉTEL ÉS KÖZVETLEN KÖVETKEZMÉNYEI

7.1. Az előző fejezet eredményei alapján mostmár könnyedén meg tudjuk konstruálni azokat az $A_1, A_2, \dots$ halmazokat bármilyen $A \subset \mathbb{R}^n$ -hez, amelyeket behelyettesítve az 5.5 Lemmába a legáltalánosabb eredményhez jutunk.

Főtétel. Tetszőleges nem-üres határú $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz mellett létezik olyan μ mérték a d^+A irányított felületen és léteznek olyan μ -mérhető $a_0, \dots, a_{n-1}$ függvények, hogy minden $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \bar{A})$ -ra

$$(43) \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}} \varphi d\text{vol}_n = \int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y,k)} \varphi(y+sk) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot s^j ds d\mu(y,k).$$

Bizonyítás. Legyen $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ a pozitív racionális számoknak egy felsorolása, és $i = 1, 2, \dots$ -re rendre legyenek a B_i halmazok az A ϱ_i sugarú paralleltartományának a határai. Azaz a $h_+^A : d^+A \rightarrow (0, \infty]$ függvény definíciója szerint most

$$(44) B_i = \partial A_{\varrho_i} = \{y + \varrho_i k : (y, k) \in d^+A \text{ és } h_+^A(y, k) \geq \varrho_i\} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Fedjük le ezután mindegyik B_i -t megszámlálható sok

$\frac{\varrho_i}{2i}$ sugarú gömbbel, és jelöljük ezeket a gömböket

$K_{i,1}, K_{i,2}, \dots$ -vel ($i = 1, 2, \dots$). Definiáljuk

$i, s = 1, 2, \dots$ -nel $A_{i,s}$ -et ekkor a következőképpen:

legyen $B_{is} = B_i \cap K_{is}$ és $A_{is} = \mathbb{R}^n \setminus (B_{is})_{\rho_i} =$

$= \{y: \text{distance}(y, B_{is}) \geq \rho_i\}$. Vegyük észre, hogy ha az (y, k) pár olyan eleme d^+A -nak, amelyre $h_+^A(y, k) \geq \rho_i$ és $y + \rho_i k \in B_{is}$, akkor (ezzel az i, s indexpárral)

$$\text{distance}(y + \rho_i k, A_{is}) = \rho_i , \text{ és így } (y, k) \in d^+A_{is}$$

ebben az esetben.

De mivel $\bigcup_{s=1}^{\infty} B_{is} = B_i$, ez (44) miatt azt jelenti, hogy

$$(45) \{(y, k) \in d^+A : h_+^A(y, k) \geq \rho_i\} \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} d^+A_{is} \quad (i=1, 2, \dots) ,$$

ahonnan pedig következik, hogy

$$d^+A \subset \bigcup_{i,s=1}^{\infty} d^+A_{is}$$

Ugyanakkor mivel $\partial A_{is} = \partial(\mathbb{R}^n \setminus (B_{is})_{\rho_i}) = \partial(B_{is})_{\rho_i}$ és mivel

a B_{is} halmazt tartalmazó K_{is} gömb sugara $\frac{\rho_i}{2i} \leq \frac{\rho_i}{2}$,

a 6.5 Megjegyzés szerint (az ottani A helyébe B_{is} -et, ρ helyébe ρ_i -t és r helyébe $\frac{\rho_i}{2i}$ -t téve) azt kapjuk, hogy a $h_{is} = \inf h_+^{A_{is}}$ -sel definiált számokra

$$h_{is} \geq \sqrt{\rho_i^2 - \left(\frac{\rho_i}{2i}\right)^2} = \rho_i \sqrt{1 - \frac{1}{4i^2}} \quad (>0) \quad (i, s=1, 2, \dots) .$$

Ez (45)-tel együtt azt adja, hogy

$$\sup \{h_{is} : (y, k) \in d^+A_{is}\} \geq h_+^A(y, k) \quad \forall (y, k) \in d^+A$$

Tekintve, hogy az (i, s) indexpárok halmaza megszámlál-

ható, alkalmazhatjuk az 5.5 Lemmát, ahonnan következik (42). $\square$

7.2. Természetesen, a Főtétel magában foglalja Steiner tételét és annak Hadwiger-féle változatát (a 4.1 Tételt). Ez utóbbihoz még jegyezzünk meg annyit, hogy abban az esetben, amikor mind a befelé, mind a kifelé mutató prenormálisok hosszabbak egy-egy közös α ill. β értéknél, akkor az $f(\xi) = \text{vol}_n A_\xi$ függvény ugyanaz a polinom mind a $[-\alpha, 0]$ mind a $[0, \beta]$ intervallumon (ez a 4.5 Tételből jól látszik). Ugyanezen okból a Főtétel is kifejezhető a Fő Lemmához hasonló alakban. Összefoglalóan kimondhatjuk tehát:

Létezik mindig olyan μ mérték a dA felett olyan μ -mérhető $a_0, \dots, a_{n-1} : dA \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekkel együtt, hogy minden vol_n -integrálható $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre

$$(43') \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\text{vol}_n = \int_{dA} \int_{-h_-^A(y,k)}^{h_+^A(y,k)} \varphi(y + \xi k) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \xi^j d\xi d\mu(y,k) + \int_{\partial_0 A} \varphi d\text{vol}_n$$

teljesül. Az $a_0, \dots, a_{n-1}$ függvények olyan tulajdonságúak, hogy (bármely) rögzített $(y,k) \in dA$ -ra a $p_{y,k}(\xi) =$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot \xi^j \quad \text{polinom a } (-h_-^A(y,k), h_+^A(y,k))$$

intervallumon pozitív, és a $p_{y,k}$ csupa valós gyökökkel rendelkezik. A μ mértékről azt lehet tudni, hogy a dA irányított felületnek az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ topológiája szerinti összes Borel részhalmazán értelmezve van, és hogy a

$$p_{y,k}(\xi) d\mu(y,k) \quad \text{"polinomiális mérték" } d^+A \text{ ill. } d^-A$$

felett nem más, mint $\sum_{j=0}^{n-1} \xi^j d\nu_j(y,k)$ az 5.1-ben defini-

ált ν_j előjelezett mértékekkel. (Ez pontosabban szólva azt jelenti, hogy minden $\varphi \in \mathbb{R}$ -re és minden ν -szummálható E

$$\text{részhalmazára } d^+A \text{ -nak ill. } d^-A \text{ -nak } \sum_{j=0}^{n-1} \varphi^j \cdot \int_E a_j d\mu = \\ = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi^j \nu_j(E) \quad .) \quad \text{Sőt a } d^+A \text{ and } d^-A = \{(y, k) : h_+^A(y, k), h_-^A(y, k) > 0\}$$

$\mathbb{R}^n$ -beli tartóhalmazán, az $F = \{y : \exists k (y, k) \in d^+A \text{ and } d^-A\}$ alakzat $y \in F$ -re $k(y)$ -nal jelölve az A -nak az y -beli kifelé mutató (egyedüli!) normálisát, található olyan

$\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : F \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, amelyekkel

$$p_{y, k(y)}(\varphi) d\mu(y, k(y)) = [1 + \kappa_1(y) \cdot \varphi] \dots [1 + \kappa_{n-1}(y) \cdot \varphi] d\text{vol}_n(y)$$

írható. (Azaz minden vol_{n-1} -mérhető $G \subset F$ -re és $\varphi \in \mathbb{R}$ -re

$$\int_G p_{y, k(y)}(\varphi) d\mu(y, k(y)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{(y, k(y)) : y \in G\}} p_{y, k}(\varphi) d\mu(y, k) =$$

$$= \int_G [1 + \kappa_1(y) \varphi] \dots [1 + \kappa_{n-1}(y) \varphi] d\text{vol}_{n-1}(y) \text{ áll. }) \text{ Végeze-}$$

tül a h_+^A és h_-^A függvényekről annyi információval rendelkezünk általában, hogy dA -t az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ topológikus térben tekintve, felülről folytonosak a dA halmazon (amely az értelmezési tartományuk), és hogy

$$\text{vol}_n \{y + h_+^A(y, k) k : (y, k) \in dA\} = \text{vol}_n \{y + h_-^A(y, k) k : (y, k) \in dA\} = 0$$

7.3. A Főtételnek közvetlen folyománya a Kneser-egyenlőtlenség is:

Ha az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és $\vartheta > 0$, akkor az

$$f(\vartheta) = \text{vol}_n A_\vartheta \setminus \bar{A} = \text{vol}_n A_\vartheta - \text{vol}_n \bar{A} \text{ függvényre}$$

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}} 1_{A_\vartheta} d\text{vol}_n = \\ &= \int_{d^+A} \int_0^{h_+^A(y,k)} 1_{(0,\vartheta)}(\zeta) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \zeta^j d\zeta d\mu(y,k) = \\ (46) \quad &= \int_{d^+A} \int_0^\infty 1_{(0,h_+^A(y,k))}(\zeta) \cdot 1_{(0,\vartheta)}(\zeta) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \zeta^j d\zeta d\mu(y,k) = \\ &= \int_0^\vartheta \zeta^{n-1} \left[\int_{d^+A} 1_{(0,h_+^A(y,k))}(\zeta) \frac{p_{y,k}(\zeta)}{\zeta^{n-1}} d\mu(y,k) \right] d\zeta. \end{aligned}$$

Mivel egy olyan $g(\cdot)$ függvény, amelyre $g(0)=0$, pontosan akkor n -edfokú Kneser-függvény a $(0, \infty)$ -en, ha valamely ponton csökkenő $\alpha(\cdot)$ -val $g(\vartheta) = \int_0^\vartheta \alpha(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta$ ($\vartheta > 0$) írható (ld. [14]), elég megmutatni, hogy bármely rögzített

$$(y,k) \in d^+A \quad \text{-ra az } 1_{(0,h_+^A(y,k))}(\cdot) \cdot p_{y,k}(\cdot) \cdot (\cdot)^{1-n}$$

függvény monoton csökkenő a $(0, \infty)$ félegyenesen. Ehhez pedig elegendő belátni, hogy a $p_{y,k}(\cdot)(\cdot)^{1-n}$ függvény

csökken a $(0, h_+^A(y,k))$ intervallumon. Mivel a $p_{y,k}$ egy

valós gyökű és a $(0, h_+^A(y,k))$ -n pozitív értékű $n-1$ -edfokú polinom, előállítható $p_{y,k}(\zeta) = a(\zeta - \tau_1) \dots (\zeta - \tau_{n-1})$

alakban, ahol $a \geq 0$ és $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus (0, h_+^A(y,k))$

olyan elhelyezkedéssel, hogy páros számú $h_+^A(y,k)$ -nál nem-kisebb van. Ebből pedig tüstént látszik, hogy a

$$p_{y,k}(\zeta) \cdot \zeta^{1-n} = a \left(1 - \frac{\tau_1}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\tau_{n-1}}{\zeta}\right) \text{ függvény valóban monoton}$$

csökkenő $(0, h_+^A(y,k))$ felett.

7.4. Önmagától vetődik fel a kérdés ezután, mit lehet mondani a Főtétel alapján Szőkefalvi-Nagy Béla [9] -beli eredményeivel kapcsolatban. Az világos, hogy a Főtétel közvetlenül nem tartalmazza azokat. Azonban talán jól rá lehet mutatni (néhány meglehetősen plauzibilis tény verifikálása után) a [9]-beli döntő szerepet játszó Lemma heurisztikus alapjaira:

Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ és $\varrho > 0$. Vizsgáljuk az A_ϱ paralleltartomány határának a befelé mutató prenormálisait illetőleg az ezzel kapcsolatos $d^-A_\varrho (= d^+(\mathbb{R}^n \setminus A_\varrho))$ irányított felületet. Tegyük fel, hogy az A határa korlátos, és hogy van olyan $\tau < \varrho$ szám, hogy $x_0 \in \partial A_\varrho$ esetén $\rho_{\tau_A} x_0$ halmaz mindig befoglalható egy τ sugarú gömbbe. Ez a feltevés nem erős, mivel (nemcsak 2 dimenzióban) a ∂A_ϱ kompaktsága miatt nem mond többet annál, hogy $x_0 \in \partial A_\varrho$ -ra τ_{x_0} -al jelölve a $\rho_{\tau_A} x_0$ köré írt legkisebb kör (n dimenzióban n dimenziós gömb) sugarát, mindig $\tau_{x_0} < \varrho$. (T.i. könnyen látható, hogy az $x \mapsto \tau_x$ függvény felülről félig folytonos, így pedig van olyan x_0 ahol felveszi a maximumát, de itt is $\tau_{x_0} < \varrho$.) Most ha $\varrho > \varrho - \tau > \tau$, akkor a $\partial A_{\varrho-\tau}$ görbe belemetsz minden $(y, k) \in d^-A$ mellett az $y + [0, \sqrt{\varrho^2 - \tau^2}] \cdot k$ szakaszba, amely pedig teljes egészében benne fekszik a ∂A_ϱ -nak az y pontból a k irányban induló befelé mutató prenormálisában. (Ugyanis a

$$\begin{aligned}
 & [y, c'] , \text{ vagyis } \|c - y\| \leq \|c' - y\| . \quad \tau = \left\| \frac{a_1 - a_2}{2} \right\| = \\
 & = \left\| a_1 - \frac{a_1 + a_2}{2} \right\| \text{-t írva a Pythagoras tétel kétszeri alkal-} \\
 & \text{mazásával } \|c' - y\| = \sqrt{\varrho^2 - \tau^2} - \sqrt{\tau^2 - \tau'^2} = \frac{\varrho^2 - \tau^2}{\sqrt{\varrho^2 - \tau'^2} + \sqrt{\tau^2 - \tau'^2}} \leq \\
 & \leq \frac{\varrho^2 - \tau^2}{\sqrt{\varrho^2 - \tau'^2}} \leq \sqrt{\varrho^2 - \tau^2} , \text{ és így } \|c - y\| \leq \sqrt{\varrho^2 - \tau^2} . \text{ De}
 \end{aligned}$$

$K \subset A_\tau \subset A_{\varrho-\tau} .$
 Ha $p \in (y + [0, \sqrt{\varrho^2 - \tau^2}]k) \cap \partial A_{\varrho-\tau}$, akkor a három-
 szög-egyenlőtlenség szerint $\text{distance}(p, y) \geq \text{distance}(y, A) -$
 $- \text{distance}(p, A) = \tau$. Ebből sejthető, hogy az

$\{y + \tau k : (y, k) \in d^-A\} = \partial(A_\varrho)_\tau$ görbe rövidebb a $\partial A_{\varrho-\tau}$

görbénél. Ezt könnyű belátni:

Osszuk két részre a ∂A_ϱ pontjait: legyen $S_1 =$
 $= \{y \in \partial A_\varrho : \text{pr}_A y \text{ egyetlen pont}\}$ és $S_2 = \{y \in \partial A_\varrho : \text{pr}_A y$
 $\text{több pontból áll}\}$. Most $y \in S_1$ -re mindig pontosan
 egy olyan k egységvektor létezik, melynél $(y, k) \in d^-A_\varrho$,
 és ezzel a k -val $\{y + \varrho k\} = \text{pr}_A y$, ahonnan következik,
 hogy az $y + \tau k$ pontra $\text{distance}(y + \tau k, A) = \varrho - \tau$,
 azaz $y + \tau k \in \partial A_{\varrho-\tau}$ áll. Ez mutatja, hogy R_0 -lal je-
 lölve az $\bigcup \{y + [0, \sqrt{\varrho^2 - \tau^2}]k : y \in S_1 \text{ és } (y, k) \in d^-A_\varrho\}$
 sávot,

$$(47) \quad \partial A_{\varrho-\tau} \cap R_0 = \partial(A_\varrho)_\tau \cap R_0 .$$

Az $y \in S_2$ pontokhoz tartozó $K_y = \bigcup \{ y + [0, \sqrt{s^2 - \tau^2}] \cdot k :$

$$(y, k) \in d^{-1}A_s \}$$

halmazok a 6.5 Következmény sze-

rint páronként diszjunkt körcikkek (π -nél kisebb pozitív nyílásszöggel). Ezért az S_2 -be csak megszámlálhatóan sok

pont tartozhat (az $\mathbb{R}^2$ szeperabilitása folytán). Legyenek

ezek a pontok $y_1, y_2, \dots$ és jelöljük R_i -vel a K_{y_i}

körcikket ($i = 1, 2, \dots$). Mivel a $\partial A_{s-\tau}$ és $\partial(A_s)_{-\tau}$

görbék az $A_s \setminus (A_s)_{-\sqrt{s^2 - \tau^2}} = \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$ sávon belül fut-

nak, (47) ismeretében elég megmutatni, hogy

$$(48) \quad \text{length}(R_i \cap \partial A_{s-\tau}) \geq \text{length}(R_i \cap \partial(A_s)_{-\tau}) \quad (i = 1, 2, \dots - \text{re})$$

($\text{length} = \text{vol}_1$).

Ez azonban világos, mert ha ϕ_i -vel jelöljük azt a leképe-

zést amely az $R_i \cap \partial A_{s-\tau}$ -beli p pontokhoz a $[p, y_i]$

szakasznak az y_i -től τ távolságra levő pontjait rende-

li, akkor (a gondolatmenet elején mondottak szerint) a ϕ_i

képhalmaza ($\text{range } \phi_i$) az $R_i \cap \partial(A_s)_{-\tau}$ iv lesz

($i = 1, 2, \dots$). És mivel általában is akármilyen k', k'' egységvektorokkal és $\tau' \geq \tau'' \geq \tau > 0$ számokkal

$$\angle([y_i + \tau'' k'', y_i + \tau'' k'], [y_i + \tau'' k', y_i + \tau' k']) \geq \frac{\pi}{2} \quad (\text{t.i.}$$

ez az $[y_i + \tau'' k'', y_i + \tau'' k', y_i + \tau' k']$ egyenlőszárú három-

szög $y_i + \tau'' k'$ -nél levő szögének a kiegészítő szöge)

miatt $\text{distance}(y_i + \tau'' k'', y_i + \tau' k') \geq \text{distance}(y_i + \tau'' k'', y_i + \tau'' k') \geq$

$\geq \text{distance}(y_i + \tau k'', y_i + \tau k')$ áll, a ϕ_i leképezés kont-

rakció ($i = 1, 2, \dots$), amiből következik $\phi_i(R_i \cap \partial A_{s-\tau}) =$

$$= R_i \cap \partial(A_\varrho)_{-\tau} \quad \text{alapján (48).}$$

Ezzel beláttuk, hogy amennyiben minden $y \in \partial A_\varrho$ -ra $\rho r_A y$ belefoglalható egy $r (< \varrho)$ sugarú gömbbe (az r független az y ponttól), úgy

$$(48') \quad \text{length } \partial A_{\varrho-\tau} \geq \text{length } \partial(A_\varrho)_{-\tau} \quad (0 < \tau < \varrho - r)$$

$$\text{Mivel itt nyilván } \text{length } \partial(A_\varrho)_{-\tau} = \sum_{j=0}^1 \int_{d^-A_\varrho} \tau^j d\nu_j(y, k) =$$

$$= \nu_0(d^-A) + \nu_1(d^-A) \cdot \tau, \quad (48') \text{ segítségével kapjuk,}$$

hogy

$$(49) \quad \lim_{\tau \downarrow 0} \sup \frac{1}{\tau} (\text{length } \partial A_\varrho - \text{length } \partial A_{\varrho-\tau}) \leq -\nu_1(d^-A_\varrho).$$

Tekintve, hogy most az A_ϱ minden befelé mutató pre-normálisa legalább $\sqrt{\varrho^2 - r^2}$ hosszú, az 5.3 Tétel szerint (azt az $\mathbb{R}^2 \setminus A_\varrho$ halmazra alkalmazva) a d^-A_ϱ irányi-

tott felület ν szummálható, és így $\nu_1(d^-A) = \frac{d^2}{d\tau^2} \Big|_0 \text{area } A_\varrho \setminus (A_\varrho)_{-\tau} =$

$$= \frac{d^2}{d\tau^2} \Big|_0 \int_0^\tau \text{length } \partial(A_\varrho)_{-\zeta} d\zeta = \frac{d}{d\tau} \Big|_0 \text{length } \partial(A_\varrho)_{-\tau} = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{d}{d\tau} \Big|_\delta \text{length } \partial(A_\varrho)_{-\tau}$$

Ha $0 < \delta < \sqrt{\varrho^2 - r^2}$, akkor (2.6 szerint) az $(A_\varrho)_{-\delta}$

minden belső prenormálisa legalább $\sqrt{\varrho^2 - r^2} - \delta$ hosszú,

ezért a 4.2 Tételt az $\mathbb{R}^2 \setminus (A_\varrho)_{-\delta} = (\mathbb{R}^2 \setminus A_\varrho)_\delta$ halmazra

alkalmazva kapjuk, hogy a $\partial(A_\varrho)_{-\delta}$ egy kompakt 1 di-

menziós C^{1+} -sokaság, és (a 4.1 Tétel bizonyításának az

utolsó formulája szerint) $0 < \lambda < \sqrt{\rho^2 - \tau^2} - \delta$ -ra

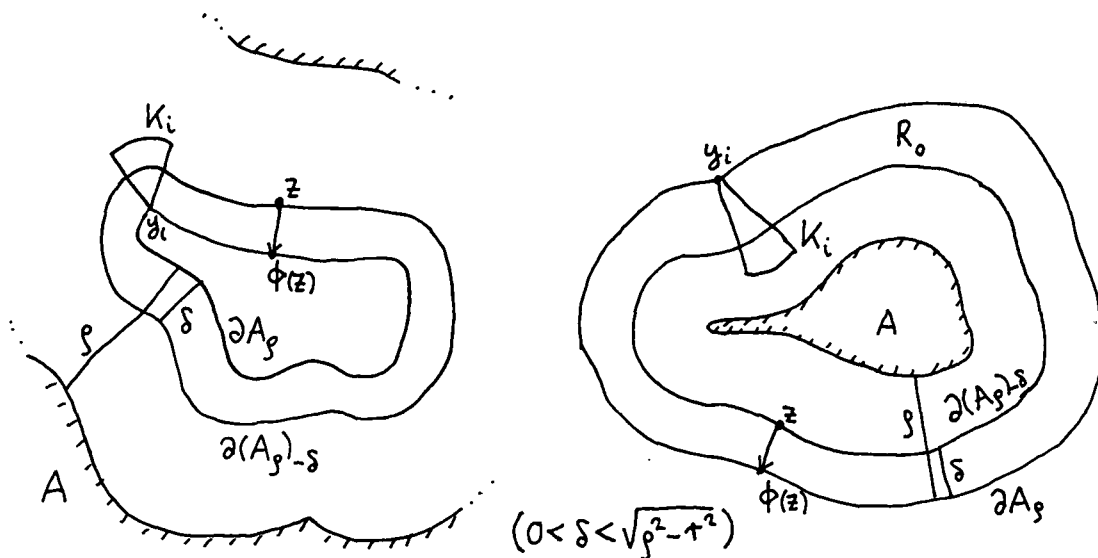
$$\text{length } \partial(A_\rho)_{-(\delta+\lambda)} = \int_{\partial(A_\rho)_\delta} (1 + \lambda \cdot \kappa_\delta) d \text{ length} \quad , \text{ ahol}$$

$\kappa_\delta(\cdot)$ értelemszerűen a $\partial(A_\rho)_\delta$ -nak az

$(A_\rho)_\delta$ -ba befelé mutató normálisa szerint vett görbü-

lete. Innen $\chi_1(d^-A) = \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\partial(A_\rho)_\delta} \kappa_\delta d \text{ length}$. Itt az in-

tegrál értéke a Gauss-Bonnet tétel segítségével a következ-
őképpen számítható ki: Mivel a $\partial(A_\rho)_\delta$ egy 1 dimen-
ziós kompakt C^1 -alsokaság (hiszen C^{1+} is) $\mathbb{R}^2$ -ben, jól
ismert, hogy az összefüggő komponensei körrel homeomorf gör-
bék és a számuk véges. Egy ilyen komponensre a κ_δ integ-
rálja -2π vagy 2π aszerint, hogy a $\partial(A_\rho)_\delta$ -nak
az $(A_\rho)_\delta$ -ba mutató normálisa az $\mathbb{R}^2 \setminus \partial(A_\rho)_\delta$ kor-
látos vagy nem-korlátos komponense felé irányul.



Vegyük észre, hogy (lévén az A_ρ belső prenormálisai
mind legalább $\sqrt{\rho^2 - \tau^2}$ hosszúak) $0 < \delta < \sqrt{\rho^2 - \tau^2}$ ese-

tén minden $z \in \partial(A_\delta)_\delta$ pontnak egyetlen vetületi pontja van csak ∂A_δ -ra, és hogy $\phi(z)$ -vel jelölve ezt (azaz $\{\phi(z)\} = \text{pr}_{\partial A_\delta} z$), a $K_1, K_2, \dots$ körcikkek definiálásakor bevezetett $y_1, y_2, \dots$ pontokkal $\phi^{-1}(y_i)$ nem más, mint a $K_i \cap \partial(A_\delta)_\delta$ körív (δ sugarú) ($i=1, 2, \dots$), $y \in \partial A_\delta \setminus \{y_1, y_2, \dots\}$ -re pedig a $\phi^{-1}(y)$ teljes inverz kép csak egyetlen pontból áll. Ez a tény mutatja, hogy amennyiben C egy olyan (körrel homeomorf) komponense a $\partial(A_\delta)_\delta$ -nak, amelynek az $(A_\delta)_\delta$ -ba mutató normálisa az $\mathbb{R}^2 \setminus C$ korlátos nem-korlátos komponensébe mutat, akkor a $\phi(C)$ egy olyan körrel homeomorf részhalmaza ∂A_δ -nak, amelynek az A_δ -ba mutató normálisa (a 2.4 Definíció szerinti értelemben) az

$\mathbb{R}^2 \setminus \phi(C)$ korlátos [nem korlátos] komponensébe irányul. Így tehát ha $\chi_+(E)$ -vel jelöljük egy körrel homeomorf (páronként diszjunkt) görbékkel határolt $E \subset \mathbb{R}^2$ alakzatra a ∂E azon C komponenseinek a számát, amelyekre a C -nek az E -be mutató normálisa az $\mathbb{R}^2 \setminus C$ korlátos komponensébe mutat, $\chi_-(E)$ -vel pedig a többi komponensek számát, akkor

$$(50) \quad \nu_1(d^-A) = 2\pi (-\chi_+(A_\delta) + \chi_-(A_\delta)) .$$

Azonban korlátos $E \subset \mathbb{R}^2$ halmazra $\chi_+(E) - \chi_-(E)$ éppen az Euler karakterisztikája, ezért (49) és (50) összevetésével kimondhatjuk a következő tételt:

Tétel. Legyen az $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos határú. Tegyük fel, hogy $\varrho > 0$ olyan, hogy minden $y \in \partial A_\varrho$ pontra a $\text{pr}_{\overline{A}} y$ halmaz köré ϱ -nál kisebb sugarú kör írható.

Ekkor

$$\lim_{\tau \searrow 0} \sup \frac{1}{\tau} [\text{length } \partial A_\varrho - \text{length } \partial A_{\varrho-\tau}] \leq 2\pi \cdot \chi(A_\varrho),$$

ahol $E \subset \mathbb{R}^2$ -re $\chi(E) = \begin{cases} \text{Euler characteristic } E & \text{ha az } E \text{ korlátos} \\ \text{Euler characteristic } E & \text{ha az } \mathbb{R}^2 \setminus E \text{ korlátos} \end{cases}$.

Analóg módon az olyan $\varrho < 0$ értékekre, amelyeknél

$y \in \partial A_\varrho$ mellett a $\text{pr}_{\overline{\mathbb{R}^2 \setminus A}} y$ köré írt kör sugara

mindig $|\varrho|$ -nél kisebb,

$$\lim_{\tau \searrow 0} \inf \frac{1}{\tau} [\text{length } \partial A_{\varrho-\tau} - \text{length } \partial A_\varrho] \geq 2\pi \chi(A_\varrho). \quad \square$$

Megjegyzés. A tétel általánosítása a [9] Lemmájának, így belőle a [9] többi eredménye is következik. Ugy tűnik azonban, hogy egyszerűbb bizonyítást a [9]-beli eredményekre ennek alapján nem lehet adni (elsősorban a $\text{pr}_{\overline{A}}$ -ra tett kikötés miatt, amin a túllépés topológiailag nehézkes).

FIZIKAI ALKALMAZÁS

8.1. Legyen végig ebben a fejezetben az $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos nyitott halmaz, és jelölje ekkor szokásosan $C_0^k(A)$ a kompakt tartójú C^k -sima $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmazát ($k=0,1,\dots,\infty$) és $f \in \text{Lip}(A)$ -ra $R_A(f)$ az f függvény Bayleigh-koefficiensét, azaz $R_A(f) = \left(\int_A \|\text{grad } f\|^2 d\text{vol}_n / \int_A f^2 d\text{vol}_n \right)^{1/2}$. Legyen $m=1,2,\dots$ -re $M_m(A)$ a $C_0^1(A)$ tér m dimenziós lineáris altereinek összesége. Most az

$$(51) \quad \Lambda_m(A) = \inf \{ \sup \{ R_A(f) : 0 \neq f \in L \} : L \in M_m(A) \} \quad (m=1,2,\dots)$$

menyiséget az A alakú, pereménél rögzített rezgő test m -edik sajátfrekvenciájának nevezzük. (51)-et röviden

$$(51') \quad \Lambda_m(A) = \inf_{L \in M_m} \sup_{f \in L} R_A(f) \quad (m=1,2,\dots)$$

alakban fogjuk írni a továbbiakban. Ezt a definíciót (vagy inkább elnevezést) a klasszikus hullámelméletnek a következő két tétele motiválja:

a)⁵¹. Ha az A határa véges sok C^2 -sima felületdarabból összetehető, maga az A alakzat pedig összefüggő (lehet több-

⁵¹. Irodalmi hivatkozás: [23] III. fejezet 8. § (58-59. old.)
[24] I. kötet VI. fejezet.

szőrösen összefüggő is), akkor található egy olyan

$\{f_1, f_2, \dots\} \subset C_0^\infty(A)$ teljes ortonormált rendszere az

$L^2(A) (= \{f: \int_A f^2 d\text{vol}_n < \infty\})$ térnek, hogy minden indexre

$$\Delta f_m = \Lambda_m^2(A) f_m$$

és ezekkel az f_m függvényekkel az

$$u: \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad u(t, \cdot) \in C_0^2(\bar{A}) (=$$

$$= \{f \in C_0^2(A): \tilde{f}(\cdot) = \begin{cases} f(\cdot) & \text{ha } \cdot \in A \\ 0 & \text{ha } \cdot \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases} \Rightarrow \tilde{f} \in C_0^2(\mathbb{R}^n)\})$$

$\square^2 u = 0$ (azaz $u(t, x) = u(t, x_1, \dots, x_n)$ derékszögű koor-

$$\text{dinátákkal } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0)$$

hullámegyenlet összes megoldásai előállíthatók

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m f_m(x) \cdot \cos(\Lambda_m(A) \cdot t + \varphi_m)$$

sorfejtéssel. (Itt az α_m amplitudók és φ_m fázisszögek

az $u(0, \cdot)$ függvény által vannak meghatározva. Mindig

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 < \infty \quad .)$$

$$\text{Most } L_m = \text{Span}\{f_1, \dots, f_m\} (= \{\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\})$$

et írva nyilván

$$\Lambda_m(A) = R_A(f_m) = \max_{f \in L_m} R_A(f) = \min_{L \in M_m} \max_{f \in L} R_A(f) \quad (m=1, 2, \dots)$$

b)⁵². Az m -edik sajátfrekvencia (a $\Lambda_m(A)$ kifejezés rögzített m -re) folytonos függvénye az A halmaznak abban topológiában az $\mathbb{R}^n$ korlátos nyitott részhalmazain, amelyet a Hausdorff-metrika határoz meg. (Vagyis ha az $\{A_i : i \in J\}$, egy olyan korlátos nyitott $\mathbb{R}^n$ -beli halmazokból álló általánosított sorozat, amelyre $\lim_{i \in J} \text{Hausdorff distance}(A_i, A) = 0$, akkor $\lim_{i \in J} \Lambda_m(A_i) = \Lambda_m(A)$.)

Megjegyzés. Az A tétel igaz olyan korlátos nyitott A halmazra is, amelynek mindegyik összefüggő komponensét véges sok páronként diszjunkt C^2 -sima felületdarab határolja. T.i. ilyenkor $A_1, A_2, \dots$ -vel jelölve az A összefüggő komponenseit és $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots\}$ -vel az A_i -hez tartozó, az a)-beli $\{f_1, f_2, \dots\}$ -nek megfelelő ortonormált rendszert, be lehet látni, hogy a $\Lambda_m(A_i)$ sorozat $m, i \rightarrow \infty$ mindig ∞ -hez, tart. Ezért az (m, i) indexpárok átrendezhetők egy olyan $(m_1, i_1), (m_2, i_2), \dots$ sorozattá, melyre $\Lambda_{m_1}(A_{i_1}) \leq \Lambda_{m_2}(A_{i_2}) \leq \dots$. Ezután

$$f_j(x) = \begin{cases} f_{m_j}(x) & \text{ha } x \in A_{i_j} \\ 0 & \text{ha } x \notin A_{i_j} \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots) -$$

vel definiálva az $f_1, f_2, \dots$ függvényeket, világos, hogy az $\{f_1, f_2, \dots\}$ egy teljes ortonormált rendszer

$L^2(A)$ -ban, és hogy $\Delta f_j - \Lambda_{m_i}^2(A_{i_j}) f_j = 0$ ($j=1, 2, \dots$) ,

⁵². [24] I. kötet 419-423. old. és [6]

ahonnan ismert módon következik, hogy $\bigwedge_j(A) = \bigwedge_{m_j}(A_{i_j})$.

Ez egy újabb érv a $\bigwedge_m(A)$ definíciója mellett.

Sejtés. $\bigwedge_m^2(A)$ a nagyság szerint m -edik (a legkisebbtől kezdve és a multiplicitást figyelembe véve) sajátértéke az $f \in H_0^{1,2}(A)$, $\Delta f - \lambda f = 0$ sajátérték-problémának. Itt $H_0^{1,2}(A)$ a $C_0^1(A)$ lezártja a

$W^{1,2}(A) = \{f \in L^2(A) : \int_A \|\text{grad } f\|^2 d\text{vol}_m < \infty\}$ függvény-
térben az $\|f\|_{W^{1,2}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_A (f^2 + \|\text{grad } f\|^2 d\text{vol}_m) \right)^{1/2}$ normája

szerint úgy, hogy a differenciáloperátorok (azaz a Δ és a grad operátor) disztribúció-értelemben fogandók fel, vagyis pl. a $\Delta f - \lambda^2 f = 0$ egyenlet jelentése

$$\int_A (\Delta \varphi - \lambda^2 \varphi) f d\text{vol}_m = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(A)$$

8.2. Jelölje ezentúl $D(A)$ azoknak az $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek a halmazát, amelyek valamilyen $\varphi \in C_0^1((0, \infty))$ mellett felírhatók $f(\cdot) = \varphi(\text{distance}(\cdot, \partial A))$ ($= \varphi(\text{distance}(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus A))$) formában és legyen $m=1, 2, \dots$ -re $\tilde{M}_m(A)$ a $D(A)$ tér, F_m pedig a $C_0^1((0, \infty))$ m dimenziós altereinek az osztálya.

Lemma. Tetszőleges $0 \neq f \in D(A)$ -hoz található olyan

$f_1, f_2, \dots \in C_0^1(A)$ sorozat, hogy

$$(52) \quad R_A(f_i) \longrightarrow R_A(f) \quad (i \rightarrow \infty). \quad (\text{Azaz } D(A) \subset H_0^{1,2}(A).)$$

Bizonyítás. $\delta = \text{distance}(\text{support } f, \partial A)$ és

$f(\cdot) = \varphi(\text{distance}(\cdot, \partial A))$ -nál nyilván

$\delta = \text{distance}(0, \text{support } \varphi) > 0$ és így vannak olyan

$K_1, K_2, \dots \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ magfüggvények, melyekre

$K_i \geq 0$, $\text{support } K_i \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \frac{\delta}{i}\}$ és $\int_{\mathbb{R}^n} K_i d\text{vol}_n = 1$
($i=1, 2, \dots$).

Most $\bar{f}$ -sal jelölve az f 0-val való folytatottját az

A -n kívülre (tehát $\bar{f}(x) = f(x)$ ha $x \in A$, és

$\bar{f}(x) = 0$ ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$), legyen $\bar{f}_i = \bar{f} * K_i$,

azaz $\bar{f}_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(t) K_i(x-t) d\text{vol}_n t$. Ekkor nyilván

$$(53) \quad \text{support } \bar{f}_i \subset (\text{support } f)_{\delta/i} \subset A \quad (i=1, 2, \dots),$$

és jól ismert az is,^{53.} hogy az $\{\bar{f}_i\}$ sorozat egyenlete-

sen tart $\bar{f}$ -hoz. Másrészt $\bar{f}_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($i=1, 2, \dots$),^{53.} és

$$\text{grad } \bar{f}_i(x) - \text{grad } \bar{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [\bar{f}(t) - \bar{f}(x)] \text{grad } K_i(x-t) d\text{vol}_n(t) =$$

$$= \int_{\|t-x\| < \delta/i} [\bar{f}(t) - \bar{f}(x)] \text{grad } K_i(x-t) d\text{vol}_n(t) \rightarrow 0$$

minden $x \in \mathbb{R}^n$ pontra, ha $i \rightarrow \infty$. Sőt az $\bar{f}$ egyen-

letesen folytonos volta miatt (ami a $\text{support } f$ kompakt-

ságából következik) itt a konvergencia egyenletes. Így

(53)-at figyelembe véve láthatjuk, hogy $\bar{f}_i$ -t az $\bar{f}_i$ függ-

vénynek az A halmazra való megszorítottjaként értelmezve

($i=1, 2, \dots$ -ra), $f_1, f_2, \dots \in C_0^\infty(A)$ és (52) áll.

^{53.} ld. [23] III. fej. 10. § (60-61. old.)

Tétel. Tegyük fel, hogy az A belső paralleltartományai határának a felszine majdnem sehol sem haladja meg az A határát (azaz majdnem minden $\varphi < 0$ esetén $\text{vol}_{n-1} \partial A_\varphi \leq \text{vol}_{n-1} \partial A$).⁵⁴ Ekkor a pereménél rögzített A m -edik sajátfrekvenciája nem lehet nagyobb az egyik végpontjában rögzített és a másiknál szabadon mozgó $\ell = \text{vol}_n A / \text{vol}_{n-1} \partial A$ hosszúságú húr m -edik sajátfrekvenciájánál ($m = 1, 2, \dots$).

Bizonyítás. Legyen $(0, \varphi_0) = \{ \varphi > 0 : A_{-\varphi} \neq \emptyset \}$, ξ pedig az a $(0, \varphi_0) \rightarrow (0, \ell)$ függvény, amelyre $\xi(\varphi) \equiv (\text{vol}_n A_{-\varphi} - \text{vol}_n A) / \text{vol}_{n-1} \partial A$. Mivel a ξ függvény szigorúan monoton növekvő a $(0, \varphi_0)$ intervallumon, abban az esetben, ha még folytonosan differenciálható is, az összes $D(A)$ -beli f függvények felírhatók valamilyen alkalmas $\psi \in C^1_0((0, \infty))$ segítségével $f(\cdot) = \psi(\xi(\text{distance}(\cdot, \partial A)))$ alakban.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük azonban, hogy a ξ folytonosan differenciálható, ugyanis - mint az közismert⁵⁵ - az olyan $P \subset \mathbb{R}^n$ poliéderekre, amelyeknek az

⁵⁴. Be lehet látni, hogy ilyenkor sehol sem teljesülhet

$\text{vol}_{n-1} \partial A_\varphi > \text{vol}_{n-1} \partial A$ ($\varphi < 0$), de ez a tény a továbbiakbszem pontjából nem érdekes.

⁵⁵. Ezek az állítások P. Halmos kifejezésével élve a matematikai folklórhoz tartoznak. V.ö. [6], [7], [8], [10].

egyik lappárja sem párhuzamos, a $\text{vol}_{n-1} \partial P_g$ függvény folytonos, és elemi geometriai okokból mindig $\frac{d}{dg} \text{vol}_n P_{-g} = \text{vol}_{n-1} \partial P_{-g}$ ($g > 0$). Márpedig ilyen típusú poliéderekkel tetszőlegesen közelíthető akármilyen korlátos nyitott alakzat. Ezért ha a tétel állítása az ilyen poliéderekre igaz, akkor a 8.1 b) tétel szerint szükségképpen igaz az általános formájában is.

Legyen tehát mostantól a $\xi(\cdot)$ folytonosan differenciálható. Ekkor a Lemma következményeként

$$\begin{aligned} \Lambda_m^2(A) &= \inf_{L \in M_m} \sup_{f \in L} R_A^2(f) \leq \inf_{L \in M_m} \sup_{f \in L} R_A^2(f) = \\ (54) \quad &= \inf_{L \in M_m} \sup_{f \in L} \frac{\int_A \|\text{grad } f\|^2 d \text{vol}_n}{\int_A f^2 d \text{vol}_n} = \\ &= \inf_{L' \in F_m} \sup_{\varphi \in L'} \frac{\int_A \|\text{grad } \varphi(\xi(\text{distance}(\cdot, \partial A)))\|^2 d \text{vol}_n}{\int_A \varphi^2(\xi(\text{distance}(\cdot, \partial A))) d \text{vol}_n}. \end{aligned}$$

Mivel [15] 3.2.12 (249. old.) szerint ^{56.} egy tetszőleges $u \in C_0^1((0, \infty))$ függvényre

^{56.} Az ottani $f(\cdot)$ helyébe $\text{distance}(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus A)$ -t g helyébe $u(\xi(\text{distance}(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus A)))$ -t, m helyébe n -et és n helyébe 1 -et írva, és figyelembe véve, hogy ebben az esetben az ottani $\mathcal{F}_1$ operáció a $\|\text{grad}\|$ -nak felel meg, továbbá, hogy a 2.1 Következmény alapján most $\mathcal{F}_1 f = \|\text{grad } \text{distance}(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus A)\| = 1$ az A majdnem minden pontjára.

$$\int_A u(\xi(\text{distance}(\cdot, \partial A))) d \text{vol}_m = \int_0^{\ell} u(\xi(\varrho)) \text{vol}_{n-1} \partial A_{-\varrho} d\varrho$$

áll, (54) nem más, mint az

$$(54') \quad \Lambda_m^2(A) \leq \inf_{L' \in F_m} \sup_{\varphi \in L'} \frac{\int_0^{\ell} [\varphi'(\xi(\varrho))]^2 [\xi'(\varrho)]^2 \text{vol}_{n-1} \partial A_{-\varrho} d\varrho}{\int_0^{\ell} [\varphi(\xi(\varrho))]^2 \text{vol}_{n-1} \partial A_{-\varrho} d\varrho}$$

($m = 1, 2, \dots$)

egyenlőtlenség. Ez pedig $\xi'(\varrho) = \text{vol}_{n-1} \partial A_{-\varrho} / \text{vol}_{n-1} \partial A$

miatt továbbírható a $\xi = \xi(\varrho)$ helyettesítéssel

$$(54'') \quad \Lambda_m^2(A) \leq \inf_{L' \in F_m} \sup \left(\int_0^{\ell} [\varphi'(\xi)]^2 [\text{vol}_{n-1} \partial A_{-\varrho(\xi)}]^2 / \int_0^{\ell} [\text{vol}_{n-1} \partial A]^2 \varphi^2(\xi) d\xi \right)$$

alakba. Ezért a $\text{vol}_{n-1} \partial A_{-\varrho} \leq \text{vol}_{n-1} \partial A$ ($m.m. \varrho > 0$) feltevésünk következtében és a $\sup$ ill. $\inf$ operációk monotonitása folytán

$$\Lambda_m^2(A) \leq \inf_{L' \in F_m} \sup_{\varphi \in L'} \frac{\int_0^{\ell} \varphi'^2}{\int_0^{\ell} \varphi^2} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Itt a jobb oldal éppen az egyik végpontjában rögzített (a másikon szabad) ℓ hosszúságú húr m -edik sajátfrekvenciája (v.ö. [23] III. fejelet 13. § 71. old.).

Megjegyzés. Az ℓ hosszúságú, egyik végén rögzített húr m -edik sajátfrekvenciájának értéke $\frac{2m+1}{2\ell} \pi$ ($m = 1, 2, \dots$).

Ez abból látszik, hogy a $\{\varphi_m(x) = \sin \frac{(2m+1)\pi x}{2} : m=1,2,\dots\}$ függvényrendszer ortogonális és teljes az $L^2(0,l)$ tér- és tagjaira $\varphi_m(0)=0, \varphi'_m(l)=0, \varphi'' = -\left(\frac{2m+1}{2l}\pi\right)^2 \varphi = 0$ ($m=1,2,\dots$) teljesül.

8.3. A dolgozatban levő geometriai tételek segítségével jól használható elegendő feltételt lehet adni arra, hogy $\varphi < 0$ -ra mindig $\text{vol}_{n-1} \partial A_\varphi \leq \text{vol}_{n-1} \partial A$ legyen:

Lemma. Ha $h > 0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} > 0$ és $(1+\kappa_1\varphi) \dots (1+\kappa_{n-1}\varphi) > 0$

minden $\varphi \in (-h, 0)$ -ra, akkor a $p(\varphi) = (1+\kappa_1\varphi) \dots (1+\kappa_{n-1}\varphi)$ polinom monoton növekvő a $[-h, 0]$ fölött.

Bizonyítás. Legyen a φ egy tetszőlegesen rögzített pontja a $(-h, 0)$ intervallumnak. Ekkor $u_i = 1 + \kappa_i \varphi$ -t írva világos, hogy $u_i > 0$ kell legyen ($i=1, \dots, n-1$).

κ_i és $p'(\varphi)$ értéke az $u_1, \dots, u_{n-1}$ számok segítségével a következőképpen fejezhető ki: $\kappa_i = \frac{u_i - 1}{\varphi}$

($i=1, \dots, n-1$) ill. $p'(\varphi) = \kappa_1(1+\kappa_2\varphi) \dots (1+\kappa_{n-1}\varphi) + \dots$

$$\dots = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\kappa_i \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i\}} (1 + \kappa_j \varphi) \right] = u_1 \dots u_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i - 1}{\varphi \cdot u_i}.$$

Ezért a lemma állítása pontosan akkor igaz ($u_1, \dots, u_{n-1} > 0$ miatt), ha az

$$\left\{ \begin{array}{l} F(u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i - 1}{g \cdot u_i} \rightarrow \inf \quad (\text{itt } g < 0 \text{ rögzített}) \\ (55) \quad u_1, \dots, u_n > 0 \\ C(u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i - 1}{g} = \text{const} (\geq 0) \end{array} \right.$$

variációs problémának a megoldása nem-negatív. Ezzel pedig ekvivalens az az állítás, hogy a

$$\left\{ \begin{array}{l} -g F(u_1, \dots, u_{n-1}) + n-1 = \quad (g < 0 \text{ rögzített!}) \\ = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{u_i} \rightarrow \inf \\ (55') \quad u_1, \dots, u_{n-1} > 0 \\ g \cdot C(u_1, \dots, u_{n-1}) + (n-1) = \text{const}' = \text{const} \cdot g + (n-1) \leq n-1 \end{array} \right.$$

variációs problémának a megoldása nem kisebb $(n-1)$ -nél.

Ez pedig igaz, mivel a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenség szerint $(55')$ -ben a minimum is felvétetik,

mégpedig $u_1 = \dots = u_{n-1} = \frac{\text{const}'}{n-1}$ -re, és így itt

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{u_i} = \frac{(n-1)^2}{\text{const}'} \geq n-1. \quad \square$$

Következmény. Ha a ∂A C^2 -sima és nem-negatív Minkowski-görbületű (az A -ból kifelé mutató normális szerint számolva a főgörbületeket), akkor a $\text{vol}_{n-1} \partial A_g$ függvény monoton növekvő a $(-\infty, 0)$ intervallumon.

Bizonyítás. Jelölje $k(\cdot)$ a ∂A kifelé mutató normálisát ($y \in \partial A$ -ra a $k(y)$ mindig egységvektor!), $h(y)$ az $y \in \partial A$ pontból kiinduló befelé mutató prenormális hosszát (azaz $h(y) = h_-(y, -k(y))$), T_ϱ az $y \mapsto y + \varrho k(y)$ leképezést ($0 \geq \varrho > -\infty$), $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ pedig a

∂A főgörbületeit a $k(\cdot)$ normális szerint számolva.

3.3 (11) szerint most (mivel a definíciók alapján $\varrho < 0$ esetén $T_\varrho y \in \partial A_\varrho$ pontosan akkor, ha $0 > \varrho \geq h(y)$)

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1} \partial A_\varrho &= \int_{\{y \in \partial A : \varrho \leq -h(y)\}} (\text{card} \{y' : T_\varrho y' = T_\varrho y\})^{-1} \cdot \int_{\partial A} T_\varrho(y) d\text{vol}_{n-1}(y) = \\ &= \int_{\{y \in \partial A : \varrho < -h(y)\}} \dots + \int_{\{y \in \partial A : \varrho = -h(y)\}} \dots = \\ &= \int_{\{y : -h(y) > \varrho\}} (1 + \kappa_1(y)\varrho) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y)\varrho) d\text{vol}_{n-1}(y) + \\ &\quad + \int_{\{y : -h(y) = \varrho\}} (\text{card} \{y' : T_\varrho y' = T_\varrho y\})^{-1} (1 + \kappa_1(y) \cdot \varrho) \dots \\ &\quad \dots (1 + \kappa_{n-1}(y)\varrho) d\text{vol}_{n-1}(y) . \end{aligned}$$

Igy fennáll

$$\begin{aligned} &\int_{h^{-1}((-\varrho, \infty))} (1 + \kappa_1(y)\varrho) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y)\varrho) d\text{vol}_{n-1}(y) \leq \\ (56) \quad &\leq \text{vol}_{n-1} \partial A_\varrho \leq \int_{h^{-1}([-\varrho, \infty))} (1 + \kappa_1(y)\varrho) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y)\varrho) d\text{vol}_{n-1}(y) \\ &\quad (\varrho < 0) . \end{aligned}$$

Mivel a Fő Lemma szerint (vagy hivatkozhatunk 7.2-re is), ha az $y \in \partial A$ pont rögzített, akkor $\varphi \in [-h(y), 0]$ - ra $1 + \kappa_i(y) \cdot \varphi \geq 0$ ($i=1, \dots, n-1$), fennáll az is, hogy a $-h(y) < \varphi < 0$ szakaszon az $(1 + \kappa_1(y) \cdot \varphi) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y) \cdot \varphi)$ polinom pozitív. Ezért a Lemmát alkalmazva az (56)-tal ekvivalens

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} 1_{(-h(y), 0)}(\varphi) (1 + \kappa_1(y) \cdot \varphi) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y) \cdot \varphi) d\text{vol}_{n-1}(y) &\leq \\ (56') &\leq \text{vol}_{n-1} \partial A_\varphi \leq \int_{\partial A} 1_{[-h(y), 0]}(\varphi) (1 + \kappa_1(y) \cdot \varphi) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y) \cdot \varphi) \cdot \\ &\quad \cdot d\text{vol}_{n-1}(y) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségre, rögtön adódik az állításunk. $\square$

A Következménybeli gondolatmenet nehézség nélkül általánosítható a Főtétel (ill. 7.2) alapján:

Tétel. Ha a d^{-A-n} a ν_1 előjelezett mérték negatív^{57.} és $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ mind abszolút folytonosak a ν_0 -ra vonatkozóan, akkor a pereménél rögzített A alakú rezgő test sajátfrekvenciái alatta maradnak az $\ell = \text{vol}_n A / \lim_{\tau \rightarrow 0} \text{vol}_{n-1} A$ hosszúságú, csak egyik végén rögzített húr megfelelő saját-

^{57.} Motiváció: C^{1+} -sima határu A -nál $d\nu_1|_{d^{-A}}$ a be-

felé mutató normálissal vett Minkowski-görbületnek és a

elemi felszindarabja vol_{n-1} -mértékének a szorzata, azaz $d\nu_1|_{d^{-A}}(y, -h(y)) = -(\kappa_1(y) + \dots + \kappa_{n-1}(y)) \cdot$

$\cdot d\text{vol}_{n-1}(y).$

frekvenciáinak, azaz

$$(57) \quad \Lambda_m(A) \leq \frac{(2m-1)\pi}{2} \cdot \frac{\lim_{\tau \rightarrow 0} \text{vol}_{n-1} \partial A_\tau}{\text{vol}_n A} \quad (m=1, 2, \dots).$$

Bizonyítás. Átvéve a 7.2-beli jelöléseket, (43') szerint egy tetszőleges $\varphi \in L^1(A)$ függvényre

$$\int_A \varphi d\text{vol}_n = \int_{d^+A} \int_{-h_-(y,k)}^0 \varphi(y, \zeta k) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \zeta^j d\zeta d\mu(y, k).$$

Speciálisan $\varphi < 0$ mellett a $\varphi = 1_{A_\varphi}$ függvényt véve

$$(58) \quad \begin{aligned} \text{vol}_n A_\varphi &= \int_{d^+A} \int_{-h_-(y,k)}^0 1_{(-\infty, \varphi)}(\zeta) \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \zeta^j d\zeta d\mu(y, k) = \\ &= \int_{-\infty}^0 1_{(-\infty, \varphi)}(\zeta) \cdot \int_{d^+A} 1_{(-\infty, -h_-(y,k))}(\zeta) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \zeta^j d\mu(y, k) d\zeta. \end{aligned}$$

[15] 3.2. 34-ből tudjuk (271. old.), hogy majdnem minden

$\varphi \in \mathbb{R}$ -re $\text{vol}_{n-1} \partial A_\varphi = \frac{d}{d\varphi} \text{vol}_n A_\varphi$, így (58)-ből

$$(59) \quad \text{vol}_{n-1} \partial A_\varphi = \int_{d^+A} 1_{(-\infty, -h_-(y,k))}(\varphi) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y, k) \cdot \varphi^j d\mu(y, k)$$

m. m. $\varphi < 0$.

Mivel feltettük, hogy a $dv_j|_{d^+A} = a_j d\mu$ mértékek abszolút folytonosak a $d\nu_0$ -ra vonatkozóan, bevezetve az

$$\mathcal{U} = \{(y, k) \in d^+A : a_0(y, k) \neq 0\} (= \{(y, k) : a_0(y, k) > 0\} !)$$

segédhalmazt és az

$$\bar{a}_j(y, k) = \begin{cases} a_j(y, k) & \text{ha } (y, k) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{ha } (y, k) \notin \mathcal{U} \end{cases} \quad (j=0, \dots, n-1) \text{ függvényeket, mindig}$$

$$p_{y,k}(\varrho) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot \varrho^j = a_0(y,k) \sum_{j=0}^{n-1} \bar{a}_j(y,k) \cdot \varrho^j.$$

Az $(y,k) \in \mathcal{U}$ helyeken a $d\nu_0|_{d^{-1}A}$ pozitivitása miatt

$$a_0(y,k) > 0, \text{ és ezért } \bar{p}_{y,k}(\varrho) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{a}_j(y,k) \cdot \varrho^j$$

polinom itt $\bar{p}_{y,k}(\varrho) = (1 + \kappa_1(y) \cdot \varrho) \dots (1 + \kappa_{n-1}(y) \cdot \varrho)$

alakban állítható elő valós $\kappa_j(y,k)$ értékekkel ilyenkor. 7.2-ből azt is tudjuk, hogy most (azaz $(y,k) \in \mathcal{U}$ -

$$\text{nál}) \quad \bar{p}_{y,k}(\varrho) = \frac{p_{y,k}(\varrho)}{a_0(y,k)} > 0 \quad \text{minden } -h_-(y,k) < \varrho < 0 -$$

ra. Vagyis a Lemmát figyelembe véve, a $\bar{p}_{y,k}(\varrho)$ poli-

nom monoton növe a $[-h_-(y,k), 0]$ intervallumon, ahon-

nan láthatjuk, hogy minden $(y,k) \in d^{-1}A$ -ra (nyilván

$(y,k) \notin \mathcal{U}$ -ra is, hiszen akkor $p_{y,k} \equiv 0$ az

$$1_{(-\infty, -h_-(y,k))}(\varrho) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j(y,k) \cdot \varrho^j \quad \text{függvény monoton nö-}$$

vő a $(-\infty, 0)$ -n. Ez (59) alapján mutatja, hogy a $\text{vol}_{n-1} \partial A_\varrho$

mennyiség mint a ϱ változó függvénye a $(-\infty, 0)$ -nak egy

0 mértékű halmazán kívül monoton növe. Tehát m.m. $\varrho < 0$ -nál

$\text{vol}_{n-1} \partial A_\varrho \leq \lim \text{vol}_{n-1} \partial A_\tau$, ahonnan a 8.2 Tétel alkalmazásából^{58.} adódik (57). $\square$

58. A 8.2 Tétel bizonyításából világosan látszik, hogy benne

$\text{vol}_{n-1} \partial A$ kifejezés helyettesíthető $\sup_{\varrho < 0} \text{vol}_n \partial A_\varrho$ -val



1. Megjegyzés. Az (57) egyenlőtlenségben a

$\lim_{\tau \searrow 0} \text{vol}_{n-1} \partial A_\tau$ kifejezés nem helyettesíthető $\text{vol}_{n-1} \partial A$ -
val (mint azt esetleg sejteni lehetne). Példa: $n=2$ di-
menzióban legyen $A^a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0, 0 < y < a\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < a\}$.
Mint hogy az A^a alakzat két diszjunkt téglalap egyesítése,
 d^-A teljesíti a Tétel feltételeit. Ugyanakkor $\Lambda_1(A^a) =$
 $= \Lambda_1(\{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < a\}) = \pi \sqrt{1+1/a^2}$, 59.

$$\text{míg } \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\text{vol}_{n-1} \partial A^a}{\text{vol}_n A^a} = \frac{3a+4}{2a} \cdot \frac{\pi}{2} \quad . \quad \text{A } \lim_{a \rightarrow \infty} \pi \cdot \sqrt{1+1/a^2} =$$

$$= \pi > \frac{3}{4} \pi = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3a+4}{2a} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{reláció}$$

azonban kizárja, hogy minden a -ra $\Lambda_1(A^a) \leq$
 $\leq \frac{\pi}{2} \text{vol}_{n-1} \partial A^a / \text{vol}_n A^a$ lehessen.

2. Megjegyzés. Bebizonyítható (az eddigi ötletekből a
bizonyítás könnyű, de nem rövid), hogy a Tétel feltételei
mellett

$$\lim_{\tau \searrow 0} \text{vol}_{n-1} \partial A_\tau = \int_{\partial A} \text{cardinality}\{k : (y,k) \in d^-A\} d\text{vol}_{n-1}(y)$$

áll. Ha az A alakzatról azt is feltesszük, hogy a határán
nincs olyan y pont, amelyből két egymással ellentétes irá-
nyú belső prenormálisa indul ki az A -nak (azaz $\forall y \in \partial A$

$\neg \exists k(y,k), (y,-k) \in d^-A$), akkor még $\lim_{\tau \searrow 0} \text{vol}_{n-1} \partial A_\tau \leq$
 $\leq \text{vol}_{n-1} \partial A$ egyenlőtlenség is teljesül.

8.4 Befejező megjegyzések

Bár a dolgozat főtétele összefoglaló jellegű abban az értelemben, hogy belőle közvetlenül levezethetők az általános $\mathbb{R}^n$ -beli paralleltartományokkal kapcsolatos eddig ismert legfontosabb tételek, nem tekinthetők a téma lezárásának. Sőt, e legutolsó matematikai fizikai alkalmazás kapcsán új kérdések egész sora vetődik fel: Az $A (\subset \mathbb{R}^n)$ határának görbületeire vonatkozó milyen feltételek mellett tudnak jó felső becslést adni az A alakú rezgő lap⁶⁰. ("vibrating plate") sajátfrekvenciáira, a különböző kényszerek-nél, ill. - a 8.2 Tétellel analóg módon - hogyan lehet ezeket a sajátfrekvenciákat egy valamilyen típusú kényszer alatti rezgő rúd megfelelő sajátfrekvenciáival becsülni. Vagy pl. milyen görbületű ∂A ($A \subset \mathbb{R}^n$) esetén adható jó alsó becslés egy A alakú test torziómerevségére⁶¹. a Főtétellel. De felvetődik majd a Főtétel továbbfejlesztésének szükségessége az izometrikus tétel irányába, hogy így lehetőséget kapjunk a Payne-Weinberger féle [10]-beli eredmények n dimenziós analogonjainak megtalálására. Ugy tűnik, az eddig ismertetett problémák közül ez az utóbbi a legszebb és a legérdekesebb, azonban messze a legnehezebb is. Valószínű, ahhoz, hogy itt tovább tudjunk lépni, eddig még nem

⁶⁰. A problémához tartozó differenciálegyenletet és variációs formulát ld. [23] V. 4.§ (93. old.)

⁶¹. A torziómerevség ("torsional rigidity") ld. pl. [5]

ismert új globális differenciálgeometriai tételek felfedezése szükséges. Az eddigieken kívül figyelmet érdemelhet a 8.3-ban központi szerepet kapott nem-negatív Minkowski-görbülettel rendelkező határu testek osztályának a vizsgálata - esetleg sikerülhet találni szoros kapcsolatot köztük és a minimálfelületek közt (amelyeket tudvalevőleg az eltűnő Minkowski-görbület jellemez). Végül pedig érdekes lehet a lokális Steiner tétel (4.4) kiterjesztése véges dimenziós Banach térre. (Sejtésem szerint ez utóbbi a dolgozatbeli módszerekkel megtehető, sőt a Banach tér normáját pótolni lehet pozitív értékű szublineáris funkcionállal is a nyerhető tételekben.)

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] G. Cantor: Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, Math. Ann (Berlin) 23 (1884) 453-488.
- [2] G. Bouligand: Dimension, étendue, densité, C. R. Acad. Sci Paris (2) 180 (1925) 245-248.
- [3] H. Minkowski: Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volume, Jahresbes. Deutsch. Math. Verein. 9 (1901) Ges. Abhandlungen (1911) 122-127.
- [4] H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie Springer, Berlin 1957.
- [5] G. Pólya - G. Szegő: Isoperimetric Inequalities in Math. Physics, Princeton University Press, Princeton 1951 (Annals of Mathematics Studies N°27).
- [6] R. Courant: Beweis des Satzes dass von allen homogenen Membranen gegebenes Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, Math. Zeitsch. vol 1. (1918) 321-328.
- [7] E. Makai: On the principal frequency of a convex membrane and related problems, Czechslov. Math.J. 9 (1959) 66-67.
- [8] G. Pólya: Two more inequalities between physical and geometrical quantities, J. Indian Math. Soc. vol XXIV. part II. (1960) 413-419.
- [9] B. Sz.-Nagy: Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche, Acta Sci. Math. Szeged 20 (1959) 36-47.
- [10] L. E. Payne - H. F. Weinberger: Some Isoperimetric inequalities for Membrane Frequencies and Torsional Rigidity, J. Math. Analysis and Appl 20 (1961) 210-216.

- [11] E. Makai: On the fundamental frequencies of two and there dimensional membranes,
MTA Mat.Kut.Közl. VIII.évf. A/1-2 (1963) 109-123.
- [12] W. Blaschke - K. Leichtweiss: Elementare Differential-
geometrie, Springer Berlin 1973.
- [13] M. Kneser: Über den Rand von Parallelkörpern,
Math. Nachr. S. (1951) 251-258.
- [14] L. L. Stachó: On the volume function of parallel sets,
Acta Sci. Math. Szeged 38 (1976) 365-374.
- [15] M. Federer: Geometric Measure Theory,
Springer, New York 1969.
- [16] L. Fejes-Tóth: Lagerungen in der Ebene auf der Kugel
und im Raum, Springer, New York 1972 (II. Aufl.)
- [17] R. Holmes: Geometric Functional Analysis,
Springer, New York 1975.
- [18] G. Bouligand: Introduction a la géometrie infinitesimale
directe, Librairie Vuibert, Paris 1932, XII 88-107,
XVII 196-207.
- [19] Benkő J.: A topológia elemei,
Dacia, Kolozsvár-Napoca 1975.
- [20] L. Danzer - B. Grünbaum - V. Klee: Helly's theorem and
relatives (a Proc. of synp. in pure math. VII.kö-
tetben), Amer. Math. Soc., Providence 1963.
- [21] H. Hadwiger: Die erweiterten Steinerschen Formeln für
ebene und sphärische Bereiche,
Comm. Math. Helvetici 18 (1945/46) 59-75.
- [22] C. A. Rogers: Hausdorff Measures,
Cambridge University Press, Cambridge 1970.
- [23] S. H. Gould: Variational methods for eigenvalue problems,
University of Toronto Press, Toronto Press,
Toronto 1957.

- [24] R. Courant - D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics,
Interscience, New York 1953.
- [25] M. Kneser: Einige Bemerkungen über das Minkowskische
Flächenmass, Archiv der Math. 6 (1955) 382-390.
- [26] Nagy P. T.: A Minkowski-féle dimenzió és mértékforga-
lomról, MTA III. Oszt. Közl. 20 (1971) 379-393.
- [27] P. R. Halmos: Measure Theory,
Van Nostrand, New York 1966.
- [28] K. Yosida: Functional Analysis,
Springer, New York 1965.

Definíciók és jelölések jegyzéke

$\bar{A}$ az A halmaz lezártja

$\mathring{A}$ az A belseje

area = vol₂ (ld. vol_n)

A_ρ = az A ρ sugarú π paralleltartománya 1

$B(S, \rho)$ 68

$B^*(S, \rho)$ 68

befelé mutató } normális
belső } (metrikus értelemben) 23

befelé mutató } prenormális
belső } 23

Bouligand féle félérintő ld. félérintő

C^k -sima függvény (leképezés) = olyan $X(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ typ.

függvény, amely összes komponensfüggvényeinek az
összes k -adik parciális deriváltjai léteznek és
folytonosak

C^{1+} -sima függvény (leképezés) 43

C^∞ -sima = minden k -ra C^k -sima

$C_0^k(A)$ 119

card = halmaz számossága

d = irányított határ operátor 58

∂ = határ operátor $\mathbb{R}^n$ -ben

$\partial_0 A$ 58

∂A_ρ = $\partial(A_\rho)$ -nak értendő (Pl. $\partial(A_\rho)_{-\tau} = \partial[(A_\rho)_{-\tau}]$; A_ρ
ld. ott)

$\left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_{x_0} f$ 92

$D(A)$	122	
d^-A	63	
d^+A	63	
distance	= a távolság (értelemszerűen a szóbanforgó térben)	
l_B	= a B halmaz karakterisztikus függvénye	39
egyszerű irányított felület	63	
entier x	= az x szám egész része	
erős extrémális (félegyenes)	96-97	
erős extrémális pont	96	
$f : G \twoheadrightarrow S$	olyan leképezés, amely a G halmazt az S -re képezi rá	
$F(S, \rho)$	68	
F_m		
félérintő	92	
grad	= gradients	
$h_-^A(y, k)$	58	
$h_+^A(y, k)$	58	
$H(p, q)$	94	
Hausdorff távolság	$A, B \subset \mathbb{R}^n$ -re $\inf \{ \delta > 0 : A \subset B_\delta \text{ és } B \subset A_\delta \}$	
irányított felület	62	
Jac	= Jacobi determináns	13
$JacT_p(.)$	36	
kifelé mutató külső	} normális (metrikus értelemben)	22
kifelé mutató külső	} prenormális	22
Kneser-egyenlőtlenség	8, 10	

konkáv függvény adott halmaz felett 89

$L^A(y, k)$ 58

$\Lambda_m(A)$ 119

$\text{length} = \text{vol}_1$ (ld. vol_n)

Lipschitz függvény (leképezés) = metrikus terek közti f le-
képezés, amelyre $\exists M \forall x, y \in \text{dom } f \quad \text{distance}(f(x), f(y)) \leq$
 $M \cdot \text{distance}(x, y)$

Lipschitz konstans = egy f Lipschitz függvény $\sim$ -a

$$\sup_{x, y \in \text{dom } f} \frac{\text{distance}(f(x), f(y))}{\text{distance}(x, y)}$$

$L^P(A)$ $A \subset \mathbb{R}^n$ -re $L^P(A) = \{ f(\text{vol}_n\text{-mérhető } A \rightarrow \mathbb{R}) : \int_A |f|^P d \text{vol}_n < \infty \}$

$M_m(A)$ 119

$\tilde{M}_m(A)$ 122

majdnem-diszjunktság 20

$\perp$ = merőleges

metrikus kapcsolódás 5

mult == leképezés multiplicitása 36

$\longrightarrow$ ld. $f : G \longrightarrow S$

$n - 1$ rektifikálható 86

$\nu_0(\cdot), \dots, \nu_{n-1}(\cdot)$ 67

$\hat{\nu}_0(\cdot), \dots, \hat{\nu}_n(\cdot)$ 64

ν -mérhetőség 65-66

ν -szummálhatóság 66

nem-irányítható része egy halmaz határának (ld. $\partial_0 A$) 58

$\| \cdot \|$ = egy vektor normája

ω_β 1

paralleltartomány (-halmaz) 1

pereménél rögzített test m-edik sajátfrekvenciája

ld. sajátfrekvencia

$pr_{\bar{A}}$ = projekció (az $\bar{A}$ halmazra) 17

prenormális 23-24

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza

$\mathbb{R}^n$ az n dim. tér

$R_A(.)$ 119

$\rho_0(S)$ 63-64

range = egy leképezés értékkészlete

Rayleigh-koefficiens ld. $R_A(.)$

sajátfrekvencia 119

sgn dist = előjelezett távolság 23

sima = C^1 -sima (ld. ott)

skaláris szorzat jelölése: $t, u \in \mathbb{R}^n$ -re

$\langle t, u \rangle$ vagy tu

(a $\langle, \rangle$ változat általában hosszabb kifejezések között)

suppS 63

$\angle$ = különböző alakzatok ill. vektorok között bezárt szög
szublineáris függvény [funkcionál] = pozitív-homogén konvex
függvény

superlineáris függvény [funkcionál] = pozitív-homogén konkáv
függvény

$V_S(.)$ 63-64

vetítés (merőleges) ld. $pr_{\bar{A}}$

vetület ld. $\text{pr}_{\overline{A}}$

$\text{vol} = \text{térfogat}$

$\text{vol}_n = n$ dimenziós Hausdorff mérték (ez utóbbi definíciója
ld. [15])

$\overline{\text{vol}}_n = a \text{ vol}_n$ mérték által generált külső mérték

