

Egyetemi doktori disszertáció

AUTOMATÁK KATEGÓRIÁKBAN

Horváth Gyula

József Attila Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Szeged, 1978



## BEVEZETÉS

A számítástudományban nagy jelentőségük van azoknak a vizsgálatoknak, amelyek összetett adatoknak automatikus, azaz felépítésük szerint rekurzióval való feldolgozására irányulnak. Ezek a kutatások számos gyakorlati problémával kapcsolatosak. Ezek közül mindenek előtt a programozási nyelvek szintaxis vezérelt fordítását említhetjük. A rekurzióval definiálható összetett adatok feldolgozásának, transzformálásának matematikai modellje valamilyen automata fogalomra építhető. A dolgozatban egy ilyen automata-fogalmat vezetünk be, amely a szekvenciális gépek kategória elméleti általánosítása. Ez az automata-fogalom Arbib és Manes [2] automata-fogalmán alapszik, annak egy módosított változata, amely módosítás során felhasználtuk Alagić [1] által bevezetett természetes állapot-transzformáció fogalmát.

Míg a szekvenciális gépek adatok feldolgozásának olyan modelljét adják, ahol a feldolgozandó adatok szerkezetét egy monoid, pontosabban szabad monoid adja meg, esetünkben a jóval általánosabb monad, illetve szabad monad játssza ezt a szerepet. Ilyen modellel már megadható az utóbbi időben intenzíven tanulmányozott fa-transzformációk is. Ebben az esetben a szerkezetet meghatározó monadot szabad algebra szolgáltatja.

A dolgozatban vizsgált automata-fogalom egy másik tekintetben is általánosítása a szekvenciális gépekének. Nevezetesen, az automata állapot-funktora tetszőleges funktor lehet, míg a klasszikus esetben ez szorzat-funktor. Ez többek között azt eredményezi, hogy a fa-transzformációknál bevezetett két-féle feldolgozás egységesen kezelhető. Dolgozatunkban ennek a





kétféle feldolgozásnak a direkt illetve inverz állapotú automata felel meg, amelyekről bebizonyítjuk, hogy az inverz állapotú automatával megvalósítható transzformációk mindig megvalósíthatók direkt állapotú automatával is.

A két automata osztály alapvető tulajdonságait vizsgálva bebizonyítjuk, hogy mind a direkt, mind az inverz állapotú transzformációk osztálya zárt a kompozíció művelésére nézve, továbbá, hogy egy automatából szimulációval nyert automata ugyanazt a transzformációt létesíti.

Külön fejezetben foglalkozunk a szekvenciális transzformációkkal, és ezeknek egy automatáktól független jellemzését adjuk. Szekvenciális automatán itt olyan direkt állapotú automata-t értünk, amelynek állapot-funktora szorzat-funktor. Ez az osztály azért is fontos, mert az eddig vizsgált automaták mind ilyen állapot-funktorral rendelkeznek.

## 1. Alapvető fogalmak és eredmények

Ebben a fejezetben ismertetjük azokat a kategória elméleti fogalmakat, amelyeket a dolgozat során használunk. Ezek megtalálhatók Mac Lane [5] és Manes [6] könyvében. Ismertetjük továbbá az univerzális algebrák Arbib-Manes [2]-től származó általánosítását, és bebizonyítunk néhány alapvető eredményt. Ezeknek az eredményeknek egy része megtalálható Alagić [1] munkájában.

### 1.1. Definíció

Egy  $\mathcal{K}$  kategórián a következő adatokkal és axiómákkal meghatározott rendszert értünk.

/i/ Adott az  $\text{Obj}(\mathcal{K})$ -val jelölt osztály, a  $\mathcal{K}$ -objektumok osztálya.

/ii/  $\mathcal{K}$ -objektumok minden rendezett  $(A, B)$  párjához adott a  $\mathcal{K}(A, B)$  osztály az  $A$  objektumból a  $B$  objektumba való  $\mathcal{K}$ -morfizmusok osztálya.

Az  $f \in \mathcal{K}(A, B)$  morfizmusra az  $f: A \longrightarrow B$  jelölést is használjuk.

/iii/ Minden  $A$   $\mathcal{K}$ -objektumhoz adott egy megkülönböztetett  $\text{id}_A \in \mathcal{K}(A, A)$   $\mathcal{K}$ -morfizmus, amelyet  $A$ -egységnek /identitásnak/ nevezünk.

/iv/  $\mathcal{K}$ -objektumok minden rendezett  $(A, B, C)$  hármashoz adott a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, C) &\longrightarrow \mathcal{K}(A, C); \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

függvény, amelyet kompozíciónak nevezünk.

Axiómák:

A1. A kompozíció asszociatív, azaz bármely  $f \in \mathcal{K}(A, B)$ ,

$g \in \mathcal{K}(B, C)$  és  $h \in \mathcal{K}(C, D)$  esetén

$$h.(g.f) = (h.g).f$$

A2. Bármely  $f \in \mathcal{K}(A, B)$  esetén

$$f.id_A = id_B.f = f.$$

A3. Ha  $(A, B) \neq (A', B')$  akkor  $\mathcal{K}(A, B) \cap \mathcal{K}(A', B') = \emptyset$ .

### 1.2. Definíció

Legyen  $\mathcal{K}$  és  $\mathcal{L}$  tetszőleges kategória. A  $\mathcal{K}$  kategóriából az  $\mathcal{L}$  kategóriába való  $F$  funktoron a következőt értjük. Adott az

$$F_{\sigma}: \text{Obj}(\mathcal{K}) \longrightarrow \text{Obj}(\mathcal{L});$$

$$A \longmapsto FA$$

objektum függvény, valamint minden rendezett  $(A, B)$  párhoz az

$$F_m: \mathcal{K}(A, B) \longrightarrow \mathcal{K}(FA, FB);$$

$$f \longmapsto Ff$$

morfizmus függvény, amelyek teljesítik az AA1. és AA2. axiómákat.

AA1.  $F_m$  megőrzi az identitást, tehát bármely  $A$   $\mathcal{K}$ -objektum esetén

$$F id_A = id_{FA}.$$

AA2.  $F_m$  felcserélhető a kompozícióval, azaz bármely  $f: A \longrightarrow B$  és  $g: B \longrightarrow C$  morfizmusok esetén

$$F(g.f) = Fg.Ff.$$

Az  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  jelölést használjuk a  $\mathcal{K}$  kategóriából az  $\mathcal{L}$  kategóriába való  $F$  funktor esetén.

### 1.3. Definíció

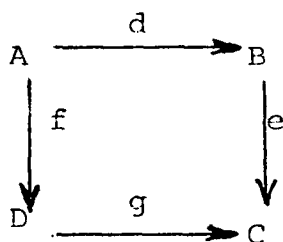
Legyen  $F, G: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  két tetszőleges funktor. Az  $F$  funktorból a  $G$  funktorba való  $\alpha$  természetes transzformáción olyan függvényt értünk, amely minden  $A \in \mathcal{K}$ -objektumhoz hozzárendeli az  $\alpha_A: FA \rightarrow GA$   $\mathcal{L}$ -morfizmust, és ez a hozzárendelés kielégíti a következő feltételt. Bármely  $f: A \rightarrow B$   $\mathcal{K}$ -morfizmus esetén

$$\alpha_B \cdot Ff = Gf \cdot \alpha_A$$

Az  $F$  funktorból a  $G$  funktorba való  $\alpha$  természetes transzformáció jelölésére használjuk az  $\alpha: F \rightarrow G$  vagy  $F \xrightarrow{\alpha} G$  jelölést.

Konvenció. A továbbiakban kategóriák jelölésére általában a latin ábécé írott nagybetűit, funktorok számára a nagybetűket az  $F$ -től kezdve, objektumokra pedig a nagybetűket  $F$ -ig bezárólag. Természetes transzformációk jelölésére a görög ábécé kisbetűit használjuk.

A  $d: A \rightarrow B$ ,  $e: B \rightarrow C$ ,  $f: A \rightarrow D$  és  $g: D \rightarrow C$  morfizmusok esetén az  $e \cdot d = g \cdot f$  egyenlőség kifejezésére használjuk a "kommutatív az



diagram" kifejezést.

### 1.4. Definíció

Legyen  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  és  $G: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  tetszőleges funktor.  $F$  és  $G$  kompozícióján azt az  $FG: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$  funktort értjük, amelyre  $(GF)A = G(FA)$  minden  $A \in \mathcal{K}$ -objektum és  $(GF)f = G(Ff)$  minden

A  $\mathcal{K}$ -objektum, és  $(GF)f = G(Ff)$  minden  $f:A \longrightarrow B$   $\mathcal{K}$ -morfizmus esetén. Könnyen belátható, hogy az így definiált függvények kielégítik a funktorokra vonatkozó axiómákat. Hasonló módon definiálhatók természetes transzformációk kompozíciói.

### 1.5. Definíció

Az  $\alpha:F \xrightarrow{\cdot} G$  és  $\beta:G \xrightarrow{\cdot} H$  természetes transzformációk kompozícióján azt a  $\beta \cdot \alpha:F \xrightarrow{\cdot} H$  természetes transzformációt értjük, amelyre

$(\beta \cdot \alpha)A = (\beta A)(\alpha A)$  minden  $A$   $\mathcal{K}$ -objektum esetén, ha  $F, G, H:\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  funktorok.

Nyilvánvaló, hogy a  $\beta \cdot \alpha$  kompozíció kielégíti a természetes transzformációkra megkövetelt feltételeket.

### 1.6. Definíció

Tekintsük a  $G, H:\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  és  $F:\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$  funktorokat, és az  $\alpha:G \xrightarrow{\cdot} H$  természetes transzformációt. Ekkor  $F\alpha$  azt az  $FG \xrightarrow{\cdot} FH$  természetes transzformációt jelöli, amelyre

$(F\alpha)A = F(\alpha A):FGA \longrightarrow FHA$  minden  $A$   $\mathcal{K}$ -objektum esetén. Hasonlóképpen, ha  $F:\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{K}$  funktor, akkor  $\alpha F:GF \xrightarrow{\cdot} HF$  az a természetes transzformáció, amelyre definíció szerint

$(\alpha F)A = \alpha(FA)$  minden  $A$   $\mathcal{M}$ -objektum esetén. Látható, hogy mind  $F\alpha$  mind  $\alpha F$  valóban természetes transzformáció lesz. Jelöljük  $I_{\mathcal{K}}$ -val a  $\mathcal{K}$  kategóriához tartozó identitás funktort, tehát amelyre  $I_{\mathcal{K}}A = A$  és  $I_{\mathcal{K}}f = f$  minden  $A$   $\mathcal{K}$ -objektura és  $f:A \longrightarrow B$   $\mathcal{K}$ -morfizmusra. Ha nem okoz félreértést, akkor az  $I$  jelölést használjuk.

Nyilvánvaló, hogy minden  $F:\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  funktor esetén az  $\text{id}_F: A \longmapsto \text{id}_{FA}$  hozzárendelés  $\text{id}_F:F \xrightarrow{\cdot} F$  természetes transzformáció lesz.

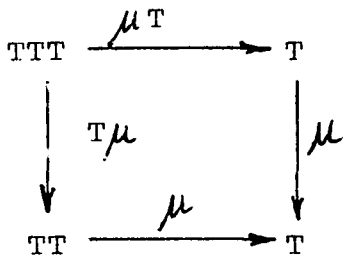


### 1.7. Definíció

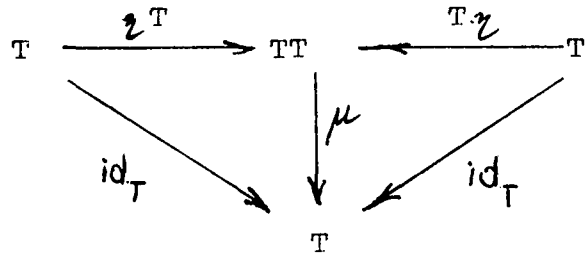
A  $\mathcal{K}$  kategóriában a  $\mathbb{T} = (T, \mu, \eta)$  hármast monadnak nevezzük, ahol

$$\begin{aligned} T: \mathcal{K} &\longrightarrow \mathcal{K} && \text{funktor,} \\ \mu: TT &\xrightarrow{\cdot} T && , \\ \eta: I &\xrightarrow{\cdot} T && \text{természetes transzformációk,} \end{aligned}$$

ha kielégítik az (1.7.1) és (1.7.2) diagramok kommutativitását.



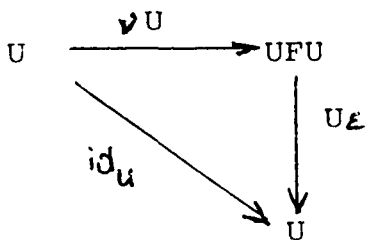
1.7.1



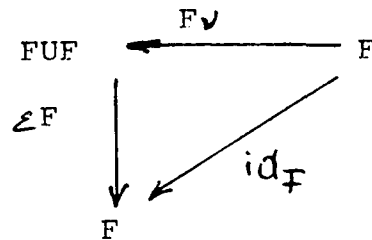
1.7.2

### 1.8. Definíció

Az  $(F, U, \nu, \varepsilon): \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  adjunkción az  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ,  $U: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$  funktorok és a  $\nu: I \xrightarrow{\cdot} UF$ ,  $\varepsilon: FU \xrightarrow{\cdot} I$  természetes transzformáció által meghatározott rendezett négyest értjük, amelyek teljesítik az (1.8.1) és (1.8.2) diagramok kommutativitását.



1.8.1



1.8.2

Az  $F$  funktort  $U$  bal adjungáltjának, az  $U$  funktort pedig  $F$  jobb adjungáltjának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy  $F / U /$  funktornak létezik jobb /bal/ adjungáltja, ha létezik az  $(F, U, \eta, \epsilon)$  adjunkció.

A továbbiakban definiáljuk az univerzális algebrák Arbib és Manestől származó általánosítását, amely alapvető szerepet játszik vizsgálatainkban.

### 1.9. Definíció /Arbib-Manes [2]/

Legyen  $X: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$  funktor. Ekkor a  $\text{Din}(X)$  kategórián azt a kategóriát értjük, amelynek objektumai  $(A, f)$  rendezett párok, ahol  $f: XA \longrightarrow A$   $\mathcal{K}$ -morfizmus. Az  $(A, f)$  párt  $X$ -dinamikának /röviden dinamikának/ nevezzük. Morfizmuson a  $\text{Din}(X)$  kategóriában, pontosabban az  $(A, f)$  dinamikából a  $(B, g)$  dinamikába való morfizmuson olyan  $h: A \longrightarrow B$   $\mathcal{K}$ -morfizmust értünk, amelyre kommutativ az (1.9.1) diagram.

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xleftarrow{g} & XB \\
 \uparrow h & & \uparrow Xh \\
 A & \xleftarrow{f} & XA
 \end{array}$$

1.9.1

Ekkor  $h$ -t  $X$ -dinamorfizmusnak, vagy dinamorfizmusnak nevezzük.

Jelöljük Set-el a halmazok és függvények alkotta kategóriát. Tehát Set olyan kategória, amelynek objektumai a halmazok, morfizmusai a függvények a függvények szokásos kompozíciójával.

Legyen  $F$  az univerzális algebrában szokásos módon definiált műveleti jelek halmaza, azaz  $F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_n$ , ahol

$F_i \cap F_j = \emptyset$  ha  $i \neq j$ , ahol  $F_n$  az  $n$ -változós műveleti jelek halmaza. Ekkor  $F$  egy funktort indukál a Set kategóriában a következő módon;

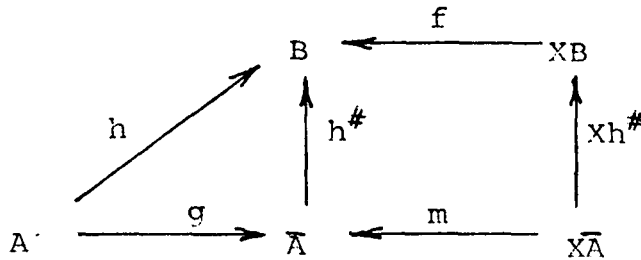
$$FA = \{f(\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle) \mid f \in F_n, a_i \in A \ (i = 1, \dots, n)\}$$

minden  $A$  halmaz esetén, továbbá bármely  $h:A \rightarrow B$  függvényre  $Fh:FA \rightarrow FB$ ;  $Fh(f(\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle)) = f(\langle h(a_1) \rangle, \dots, \langle h(a_n) \rangle)$ . Azonnal látható, hogy  $F$  valóban funktor lesz. Az ilyen funktort műveleti funktornak nevezzük. Az (1.9) definícióból következik, hogy az  $F$  dinamika fogalma egybeesik az  $F$  típusu univerzális algebra, a  $F$ -dinamikák közötti morfizmus fogalma pedig az algebrai homomorfizmus fogalmával.

Az Arbib-Manes megközelítéstől egy kissé eltérő, de vele ekvivalens módon definiáljuk most a szabad  $X$ -dinamika fogalmát.

#### 1.10. Definíció

Legyen  $X:\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{U}$  tetszőleges funktor,  $A$  pedig  $\mathcal{U}$ -objektum. Az  $(\bar{A}, m, g)$  hármast  $A$  feletti szabad  $X$ -dinamikának nevezzük, ahol  $(\bar{A}, m)$   $X$ -dinamika,  $g:A \rightarrow \bar{A}$   $\mathcal{U}$ -morfizmus, ha bármely  $(B, f)$   $X$ -dinamika és  $h:A \rightarrow B$   $\mathcal{U}$ -morfizmus esetén létezik egy egyértelműen meghatározott  $h^\#:(\bar{A}, m) \rightarrow (B, f)$  dinamorfizmus, amelyre  $h = h^\# \cdot g$ , tehát amelyre kommutatív az (1.10.1) diagram.



1.10.1

### 1.11. Definíció

Az  $X: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  funktort input funktornak nevezzük a  $\mathcal{L}$  kategóriában, ha van olyan  $X^\#: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$  funktor és  $\mu_0: XX^\# \longrightarrow X^\#$  valamint  $\gamma: I \longrightarrow X^\#$  természetes transzformáció, hogy bármely  $A$  objektum esetén az  $(X^\#A, \mu_0A; \gamma A)$  hármas  $A$  feletti szabad  $X$ -dinamika lesz.

Ekkor a  $\mu_0$  természetes transzformációt szabad műveletnek,  $\gamma$ -t pedig a generátorok beágyazásának nevezzük.

Az  $(X^\#, \mu_0; \gamma)$  hármaszt az  $X$  input funktorhoz tartozó input-strukturának nevezzük.

### 1.12. Megjegyzés

Az input funktor eredeti definíciója, amelynek ekvivalenciája könnyen belátható, például Manes [6] 122 o. (2.18) Tétel alapján, a következő.

Az  $X: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  funktor input funktor /input process/ az  $U: \text{Din}(X) \longrightarrow \mathcal{L}$  felejtő funktornak, amely minden  $(A, f)$   $X$ -dinamikához hozzárendeli az  $A$  objektumot, létezik bal adjungáltja. Tehát ha létezik az  $(F, U, \eta, \varepsilon): \text{Din}(X) \longrightarrow \mathcal{L}$  adjunkció.

### 1.13. Megjegyzés

A Set kategóriában az  $F$  műveleti funktor esetében a szabad  $F$ -dinamika fogalma megegyezik az  $F$  típusu szabad algebra fogalmával. Tehát  $F$  input funktor lesz, mivel a szabad algebra mindig létezik. Jelöljük  $T_F A$ -val az  $A$  halmaz feletti  $F$  típusu szabad algebra tartóhalmazát. Tehát  $T_F A$  azokat és csak azokat az elemeket tartalmazó halmaz, amelyek az  $/i/$  és  $/ii/$  szabályok véges sokszori alkalmazásával kaphatók.

$/i/$  ha  $a \in A$  akkor  $\langle a \rangle \in T_F A$

$/ii/$  ha  $p_1, \dots, p_n \in T_F A$  és  $f \in F_n$ , akkor

$$f(p_1, \dots, p_n) \in T_F A.$$

Látható, hogy az  $A \mapsto T_F A$  hozzárendelés funktor lesz, ha a függvényeken a következőképpen definiáljuk. Bármely

$h: A \rightarrow B$  függvény és  $p \in T_F A$  esetén

$$T_F h(p) = \langle h(a) \rangle \quad \text{ha } p = \langle a \rangle, a \in A;$$

$$f(h(p_1), \dots, h(p_n)) \quad \text{ha } p = f(p_1, \dots, p_n).$$

A  $\mu_0 A: F T_F A \rightarrow T_F A$  szabad művelet definíciója akkor így adható meg;

$$\mu_0 A(f(\langle p_1 \rangle, \dots, \langle p_n \rangle)) = f(p_1, \dots, p_n)$$

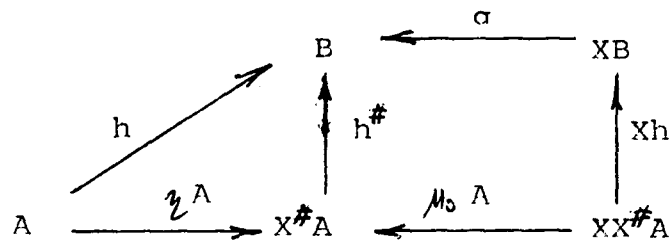
minden  $p = f(\langle p_1 \rangle, \dots, \langle p_n \rangle) \in F T_F A$  esetén. Az  $\eta_A: A \mapsto T_F A$  generátorok beágyazása pedig  $\eta_A(a) = \langle a \rangle$  függvénnyel definiált. Tehát az  $F$  műveleti funktor esetében  $F^* = T_F$ . A  $T_F A$  halmaz elemeit, mivel fákkal illusztrálhatók,  $A$ -feletti  $F$  típusu fáknak /polinomoknak/ nevezzük.

### 1.14. Definíció

Legyen  $X$  input funktor a  $\mathcal{U}$  kategóriában, és jelöljük az  $A$  feletti szabad  $X$ -dinamikát az  $(X^* A, \mu_0 A; \eta_A)$  hármassal. Le-

gyen továbbá  $(B, g)$  tetszőleges  $X$ -dinamika, és  $h: A \rightarrow B$   $\mathcal{K}$ -morfizmus.

Ekkor azt az egyértelműen meghatározott  $h^\#: X^\# A \rightarrow B$   $X$ -dinamomorfizmust, amelyre az (1.14.1) diagram kommutatív,  $h$ -nak a  $(B, g)$   $X$ -dinamikára vonatkozó szabad kiterjesztésének nevezzük.

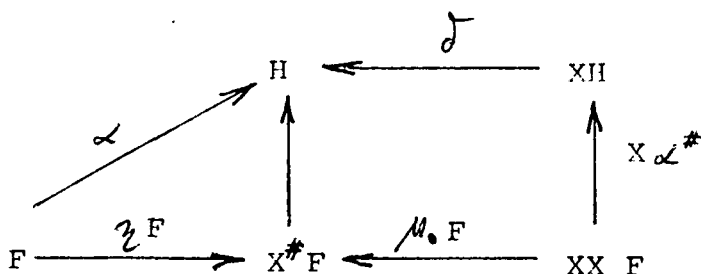


1.14.1

A következő tétel azt mondja ki, hogy az (1.14.1) diagramban az  $A$  és  $B$  objektumok helyett funktorokat, a  $g$  és  $h$  morfizmusok helyett pedig megfelelő természetes transzformációkat véve hasonló kiterjesztés létezik.

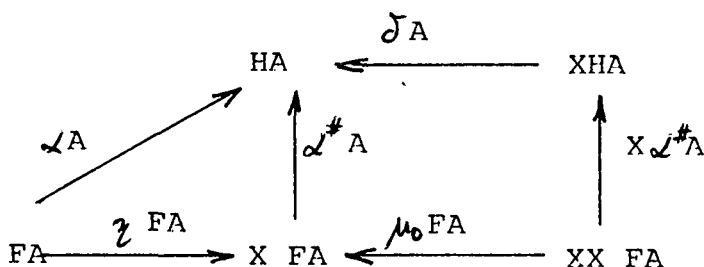
1.15. Tétel Legyen  $X$  input funktor a  $\mathcal{K}$  kategóriában, és jelölje  $(X^\# A, \mu_0^A; \eta^A)$  az  $A$  objektum feletti szabad  $X$ -dinamikát. Legyenek továbbá  $F$  és  $H$  tetszőleges endofunktorok  $\mathcal{K}$ -ban, valamint  $\alpha: F \rightarrow H$  és  $\beta: XH \rightarrow H$  tetszőleges természetes transzformációk. Ekkor létezik egyetlen olyan  $\alpha^\#: X^\# F \rightarrow H$ , amelyre az (1.15.1) diagram kommutatív





1.15.1

Bizonyítás. Jelöljük  $\eta^{\#}A$ -val azt az egyértelműen meghatározott  $\eta^{\#}A: X^{\#}FA \rightarrow HA$  morfizmust, amelyet az (1.15.2) diagram definiál. Tehát  $\eta^{\#}A$  szabad kiterjesztése  $\eta A$ -nak a  $(HA, \eta A)$  dinamikára vonatkozóan, amely minden  $A$ -ra létezik.



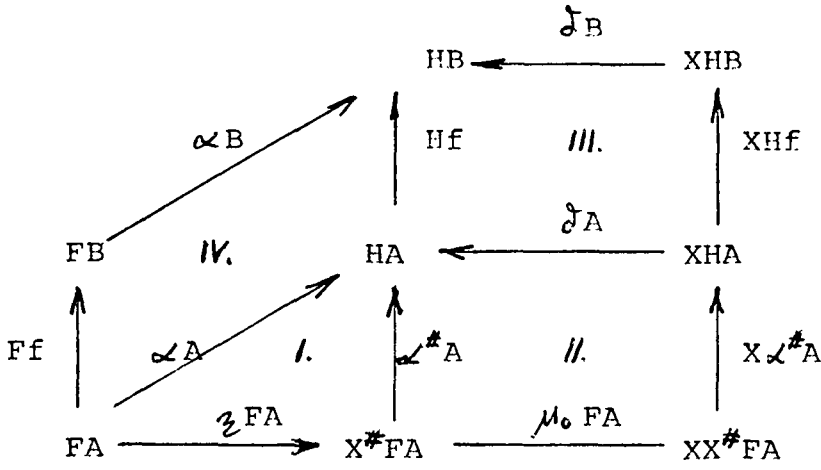
1.15.2

Elegendő tehát megmutatni, hogy  $\eta^{\#}A$  természetes  $A$ -ban, azaz bármely  $f: A \rightarrow B$  morfizmus esetén teljesül az (1.15.3) egyenlőség

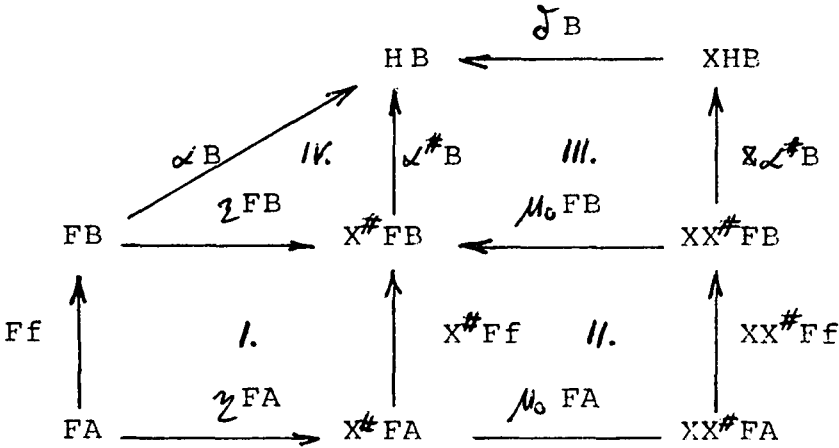
$$Hf \cdot \eta^{\#}A = \eta^{\#}B \cdot X^{\#}Ff$$

1.15.3

Az (1.15.3) egyenlőség igazolása végett tekintsük az (1.15.4) és (1.15.5) diagramokat.



1.15.4



1.15.5

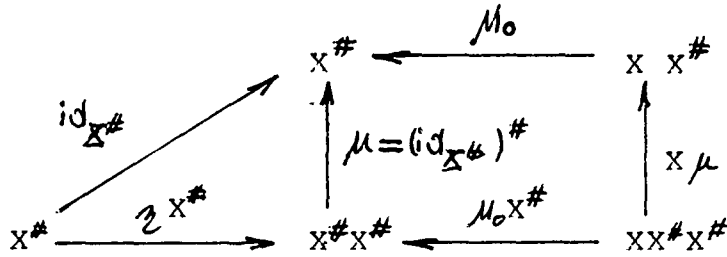
Az (1.15.4) diagramban a I. és II. részdiagramok  $\alpha^{\#}A$  definíciója szerint, a III. és IV. pedig  $\alpha$  illetve  $\mathcal{J}$  természetes volta miatt kommutativok, tehát (1.15.4) teljesen kommutativ.

Az (1.15.5) diagramban III. és IV. részdiagram  $\alpha^{\#}B$  definíciója folytán, I. és II. pedig  $\eta$  és  $\mu_0$  természetes volta miatt kommutativok, tehát (1.15.5) is teljesen kommutativ.

E szerint a  $Hf.\alpha^{\#}A$  és  $\alpha^{\#}B.X^{\#}Ff$  morfizmusok egyaránt szabad kiterjesztései az  $\alpha B.Ff$  morfizmusnak az  $XHB \xrightarrow{\mathcal{J}B} HB$  X-dinamikára vonatkozóan. De a kiterjesztés egyértelmű, tehát

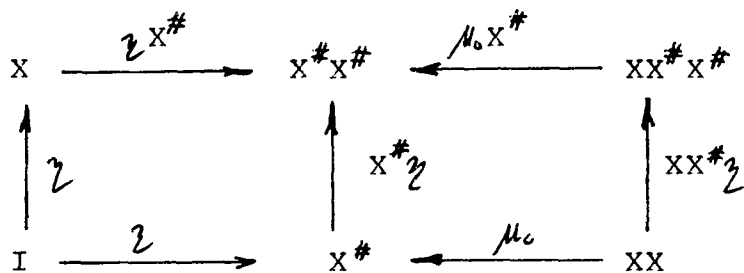
$$\text{Hf. } \mathcal{L}^{\#} A = \mathcal{L}^{\#} B \cdot X^{\#} Ff.$$

1.16. Tétel. Az  $(X^{\#}, \mu, \gamma)$  hármas monád lesz a  $\mathcal{L}$  kategóriában, ha a  $\mu : X^{\#} X^{\#} \rightarrow X^{\#}$  természetes transzformációt az (1.16.1) diagramnak megfelelően az  $\text{id}_{X^{\#}}$  szabad kiterjesztéseként definiáljuk a  $\mu_0 : XX^{\#} \rightarrow X^{\#}$  természetes transzformációra vonatkozóan.



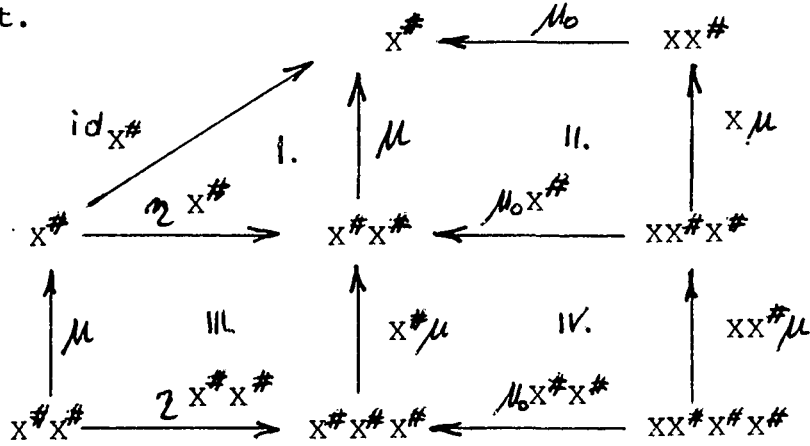
1.16.1

Bizonyítás. Bizonyítsuk be először az (1.7.2) diagramnak megfelelő azonosságokat. Az (1.7.2) baloldali részdiagramjának éppen az (1.16.1) háromszög részdiagramja felel meg, így ennek kommutativitása  $\mu$  definíciója szerint teljesül. Nevezzük az  $\text{id}_{X^{\#}} = \mu \cdot X^{\#} \gamma$  egyenlőség teljesülését. Az  $X^{\#} \gamma$  definíciója szerint kommutativ az (1.16.2) diagram. Ezt az (1.16.1)-el összevetve kapjuk az (1.16.3) diagram kommutativitását. Azaz  $\mu \cdot X^{\#} \gamma$  az (1.15) tétel alapján szabad kiterjesztése  $\gamma$ -nek a  $\mu_0 : XX^{\#} \rightarrow X^{\#}$  természetes transzformációra vonatkozóan. Az nyilvánvaló, hogy  $\text{id}_{X^{\#}}$  és szabad kiterjesztése  $\gamma$ -nak ugyanerre az  $X$ -dinamikára vonatkozóan, tehát  $\mu \cdot X^{\#} \gamma = \text{id}_{X^{\#}}$ .

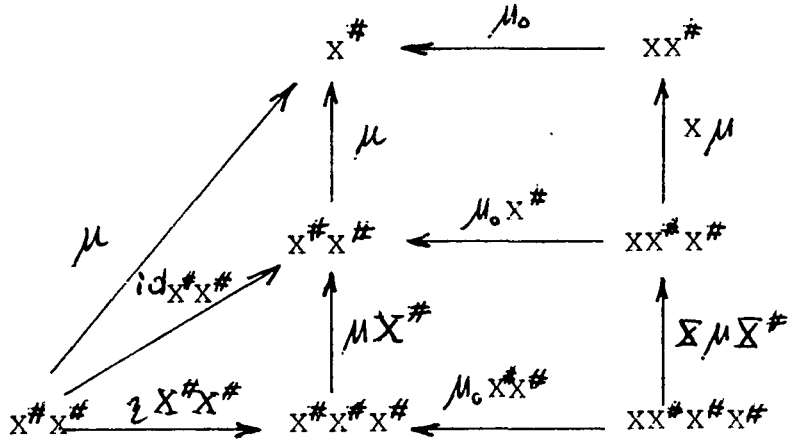


1.16.2

Az (1.7.1) diagramnak megfelelő  $\mu \cdot x^\# \mu = \mu \cdot \mu x^\#$  egyenlőség bizonyítása végett tekintsük az (1.16.3) és (1.16.4) diagramokat.



1.16.3



1.16.4

Az (1.16.3) diagramban I. és II. a  $\mu$  természetes transzformáció, III. és IV. pedig az  $x^\#$  funktor definíciójának megfelelően kommutativak, így (1.16.3) teljesen kommutativ.  $\mu$  definíciója, valamint a  $\mu = \mu \cdot id_{x^\#x^\#}$  egyenlőség alapján az (1.16.4) is teljesen kommutativ. Így  $\mu \cdot \mu x^\#$  és  $\mu \cdot x^\# \mu$  egy-

aránt szabad kiterjesztései a  $\mu$  morfizmusnak a  $\mu_0: XX^\# \rightarrow X^\#$  dinamikára vonatkozóan. Az (1.15) tétel szerint tehát  $\mu \cdot \mu X^\# = \mu \cdot X^\# \mu$ .  $\square$

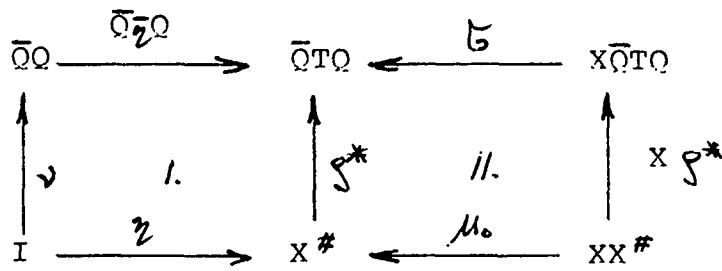
A következő (1.17) tétel bizonyítása más formában megtalálható Alagic [1] cikkében. / 3.10 tétel/

1.17. Tétel. Bármely  $X: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  input-funktor,

$\mathbb{T} = (T, \bar{\mu}, \bar{\eta})$  monád és  $Q: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  funktor esetén, ha  $Q$ -nak létezik jobb-adjungáltja, akkor minden  $\tau: QX \rightarrow TQ$  természetes transzformációnak létezik egyetlen olyan  $\tau_\#: QX^\# \rightarrow TQ$  kiterjesztése, amelyre az (1.17.1) diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & TQ & \xleftarrow{\bar{\mu}Q} & TTQ & \xleftarrow{T\tau_\#} & TQX \\
 & \nearrow \bar{\eta}Q & \uparrow \tau_\# & & & & \uparrow \tau X^\# \\
 Q & \xrightarrow{Q\tau} & QX^\# & \xleftarrow{Q\mu_0} & QXX^\# & & \\
 & & 1.17.1 & & & & 
 \end{array}$$

Bizonyítás. Mivel  $Q$ -nak létezik jobb adjungáltja, így létezik a  $(Q, \bar{Q}, \nu, \varepsilon): \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  adjunkció. Tekintsük a  $g: X \xrightarrow{\nu X} \bar{Q}QX \xrightarrow{\bar{Q}\tau} \bar{Q}TQ$  természetes transzformációt. Legyen  $g^*: X^\# \rightarrow \bar{Q}TQ$  az a kiterjesztése  $g$ -nak, amelyet az (1.17.2) diagram definiál, tehát  $g^*$  szabad kiterjesztése a  $\bar{Q}\bar{\eta}Q.\nu$ -nek a  $G = \bar{Q}\bar{\mu}Q.\bar{Q}T\varepsilon TQ.g\bar{Q}TQ: X\bar{Q}TQ \rightarrow \bar{Q}TQ$  természetes transzformációra vonatkozóan, amely az (1.15) tétel alapján létezik.



1.12.2

Megmutatjuk, hogy a  $\tau_\# = \varepsilon TQ \cdot Q \xi^*$  az egyetlen olyan természetes transzformáció  $QX^\#$ -ből  $TQ$ -ba, amelyre teljesül az (1.17.1) diagram kommutativitása

a./  $\bar{\tau}Q = \tau_\# \cdot Q \tau$

Felhasználva az (1.12.2) I. részdíagramja kommutativitását, valamint  $\varepsilon$  és  $\bar{\tau}$  természetes voltát, érvényes a következő átalakítás:

$$\begin{aligned} \tau_\# \cdot Q \tau &= \varepsilon TQ \cdot Q \xi^* \cdot Q \tau = \varepsilon TQ \cdot Q (\xi^* \cdot \tau) = \\ &= \varepsilon TQ \cdot Q (\bar{Q}\bar{\tau}Q \cdot \nu) = \varepsilon TQ \cdot Q \bar{Q}\bar{\tau}Q \cdot Q \nu = \\ &= \bar{\tau}Q \cdot \varepsilon Q \cdot Q \nu \end{aligned}$$

A  $(Q, Q, \nu, \varepsilon)$  adjunkcióra vonatkozó  $\varepsilon Q \cdot Q \nu = \text{id}_Q$  azonosságot alkalmazva kapjuk, hogy

$$\tau_\# \cdot Q \tau = \bar{\tau}Q.$$

b./  $\tau_\# \cdot Q \mu_0 = \bar{\mu}Q \cdot T \tau_\# \cdot \tau X^\#$

Felhasználva  $\tau_\#$  definícióját, valamint az (1.17.2)

II. diagram kommutativitását, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tau_\# \cdot Q \mu_0 &= \varepsilon TQ \cdot Q \xi^* \cdot Q \mu_0 = \varepsilon TQ \cdot Q (\xi^* \cdot \mu_0) = \varepsilon TQ \cdot Q (\zeta \cdot X \xi^*) = \\ &= \varepsilon TQ \cdot Q \bar{Q}\bar{\mu}Q \cdot Q \bar{Q}T \varepsilon TQ \cdot Q \xi^* \bar{Q}TQ \cdot Q X \xi^* = \\ &= \varepsilon TQ \cdot Q \bar{Q}\bar{\mu}Q \cdot Q \bar{Q}T \varepsilon TQ \cdot Q \bar{Q}\tau \bar{Q}TQ \cdot Q \nu X \bar{Q}TQ \cdot Q X \xi^* = \\ &= \varepsilon TQ \cdot Q \bar{Q}(\bar{\mu}Q \cdot T \varepsilon TQ \cdot \tau \bar{Q}TQ) \cdot Q \nu X \bar{Q}TQ \cdot Q X \xi^*. \end{aligned}$$

Mivel  $\varepsilon: Q\bar{Q} \rightarrow I$  természetes transzformáció, az átalakítást így folytathatjuk:

$$\tau_\# \cdot Q \mu_0 = \bar{\mu}Q \cdot T \varepsilon TQ \cdot \tau \bar{Q}TQ \cdot \varepsilon Q X \bar{Q}TQ \cdot Q \nu X \bar{Q}TQ \cdot Q X \xi^*.$$



Alkalmazzuk most a  $(Q, \bar{Q}, \nu, \xi)$  adjunkcióra teljesülő  $\varepsilon_Q \cdot Q \nu = \text{id}_Q$  azonosságot. Tehát  $\varepsilon_{QX\bar{Q}TQ} \cdot Q \nu XQTQ = \text{id}_Q X\bar{Q}TQ = \text{id}_{QX\bar{Q}TQ}$ , így

$$\tau_{\#} \cdot Q \mu_0 = \bar{\mu}_Q \cdot T \varepsilon TQ \cdot \tau \bar{Q}TQ \cdot QX \eta^*.$$

Használjuk most fel az (1.17.3) diagram kommutativitását, amely  $\tau$  természetes volta miatt teljesül, továbbá  $\tau_{\#}$  definícióját. Így

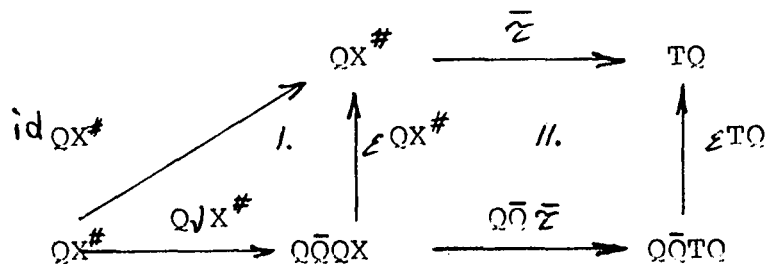
$$\begin{aligned} \tau_{\#} \cdot Q \mu_0 &= \bar{\mu}_Q \cdot T \varepsilon TQ \cdot TQ \eta^* \cdot \tau X^{\#} = \bar{\mu}_Q \cdot T(\varepsilon TQ \cdot Q \eta^*) \cdot \tau X^{\#} = \\ &= \bar{\mu}_Q \cdot T \tau_{\#} \cdot \tau X^{\#}. \end{aligned}$$

Tehát ha  $\tau_{\#}$ -et az  $\varepsilon TQ \cdot Q \eta^*$  kompozícióként definiáljuk, akkor erre a  $\tau_{\#}$ -ra teljesül az (1.17.1) diagram kommutativitása.

Hátra van még az egyértelműség bizonyítása. Tegyük fel, hogy valamely  $\bar{\tau}: QX^{\#} \rightarrow TQ$  természetes transzformációra teljesül az (1.17.1) diagram kommutativitása, azaz

$$\begin{aligned} \bar{\tau} Q &= \bar{\tau} \cdot Q \tau \quad \text{és} \\ \bar{\tau} \cdot Q \mu_0 &= \bar{\mu}_Q \cdot T \bar{\tau} \cdot \tau X^{\#} \end{aligned}$$

Legyen  $\eta = \bar{Q} \bar{\tau} \cdot \nu X^{\#}: X^{\#} \rightarrow \bar{Q}TQ$ . Mindenekelőtt lássuk be, hogy ekkor  $\varepsilon TQ \cdot Q \eta = \bar{\tau}$ . Tekintsük e célból az (1.17.3) diagramot. A  $(Q, Q, \nu, \xi)$  adjunkcióra teljesülő  $\text{id}_Q = \varepsilon_Q \cdot Q \nu$  azonosság folytán a I. részdíagram kommutatív. A II. pedig  $\varepsilon$  és  $\tau$  természetes volta miatt, tehát  $\bar{\tau} = \bar{\tau} \cdot \text{id}_{QX^{\#}} = \varepsilon TQ \cdot QQ \cdot QX = \varepsilon TQ \cdot Q$ .



1.17.3

Mivel  $\tilde{\tau}_* = \varepsilon TQ.Q\vartheta^*$ , így a  $\tilde{\tau}_* = \tilde{\tau}$  egyenlőséghez elegendő belátni, hogy  $\tilde{\tau} = \vartheta^*$ . A  $\tilde{\tau} = \vartheta^*$  egyenlőség bizonyítása végett viszont elegendő megmutatni, hogy az (1.17.2) diagramban  $\vartheta^*$ -ot  $\tilde{\tau}$ -val helyettesítve az így keletkező diagram is kommutativ, mivel  $\vartheta^*$  az egyetlen olyan, amelyre (1.17.2) kommutativ.

/i/ A  $\tilde{\tau}.\eta = \bar{Q}\bar{\eta}Q.v$  egyenlőség bizonyítása.

$$\tilde{\tau}.\eta = \bar{Q}\tilde{\tau}.vX^\#.\eta = \bar{Q}\tilde{\tau}.\bar{Q}Q\eta.v = \bar{Q}(\tilde{\tau}.Q\eta).v = \bar{Q}\bar{\eta}Q.v.$$

A fenti átalakításnál felhasználtuk  $v$  természetes voltát, valamint a feltételezett  $\tilde{\tau}.Q\eta = \bar{\eta}Q$  egyenlőséget.

/ii/ A  $\tilde{\tau}.\mu_0 = \bar{\zeta}.X\tilde{\tau}$  egyenlőség bizonyítása.

$$\tilde{\tau}.\mu_0 = \bar{Q}\tilde{\tau}.vX^\#.\mu_0 = \bar{Q}\tilde{\tau}.\bar{Q}Q\mu_0.vXX^\# = \bar{Q}(\tilde{\tau}.Q\mu_0).vXX^\#$$

A feltételezett  $\tilde{\tau}.Q\mu_0 = \bar{\mu}Q.T\tilde{\tau}.rX^\#$  egyenlőséget felhasználva

$$\tilde{\tau}.\mu_0 = \bar{Q}\bar{\mu}Q.\bar{Q}T\tilde{\tau}.\bar{Q}rX^\#.vXX^\#$$

Alkalmazzuk most a már bebizonyított  $\tilde{\tau} = \varepsilon TQ.Q\tilde{\tau}$  egyenlőséget, ekkor kapjuk, hogy

$$\tilde{\tau}.\mu_0 = \bar{Q}\bar{\mu}Q.\bar{Q}T\varepsilon TQ.\bar{Q}TQ\tilde{\tau}.\bar{Q}rX^\#.vXX^\# = \bar{Q}\bar{\mu}Q.\bar{Q}T\varepsilon TQ.\bar{Q}TQ\tilde{\tau}.\vartheta X^\#$$

Felhasználva, hogy  $\tilde{\tau}$  és  $\vartheta$  természetes transzformáció, az (1.17.4) diagram kommutativ, tehát érvényes a következő átalakítás:

$$\tilde{\tau}.\mu_0 = \bar{Q}\bar{\mu}Q.\bar{Q}T\varepsilon TQ.\vartheta\bar{Q}TQ.X\tilde{\tau} = \bar{\zeta}.X\tilde{\tau}.$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{Q}TQX^\# & \xrightarrow{\bar{Q}TQ\tilde{\tau}} & \bar{Q}TQ\bar{Q}TQ \\ \uparrow \vartheta X^\# & & \uparrow \vartheta\bar{Q}TQ \\ XX^\# & \xrightarrow{X\tilde{\tau}} & X\bar{Q}TQ \end{array}$$



Ezzel az (1.17) Tételt bebizonyítottuk.  $\square$

### 1.18. Tétel

Legyen  $X$  és  $Y$  input funktor a  $\mathcal{K}$  kategóriában,  $Q$  olyan funktor, amelynek létezik jobb adjungáltja, továbbá  $\bar{\tau}: QX \rightarrow YQ$  tetszőleges természetes transzformáció.

Ekkor létezik  $\bar{\tau}$ -nak olyan  $\bar{\tau}_\# : QX^\# \rightarrow Y^\#Q$  egyértelműen meghatározott kiterjesztése, amelyre kommutatív az (1.18.1) diagram,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y^\#Q & \xleftarrow{\bar{\mu}_0 Q} & Y Y^\#Q & \xleftarrow{Y \bar{\tau}_\#} & Y Q X^\# \\
 & \nearrow \bar{\tau} Q & \uparrow \bar{\tau}_\# & & & & \uparrow \bar{\tau} X^\# \\
 Q & \xrightarrow{Q \tau} & Q X^\# & \xleftarrow{Q \mu_0} & Q X X^\# & & 
 \end{array}$$

1.18.1

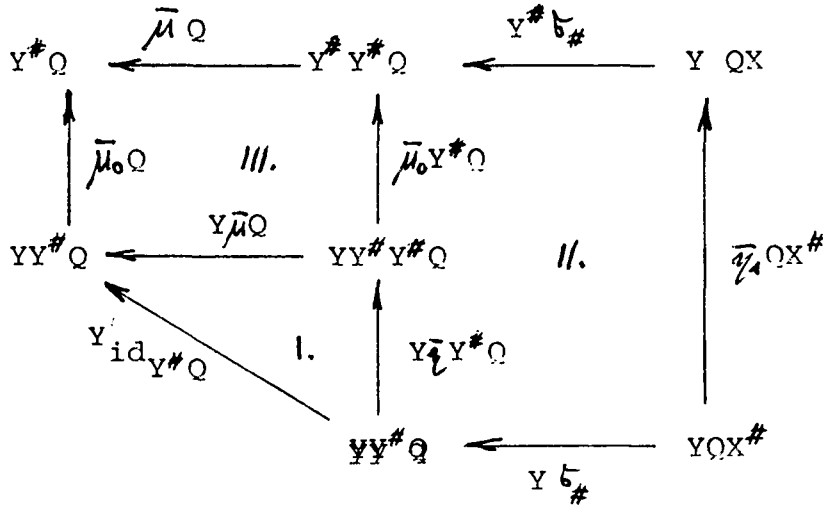
ahol  $(X^\#, \mu_0; \tau)$  az  $X$ ,  $(Y^\#, \bar{\mu}_0; \bar{\tau})$  pedig az  $Y$  input-funktorhoz tartozó hármasok.

Bizonyítás. Tekintsük az  $Y$  funktornak az  $\bar{\tau}_1 = \bar{\mu}_0 \cdot Y \bar{\tau} : Y \rightarrow Y^\#$  beágyazását az  $Y^\#$  funktorba. Mivel (1.10) Tétel szerint az  $(Y^\#, \bar{\mu}; \bar{\tau})$  hármas monadot határoz meg, így alkalmazhatjuk az (1.17) Tételt. Tekintsük a  $\bar{\sigma} = \bar{\tau}_1 Q \cdot \bar{\tau} : QX \rightarrow Y^\#Q$  természetes transzformációt. Az (1.17) tétel szerint létezik egy egyértelműen meghatározott  $\bar{\sigma}_\# : QX^\# \rightarrow Y^\#Q$  természetes transzformáció, amelyre az (1.18.2) diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y^\#Q & \xleftarrow{\bar{\mu} Q} & Y^\# Y^\#Q & \xleftarrow{Y^\# \bar{\sigma}_\#} & Y^\# Q X^\# \\
 & \nearrow \bar{\tau} Q & \uparrow \bar{\sigma}_\# & & & & \uparrow \bar{\sigma} X^\# \\
 Q & \xrightarrow{Q \tau} & Q X^\# & \xleftarrow{Q \mu_0} & Q X X^\# & & 
 \end{array}$$

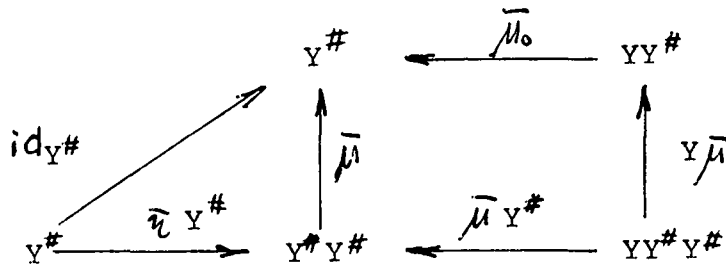
1.18.2

Megmutatjuk, hogy az így definiált  $\bar{\zeta}_\#$  teljesíti a keresett  $\zeta_\#$ -re vonatkozó (1.18.1) diagram kommutativitását. Ehhez, figyelembe véve  $\bar{\zeta}_1$  definícióját, elegendő megmutatni, hogy az (1.18.3) diagram kommutatív.



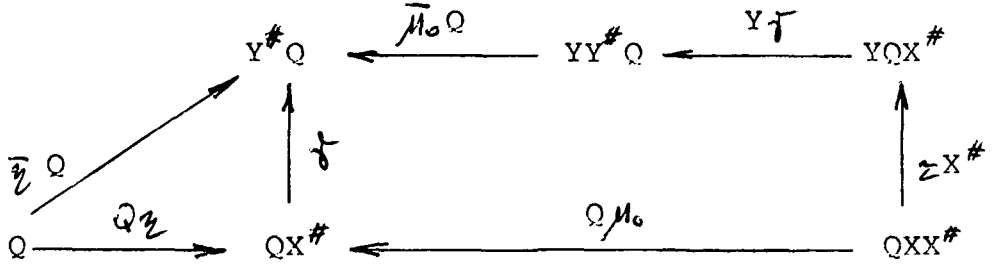
1.18.3

A II. diagram  $\bar{\zeta}_1$  természetes transzformáció volta miatt kommutatív. A I. és III. diagramok kommutativitása következménye az (1.18.4) diagram kommutativitásának, amely  $\bar{\mu}$  definíciója szerint teljesül.



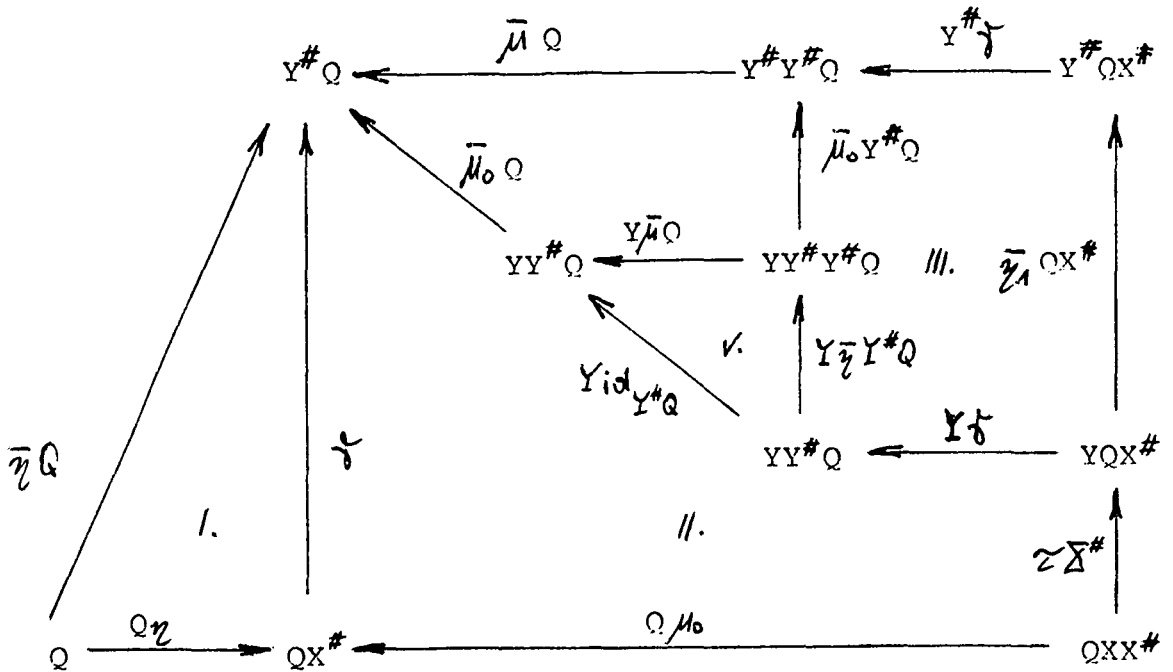
1.18.4

Hátra van még az egyértelműség bizonyítása. Tegyük fel, hogy valamely  $\mathfrak{f}: QX^{\#} \rightarrow Y^{\#}Q$  természetes transzformációra teljesül az 1.18.5 diagram kommutativitása.



1.18.5

Igy az (1.18.6) diagram I. és II. részdiagramja kommutativ. Figyelembe véve  $\mathfrak{f}$  természetes voltát, valamint  $\bar{\eta}_1$  definícióját, a III. és kommutativ. A IV. és V. pedig  $\bar{\mu}$  definíciójának megfelelő (1.18.4) diagram szerint kommutativ.



1.18.6

Az (1.18.6) diagram teljesen kommutatív volta azt jelenti, hogy  $\mathcal{T}$  olyan kiterjesztése a  $\mathcal{C} = \pi_1 Q \cdot \mathcal{Z}: QX \longrightarrow Y^* Q$  természetes transzformációnak, amelyre az (1.18.2) diagram kommutatív, ha  $\mathcal{C}_\#$  helyébe  $\mathcal{T}$ -t írunk. De  $\mathcal{C}_\#$  az egyetlen ilyen az (1.17) tétel szerint, tehát  $\mathcal{C}_\# = \mathcal{T}$ .  $\square$

## 2. X-Y automaták

Célunk ebben a fejezetben olyan automaták definiálása és vizsgálata, amelyek adott  $X$  és  $Y$  input-funktorok esetén  $X^* \xrightarrow{\cdot} Y^*$  természetes transzformációt számitanak ki. A kiszámítás az Alagić [1] által bevezetett természetes állapot-transzformáció fogalmán alapszik. Minden  $\gamma: XQ \xrightarrow{\cdot} Y^*Q$  természetes transzformációnak létezik az (1.15) Tétel szerint egyértelmű  $\gamma^*: X^*Q \xrightarrow{\cdot} Y^*Q$  kiterjesztése. Ekkor  $\alpha: I \xrightarrow{\cdot} Q$  kezdő-állapot és  $\beta: Q \xrightarrow{\cdot} I$  végállapot transzformációkat megadva a  $\beta Y^* \cdot \gamma^* X^* \alpha$  kompozícióval  $X^* \xrightarrow{\cdot} Y^*$  természetes transzformációt kapunk, és így jutunk a direkt állapot automata fogalmához. A kiszámítás  $\gamma: QX \xrightarrow{\cdot} Y^*Q$  természetes transzformáció kiterjesztésével is meghatározható az (1.17) Tétel alapján, ha a  $Q$  funktornak létezik jobb adjungáltja, ugyanis ekkor létezik a  $\gamma_{\#}: QX^* \xrightarrow{\cdot} Y^*Q$  kiterjesztés, és így az automata által kiszámított transzformációt az  $Y^* \beta \cdot \gamma_{\#} \cdot \alpha X^*$  kompozícióval definiálhatjuk.

Ez a megközelítés alapján abban különbözik Arbib és Manes [2] automata fogalmától, hogy az automata kimenetét megadó objektumról is feltesszük, hogy  $(Y^*, \bar{\mu}; \gamma)$  monad-strukturával rendelkezik, továbbá a kiszámítás során a "részeredmények" megőrzésére funktort alkalmazunk.

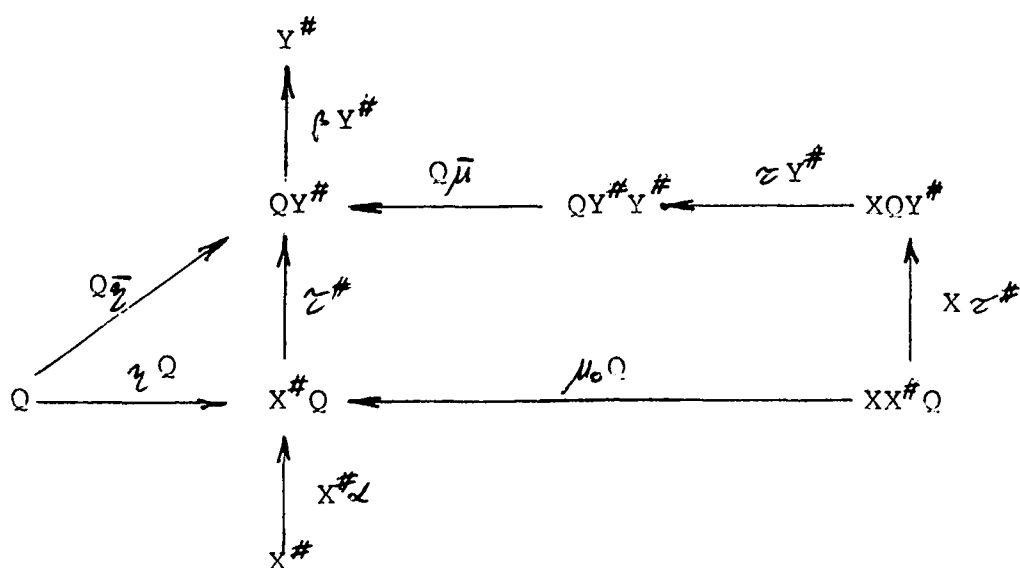
2.1. Definíció. Legyen  $X$  és  $Y$  input funktor a  $\mathcal{U}$  kategóriában, az  $(X^\#, \mu_0; \gamma)$  illetve  $(Y^\#, \bar{\mu}_0; \bar{\gamma})$  input-strukturával. Ekkor direkt állapotú  $X$ - $Y$  automatán egy  $\mathcal{U} = (Q, \alpha, \gamma, \beta)$  négyest értünk, ahol: /i/  $Q$  endofunktor, a automata állapot funktora,

/ii/  $\alpha: I \rightarrow Q$  természetes transzformáció, a kezdeti állapot transzformáció,

/iii/  $\gamma: XQ \rightarrow QY^\#$  természetes transzformáció, az átmenet-kimenet transzformáció,

/iv/  $\beta: Q \rightarrow I$  természetes transzformáció a végállapot transzformáció.

A (2.1.1) diagramot az  $\mathcal{U}$   $X$ - $Y$  automata automata-diagramjának nevezzük, ahol  $\gamma^\#$  az (1.15) tétel állítása szerint létező egyértelműen meghatározott  $X^\#Q \rightarrow QY^\#$  természetes transzformáció, amelyre a (2.1.1) diagram kommutatív.



2.1.1

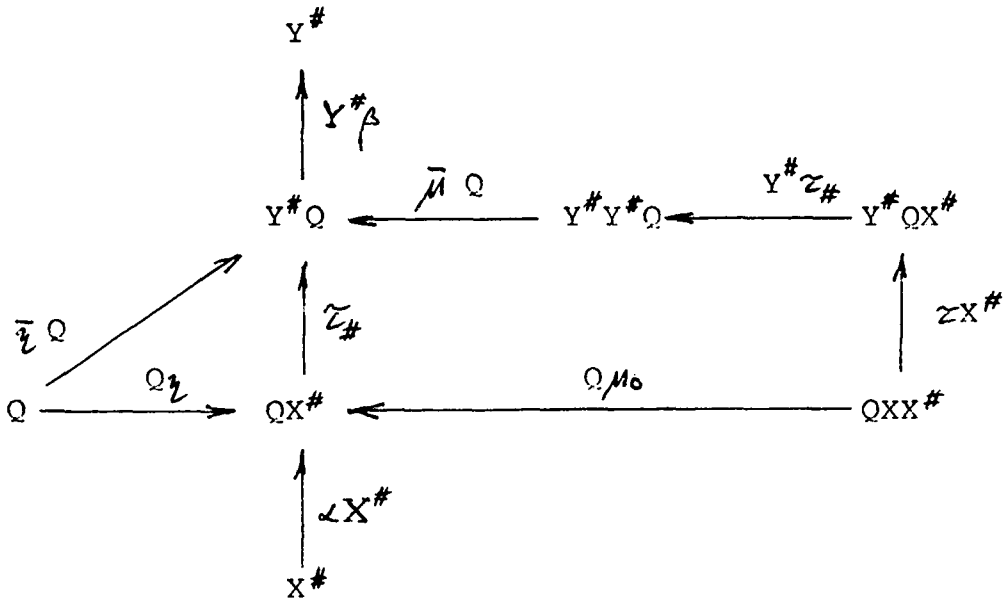
2.2. Definíció. Legyen  $X$  és  $Y$  input funktor a  $\mathcal{K}$  kategóriában az  $(X^\#, \mu_0; \gamma)$  illetve  $(Y^\#, \bar{\mu}_0; \bar{\gamma})$  input-strukturával. Ekkor a  $\mathcal{A} = (Q, \alpha, \gamma, \beta)$  négyest inverz állapotú  $X$ - $Y$  automatának nevezzük, ahol: /i/  $Q$  endofunktor, amelynek létezik jobb-adjungáltja, a  $\mathcal{A}$  automata állapotfunktora,

/ii/  $\alpha: I \rightarrow Q$  természetes transzformáció, a kezdeti állapot transzformáció,

/iii/  $\gamma: QX \rightarrow Y^\#Q$  természetes transzformáció, az átmenet-kimenet transzformáció,

/iv/  $\beta: Q \rightarrow I$  természetes transzformáció, a végállapot transzformáció.

A (2.2.1) diagramot a  $\mathcal{A}$  inverz állapotú  $X$ - $Y$  automatához tartozó automata-diagramjának nevezzük, ahol  $\tilde{\gamma}$  az (1.17) tétel állítása szerint létező egyértelműen meghatározott  $QX^\# \rightarrow Y^\#Q$  természetes transzformáció, amelyre a diagram kommutatív.



2.2.1

2.3. Definíció A  $\mathcal{A} = (Q, \alpha, \tau, \beta)$  X-Y automata által indukált transzformáción a  $\varphi_{\mathcal{A}} = \beta \circ Y^* \cdot \tau^* \cdot X^* \alpha : X^* \longrightarrow Y^*$  természetes transzformációt értjük, ahol  $\tau^*$ -et a (2.1.1) diagram definiálja.

2.4. Definíció A  $\varphi : X^* \longrightarrow Y^*$  természetes transzformációt automata transzformációnak nevezzük, ha van olyan  $\mathcal{A}$  X-Y automata, amely  $\varphi$ -t indukálja.

2.5. Definíció A  $\mathcal{A} = (Q, \alpha, \tau, \beta)$  inverz állapotú X-Y automata által indukált transzformáción a  $\varphi_{\mathcal{A}} = Y^* \beta \cdot \tau_* \cdot \alpha X^* : X^* \longrightarrow Y^*$  természetes transzformációt értjük, ahol  $\tau_*$ -et a (2.2.1) diagram definiálja.

A  $\varphi : X^* \longrightarrow Y^*$  természetes transzformációt inverz állapotú automata transzformációnak nevezzük, ha van olyan  $\mathcal{A}$  X-Y inverz állapotú automata, amely a  $\varphi$ -t indukálja.

2.6. Definíció Legyen  $Y$  input-funktor a  $\mathcal{V}$  kategóriában, és jelöljük az  $A$  objektum feletti szabad  $Y$  dinamikát a  $(Y^*A, \bar{\mu}_A; \bar{\eta}_A)$  hármassal. Ekkor a  $\tau : XQ \longrightarrow QY^* / QX \longrightarrow Y^*Q /$  természetes transzformációt hosszmegőrzőnek nevezzük, ha van olyan  $\tau_1 : XQ \longrightarrow QY / QX \longrightarrow YQ /$  természetes transzformáció, hogy  $\tau = Q\bar{\eta}_1 \cdot \tau_1 / = \bar{\eta}_1 Q \cdot \tau_1 /$ , ahol

$$\bar{\eta}_1 : Y \xrightarrow{Y\bar{\eta}} YY^* \xrightarrow{\bar{\mu}_0} Y^*.$$

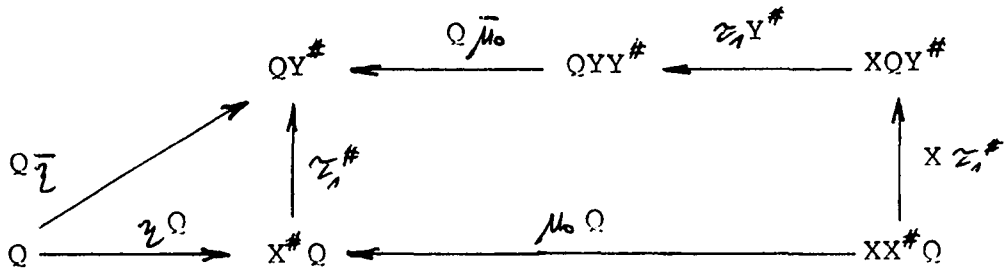
2.7. Definíció A  $\mathcal{A} = (Q, \alpha, \tau, \beta)$  /inverz állapotú/ X-Y automatát hosszmegőrzőnek nevezzük, ha a  $\tau$  átmenet-kimenet transzformáció hosszmegőrző.

2.8. Definíció A  $\varphi : X^* \longrightarrow Y^*$  /inverz állapotú/ automata transzformációt hosszmegőrzőnek nevezzük, ha megvalósítható



/inverz állapotú/ hosszmegőrző X-Y automatával.

2.9. Tétel Legyen X és Y input funktor a  $\mathcal{U}$  kategóriában. Használjuk a megfelelő szabad dinamikák szokásos jelölését. Legyen továbbá  $\tau : XQ \rightarrow QY^\#$  hosszmegőrző transzformáció, tehát  $\tau = Q\bar{\tau}_1 \cdot \tau_1$  valamely  $\tau_1 : XQ \rightarrow QY$  természetes transzformációra. Ekkor  $\tau^\# = \tau_1^\#$ , ahol  $\tau_1^\#$  az az egyértelműen meghatározott természetes transzformáció, amelyre a (2.9.1) diagram kommutatív.

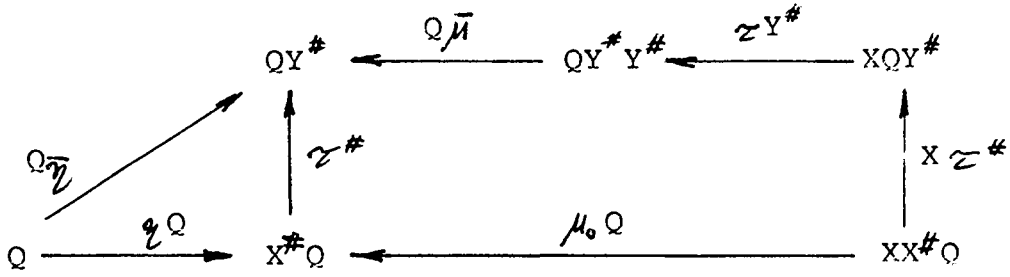


2.9.1

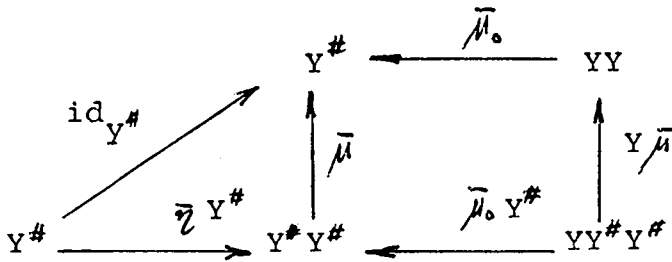
### Bizonyítás

Mivel definíció szerint  $\tau^\#$  az az egyértelműen meghatározott természetes transzformáció, amelyre a (2.1.1) diagram kommutatív, így elegendő bebizonyítani, hogy teljesül a (2.9.2) egyenlőség.

$$Q\bar{\mu}_0 \cdot \tau_1 Y^\# = Q\bar{\mu}_0 \tau_1 Y^\# \quad (2.9.2)$$



2.9.3



2.9.4

Mivel a (2.9.4) diagram  $\bar{\mu}$  definíciója szerint kommutatív, így felhasználva  $\tau = Q\bar{\eta}_1 \cdot \tau_1$  egyenlőséget, kapjuk az alábbi egyenlőségeket

$$\begin{aligned}
 Q\bar{\mu} \cdot \tau^{Y^{\#}} &= Q\bar{\mu} \cdot (Q\bar{\eta}_1 \cdot \tau_1)^{Y^{\#}} = Q(\bar{\mu} \cdot \bar{\eta}_1^{Y^{\#}}) \cdot \tau_1^{Y^{\#}} = \\
 &= Q(\bar{\mu} \cdot \bar{\mu}_0^{Y^{\#}} \cdot Y\bar{\eta}^{Y^{\#}}) \cdot \tau_1^{Y^{\#}} = \\
 &= Q(\bar{\mu}_0 \cdot Y\bar{\mu} \cdot Y\bar{\eta}^{Y^{\#}}) \cdot \tau_1^{Y^{\#}} = \\
 &= Q(\bar{\mu}_0 \cdot Y(\mu \cdot \bar{\eta}^{Y^{\#}})) \cdot \tau_1^{Y^{\#}} = \\
 &= Q(\bar{\mu}_0 \cdot Yid_{Y^{\#}}) \cdot \tau_1^{Y^{\#}} = Q\bar{\mu}_0 \cdot \tau_1^{Y^{\#}}. \square
 \end{aligned}$$

Az előző tétel tehát azt mondja ki, hogy hosszmegőrző  $\tau: XQ \rightarrow QY^{\#}$  természetes transzformációk kiterjesztése a (2.9.1) diagram szerint végezhető el.

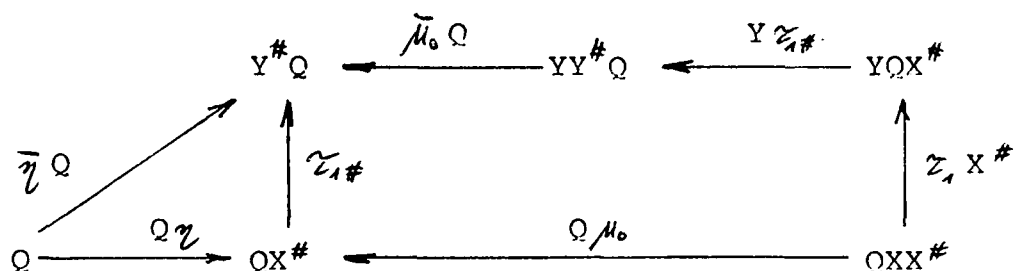
Hasonló állítás igaz inverz állapotú hosszmegőrző

$\tau: QX \xrightarrow{\cdot} Y^{\#}Q$  transzformációkra.

2.10. Tétel Bármely  $X$  és  $Y$  input funktorok, továbbá

$\tau: QX \xrightarrow{\cdot} Y^{\#}Q$  hosszmegőrző transzformáció esetén, ha a  $Q$  funktornak létezik jobb adjungáltja, akkor

$\tau_{\#} = \tau_{1\#}$ , ahol  $\tau = \bar{\eta}_1 Q \cdot \tau_1$ , és  $\tau_{1\#}$  az (1.18) Tétel állítása szerint létező egyértelműen meghatározott kiterjesztése  $\tau_1$ -nek, amelyre az alábbi diagram kommutatív.

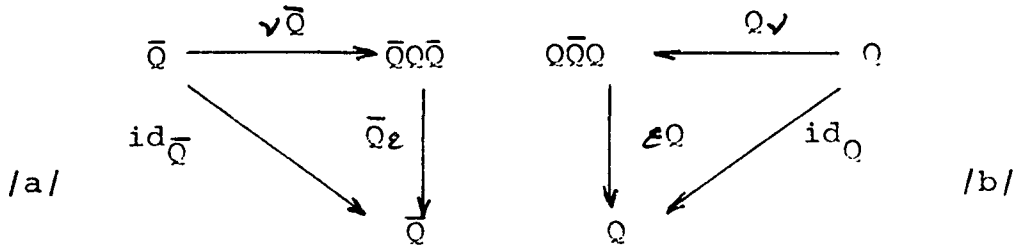


A tétel bizonyítása megegyezik az (1.18) Tétel bizonyításával.

2.11. Tétel Legyen  $\mathcal{M} = (Q, \alpha, \tau, \beta)$  inverz állapotú  $X$ - $Y$  automata, továbbá  $\varphi_{\mathcal{M}}: X^{\#} \xrightarrow{\cdot} Y^{\#}$  a  $\mathcal{M}$  automata által indukált transzformáció.

A  $\varphi_{\mathcal{M}}$  transzformáció megvalósítható direkt állapotú  $X$ - $Y$  automatával.

Bizonyítás A feltétel szerint létezik a  $Q$  állapot-funktor-nak jobb adjungáltja. Jelöljük az ehhez tartozó adjunkciót a  $(Q, \bar{Q}, \nu, \varepsilon): \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$  négyessel. Ezen adjunkcióra vonatkozó azonosságok ekkor a következők:



### 2.11.1

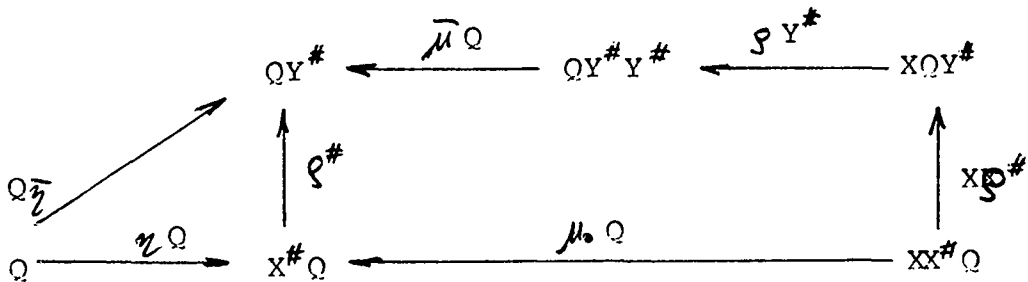
ahol  $\nu: I \rightarrow \overline{Q}Q$ ,  $\varepsilon: Q\overline{Q} \rightarrow I$  természetes transzformációk.

Tekintsük a  $\mathcal{M}_1 = (\overline{Q}, \alpha_1, \varphi, \beta_1)$  X-Y automatát, ahol

$$\begin{aligned} \alpha_1: I &\xrightarrow{\nu} \overline{Q}Q \xrightarrow{\overline{Q}\beta} \overline{Q} \\ \varphi: x\overline{Q} &\xrightarrow{\nu x\overline{Q}} \overline{Q}Qx\overline{Q} \xrightarrow{\overline{Q}\alpha\overline{Q}} \overline{Q}Y^\#Q\overline{Q} \xrightarrow{\overline{Q}Y^\#\varepsilon} \overline{Q}Y^\# \\ \beta_1: \overline{Q} &\xrightarrow{\alpha\overline{Q}} Q\overline{Q} \xrightarrow{\varepsilon} I. \end{aligned}$$

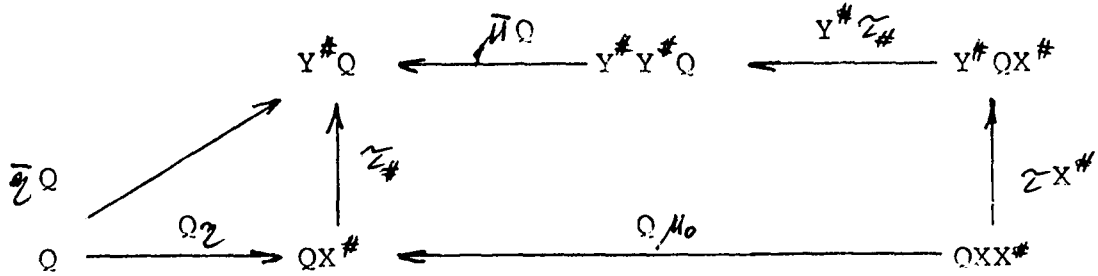
Megmutatjuk, hogy  $\varphi_{\mathcal{M}_1} = \varphi_{\mathcal{M}}$ , ahol  $\varphi_{\mathcal{M}_1} = \beta_1 Y^\# \cdot \varphi^\# \cdot X^\# \alpha_1$ .

A  $\varphi^\#$  természetes transzformációt a  $\mathcal{M}_1$  automata (2.11.2) diagramja definiálja, azaz  $\varphi^\#$  egyértelműen meghatározott  $X^\# \overline{Q} \rightarrow \overline{Q}Y^\#$  természetes transzformáció, amelyre a (2.11.2) diagram kommutatív.



### 2.11.2

Definíció szerint  $\bar{g}_Q = Y^\# \beta \cdot \bar{z}_\# \cdot \nu X^\#$ , ahol  $\bar{z}_\#$  az az egyértelműen meghatározott természetes transzformáció, amelyre a (2.11.3) diagram kommutatív.



2.11.3

Megmutatjuk, hogy  $g^\#$  kifejezhető a  $\bar{z}_\#$ , valamint a  $(Q, \bar{Q}, \nu, \varepsilon)$  adjunkció segítségével, pontosabban

$$g^\# = \bar{Q}Y^\# \bar{z} \cdot \bar{Q} \bar{z}_\# \bar{Q} \cdot \nu X^\# \bar{Q} \quad 2.11.4$$

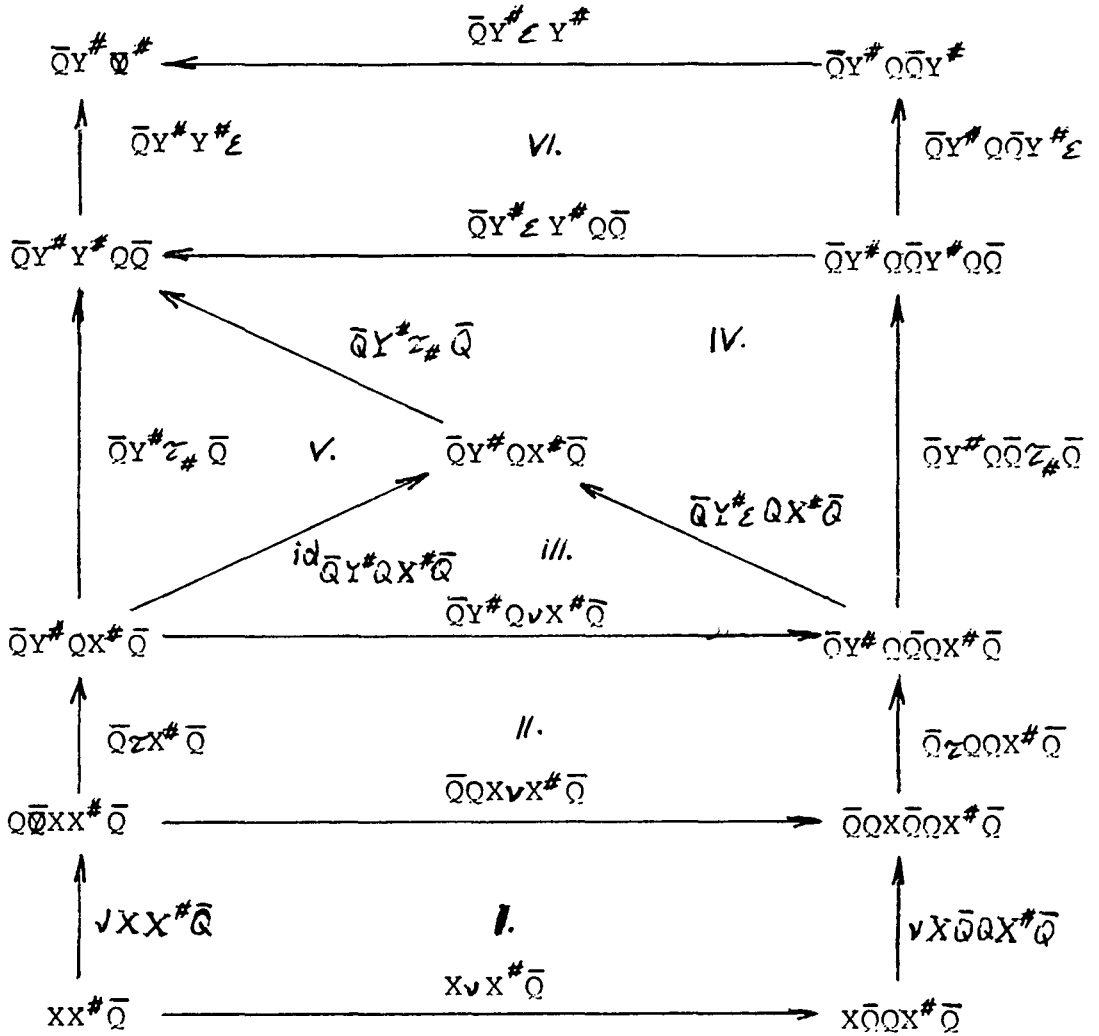
A (2.11.4) egyenlőség igazolásához elegendő belátni, hogy a (2.11.2) diagramban  $g^\#$ -et az egyenlőség jobb oldalán álló természetes transzformációval helyettesítve ismét kommutatív diagramot kapunk, ugyanis  $g^\#$  egyértelműen meghatározott. Tehát igazolni kell a

$$\bar{Q} \bar{z} = \bar{Q}Y^\# \varepsilon \cdot \bar{Q} \bar{z}_\# \bar{Q} \cdot \nu X^\# \bar{Q} \cdot \bar{z} \bar{Q} \quad (2.11.5)$$

$$\bar{Q}Y^\# \varepsilon \cdot \bar{Q} \bar{z}_\# \bar{Q} \cdot \nu X^\# \bar{Q} \cdot \bar{\mu}_0 \bar{Q} = \bar{Q} \bar{\mu}_0 \cdot gY^\# \cdot X \bar{Q}Y^\# \varepsilon \cdot X \bar{Q} \bar{z}_\# \bar{Q} \cdot X \nu X^\# \bar{Q} \quad (2.11.6)$$

egyenlőségeket. Tekintsük a (2.11.7) diagramot



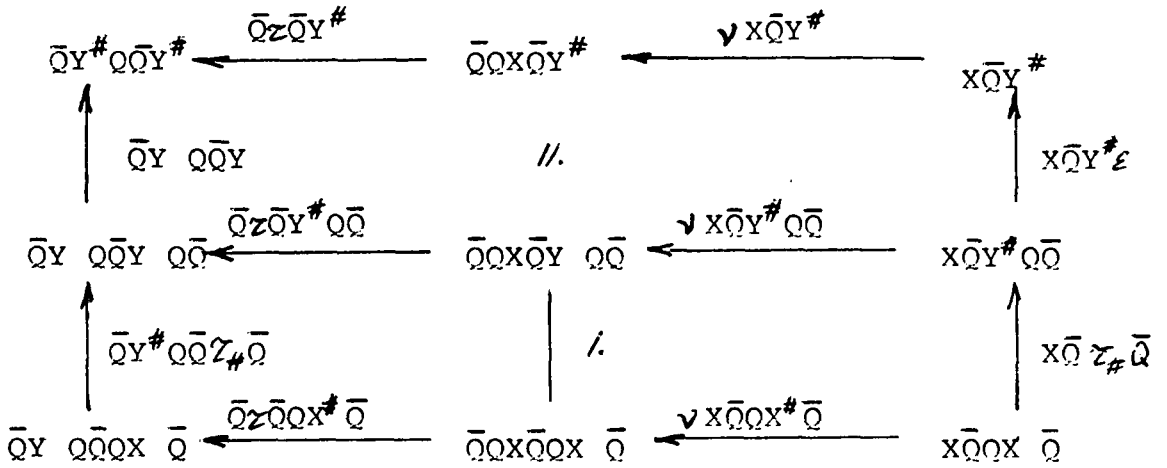


### 2.11.9

A I. és II. részdiagramok  $\vee$  természetes voltát figyelembe véve kommutativok. Ugyancsak kommutativ a IV. és VI.  $\varepsilon$  természetes volta miatt. A III. részdiagram pedig az adjunkcióra vonatkozó (2.6.1)b azonosság miatt kommutativ, tehát (2.6.9) teljesen kommutativ, így teljesül a

$$\begin{aligned}
 & \bar{Q}Y^\# Y^\# \varepsilon . \bar{Q}Y^\# Z_\# \bar{Q} . \bar{Q}Z^\# X^\# \bar{Q} . \vee X X^\# \bar{Q} = \\
 & = \bar{Q}Y^\# \varepsilon Y^\# . \bar{Q}Y^\# Q \bar{Q}Y^\# \varepsilon . \bar{Q}Y^\# Q \bar{Q} Z_\# \bar{Q} . \bar{Q}Z^\# Q \bar{Q} X^\# \bar{Q} . \vee X \bar{Q} Q X^\# \bar{Q} . X \vee X^\# \bar{Q} \\
 & \quad (2.11.10)
 \end{aligned}$$

egyenlőség.



2.11.11

Könnyeb belátható, hogy a I. diagram  $Z_\#$ , a II. pedig  $\varepsilon$  természetes volta miatt kommutatív, tehát

$$\begin{aligned}
 & \bar{Q}Y^\# Q \bar{Q}Y^\# \varepsilon . \bar{Q}Y^\# Q \bar{Q} Z_\# \bar{Q} . \bar{Q}Z^\# Q \bar{Q} X^\# \bar{Q} . \vee X \bar{Q} Q X^\# \bar{Q} = \\
 & = \bar{Q}Z^\# Q Y^\# . \vee X \bar{Q} Y^\# . X \bar{Q} Y^\# \varepsilon . X \bar{Q} Z_\# \bar{Q} \\
 & \quad (2.11.12)
 \end{aligned}$$

Felhasználva a (2.11.8), (2.11.10) és (2.11.12) egyenlőségeket, kapjuk, hogy

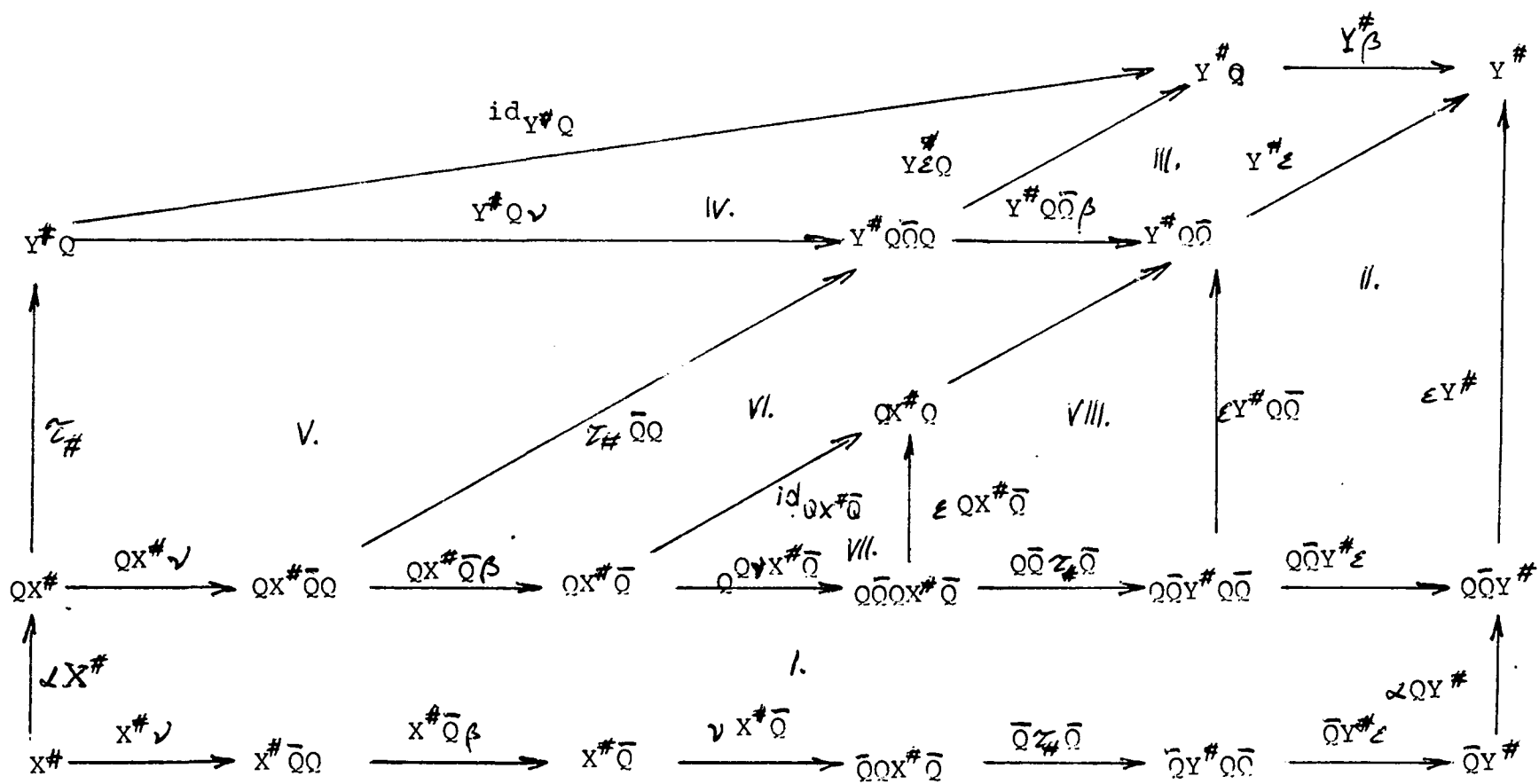
$$\begin{aligned}
 & \bar{Q}Y^\# \varepsilon . \bar{Q}Z_\# \bar{Q} . \vee X^\# \bar{Q} . \mu_0 \bar{Q} = \\
 & = \bar{Q} \mu_0 . \bar{Q}Y^\# \varepsilon Y^\# . \bar{Q}Z^\# Q Y^\# . \vee X \bar{Q} Y . X \bar{Q} Y^\# \varepsilon . X \bar{Q} Z_\# \bar{Q} . X \vee X^\# \bar{Q} \\
 & \quad (2.11.13)
 \end{aligned}$$



A (2.11.13) egyenlőségből,  $\varrho$  definícióját figyelembe véve kapjuk a kívánt (2.11.6) egyenlőséget. Figyelembe véve a most bebizonyított (2.11.4) egyenlőséget, valamint a  $\mathcal{Q}_1$  X-Y automata kezdő és végállapot transzformációnak definícióját, kapjuk a következő egyenlőségeket:

$$\varphi_{\mathcal{Q}_1} = \beta_1 Y^\# \cdot \mathcal{G}^\# \cdot X^\# \mathcal{L}_1 = \mathcal{L} Y^\# \cdot \mathcal{L} \bar{Q} Y^\# \cdot \bar{Q} Y^\# \mathcal{E} \cdot \bar{Q} \mathcal{Z}_\# \bar{Q} \cdot \nu X^\# \bar{Q} \cdot X^\# \bar{Q} \beta \cdot X^\# \nu$$

A (2.11.14) diagramban a I., II., III., V., VI., VIII. részdiagramok rendre az  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\beta$ ,  $\mathcal{Z}_\#$ ,  $\mathcal{Z}_\#$ ,  $\mathcal{E}$  természetes transzformáció volta miatt kommutativak. A IV. és VII. részdiagramok pedig a  $(Q, \bar{Q}, \nu, \mathcal{E})$  adjunkcióra vonatkozó (2.11.1) b azonosság miatt kommutativ, tehát (2.11.14) teljesen kommutativ. Tehát  $\varphi_{\mathcal{Q}_1} = Y^\# \beta \cdot \mathcal{Z}_\# \cdot \mathcal{L} X^\# = \varphi_{\mathcal{Q}_2} \cdot \square$



2.12. Következmény Ha a  $\mathcal{U} = (Q, \alpha, \tau, \beta)$  inverz állapotu X-Y automata hosszmegőrző, akkor a (2.6) tételben szereplő

$\mathcal{U}_1 = (\bar{Q}, \alpha_1, \beta_1)$  automata is hosszmegőrző, akkor

$\varphi_{\mathcal{U}_1}: X^\# \rightarrow Y^\#$  hosszmegőrző automata transzformáció.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy  $\tau$  hosszmegőrző, tehát  $\tau =$

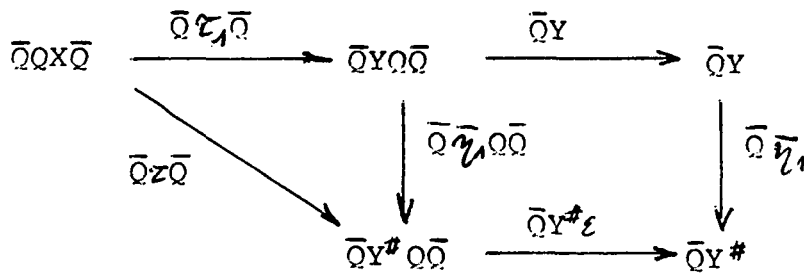
$= \bar{\tau}_1 \circ \tau_1$  valamely  $\tau_1: QX \rightarrow YQ$  esetén. Elegendő megmutatni, hogy ekkor a  $\varphi = \bar{Q}Y^\# \varepsilon \cdot \bar{Q}\tau\bar{Q} \cdot \nu X\bar{Q}: X\bar{Q} \rightarrow \bar{Q}Y^\#$  is hosszmegőrző.

Tekintsük a  $\varphi_1 = \bar{Q}Y^\# \varepsilon \cdot \bar{Q}\tau_1\bar{Q} \cdot \nu X\bar{Q}: X\bar{Q} \rightarrow \bar{Q}Y^\#$  természetes transz-

formációt. Mivel a (2.12.1) diagram  $\tau = \bar{\tau}_1 \circ \tau_1$  egyenlőség, valamint  $\bar{\tau}_1$  természetes volta miatt kommutatív, azt

ség, valamint  $\bar{\tau}_1$  természetes volta miatt kommutatív, azt

kapjuk, hogy  $\varphi = \bar{Q}\bar{\tau}_1 \cdot \varphi_1$ , tehát  $\varphi$  is hosszmegőrző.  $\square$



2.12.1

2.13. Tétel Ha a  $\mathcal{U} = (R, \alpha, \tau, \beta)$  X-Y automata R állapot-funktorának létezik bal adjungáltja, akkor a  $\mathcal{U}$  által indukált  $\varphi_{\mathcal{U}}$  transzformáció megvalósítható inverz állapotu X-Y automatával, amelynek állapotfunktora R bal adjungáltja.

Bizonyítás Jelöljük  $Q$ -val az R állapotfunktor bal adjungáltját, továbbá jelölje a  $(Q, R, \nu, \varepsilon)$  négyes az ehhez tartozó adjunkciót.

Definiáljuk a  $\mathcal{U}_1 = (\alpha_1, Q, \tau_1, \beta_1)$  inverz állapotu X-Y automatát, ahol

$$\alpha_1: I \xrightarrow{\gamma} RQ \xrightarrow{\beta_Q} Q$$

$$\gamma_1: QX \xrightarrow{QX\gamma} QXRQ \xrightarrow{Q\gamma Q} QRY^{\#}Q \xrightarrow{\ell Y^{\#}Q} Y^{\#}Q$$

$$\beta_1: Q \xrightarrow{Q\alpha} QR \xrightarrow{\varepsilon} I$$

Bebizonyítjuk, hogy  $\varphi_{\alpha} = \varphi_{\beta}$ . Felhasználva a (2.11) tételt, elegendő bebizonyítani, hogy az a konstrukció, amellyel a tétel bizonyítása során inverz állapotú automatához megalkottuk azt a direkt állapotú automatát, amely ugyanazt a transzformációt létesíti, mint a kiindulási, a  $\mathcal{L}_2$  automataára alkalmazva a  $\mathcal{U}_2$  automatát eredményezi.

Tehát tekintsük a  $\hat{\mathcal{L}}_2 = (R, \hat{\alpha}_1, \hat{\gamma}_1, \hat{\beta}_1)$  direkt állapotú X-Y automatát, ahol

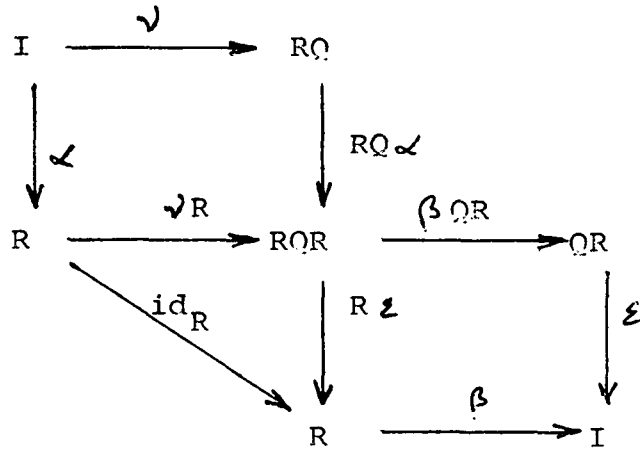
$$\hat{\alpha}_1 = R \beta_1 \cdot \gamma,$$

$$\hat{\gamma}_1 = RY^{\#}\varepsilon \cdot R \gamma_1 R \cdot \gamma XR$$

$$\hat{\beta}_1 = \ell \cdot \alpha_1 R.$$

Megmutatjuk, hogy  $\hat{\alpha}_1 = \alpha$ ,  $\hat{\gamma}_1 = \gamma$  és  $\hat{\beta}_1 = \beta$ .

A (2.13.1) diagramban a I. részdiagram  $\alpha$  és  $\gamma$  természetes volta miatt kommutatív, a III. pedig  $\beta$  és  $\ell$  természetes volta miatt. A II. részdiagram éppen a  $(Q, R, \gamma, \varepsilon)$  adjunkcióra vonatkozó egyik azonosság. Tehát (2.13.1) teljesen kommutatív.



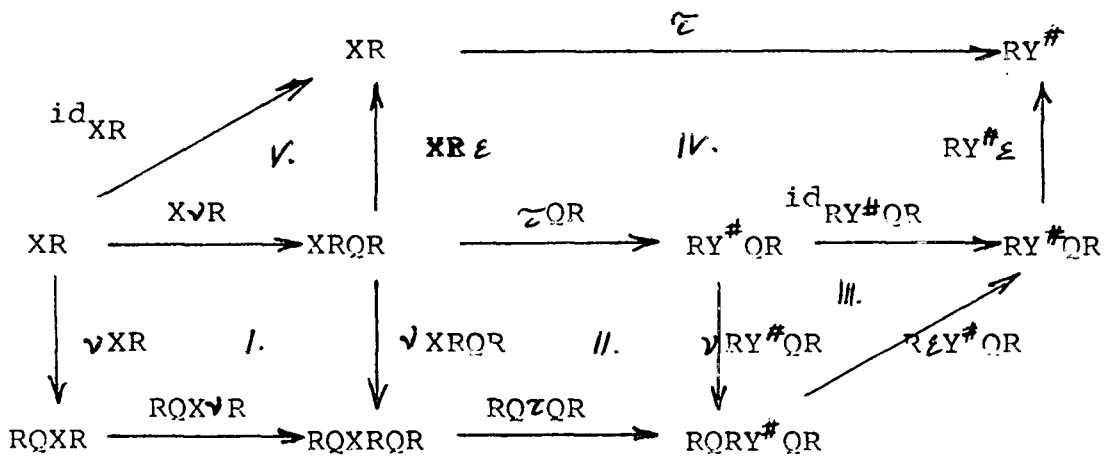
2.13.1

A (2.13.1) diagram kommutativitását felhasználva

$$\hat{\mathcal{L}}_1 = R\beta_1 \cdot \nu = R\ell \cdot RQ\alpha \cdot \nu = R\varepsilon \cdot \nu_R \cdot \alpha = id_R \cdot \alpha = \alpha$$

$$\hat{\beta}_1 = \varepsilon \cdot \alpha_1 R = \varepsilon \cdot \beta_{QR} \cdot \nu_R = \beta \cdot R\varepsilon \cdot \nu_R = \beta \cdot id_R = \beta$$

A  $\hat{\mathcal{Z}}_1$ -ra vonatkozó egyenlőség bizonyítása érdekében lássuk be a (2.13.2) diagram kommutativitását.



2.13.2

A I. részdiagram  $\mathcal{V}$ , a II.  $\mathcal{V}$  és  $\mathcal{Z}$ , a IV. pedig  $\mathcal{Z}$  és  $\mathcal{Z}$  természetes volta miatt kommutatív. A III. és V. részdiagramok a  $(Q, R, \mathcal{V}, \mathcal{Z})$  adjunkcióra vonatkozó azonosságok miatt kommutatívak, tehát a (2.13.2) diagram teljesen kommutatív. Ezt a tényt, valamint a  $\mathcal{Z}_1$  természetes transzformáció definícióját felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Z}}_1 &= RY^{\#}\mathcal{Z}.R\mathcal{Z}_1.R.\mathcal{V}XR = RY^{\#}\mathcal{Z}.R\mathcal{Z}Y^{\#}QR.RQ\mathcal{Z}QR.RQX\mathcal{V}R.\mathcal{V}XR = \\ &= \mathcal{Z}.id_{XR} = \mathcal{Z}\end{aligned}$$

Ezzel a (2.13) tételt bebizonyítottuk.  $\square$

2.14. Következmény A (2.11) és (2.13) tételek felhasználásával könnyen belátható, hogy bármely  $X$  és  $Y$  input funktorok, valamint  $\mathcal{Z}: X \rightarrow Y^{\#}$  természetes transzformáció esetén  $\mathcal{Z}^{\#} = \mathcal{Z}_{\#}$ . Azaz  $\mathcal{Z}$ -nak a direkt állapotu és inverz állapotu kiterjesztései megegyeznek.

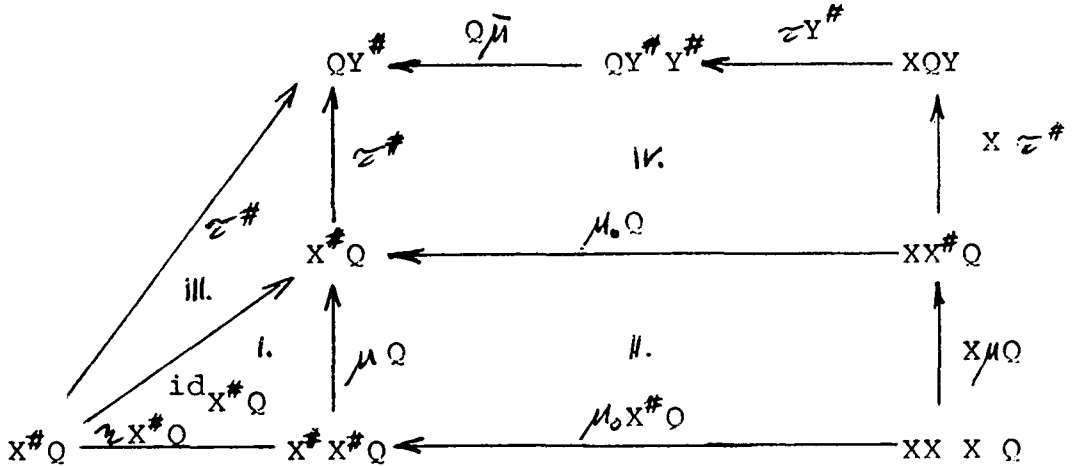
#### 2.15. Következmény

A  $\mathcal{Q}: X^{\#} \rightarrow Y^{\#}$  természetes transzformáció akkor és csak akkor inverz állapotu automata transzformáció, ha megvalósítható olyan direkt állapotu  $X$ - $Y$  automatával, amely állapotfunktorának létezik bal adjungáltja.

2.16. Lemma Legyenek  $X$  és  $Y$  input funktorok a  $\mathcal{J}$  kategóriában, és használjuk a szabad dinamikák szokásos jelölését. Ekkor bármely  $\mathcal{Z}: XQ \rightarrow QY^{\#}$  természetes transzformáció esetén kommutatív a (2.16.1) diagram, ahol a  $\mathcal{Z}^{\#}: X^{\#}Q \rightarrow QY^{\#}$  kiterjesztést a (2.1.1) diagram definiálja.



adódóan szintén kommutativ. Az (1.16) tétel szerint az  $(Y^{\#}, \bar{\mu}, \bar{\gamma})$  hármas monadot alkot, tehát  $\bar{\mu} \cdot Y^{\#} \bar{\mu} = \bar{\mu} \cdot \bar{\mu} Y^{\#}$ , így a VI. is kommutativ. A VII. részdiagram  $\mathcal{Z}$  természetes volta miatt kommutativ, tehát (2.16.2) teljesen kommutativ. A (2.16.3) I. és II. részdiagramja  $\mu$  definíciója szerint, IV. pedig  $\mathcal{Z}^{\#}$  definíciója szerint kommutativ, tehát (2.16.3) teljesen kommutativ.



2.16.3

Az  $F = X^{\#}Q$ ,  $H = QY^{\#}$ ,  $\alpha = \mathcal{Z}^{\#}$  és  $\beta = Q\bar{\mu} \cdot \mathcal{Z}Y^{\#}$  jelöléseket bevezetve, alkalmazhatjuk az (1.15) tételt, amely szerint pontosan egy olyan  $\alpha^{\#}: X^{\#}F \rightarrow H$  természetes transzformáció létezik, amelyre az (1.15.2) diagram kommutativ. Tehát felhasználva a (2.16.2) és (2.16.3) diagramok kommutativitását, azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{Z}^{\#} \cdot \mu Q = Q\bar{\mu} \cdot \mathcal{Z}^{\#} Y^{\#} \cdot X^{\#} \mathcal{Z}^{\#}.$$

Ezzel a (2.16.1) diagram kommutativitását bebizonyítottuk.  $\square$



2.17. Tétel Az automata transzformációk osztálya zárt a kompozícióra nézve. Azaz bármely  $\varphi_1: X^\# \rightarrow Y^\#$  X-Y és

$\varphi_2: Y^\# \rightarrow Z^\#$  Y-Z automata transzformáció esetén

$\varphi_2 \cdot \varphi_1: X^\# \rightarrow Z^\#$  X-Z automata transzformáció lesz.

Bizonyítás

A feltétel szerint van olyan  $\mathcal{Q}_1 = (Q_1, \alpha_1, \tau_1, \beta_1)$  X-Y, illetve  $\mathcal{Q}_2 = (Q_2, \alpha_2, \tau_2, \beta_2)$  Y-Z automata, hogy  $\varphi_1 = \psi \mathcal{Q}_1$  és  $\varphi_2 = \psi \mathcal{Q}_2$ .

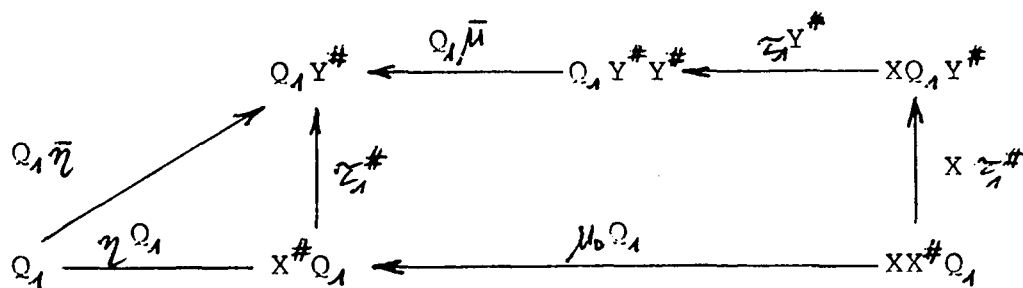
Jelöljük az A objektum feletti megfelelő szabad dinamikákat a következő hármasokkal;  $(X^\#A, \mu_A; \eta_A)$ ,  $(Y^\#A, \bar{\mu}_A; \bar{\eta}_A)$ , illetve  $(Z^\#A, \bar{\mu}_A; \bar{\eta}_A)$ .

Ekkor a feltevés szerint

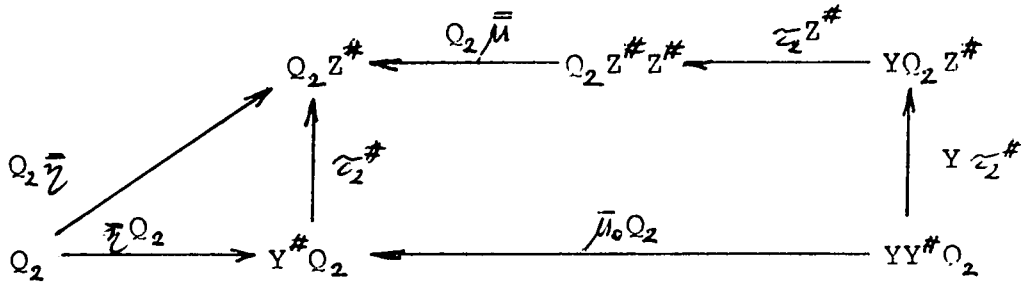
$$\varphi_1 = \beta_1 Y^\# \cdot \tau_1^\# \cdot X^\# \alpha_1 \text{ és}$$

$$\varphi_2 = \beta_2 Z^\# \cdot \tau_2^\# \cdot Y^\# \alpha_2, \text{ ahol a } \tau_1^\# \text{ és } \tau_2^\#$$

természetes transzformációkra teljesül a (2.17.1) illetve (2.17.2) diagramok kommutativitása.



2.17.1



2.17.2

Tekintsük a  $\mathcal{A} = (Q, \alpha, \tau, \beta)$  X-Z automatát, hol

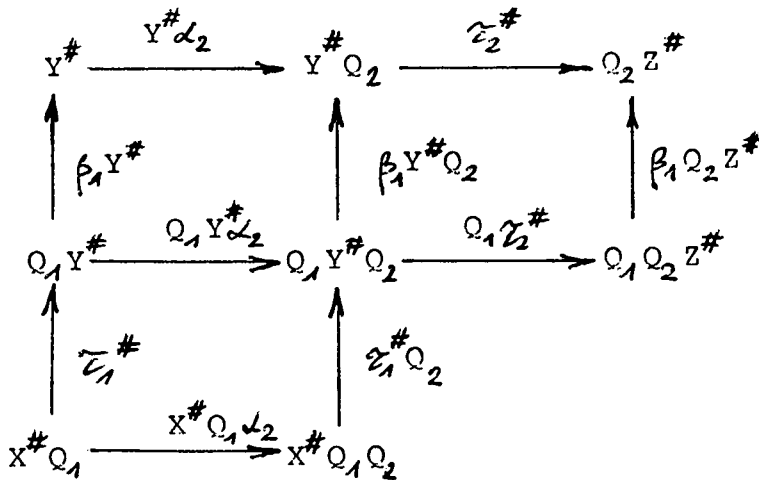
$$\alpha : I \xrightarrow{\alpha_1} Q_1 \xrightarrow{Q_1 \alpha_2} Q_1 Q_2,$$

$$Q = Q_1 Q_2,$$

$$\tau : X Q_1 Q_2 \xrightarrow{\tau_1 Q_2} Q_1 Y^\# Q_2 \xrightarrow{Q_1 \tau_2^\#} Q_1 Q_2 Z^\#,$$

$$\beta : Q_1 Q_2 \xrightarrow{\beta_1 Q_2} Q_2 \xrightarrow{\beta_2} I.$$

Megmutatjuk, hogy  $\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \varphi_{\mathcal{A}}$ . Vegyük először a (2.17.3) diagramot, amelyben a I. részdiagram  $\bar{z}_1^\#$ , a II. és III. pedig  $\beta_1$  természetes volta miatt kommutatív, tehát (2.17.3) teljesen kommutatív.



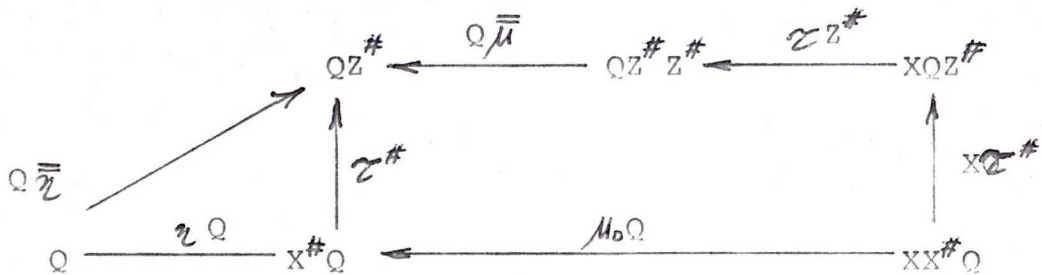
2.17.3

$\varphi_1$  és  $\varphi_2$  előállítását, valamint a (2.17.3) diagram kommutativitását felhasználva kapjuk a következő egyenlőségeket.

$$\begin{aligned}\varphi_2 \cdot \varphi_1 &= \beta_2 z^\# \cdot z_2^\# \cdot y^\# \alpha_2 \cdot \beta_1 y^\# \cdot z_1^\# \cdot x^\# \alpha_1 = \\ &= \beta_2 z^\# \cdot \beta_1 \alpha_2 z^\# \cdot \alpha_1 z_2^\# \cdot z_1^\# \alpha_2 \cdot x^\# \alpha_1 \alpha_2 \cdot x^\# \alpha_1 = \\ &= (\beta_2 \cdot \beta_1 \alpha_2) z^\# \cdot \alpha_1 z_2^\# \cdot z_1^\# \alpha_2 \cdot x^\# (\alpha_1 \alpha_2 \cdot \alpha_1) = \\ &= \beta z^\# \cdot \alpha_1 z_2^\# \cdot z_1^\# \alpha_2 \cdot x^\# \alpha_1.\end{aligned}$$

Mivel  $\varphi_2 = \beta z^\# \cdot z^\# \cdot x^\# \alpha$ , így elegendő bebizonyítani, hogy  
 $z^\# = \alpha_1 z_2^\# \cdot z_1^\# \alpha_2$ .

Definíció szerint  $z^\#$  az az egyértelműen meghatározott természetes transzformáció, amelyre a (2.17.4) diagram kommutatív.



2.17.4

Tekintsük a (2.17.5) diagramot, amelyben I. és II. kommutativitása következik a (2.17.1) diagram kommutativitásából. A (2.16) Lemma állításából hasonlóan következik a III. és IV. diagramok kommutativitása. A V. részdíagram egyszerűen  $z_1$  természetes volta miatt kommutatív.

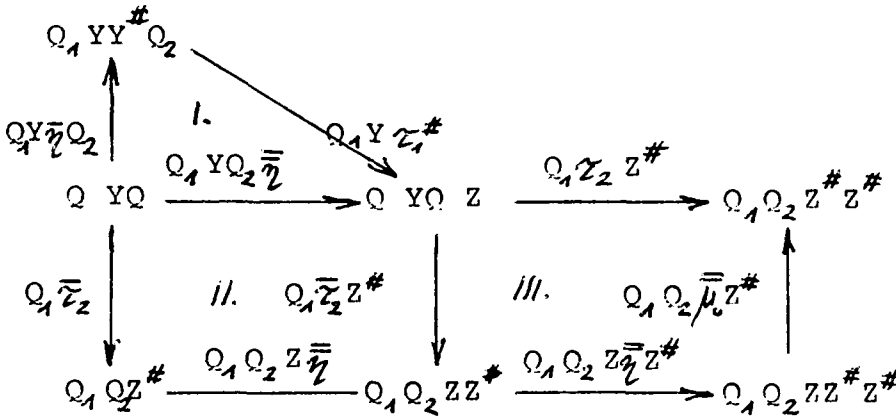




jelenti, hogy  $\tau$  hosszmegőrző.

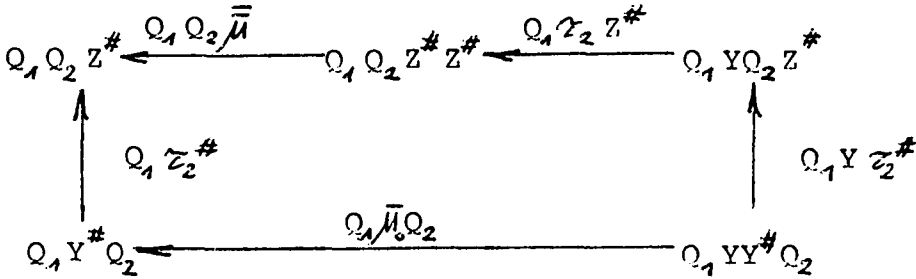
$$Q_1 \tau_2^* \tau_1 Q_2 = Q_1 Q_2 (\bar{\mu}_0 \cdot Z \bar{\eta}) \cdot Q_1 \bar{\tau}_2 \cdot \bar{\tau}_1 Q_2 \quad (2.18.1)$$

Tekintsük e célból a (2.18.2) diagramot.



### 2.18.2

A I. részdiagram a  $\tau_1^*$  kiterjesztésre vonatkozó  $\tau_1^* \cdot \bar{\eta} = \bar{\eta}$  egyenlőség miatt a II.  $\bar{\tau}_2$  természetes volta miatt a III. pedig a  $\tau_2 = Q_2 \bar{\eta}_1 \cdot \bar{\tau}_2$  egyenlőség miatt kommutatív. A (2.18.3) diagram kommutativitása következik a  $\tau_2^*$  kiterjesztést definiáló (2.17.2) diagram kommutativitásából.



### 2.18.3

Felhasználva a (2.18.2) és (2.18.3) diagramok kommutativitását, kapjuk a következő egyenlőségeket.

$$\begin{aligned} Q_1 \tau_2^* \cdot \tau_1 Q_2 &= Q_1 \tau_2^* \cdot (Q_1 \bar{\mu}_0 \cdot Q_1 Y \bar{\eta} \cdot \bar{\tau}_1) Q_2 = \\ &= Q_1 \tau_2^* \cdot Q_1 \bar{\mu}_0 Q_2 \cdot Q_1 Y \bar{\eta} Q_2 \cdot \bar{\tau}_1 Q_2 = \\ &= Q_1 Q_2 \bar{\mu} \cdot Q_1 \tau_2^* \cdot Q_1 Y \tau_2^* \cdot Q_1 Y \bar{\eta} Q_2 \cdot \bar{\tau}_1 Q_2 = \\ &= Q_1 Q_2 \bar{\mu} \cdot Q_1 Q_2 \bar{\mu}_0 Z^* \cdot Q_1 Q_2 Z \bar{\eta} Z^* \cdot Q_1 Q_2 Z \bar{\eta} \cdot Q_1 \bar{\tau}_2 \cdot \bar{\tau}_1 Q_2 = \\ &= Q_1 Q_2 (\bar{\mu} \cdot \bar{\mu}_0 Z^* \cdot Z \bar{\eta} Z^* \cdot Z \bar{\eta}) \cdot Q_1 \bar{\tau}_2 \cdot \bar{\tau}_1 Q_2. \end{aligned}$$

A további átalakításoknál vegyük figyelembe, hogy  $\bar{\mu}$  definíciója szerint  $\bar{\mu} \cdot \bar{\mu}_0 Z^* = \bar{\mu}_0 \cdot Z \bar{\mu}$  és  $\bar{\mu} \cdot \bar{\eta} Z = \text{id}_{Z^*}$ . Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Q_1 \tau_2^* \cdot \tau_1 Q_2 &= Q_1 Q_2 (\bar{\mu}_0 \cdot Z \bar{\mu} \cdot Z \bar{\eta} Z^*) \cdot Z \bar{\eta} \cdot Q_1 \bar{\tau}_2 \cdot \bar{\tau}_1 Q_2 = \\ &= Q_1 Q_2 (\bar{\mu}_0 \cdot Z \text{id}_{Z^*} \cdot Z \bar{\eta}) \cdot Q_1 \bar{\tau}_2 \cdot \bar{\tau}_1 Q_2 = \\ &= Q_1 Q_2 (\bar{\mu}_0 \cdot Z \bar{\eta}) \cdot Q_1 \bar{\tau}_2 \cdot \bar{\tau}_1 Q_2. \end{aligned}$$

Ezzel a (2.18.1) egyenlőséget bebizonyítottuk.

**2.20. Tétel** Bármely  $\varphi_1: X^* \rightarrow Y^*$  és  $\varphi_2: Y^* \rightarrow Z^*$  inverz állapotú automata transzformáció esetén a  $\varphi_2 \cdot \varphi_1: X^* \rightarrow Z^*$  kompozíció is inverz állapotú transzformáció lesz.

#### Bizonyítás

Tegyük fel, hogy a  $\varphi_i$  transzformáció megvalósítható a

$\mathcal{A}_i = (Q_i, \mathcal{L}_i, \tau_i, \beta_i)$  ( $i = 1, 2$ ) X-Y illetve Y-Z inverz állapotú automatával. A  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) funktornak létezik a  $\bar{Q}_i$  jobb adjungáltja, így jelöljük a megfelelő adjunkciókat a  $(Q_i, \bar{Q}_i, \nu_i, \varepsilon_i)$  ( $i = 1, 2$ ) négyessel.

A 2.20. tétel értelmében létezik olyan  $\mathcal{A}_i = \langle \hat{\mathcal{L}}_i, \bar{Q}_i, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_i \rangle$  direkt állapotú X-Y illetve Y-Z automata, hogy  $\varphi_i = \varphi_{\mathcal{A}_i}$

( $i = 1, 2$ ). Ekkor, felhasználva a (2.15) tételt, létezik olyan

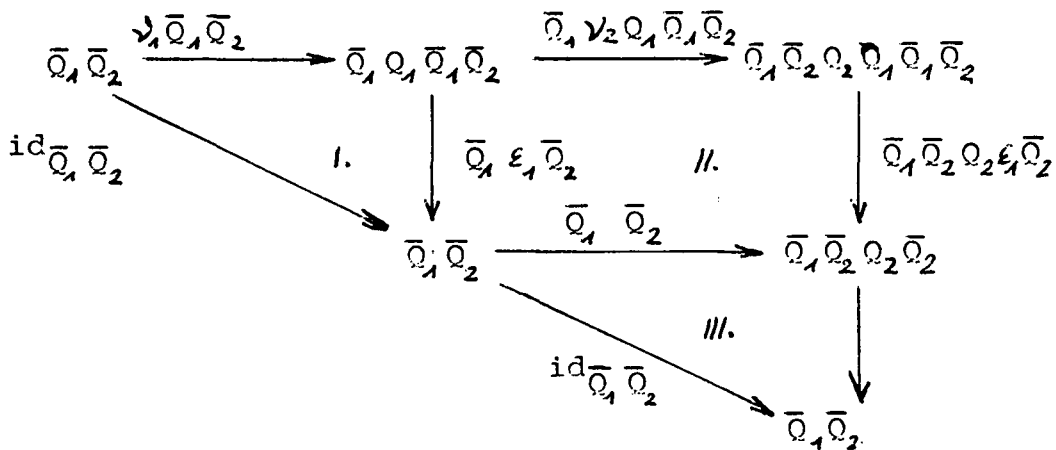
$\mathcal{A}_2$  direkt állapotú X-Z automata, hogy  $\varphi_{\mathcal{A}_2} = \varphi_{\mathcal{A}_1} \cdot \varphi_{\mathcal{A}_2} = \varphi_2 \cdot \varphi_1$ ,

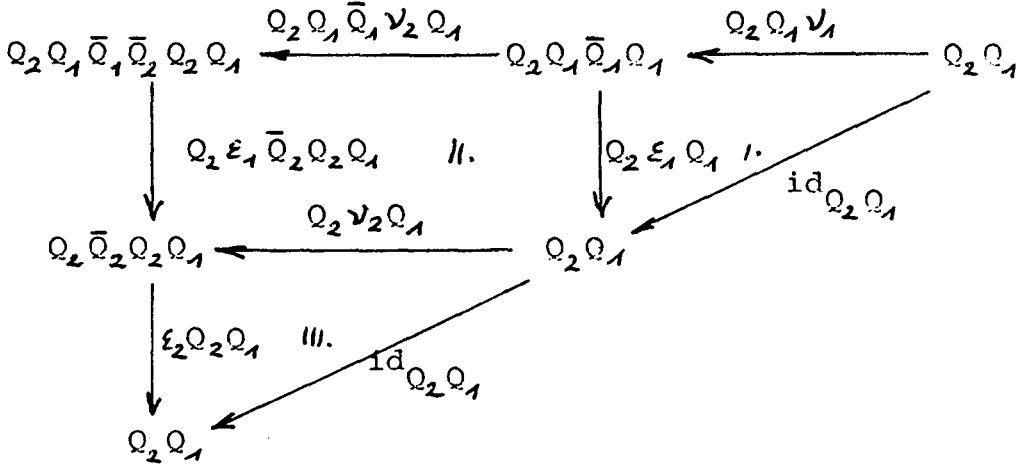
ahol a  $\mathcal{A}$  automatának az állapot funktora a  $\bar{Q}_1\bar{Q}_2$  összetett funktor.

Hivatkozva a (2.13) tételre elegendő bebizonyítani, hogy a  $\bar{Q}_1\bar{Q}_2$  funktornak létezik bal adjungáltja. Azt állítjuk, hogy a  $(Q_2Q_1, \bar{Q}_1\bar{Q}_2, \nu, \varepsilon)$  négyes adjunkció lesz, ha  $\nu$ -t és  $\varepsilon$ -t a következőképp definiáljuk.

$$\begin{aligned} \nu: I &\xrightarrow{\nu_1} \bar{Q}_1Q_1 \xrightarrow{\bar{Q}_1\nu_2Q_1} \bar{Q}_1\bar{Q}_2Q_2Q_1 \\ \varepsilon: Q_2Q_1\bar{Q}_1\bar{Q}_2 &\xrightarrow{Q_2\varepsilon_1\bar{Q}_2} Q_2\bar{Q}_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} I \end{aligned}$$

Be kell tehát bizonyítani, hogy teljesülnek az adjunkciókra előírt háromszög azonosságok. Ez azt jelenti, hogy elegendő belátni, hogy a (2.20.1) és (2.20.2) diagramok teljesen kommutatívak.





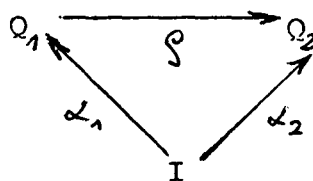
## 2.20.2

A (2.20.1) és (2.20.2) diagramban a I. részdiagramok a  $(Q_1, \bar{Q}_1, v_1, \epsilon_1)$  adjunkcióra vonatkozó háromszög azonosságok miatt kommutativ. Hasonlóképpen a III. részdiagramok a  $(Q_2, \bar{Q}_2, v_2, \epsilon_2)$  adjunkcióra vonatkozó háromszög azonosságok miatt kommutativ. A II.-vel jelzett részdiagramok is kommutativok, mivel  $v_2$  és  $\epsilon_1$  természetes. Ez azt jelenti, hogy  $\bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \epsilon_1 v_2 \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 = id_{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2}$  és  $\epsilon_2 Q_2 Q_1 \cdot Q_2 Q_1 v_1 = id_{Q_2 Q_1}$ , azaz teljesülnek a megkívánt azonosságok.  $\square$

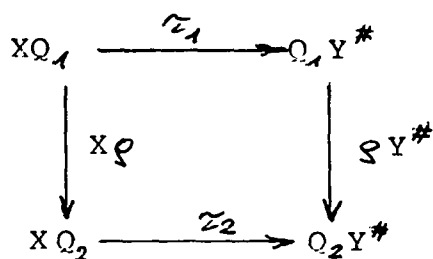
2.21. Következmény Hosszmegőrző inverz állapotú automata transzformációk kompozíciója és hosszmegőrző inverz állapotú.



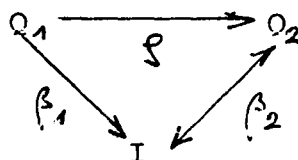
2.22. Definíció Tekintsük a  $\mathcal{V}_1 = (Q_1, \alpha_1, \tau_1, \beta_1)$  és a  $\mathcal{V}_2 = (Q_2, \alpha_2, \tau_2, \beta_2)$  X-Y automatákat. A  $\varphi: Q_1 \rightarrow Q_2$  természetes transzformációt a  $\mathcal{V}_1$  automatából a  $\mathcal{V}_2$ -be való automata morfizmusnak /szimulációnak/ nevezzük, ha teljesül az alábbi diagramok kommutativitása



2.22.1



2.22.2

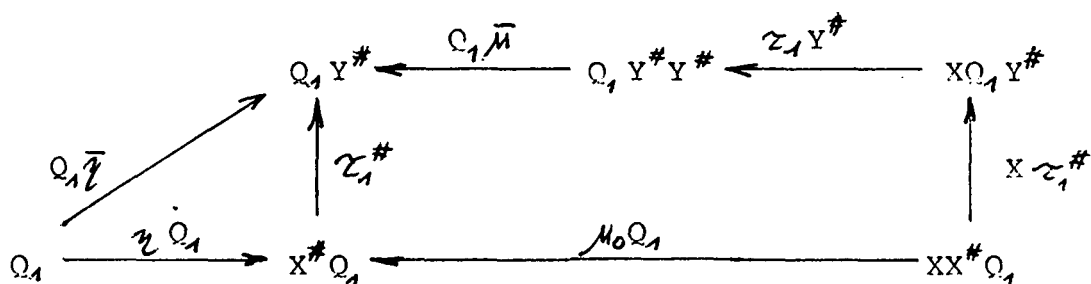


2.22.3

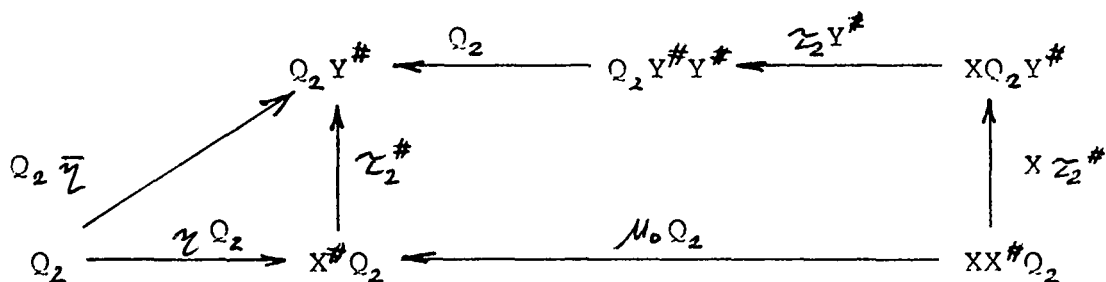
2.23. Tétel Ha létezik  $\mathcal{V}_1 = (Q_1, \alpha_1, \tau_1, \beta_1)$  X-Y automatából a  $\mathcal{V}_2 = (Q_2, \alpha_2, \tau_2, \beta_2)$  X-Y automatába automata morfizmus, akkor  $\varphi_{\mathcal{V}_1} = \varphi_{\mathcal{V}_2}$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy  $\varphi: Q_1 \rightarrow Q_2$  automata morfizmus  $\mathcal{V}_1$ -ből  $\mathcal{V}_2$ -be, tehát teljesül a 2.22 definíció három diagramjának kommutativitása  $\varphi$ -ra. Jelöljük az A objektum feletti szabad X illetve Y dinamikákat  $(X^\#A, \mu_0A; \gamma_A)$  il-

letve  $(Y^{\#}A, \bar{\mu}_0A; \bar{\gamma}A)$ -val. Ekkor  $\varphi_{\alpha_1} = \beta_1 Y^{\#} \cdot \tau_1^{\#} \cdot X^{\#} \alpha_1$  és  $\varphi_{\alpha_2} = \beta_2 Y^{\#} \cdot \tau_2^{\#} \cdot X^{\#} \alpha_2$ , ahol  $\tau_1^{\#}$  a  $\varphi_{\alpha_1}$ ,  $\tau_2^{\#}$  pedig a  $\varphi_{\alpha_2}$  automata transzformációja, azaz olyan egyértelműen meghatározott természetes transzformációk, amelyekre rendre a (2.23.1) illetve (2.23.2) diagramok teljesen kommutatívak.

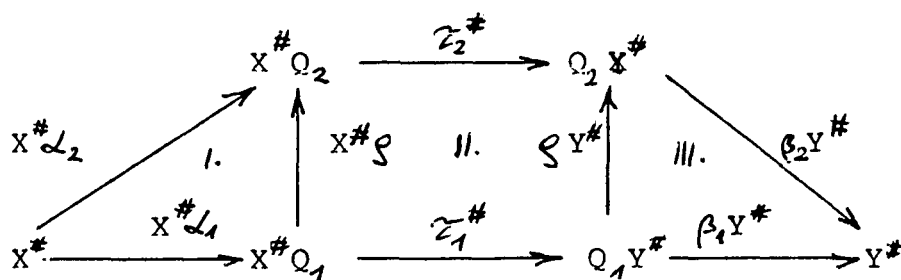


2.23.1



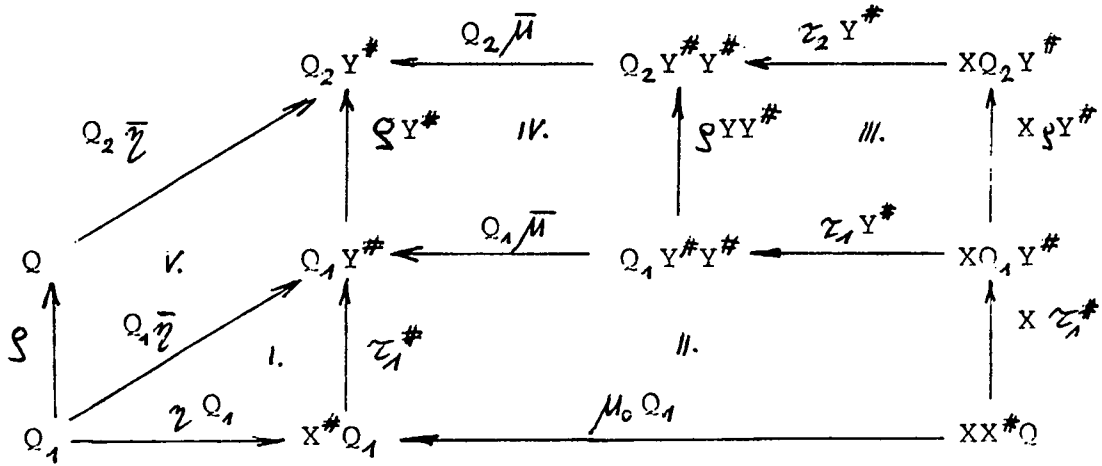
2.23.2

Nyilvánvaló, hogy a (2.23.3) diagram kommutativitásából következik a  $\varphi_{\alpha_1} = \varphi_{\alpha_2}$  egyenlőség, tehát elegendő behizonyítani (2.23.3) kommutativitását.

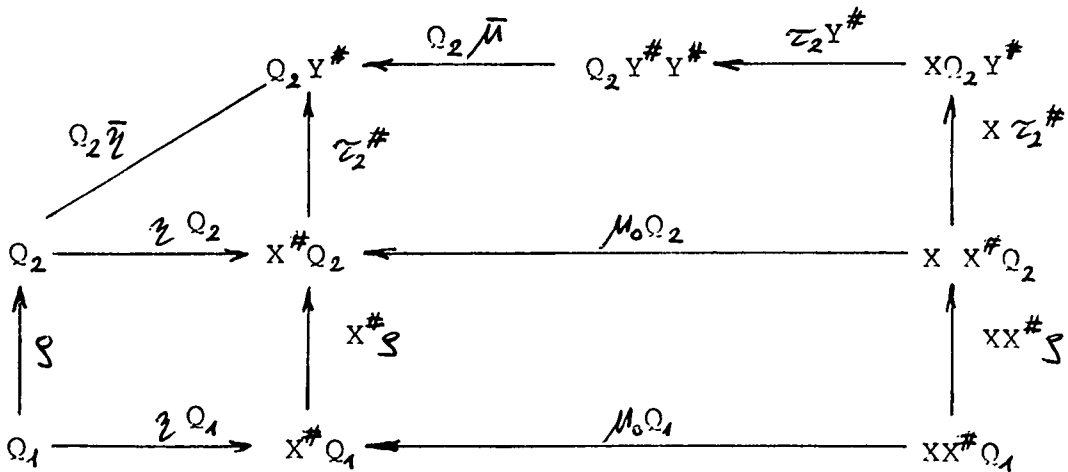


2.23.3

A (2.22) definíció szerint  $\alpha_2 = \mathcal{S} \cdot \alpha_1$  így  $x^{\#} \alpha_2 = x^{\#}(\mathcal{S} \cdot \alpha_1) =$   
 $= x^{\#} \mathcal{S} \cdot x^{\#} \alpha_1$ , továbbá  $\beta_1 = \beta_2 \cdot \mathcal{S}$  így  $\beta_1 Y^{\#} = (\beta_2 \cdot \mathcal{S}) Y^{\#} =$   
 $= \beta_2 Y^{\#} \cdot \mathcal{S} Y^{\#}$ , tehát a I. és III. részdiagramok kommutatívak.  
 Hátra van még a II. részdiagram kommutativitásának igazolása.  
 Tekintsük e célból a (2.23.4) és (2.23.5) diagramokat.



2.23.4



2.23.5

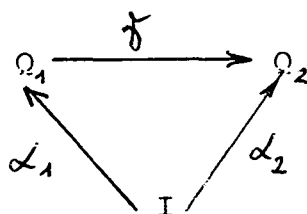
A (2.23.4) diagramban a I. és II. kommutatívak, mivel éppen ezt fejezi ki a (2.23.1) ábra. A III. kommutativitása következik a  $\mathcal{Q}$ -ra vonatkozó (2.22.2) feltételből. A IV. és V. részdiagramok  $\mathcal{S}$  természetes volta miatt kommutatívak, te-

hát a (2.23.4) teljesen kommutatív.

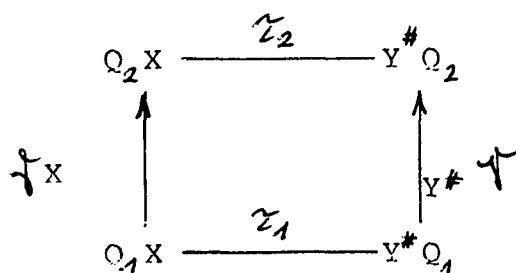
A (2.23.5) diagramban a IV. és III. megegyezik a (2.23.2)-vel, tehát kommutatív. A I. az  $\gamma$ , a II. pedig  $\mu_0$  természetes volta miatt kommutatív, tehát a (2.23.5) diagram is teljesen kommutatív. Vegyük észre ezek után, hogy  $\varphi^{X\#} \cdot \tau_1^{\#}$  és a  $\tau_2^{\#} \cdot X^{\#} \varphi$  morfizmusok mindegyike a  $Q_2 \bar{\gamma} \cdot \varphi$ -nak az  $X Q_2 Y^{\#} \xrightarrow{Q_2 \bar{\mu}_0 \cdot \tau_2^{\#} \cdot \tau_1^{\#}} Q_2 Y^{\#}$  X-dinamikára vonatkozó szabad kiterjesztései. A kiterjesztés azonban egyértelmű, tehát  $\varphi^{Y\#} \cdot \tau_1^{\#} = \tau_2^{\#} \cdot X^{\#} \varphi$ . □ A (2.23) tétellel analóg állítás mondható ki az inverz állapotú automatákra, amennyiben a homomorfizmust a következőképpen definiáljuk.

2.24. Definíció Legyen a  $\mathcal{U}_1 = (Q_1, \mathcal{L}_1, \tau_1, \beta_1)$  és a

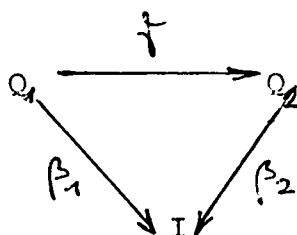
$\mathcal{U}_2 = (Q_2, \mathcal{L}_2, \tau_2, \beta_2)$  inverz állapotú X-Y automata. A  $f: Q_1 \rightarrow Q_2$  természetes transzformációt a  $\mathcal{U}_1$  inverz állapotú automatából a  $\mathcal{U}_2$  automatába való automata-morfizmusnak nevezzük, ha  $f$ -ra teljesül az alábbi diagramok kommutativitása.



2.24.1



2.24.2



### 2.24.3

2.25. Tétel Legyen  $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \alpha_1, \tau_1, \beta_1)$  és  $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \alpha_2, \tau_2, \beta_2)$  inverz állapotú X-Y automata, továbbá  $f: Q_1 \rightarrow Q_2$  morfizmus a  $\mathcal{M}_1$ -ből  $\mathcal{M}_2$ -be. Ekkor  $\varphi_{\mathcal{M}_1} = \varphi_{\mathcal{M}_2}$ .

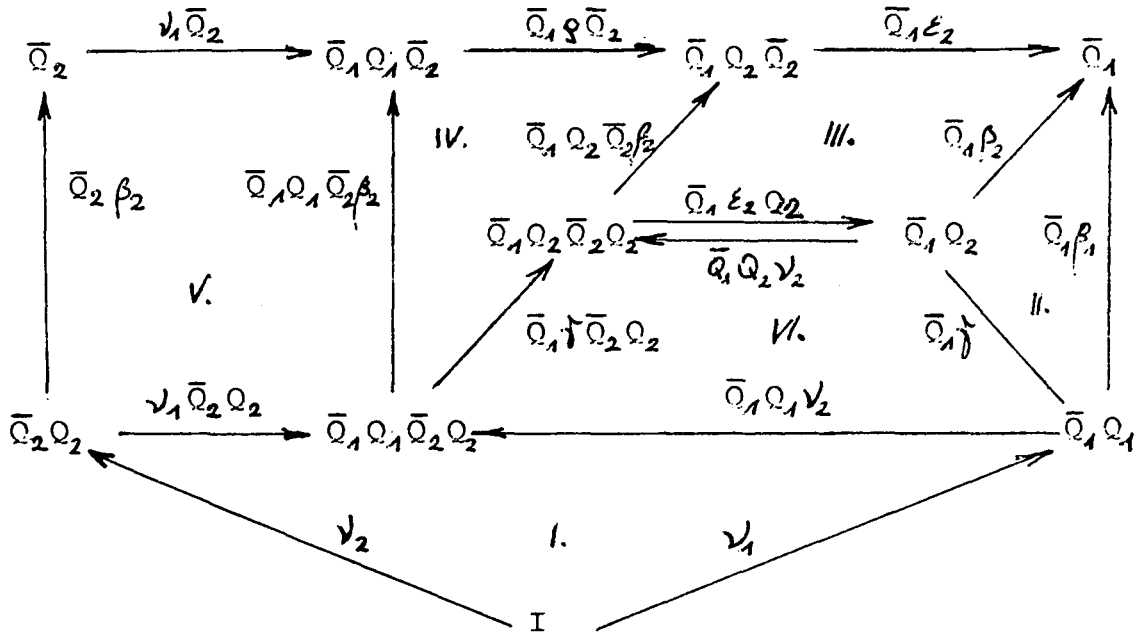
Bizonyítás A feltételek szerint a  $Q_1$  és  $Q_2$  állapot funk-  
toroknak létezik jobb adjungáltja. Jelöljük a megfelelő ad-  
junkciókat a  $(Q_1, \bar{Q}_1, \nu_1, \varepsilon_1)$  illetve a  $(Q_2, \bar{Q}_2, \nu_2, \varepsilon_2)$   
négyessel. A (2.11) tétel szerint létezik olyan  $\mathcal{L}_{2i} =$   
 $= (\bar{Q}_i, \hat{\alpha}_i, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_i)$  ( $i = 1, 2$ ) X-Y automata, hogy  $\varphi_{\mathcal{M}_1} = \varphi_{\mathcal{L}_1}$   
és  $\varphi_{\mathcal{M}_2} = \varphi_{\mathcal{L}_2}$ , ahol

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_i &= \bar{Q}_i \beta_i \cdot \nu_i, \\ \hat{\tau}_i &= \bar{Q}_i Y^\# \varepsilon_i \cdot \bar{Q}_i \tau_i \bar{Q}_i \cdot \nu_i X \bar{Q}_i, \\ \hat{\beta}_i &= \varepsilon_i \cdot \alpha_i \bar{Q}_i, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

A (2.23) tétel értelmében elegendő megmutatni, hogy létezik  
automata-morfizmus a  $\mathcal{L}_2$  direkt állapotú automatából a  $\mathcal{L}_1$   
automatába.

Bebizonyítjuk, hogy a  $\bar{f}: \bar{Q}_2 \xrightarrow{\nu_2 \bar{Q}_2} \bar{Q}_1 Q_1 \bar{Q}_2 \xrightarrow{\bar{Q}_1 \tau \bar{Q}_2} \bar{Q}_1 Q_2 \bar{Q}_2 \xrightarrow{\bar{Q}_1 \varepsilon_2} \bar{Q}_1$   
természetes transzformáció teljesíti a (2.11) definíció három  
diagramjának kommutativitását, azaz automata morfizmus lesz  
a  $\mathcal{L}_2$  automatából a  $\mathcal{L}_1$  automatába.

/i/ A  $\hat{\mathcal{L}}_2 = \hat{\mathcal{L}}_1$  egyenlőség igazolása végett tekintsük a (2.25.1) diagramot.



2.25.1

A II. részdiagram a  $\mathcal{J}$  természetes transzformációra vonatkozó (2.24.3);  $\beta_1 = \beta_2 \cdot \mathcal{J}$  egyenlőség miatt kommutatív. Az összes többi részdiagramról, a bennük előforduló természetes transzformációk és a rájuk vonatkozó kommutációk figyelembe vételével, könnyen belátható, hogy kommutatívak. Ennek alapján teljesül a (2.25.2) egyenlőség.

$$\bar{Q}_1 \epsilon_2 \cdot \bar{Q}_1 \mathcal{J} \bar{Q}_2 \cdot \nu_1 \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_2 \beta_2 \cdot \nu_2 = \bar{Q}_1 \beta_2 \cdot \bar{Q}_1 \epsilon_2 \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \nu_2 \cdot \bar{Q}_1 \mathcal{J} \cdot \nu_1$$

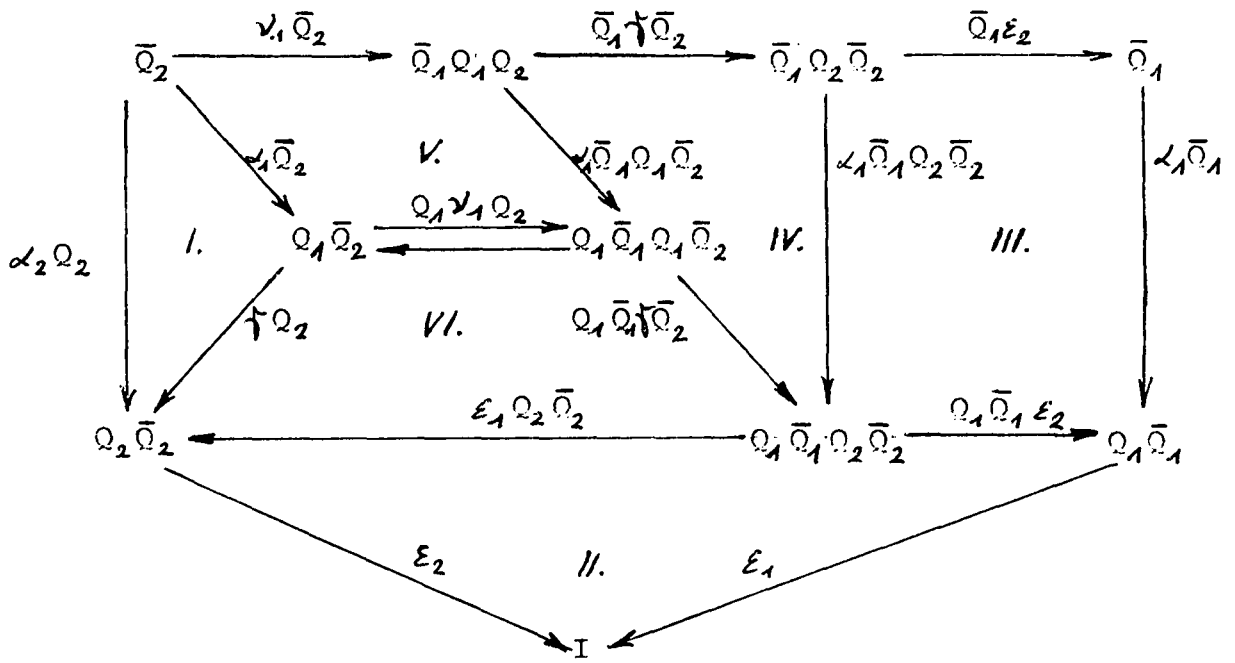
(2.25.2)

A  $(Q_2, Q_2, \nu_2, \epsilon_2)$  adjunkcióra vonatkozó  $\epsilon_2 Q_2 \cdot Q_2 \nu_2 = \text{id}_{Q_2}$  azonosság miatt a (2.25.2) egyenlőség a következőképpen írható:

$$\bar{Q}_1 \beta_2 \cdot \bar{Q}_1 \mathcal{J} \cdot \nu_1 = \bar{Q}_1 \beta_1 \cdot \nu_1.$$

/ii/ A /i/ esethez hasonlóan bizonyítható a  $\hat{\beta}_1 \cdot \hat{\rho} = \hat{\beta}_2$

egyenlőség is. A (2.25.3) diagram I. részdiagramja a (2.24.1),  $\nabla \cdot \omega_1 = \omega_2$  egyenlőség alapján kommutatív. A többi részdiagram itt is a természetes transzformációkra vonatkozó felcserélhetőség miatt kommutatívok.



2.25.3

Felhasználva a (2.25.3) diagram kommutativitását, kapjuk a (2.25.4) egyenlőséget.

$$\varepsilon_1 \cdot \omega_1 \bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_1 \varepsilon_2 \cdot \bar{Q}_1 \nabla \bar{Q}_2 \cdot \nu_1 \bar{Q}_2 = \varepsilon_2 \cdot \nabla \bar{Q}_2 \cdot \varepsilon_1 Q_1 \bar{Q}_2 \cdot Q_1 \nu_1 \bar{Q}_2 \cdot \omega_1 \bar{Q}_2$$

2.25.4

Figyelembe véve a  $(Q_1, \bar{Q}_1, \nu_1, \varepsilon_1)$  adjunkcióra teljesülő  $\text{id}_{Q_1} = \varepsilon_1 Q_1 \cdot Q_1 \nu_1$  egyenlőséget, valamint a I. diagram kommutativitását, a bizonyítandó

$$\varepsilon_1 \cdot \omega_1 \bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_1 \varepsilon_2 \cdot \bar{Q}_1 \nabla \bar{Q}_2 \cdot \nu_1 \bar{Q}_2 = \varepsilon_2 \cdot \omega_2 \bar{Q}_2$$

egyenlőséget kapjuk.

/iii/ A  $\hat{\mathcal{C}}_1 \cdot X \bar{Y} = \bar{Y} Y^* \cdot \hat{\mathcal{C}}_2$  egyenlőség bizonyítása végett tekintsük a (2.25.5) és (2.25.6) diagramokat.

A (2.25.5) diagramban valamennyi részdigram a természetes transzformációkra vonatkozó négyszög diagram kommutativitása miatt kommutativ, tehát a diagram teljesen kommutativ. Ennek alapján

$$\begin{aligned} \bar{Y} Y^* \cdot \hat{\mathcal{C}}_2 &= \bar{Q}_1 \varepsilon_2 Y^* \cdot \bar{Q}_1 \gamma Q_2 Y^* \cdot \nu_1 \bar{Q}_2 Y^* \cdot \bar{Q}_2 Y^* \varepsilon_2 \cdot \bar{Q}_2 \tau_2 \bar{Q}_2 \cdot \nu_2 X \bar{Q}_2 = \\ &= \bar{Q}_1 Y^* \varepsilon_2 \cdot \bar{Q}_1 \tau_2 \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_1 \varepsilon_2 Q_2 X \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_1 Q_2 \nu_2 X \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_1 \gamma X \bar{Q}_2 \cdot \nu_1 X \bar{Q}_2 \end{aligned}$$

### 2.25.7

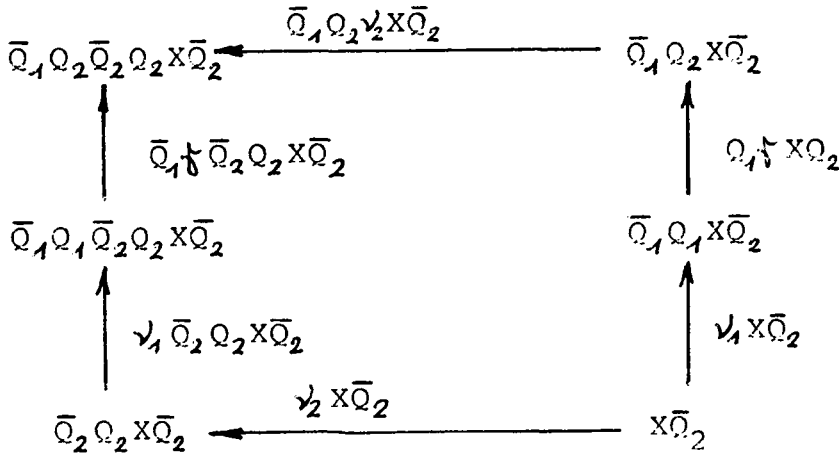
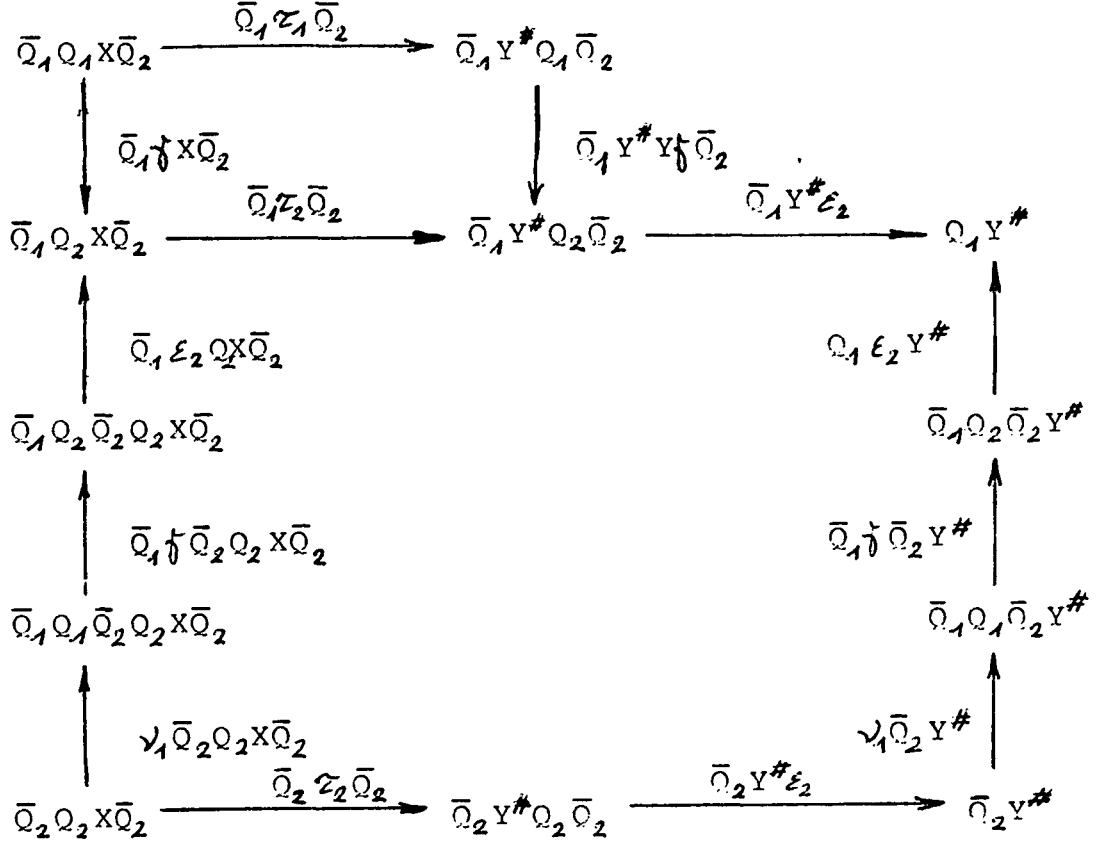
Felhasználva a  $(Q_2, \bar{Q}_2, \nu_2, \varepsilon_2)$  adjunkcióra teljesülő  $\varepsilon_2 Q_2 \cdot Q_2 \nu_2 = \text{id}_{Q_2}$  azonosságot, valamint a I. kommutativitást, a (2.25.7) egyenlőség a következőképpen írható:  $\bar{Y} Y^* \cdot \hat{\mathcal{C}}_2 = \bar{Q}_1 Y^* \varepsilon_2 \cdot \bar{Q}_1 Y^* \gamma \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_1 \tau_1 \bar{Q}_2 \cdot \nu_1 X \bar{Q}_2$  (2.25.8)

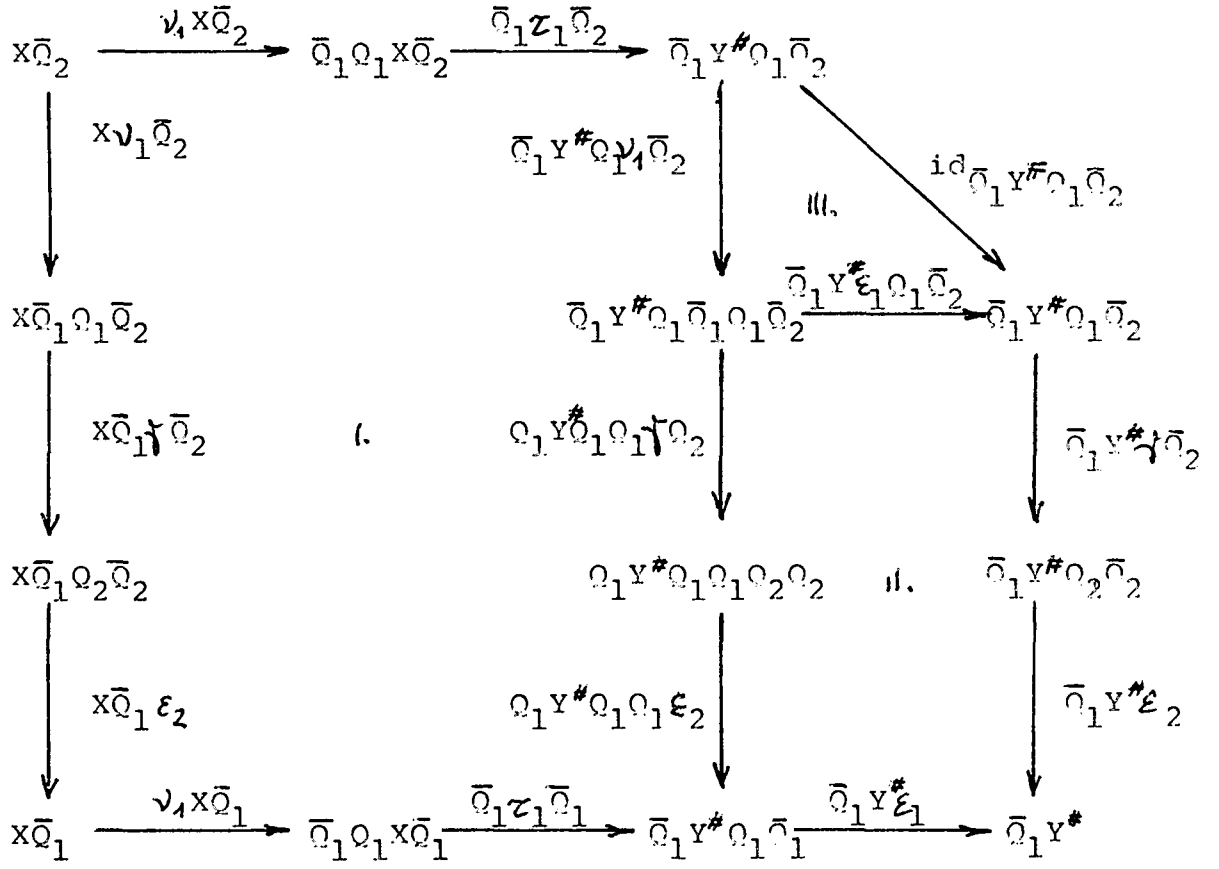
A (2.25.6) diagram kommutativitása hasonlóan látható be, mint a (2.25.5)-é. Itt a III. kommutativitása következik az  $\varepsilon_1 Q_1 \cdot Q_1 \nu_1 = \text{id}_{Q_1}$  azonosságból, amely az első adjunkcióra vonatkozik. Tehát teljesül a

$$\hat{\mathcal{C}}_1 \cdot X \bar{Y} = \bar{Q}_1 Y^* \varepsilon_2 \cdot \bar{Q}_1 Y^* \gamma \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_1 \tau_1 \bar{Q}_2 \cdot \nu_1 X \bar{Q}_2 \quad \text{egyenlőség.}$$

Figyelembe véve a (6.4.8) egyenlőséget,  $\hat{\mathcal{C}}_1 \cdot X \bar{Y} = \bar{Y} Y^* \cdot \hat{\mathcal{C}}_2$ .  $\square$

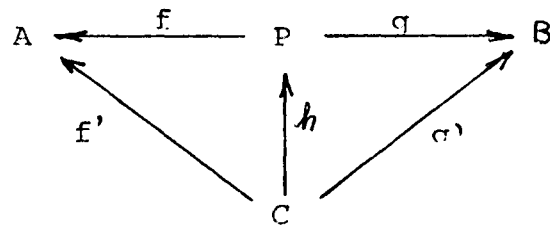




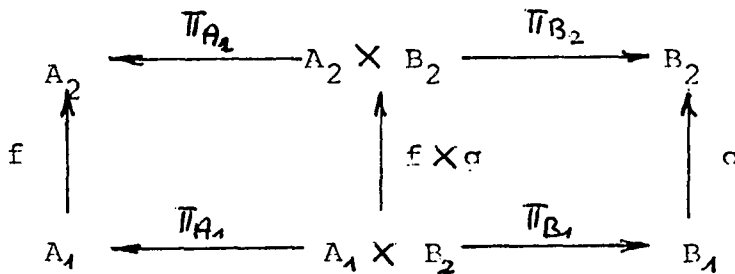


### 3. Szekvenciális transzformációk

3.1. Definíció Tekintsük a  $\mathcal{K}$  kategóriában a  $A \xleftarrow{f} P \xrightarrow{g} B$  diagramot, amelyet szorzat diagramnak, a  $P$  objektumot pedig  $A$  és  $B$  szorzatának nevezünk, ha bármely  $f':C' \rightarrow A$  és  $g':C' \rightarrow B$  morfizmushoz van olyan egyértelműen meghatározott  $h:C' \rightarrow P$  morfizmus, amelyre az alábbi diagram kommutatív:

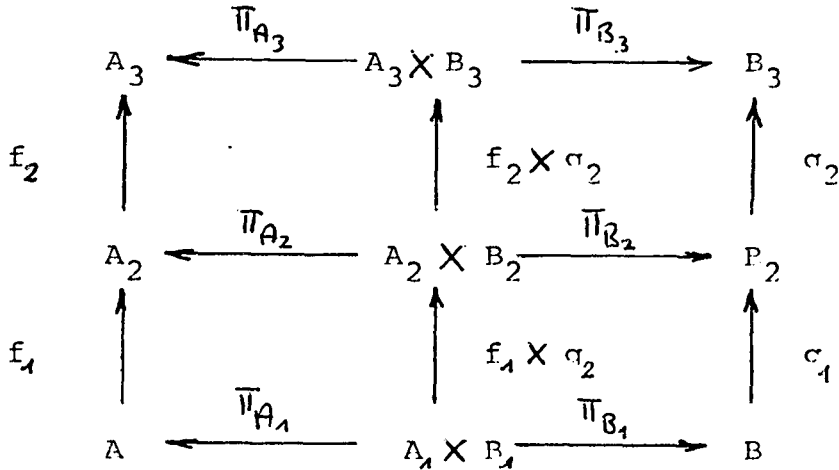


Könnyen belátható, hogy ha az  $A$  és  $B$  objektumoknak létezik szorzata, akkor az izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott. Így bevezethetjük az  $A \times B$  jelölést  $A$  és  $B$  szorzatára, továbbá a  $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$  szorzat-diagram jelet. Tegyük fel, hogy létezik az  $A_1 \times B_1$  és az  $A_2 \times B_2$  szorzat. Ekkor az  $f:A_1 \rightarrow A_2$  és  $g:B_1 \rightarrow B_2$  morfizmusok  $f \times g:A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$  szorzatát az alábbi diagram definiálja



3.2. Állítás Tegyük fel, hogy  $\mathcal{K}$  kategóriában léteznek az  $A_1 \times B_1$ ,  $A_2 \times B_2$ ,  $A_3 \times B_3$  szorzatok. Ekkor bármely  $f_1:A_1 \rightarrow A_2$ ,  $f_2:A_2 \rightarrow A_3$  és  $g_1:B_1 \rightarrow B_2$ ,  $g_2:B_2 \rightarrow B_3$  morfizmusok esetén az  $(f_2 \times g_2) \cdot (f_1 \times g_1) = (f_2 f_1) \times (g_2 g_1)$

állítás következik az alábbi diagram teljesen kommutatív voltából, valamint az  $(f_2 f_1) \times (g_2 g_1)$  szorzat morfizmus egyértelműségéből.



**3.3. Definíció** Azt mondjuk, hogy a  $\mathcal{V}$  kategóriában létezik szorzat, ha bármely két A és B objektumnak létezik szorzata.

**3.4. Definíció** Az A objektumot terminális objektumnak nevezzük, ha bármely B objektumhoz egyetlen  $t: B \longrightarrow A$  morfizmus létezik.

Mivel a terminális objektum izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott, bevezethetjük rá az 1 jelölést, illetve az A-ból 1-be mutató morfizmusra az  $\omega_A: A \longrightarrow 1$  jelet.

**3.5. Definíció** Bármely A objektumhoz tekintsük az

$$(A \times -): \text{Obj}(\mathcal{V}) \longrightarrow \text{Obj}(\mathcal{V});$$

$$B \longmapsto A \times B, \text{ illetve}$$

$$(A \times -): f \downarrow \longmapsto \begin{array}{c} A \times B \\ \downarrow \\ A \times C \end{array} \quad \text{id}_A \times f$$

hozzárendelést. Az (3.2) Állítást felhasználva könnyen belátható, hogy a fenti két hozzárendelés endofunktort határoz

meg a  $\mathcal{K}$  kategóriában, amelyet /az A objektumhoz tartozó/ szorzat-funktornak nevezünk.

3.6. Definíció Tekintsük az  $(A \times -)$  és  $(B \times -)$  szorzat-funktorokat, valamint az  $f: A \longrightarrow B$  morfizmust. Mivel bármely  $h: C_1 \longrightarrow C_2$  morfizmus esetén az

$$\begin{array}{ccc} A \times C_1 & \xrightarrow{\text{id}_A \times h} & A \times C_2 \\ \downarrow f \times \text{id}_{C_1} & & \downarrow f \times \text{id}_{C_2} \\ B \times C_1 & \xrightarrow{\text{id}_B \times h} & B \times C_2 \end{array}$$

diagram kommutatív, így az  $\tilde{f}: C \longmapsto f \times \text{id}_C$  hozzárendelés természetes transzformációt definiál  $(A \times -)$ -ből  $(B \times -)$  be.

3.7. Definíció Tegyük fel, hogy a  $\mathcal{K}$  kategóriában létezik szorzat. Definiáljuk ekkor bármely  $F$  és  $G: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$  funktor esetén az  $F \times G: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$  funktort az

$$(F \times G)A = FA \times GA$$

$$(F \times G)f = Ff \times Gf$$

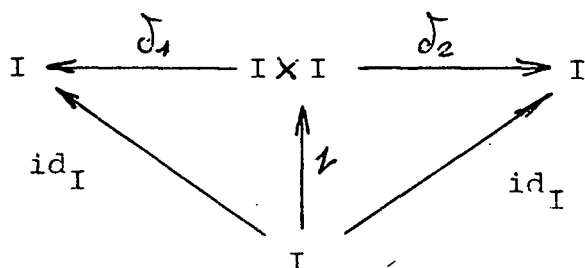
összefüggésekkel. Nyilvánvaló, hogy így tényleg funktort kapunk, továbbá, hogy

$$F \xleftarrow{\alpha_1} F \times G \xrightarrow{\alpha_2} G$$

szorzat diagram lesz a  $\mathcal{K}^{\mathcal{K}}$  funktor-kategóriában, ahol  $\alpha_1$  illetve  $\alpha_2$  az a természetes transzformáció, amelyekre minden A objektum esetén  $FA \xleftarrow{\alpha_1 A} FA \times GA \xrightarrow{\alpha_2 A} GA$  szorzat diagram lesz a  $\mathcal{K}$  kategóriában.

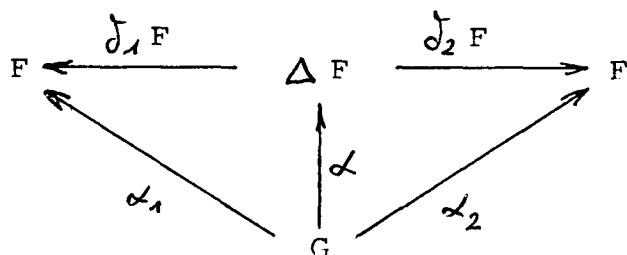
3.8. Definíció Jelöljük  $\Delta$ -val az  $I \times I$  funktort, továbbá legyen  $\iota: I \longrightarrow \Delta$  az az egyértelműen meghatározott termé-

szetes transzformáció, amelyre az alábbi diagram kommutativ,  
ahol  $I \xleftarrow{\mathcal{J}_1} I \times I \xrightarrow{\mathcal{J}_2} I$  szorzat-diagram



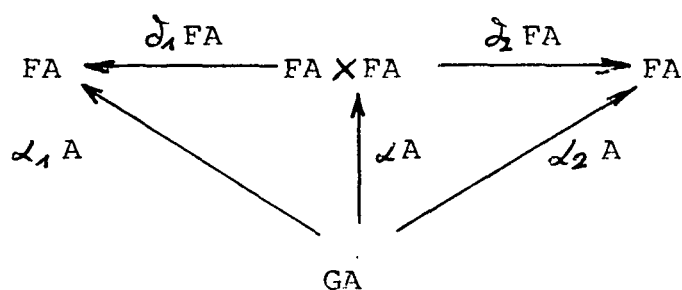
3.9. Állítás Ha  $I \xleftarrow{\mathcal{J}_1} \Delta \xrightarrow{\mathcal{J}_2} I$  szorzat diagram a  $\mathcal{K}$  kategóriában, akkor bármely  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  funktor esetén  $F \xleftarrow{\mathcal{J}_1 F} \Delta F \xrightarrow{\mathcal{J}_2 F} F$  is szorzat diagram a  $\mathcal{K}$  kategóriában.

Bizonyítás Legyenek  $\alpha_1: G \rightarrow F$  és  $\alpha_2: G \rightarrow F$  tetszőleges természetes transzformációk. Megmutatjuk, hogy van olyan egyértelműen meghatározott  $\alpha: G \rightarrow \Delta F$  természetes transzformáció, amelyre (3.9.1) kommutativ.



3.9.1

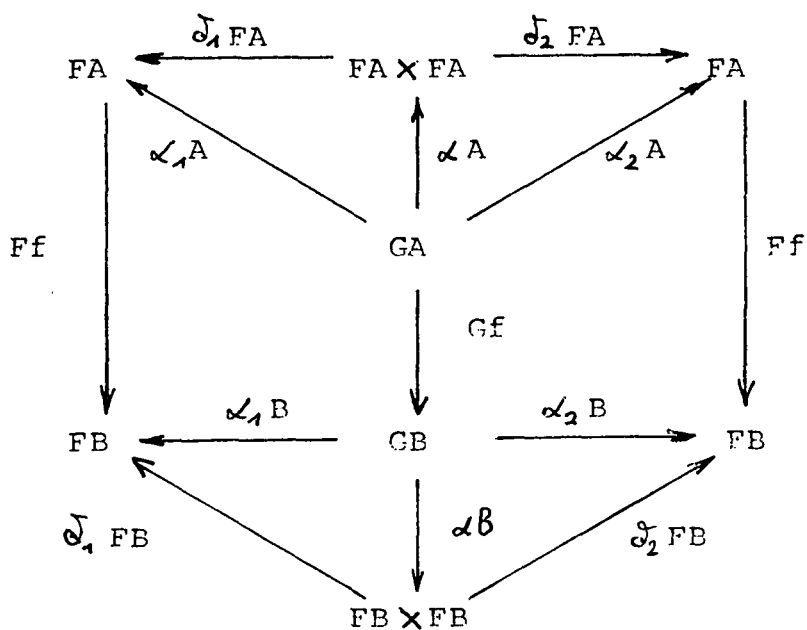
Mivel  $FA \xleftarrow{\mathcal{J}_1 FA} \Delta FA = FA \times FA \xrightarrow{\mathcal{J}_2 FA} FA$  szorzat diagram a kategóriában, így van olyan egyértelműen meghatározott  $\alpha_A$ -val jelölt morfizmus, amelyre (3.9.2) diagram kommutativ.



3.9.2

Elegendő tehát megmutatni, hogy  $\alpha A$  természetes  $A$ -ban, azaz bármely  $f:A \longrightarrow B$  morfizmus esetén  $\Delta Ff. \alpha A = \alpha B. Gf$ .

A bizonyítás érdekében nézzük a (3.9.3) diagramot, amely figyelembe véve (3.9.2) kommutativitását, valamint  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  természetes voltát, teljesen kommutatív



3.9.3

Mivel  $\Delta Ff$  definíciója szerint  $\mathcal{J}_1^{FB} \cdot \Delta Ff = Ff \cdot \mathcal{J}_1^{FA}$  és  $\mathcal{J}_2^{FB} \cdot \Delta Ff = Ff \cdot \mathcal{J}_2^{FA}$ , így (3.9.3) kommutativitását felhasználva

$$\mathcal{J}_1^{FB} \cdot \Delta Ff \cdot \alpha A = Ff \cdot \mathcal{J}_1^{FA} \cdot \alpha A = Ff \cdot \alpha_1 A \quad \text{és}$$

$$\mathcal{J}_2^{FB} \cdot \Delta Ff \cdot \alpha A = Ff \cdot \mathcal{J}_2^{FA} \cdot \alpha A = Ff \cdot \alpha_2 A$$

Már most  $FB \xleftarrow{\mathcal{J}_1^{FB}} FB \times FB \xrightarrow{\mathcal{J}_2^{FB}} FB$  szorzat diagram és (3.9.3) kommutativ, tehát

$$\Delta Ff \cdot \alpha A = \alpha B \cdot Gf. \square$$

3.10. Definíció Legyen  $A$  tetszőleges objektum a  $\mathcal{K}$  kategóriában. Jelöljük  $C_A$ -val a konstans  $A$  értékű endofunktort, azaz amelyre tetszőleges  $B$  objektum és  $f: B \longrightarrow D$  morfizmus esetén

$$C_A B = A \quad \text{és} \quad C_A f = \text{id}_A.$$

Látható, hogy így valóban funktort definiáltunk.

3.11. Definíció Jelöljük minden  $f: A \longrightarrow B$  morfizmus esetén  $\tilde{f}$ -el az  $\tilde{f}: D \longmapsto f$  hozzárendelés által definiált  $f: C_A \xrightarrow{\cdot} C_B$  természetes transzformációt.

3.12. Definíció Ha a  $\mathcal{K}$  kategóriában létezik terminális objektum, akkor az az  $\omega$  hozzárendelés, amelynek értéke bármely  $A$  objektum esetén az  $\omega A: A \longrightarrow 1$  egyetlen  $A$ -ból az  $1$  terminális objektumba való morfizmus, természetes transzformáció lesz az  $I$  funktorból a  $C_1$  funktorba, ugyanis az alábbi diagram kommutativ, mivel  $\omega A$  az egyetlen  $A$ -ból  $1$ -be ható morfizmus

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\omega A} & C_1 A = 1 \\ f \downarrow & & \downarrow C_1 f = \text{id}_1 \\ B & \xrightarrow{\omega B} & C_1 B = 1 \end{array}$$



3.13. Definíció Tegyük fel, hogy a  $\mathcal{K}$  kategóriában létezik szorzat, és legyen A tetszőleges objektum  $\mathcal{K}$ -ban. Tekintsük ezt a  $\pi_A^1$  és  $\pi_A^2$  hozzárendelést, amelyre tetszőleges B objektum esetén

$$\pi_A^1: B \rightarrow h_1, \quad \pi_A^2: B \rightarrow h_2, \quad \text{ahol}$$

$A \xleftarrow{h_1} A \times B \xrightarrow{h_2} B$  szorzat-diagram. Mivel tetszőleges  $f: B \rightarrow B'$  morfizmus esetén, ha  $A \xleftarrow{h'_1} A \times B' \xrightarrow{h'_2} B'$  szorzat-diagram, akkor a

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{h_1} & A \times B & \xrightarrow{h_2} & B \\ \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \text{id}_A \times f & & \downarrow f \\ A & \xleftarrow{h'_1} & A \times B' & \xrightarrow{h'_2} & B' \end{array}$$

3.13.1

diagram definíció szerint kommutatív, tehát  $\pi_A^1$  és  $\pi_A^2$  természetes B-ben, azaz kapjuk a

$$\pi_A^1: (A \times -) \rightarrow C_A$$

$$\pi_A^2: (A \times -) \rightarrow I$$

természetes transzformációkat.

A konstans funktor definíciója alapján könnyen igazolható, hogy érvényesek a következő állítás azonosságai.

3.14. Állítás Tetszőleges A objektum, X, Y endofunktor és  $\alpha: X \rightarrow Y$  természetes transzformáció esetén

$$/a/ \quad XC_A = C_{XA}$$

$$/b/ \quad C_A X = C_A$$

$$/c/ \quad \alpha C_A = \widetilde{\alpha} \quad \left( :XC_A = C_{XA} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} C_{YA} = YC_A \right)$$

$$/d/ \quad C_A \alpha = id_{C_A}$$

$$/e/ \quad id_{C_A} = \widetilde{id}_A$$

3.15. Állítás Ha a  $\mathcal{K}$  kategóriában létezik szorzat, akkor bármely A objektum,  $X, Y: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$  funktor és  $\alpha: X \longrightarrow Y$  természetes transzformáció esetén

$$/a/ \quad (AX-)X = C_A \times X$$

$$/b/ \quad \Delta X = X \times X$$

$$/c/ \quad (AX-) \alpha = id_{C_A} \times \alpha$$

Ezen fejezet további részében feltételezzük, hogy a  $\mathcal{K}$  kategóriában létezik szorzat és terminális objektum, és ezekre az eddig bevezetett jelöléseket használjuk.

3.16. Definíció A  $\mathcal{A} = (Q, \alpha, \tau, \beta)$  X-Y automatát szekvenciálisnak nevezzük, ha a Q állapot funktor szorzat-funktor, tehát  $Q = (Q_0 X -)$  valamely  $Q_0$  objektumra, továbbá  $\beta = \pi_{Q_0}^2$ , tehát a végállapot transzformáció a szorzatban a második komponensre való projekció.

A  $\varphi: X^\# \longrightarrow Y^\#$  természetes transzformációt szekvenciális automata transzformációnak, vagy röviden szekvenciálisnak nevezzük, ha megvalósítható szekvenciális X-Y automatával.

Legyenek X és Y input funktorok a  $\mathcal{K}$  kategóriában, és jelöljük a megfelelő szabad dinamikákat a szokásos módon.

A rövidebb írásmód kedvéért vezessük be a  $\Gamma = (X^\# \mid X -)$  funktor jelölést.

Legyen továbbá  $\varphi : X^\# \longrightarrow Y^\#$  tetszőleges természetes transzformáció és tekintsük az ehhez tartozó

$$\bar{\varphi} : X^\# \xrightarrow{\iota_X^\#} \Delta X^\# \xrightarrow{\Sigma^\# \omega_X \varphi} X^\# C_1 X Y^\# = \Gamma Y^\#$$

természetes transzformációt.

Ekkor igaz a következő

**3.16. Tétel** A  $\varphi : X^\# \longrightarrow Y^\#$  természetes transzformáció akkor és csak akkor szekvenciális, ha van olyan  $\kappa : I \longrightarrow I$  és  $\lambda : X\Gamma \longrightarrow Y^\#$  természetes transzformáció, amelyekre kommutativ a (3.16.1) és (3.16.2) diagram.

$$\begin{array}{ccc} X^\# & \xrightarrow{\varphi} & Y^\# \\ \uparrow \eta & & \uparrow \bar{\eta} \\ I & \xrightarrow{\kappa} & I \end{array}$$

3.16.1

$$\begin{array}{ccccc} X^\# & \xrightarrow{\varphi} & Y^\# & & \\ \uparrow \mu_0 & & \uparrow \bar{\mu} & & \\ XX^\# & \xrightarrow{X\bar{\varphi}} & X\Gamma Y^\# & \xrightarrow{\lambda Y^\#} & Y^\# Y^\# \end{array}$$

3.16.2

Megjegyzés A  $\varphi: X^\# \rightarrow Y^\#$  természetes transzformációt identitás, illetve kezdőszelet megőrzőnek nevezzük, ha van olyan  $\kappa$  és  $\lambda$  természetes transzformáció, amelyre kommutatív a (3.16.1) illetve (3.16.2) diagram.

Bizonyítás Elegendőség: Tekintsük az  $I \xrightarrow{\eta} X^\# \xrightarrow{\bar{X}^\# \omega} X^\# C_1 = C_{X^\# 1}$ , valamint az

$$X \Gamma = X(X^\# 1 X -) \xrightarrow{\sum \pi_{\bar{X}^\# 1}'} X C_{X^\# 1} = X X^\# C_1 \xrightarrow{\mu_0 C_1} X^\# C_1 = C_{X^\# 1}$$

természetes transzformációkat, és ezek figyelembevételével definiáljuk az

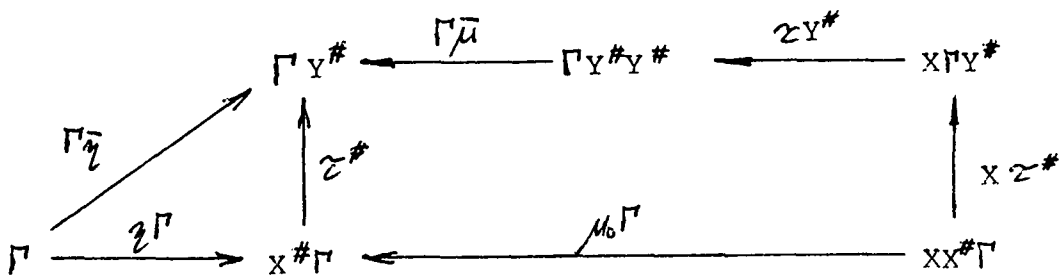
$$\alpha: I \xrightarrow{1} \Delta = I \times I \xrightarrow{\sum \bar{X}^\# \omega \cdot \eta \times \kappa} C_{X^\# 1} \times I = \Gamma,$$

$$: X \Gamma \xrightarrow{\eta \times \Gamma} \Delta X \Gamma = X \Gamma \times X \Gamma \xrightarrow{\mu_0 C_1 \cdot \sum \pi_{\bar{X}^\# 1}' \times \lambda} C_{X^\# 1} \times Y^\# = \Gamma Y^\#$$

$$\beta = \pi_{X^\# 1}^2: \Gamma = (X^\# 1 X -) \rightarrow I$$

természetes transzformációkat. Definiáljuk ezek felhasználásával a  $\mathcal{A} = (\Gamma, \alpha, \tau, \beta)$   $X$ - $Y$  automatát. Megmutatjuk, hogy

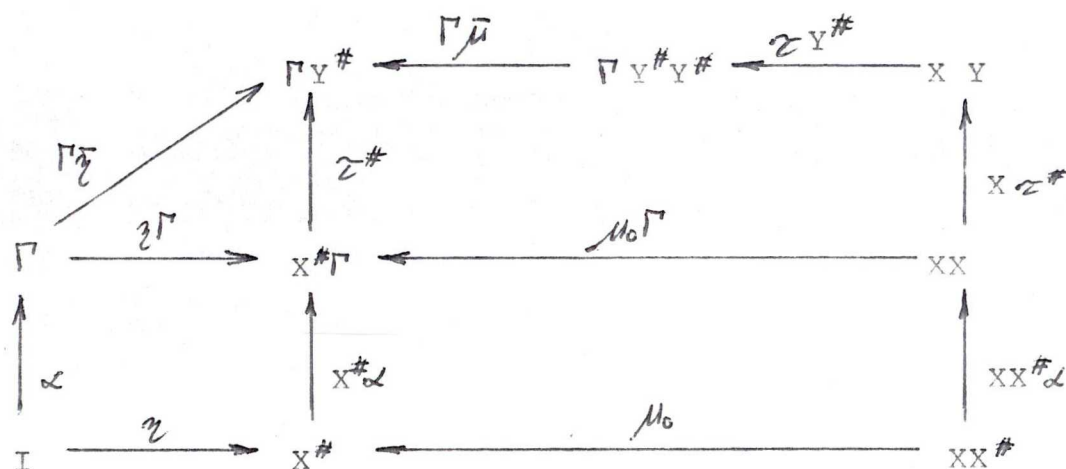
$\varphi = \varphi_{\mathcal{A}} = \beta Y^\# \cdot \tau^\# \cdot X^\# \alpha$ , ahol  $\tau^\#$  a  $\tau$  kiterjesztése, tehát az az egyetlen  $X^\# \Gamma \rightarrow \Gamma Y^\#$  természetes transzformáció, amelyre a (3.16.3) diagram kommutatív



Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy teljesül a

$$\bar{\varphi} = \tau^{\#} \cdot x^{\#} \alpha \quad (3.16.4)$$

egyenlőség. A (3.16.4) diagram teljesen kommutatív (3.16.3) kommutativitása, valamint  $\tau$  és  $\mu_0$  természetes volta miatt. Tehát  $\tau^{\#} \cdot x^{\#} \alpha$  szabad kiterjesztése a  $\Gamma \bar{\tau} \cdot \alpha$  természetes transzformációnak.



3.16.5

A szabad kiterjesztés egyértelműségét kihasználva elegendő bebizonyítani a (3.16.4) teljesüléséhez, hogy (3.16.5)-ben  $\tau^{\#} \cdot x^{\#} \alpha$ -t  $\bar{\varphi}$ -al helyettesítve a keletkező diagram is kommutatív, tehát, hogy fennállnak a (3.16.6) és (3.16.7) egyenlőségek.

$$\Gamma \bar{\tau} \cdot \alpha = \bar{\varphi} \cdot \tau \quad (3.16.6)$$

$$\varphi \cdot \mu_0 = \Gamma \bar{\mu} \cdot \tau Y^{\#} \cdot x^{\#} \bar{\varphi} \quad (3.16.7)$$

Figyelembe véve  $\alpha$  definícióját, a 3.14.d azonosságot, valamint a tétel /i/ feltételét, kapjuk a



$$\begin{aligned} \Gamma \bar{\gamma} . \alpha &= (x^\# 1 \times -) \bar{\gamma} . (x^\# \omega . \gamma \times \kappa) . 1 = (\text{id}_{C_{X^\# 1}} \times \bar{\gamma}) . (x^\# \omega . \gamma \times \kappa) . 1 = \\ &= (x^\# \omega . \gamma \times \bar{\gamma} . \kappa) . 1 = (x^\# \omega . \gamma \times \varphi . \gamma) . 1 \quad \text{egyenlőséget.} \end{aligned}$$

Felhasználva  $\bar{\varphi}$  definícióját, valamint a (3.16.8) diagram kommutativitását, kapjuk a

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} . \gamma &= (x^\# \omega \times \varphi) . 1 x^\# . \gamma = (x^\# \omega \times \varphi) . \Delta \gamma . 1 = \\ &= (x^\# \omega \times \varphi) . (\gamma \times \gamma) . 1 = (x^\# \omega . \gamma \times \varphi . \gamma) . 1 \quad \text{egyenlőséget.} \end{aligned}$$

Ezzel a (3.16.4) egyenlőséget bebizonyítottuk.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{1} & \Delta = I \times I \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \Delta \gamma = \gamma \times \gamma \\ X & \xrightarrow{1 \times x^\#} & \Delta X^\# = X^\# \times X^\# \end{array}$$

3.16.8

A (3.16.7) egyenlőség bizonyítása végett tekintsük a (3.16.9) diagramot, amely  $1$  természetes volta miatt kommutatív.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1 \times x^\#} & \Delta X^\# \\ \uparrow \mu_0 & & \uparrow \Delta \mu_0 \\ X \times X^\# & \xrightarrow{1 \times X \times x^\#} & \Delta X \times X \end{array}$$

3.16.9

$$\begin{aligned} \text{Érvényes tehát a } \bar{\varphi} \cdot \mu_0 &= (x^\# \omega \times \varphi) \cdot 1_{x^\#} \cdot \mu_0 = \\ &= (x^\# \omega \times \varphi) \cdot \Delta \mu_0 \cdot 1_{xx^\#} = (x^\# \omega \cdot \mu_0 \times \varphi \cdot \mu_0) \cdot 1_{xx^\#} \end{aligned}$$

átalakítás. Alkalmazva most a tétel /ii/ feltételét, kapjuk, hogy

$$\bar{\varphi} \cdot \mu_0 = (x^\# \omega \cdot \mu_0 \times \mu \cdot \lambda y^\# \cdot x \bar{\varphi}) \cdot 1_{xx^\#} \quad 3.16.10$$

A (3.16.7) egyenlőség jobb oldalára a következő egyenlőségek érvényesek, felhasználva definícióját, valamint a (3.16.11) diagram kommutativitását, amely 1 természetes voltának következménye.

$$\begin{array}{ccc} x \Gamma y^\# & \xrightarrow{1_{x \Gamma y^\#}} & \Delta x \Gamma y^\# \\ \uparrow x \bar{\varphi} & & \uparrow \Delta x \bar{\varphi} \\ x x^\# & \xrightarrow{1_{xx^\#}} & \Delta x x^\# \end{array}$$

3.16.11

$$\begin{aligned} \Gamma \bar{\mu} \cdot \lambda y^\# \cdot x \bar{\varphi} &= \Gamma \bar{\mu} \cdot (\mu_0 c_1 \cdot x \pi_{x^\# 1}' \times \lambda) y^\# \cdot 1_{x \Gamma y^\#} \cdot x \bar{\varphi} = \\ &= \Gamma \bar{\mu} \cdot (\mu_0 c_1 \cdot x \pi_{x^\# 1}' y^\# \times \lambda y^\#) \cdot \Delta x \bar{\varphi} \cdot 1_{xx^\#} = \\ &= \Gamma \bar{\mu} \cdot (\mu_0 c_1 \cdot x \pi_{x^\# 1}' y^\# \cdot x \bar{\varphi} \times \lambda y^\# \cdot x \bar{\varphi}) \cdot 1_{xx^\#} = \\ &= (\mu_0 c_1 \cdot x \pi_{x^\# 1}' y^\# \cdot x \bar{\varphi} \times \bar{\mu} \cdot \lambda y^\# \cdot x \bar{\varphi}) \cdot 1_{xx^\#} \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőséget onnan kapjuk, hogy

$$\Gamma \bar{\mu} = (x^\# 1 \times -) \bar{\mu} = (c_{x^\# 1} \times I) \bar{\mu} = \text{id}_{c_{x^\# 1}} \times \bar{\mu} \quad \text{a (3.15) Állítás /a/ pontja szerint.}$$

Figyelembe véve a (3.16.10) egyenlőséget, a (3.16.7) egyenlőség teljesüléséhez elegendő bebizonyítani, hogy

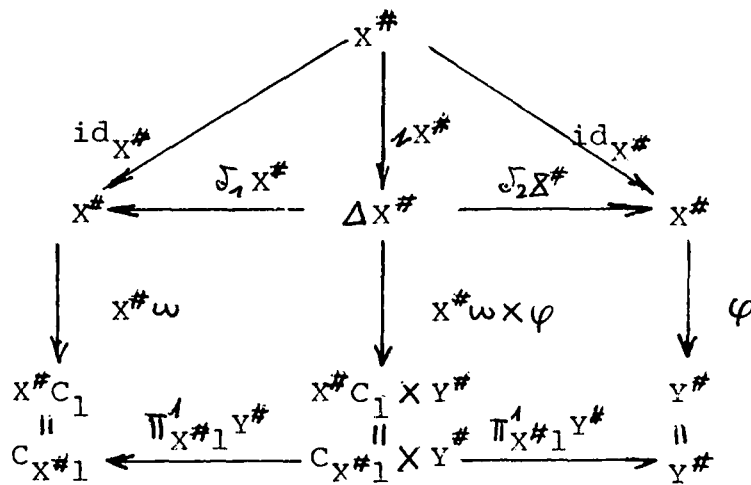
$$\mu_0 c_1 \cdot x \pi_{x^\# 1}' y^\# \cdot x \bar{\varphi} = x^\# \omega \cdot \mu_0 \quad 3.16.12$$

A  $\bar{\varphi}$  természetes transzformáció definícióját alkalmazva

$$\begin{aligned}\mu_0 C_1 \cdot X \pi_{X\#1}^1 Y^\# \cdot X \bar{\varphi} &= \mu_0 C_1 \cdot X (\pi_{X\#1}^1 Y^\# \cdot \bar{\varphi}) = \\ &= \mu_0 C_1 \cdot X (\pi_{X\#1}^1 Y^\# \cdot (X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\#)\end{aligned}$$

A (3.9) Állítást figyelembe véve, a (3.16.13) diagramban a négyszög részdiagramok kommutatívak, a háromszög részdiagramok pedig  $\iota$  definíciója szerint kommutatívak, így

$$\pi_{X\#1}^1 Y^\# \cdot (X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\# = X^\# \omega$$



3.16.13

Tehát  $\mu_0 C_1 \cdot X X^\# \omega = X^\# \omega \cdot \mu_0$ , azaz teljesül a (3.16.12) egyenlőség, és így a bizonyítandó (3.16.7) is. Ezzel bebizonyítottuk a  $\bar{\varphi} = \tau^\# \cdot X^\# \omega$  egyenlőséget. Ezt felhasználva, valamint figyelembe véve a (3.16.13) kommutativitását, kapjuk a következő egyenlőséget;

$$\varphi \alpha = \beta Y^\# \cdot \tau^\# \cdot X^\# \omega = \pi_{X\#1}^2 Y^\# \cdot \bar{\varphi} = \pi_{X\#1}^2 Y^\# \cdot (X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\# = \varphi$$

Ezzel az /i/ és /ii/ feltételek elegetlenségét bebizonyítottuk.



## II. Szükségesség

Tegyük fel, hogy a  $\varphi: X^{\#} \rightarrow Y^{\#}$  természetes transzformáció megvalósítható a

$\mathcal{U} = (Q, \alpha, \tau, \beta)$   $X$ - $Y$  automatával, ahol

$Q = Q_0 \times I$  és  $\beta = \pi_{Q_0}^1: Q \rightarrow I$ , valamely  $Q_0$  objektumra.

Tehát  $\varphi = \varphi_{\mathcal{U}} = \beta Y^{\#} \cdot \tau^{\#} \cdot X^{\#} \alpha$ , ahol  $\tau^{\#}$  a transzformáció magja, azaz kommutatív a (3.16.14)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & QY^{\#} & \xleftarrow{Q\bar{\mu}} & QY^{\#}Y^{\#} & \xleftarrow{\tau Y^{\#}} & XQY^{\#} \\
 & \nearrow Q\bar{\tau} & \uparrow \tau^{\#} & & & & \downarrow X\tau^{\#} \\
 Q & \xrightarrow{\tau Q} & X^{\#}Q & \xleftarrow{\mu_0 Q} & XX^{\#}Q & & 
 \end{array}$$

3.16.14

Tekintsük azt az  $\mathfrak{G}: X_{C_1}^{\#} \rightarrow C_Q$  természetes transzformációt, amelyre

$$\mathfrak{G}: C_{X^{\#}I} = X^{\#}C_1 \xrightarrow{X^{\#}C_1} X^{\#}QC_1 \xrightarrow{\tau^{\#}C_1} QY^{\#}C_1 \xrightarrow{\pi_{Q_0}^1 Y^{\#}C_1} C_{Q_0}C_1 = C_{Q_0}.$$

Tehát  $\mathfrak{G} = (\pi_{Q_0}^1 Y^{\#} \cdot \tau^{\#} \cdot X^{\#}) C_1$ .

Legyen ezek után a keresett  $\kappa: I \rightarrow I$ ,  $\lambda: X\Gamma \rightarrow Y^{\#}$  természetes transzformáció a következő:

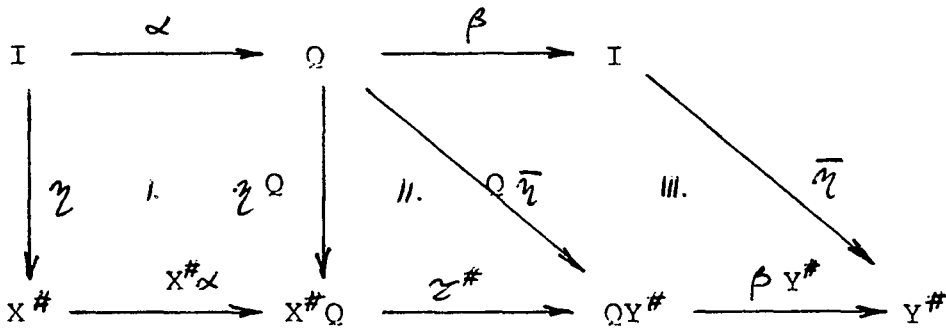
$$\begin{aligned}
 \lambda: X\Gamma &= X(C_{X^{\#}I} \times I) \xrightarrow{X(\mathfrak{G} \times \text{id}_I)} X(C_{Q_0} \times I) = XQ \xrightarrow{\tau} QY^{\#} \xrightarrow{\beta I^{\#}} Y^{\#} \\
 \kappa: I &\xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} I.
 \end{aligned}$$

Megmutatjuk először, hogy teljesül a tétel /i/ feltétele,

azaz  $\varphi \cdot \tau = \bar{\tau} \cdot \beta \cdot \alpha$ .

A (3.16.15) diagramban a I. és III. részdiagramok  $\eta$  illetve  $\bar{\eta}$  természetes volta miatt, a II. pedig  $\tau^\#$ -et definiáló (3.16.14) kommutativitása folytán kommutativak, tehát

$$\varphi \cdot \eta = \beta Y^\# \cdot \tau^\# \cdot X^\# \alpha \cdot \eta = \bar{\eta} \cdot \beta \cdot \alpha = \bar{\eta} \cdot \kappa$$

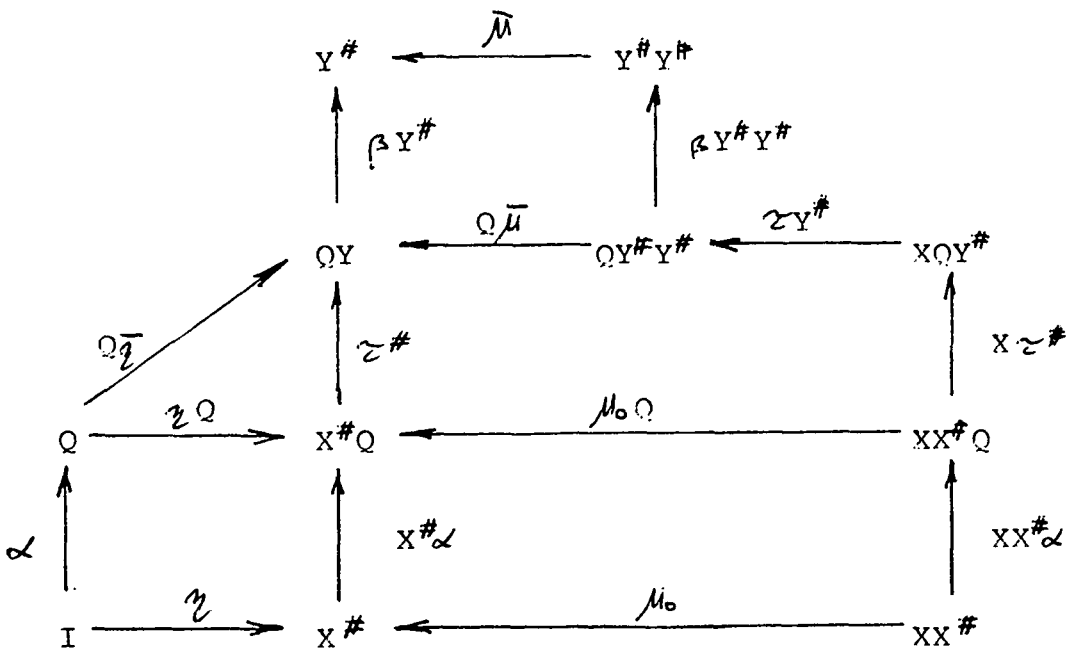


3.16.15

Hátra van még annak igazolása, hogy a tétel /ii/ feltétele is teljesül, tehát hogy

$$\varphi \cdot \mu_0 = \bar{\mu} \cdot \lambda Y^\# \cdot X \bar{\varphi} \quad 3.16.16$$

Figyelembe véve a (3.16.14) diagram kommutativitását, valamint  $\mu_0$  és  $\beta$  természetes voltát, kommutativ a (3.16.17) diagram.



3.16.17

A (3.16.17) diagram felhasználásával kapjuk a (3.16.18) egyenlőséget.

$$\varphi \cdot \mu_0 = \beta Y^\# \cdot \tau^\# \cdot X^\# \omega \cdot \mu_0 = \bar{\mu} \cdot \beta Y^\# Y^\# \cdot \tau Y^\# \cdot X(\tau^\# \cdot X^\# \omega) \quad (3.16.18)$$

Mivel  $\bar{\varphi} = (X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\#$ , így  $\lambda$  definícióját alkalmazva

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \cdot \lambda Y^\# \cdot X \bar{\varphi} &= \bar{\mu} \cdot (\beta Y^\# \cdot \tau \cdot X(\zeta \times \text{id}_I)) Y^\# \cdot X((X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\#) = \\ &= \bar{\mu} \cdot \beta Y^\# Y^\# \cdot \tau Y^\# \cdot X((\zeta Y^\# \times \text{id}_I Y^\#) \cdot (X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\#) = \\ &= \bar{\mu} \cdot \beta Y^\# Y^\# \cdot \tau Y^\# \cdot X((\zeta Y^\# \cdot X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\#). \end{aligned}$$

A (3.16.18) egyenlőség, valamint a  $\zeta Y^\# = \zeta$  egyenlőség alapján a bizonyítandó (3.16.16) egyenlőséghez elegendő bizonyítani, hogy

$$\tau^\# \cdot X^\# \omega = (\zeta \cdot X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\# \quad (3.16.19)$$

Felhasználva  $\zeta$  definícióját, valamint a (3.16.20) diagram kommutativitását, amely  $\omega$  természetes volta miatt teljesül, kapjuk, hogy

$$(\zeta \cdot X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\# = (C_{Q_0} \omega \cdot \pi_{Q_0}^1 Y^\# \cdot \tau^\# \cdot X^\# \omega \times \varphi) \cdot \iota X^\#.$$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{C_1} & X \otimes C_1 & \xrightarrow{\tau^\# C_1} & QY \otimes C_1 & \xrightarrow{\pi_{Q_0}^1 Y^\# C_1} & C_{Q_0} \otimes C_1 = C_{Q_0} \\ & \uparrow X^\# \omega & \uparrow X^\# \omega & & & & \uparrow C_{Q_0} \omega \\ X & \xrightarrow{X^\# \omega} & X \otimes Q & \xrightarrow{\tau^\#} & QY^\# & \xrightarrow{\pi_{Q_0}^1 Y^\#} & C_{Q_0} \end{array}$$

3.16.20

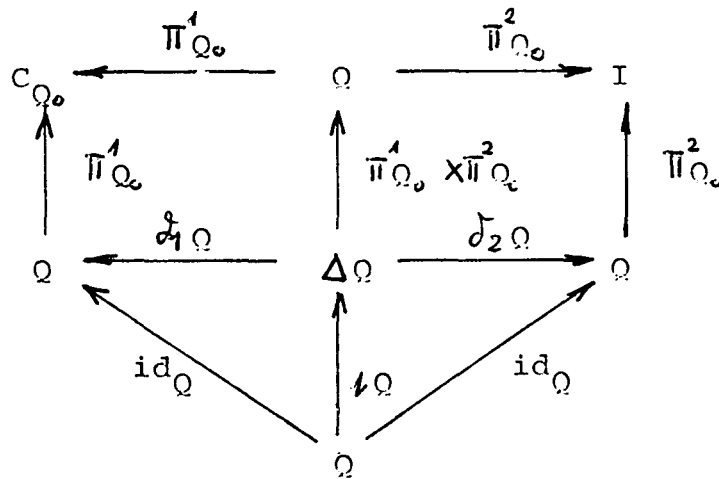
Figyelembe véve, hogy a  $C_{Q_0}$  konstans funktor definíciója szerint  $C_{Q_0} \omega = \text{id}_{C_{Q_0}}$ , valamint, hogy  $\varphi = \pi_{Q_0}^2 Y^\# \cdot \tau^\# \cdot X^\# \omega$ , teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{aligned}
 (\zeta \cdot x^\# \omega \times \varphi) \cdot x^\# &= (\pi_{Q_0}^1 Y^\# \cdot \zeta^\# \cdot x^\# \alpha \cdot \times \pi_{Q_0}^2 Y^\# \cdot \zeta^\# \cdot x^\# \alpha) \cdot x^\# = \\
 &= (\pi_{Q_0}^1 Y^\# \times \pi_{Q_0}^2 Y^\#) \cdot (\zeta^\# \cdot x^\# \alpha \times \zeta^\# \cdot x^\# \alpha) \cdot x^\# = \\
 &= (\pi_{Q_0}^1 Y^\# \times \pi_{Q_0}^2 Y^\#) \cdot \Delta(\zeta^\# \cdot x^\# \alpha) \cdot x^\# = \\
 &= (\pi_{Q_0}^1 \times \pi_{Q_0}^2) Y^\# \cdot \Delta Q Y^\# \cdot \zeta^\# \cdot x^\# \alpha = \\
 &= ((\pi_{Q_0}^1 \times \pi_{Q_0}^2) \cdot \Delta Q) Y^\# \cdot \zeta^\# \cdot x^\# \alpha
 \end{aligned}$$

Tehát a (3.16.19) egyenlőség teljesüléséhez elegendő most már belátni, hogy

$$(\pi_{Q_0}^1 \times \pi_{Q_0}^2) \cdot \Delta Q = \text{id}_Q$$

Tekintsük e célból a (3.16.21) diagramot, amelyben a I. és II. részdiagramok az  $\Delta$  természetes transzformáció definíciója szerint kommutatívak. A 3.9. Állítás szerint a  $Q \xleftarrow{\mathcal{I}_1 Q} \Delta Q \xrightarrow{\mathcal{I}_2 Q} Q$  szorzat-diagram, így a  $\pi_{Q_0}^1 \times \pi_{Q_0}^2$  szorzat definíciójának megfelelően a III. és IV. részdiagramok is kommutatívak. Tehát (3.16.21) teljesen kommutatív.



3.16.21

Mivel  $C_{Q_0} \xleftarrow{\pi_{Q_0}^1} Q \xrightarrow{\pi_{Q_0}^2} I$  szorzat-diagram, így egyetlen olyan  $\xi : Q \rightarrow Q$  természetes transzformáció létezik, amelyre  $\pi_{Q_0}^1 \cdot \text{id}_Q = \pi_{Q_0}^1 \cdot \xi$  és  $\pi_{Q_0}^2 \cdot \text{id}_Q = \pi_{Q_0}^2 \cdot \xi$ , tehát

$(\pi_{Q_0}^1 \times \pi_{Q_0}^2) \cdot \iota_Q = \text{id}_{Q_0}$ . Ezzel a (3.16.19) egyenlőséget, és ezzel a tétel szükségességét bebizonyítottuk.

### 3.17. Következmény

A 3.16. Tétel szükségességének bizonyításából következik, hogy az  $X^\# \times X$  - szorzat-funktor univerzális állapot-funktor abban az értelemben, hogy bármely  $\varphi : X^\# \rightarrow Y^\#$  természetes transzformáció, amely megvalósítható olyan  $X$ - $Y$  automatával, amelynek állapot-funktora szorzat-funktor, megvalósítható olyan  $X$ - $Y$  automatával is, amelyet állapot-funktora az  $X^\# \times X$  - funktor.

### 3.18. Következmény

A  $\varphi : X^\# \rightarrow Y^\#$  természetes transzformáció akkor és csak akkor hosszmegőrző szekvenciális transzformáció, ha van olyan  $\kappa : I \rightarrow I$  és  $\lambda : X^\Gamma \rightarrow Y$  természetes transzformáció, amelyekre kommutatív a (3.18.1) és (3.18.2) diagram.

$$\begin{array}{ccc} X^\# & \xrightarrow{\varphi} & Y^\# \\ \uparrow \eta & & \uparrow \bar{\eta} \\ I & \xrightarrow{\kappa} & I \end{array}$$

3.18.1

$$\begin{array}{ccccc} X^\# & & \xrightarrow{\varphi} & & Y^\# \\ \uparrow \mu_0 & & & & \uparrow \bar{\mu}_0 \\ XX^\# & \xrightarrow{X\bar{\varphi}} & X^\Gamma Y^\# & \xrightarrow{\lambda Y^\#} & YY^\# \end{array}$$

3.18.2

### 3.19. Tétel

A szekvenciális transzformációk osztálya zárt a kompozíció műveletére nézve.

### Bizonyítás

Tegyük fel, hogy  $\varphi_1: X^{\#} \xrightarrow{\cdot} Y^{\#}$  és  $\varphi_2: Y^{\#} \xrightarrow{\cdot} Z^{\#}$  szekvenciális transzformációk.

Ekkor létezik olyan  $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \alpha_1, \tau_1, \beta_1)$  és

$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \alpha_2, \tau_2, \beta_2)$  szekvenciális automata, hogy

$\varphi_1 = \varphi_{\mathcal{A}_1}$  és  $\varphi_2 = \varphi_{\mathcal{A}_2}$ . A (2.17) Tétel szerint létezik olyan

$\mathcal{A} = (Q_1 Q_2, \alpha, \tau, \beta)$  X-Z automata, hogy  $\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \varphi_{\mathcal{A}}$ .

Elegendő tehát megmutatni, hogy a  $Q_1 Q_2$  állapot-funktor ekvivalens egy szorzat-funktorral.

A feltevés szerint  $Q_1 = Q_1^{\circ} X$ - és  $Q_2 = Q_2^{\circ} X$ - valamely  $Q_1^{\circ}$  és  $Q_2^{\circ}$   $\mathcal{K}$ -objektumokra.

Ekkor nyilvánvaló, hogy minden A  $\mathcal{K}$ -objektum esetén

$$Q_1 Q_2 A = Q_1 (Q_2^{\circ} X A) = Q_1^{\circ} X (Q_2^{\circ} X A).$$

Mivel a  $\mathcal{K}$  kategóriában létezik terminális objektum, így a szorzás asszociatív /lásd MacLane [5] 73. old. 4. tétel/.

Tehát  $Q_1 Q_2 A = (Q_1^{\circ} X Q_2^{\circ}) X A$ . Ugyanígy morfizmusokra is

$$Q_1 Q_2 f = (Q_1^{\circ} X Q_2^{\circ}) f. \square$$

#### 4. X-Y transzformátorok

Ebben a fejezetben a fa-transzformációk kategória elméleti megfogalmazását adjuk. Célunk olyan eszközök definiálása, amelyek adott  $X$  és  $Y$  input-funktorok, valamint  $A$  és  $B$  objektumok esetén  $f: X^{\#}A \longrightarrow Y^{\#}B$  morfizmust számitanak ki. Itt is megkülönböztetünk direkt és inverz állapotú kiszámítást, amelyek közül az első az ugynevezett bottom-up, a második pedig a top-down fa-transzformátornak felel meg Engelfriet [4] értelmében. Az X-Y transzformátor fogalma abban tér el az X-Y automataétól, hogy a kezdőállapot hozzárendelést egy  $i: A \longrightarrow QB$  morfizmus szolgáltatja a direkt állapotú esetben, illetve az inverz állapotú transzformátoroknál a végállapotot egy  $t: QA \longrightarrow B$  morfizmus. Ezen fejezetben felhasználjuk az X-Y automatákra a dolgozatban nyert eredményeket.

##### 4.1. Definíció

Legyen  $X$  és  $Y$  input-funktor a  $\mathcal{K}$  kategóriában.

Ekkor X-Y transzformátoron olyan  $\mathcal{U} = (A, B, Q, i, \tau, \beta)$  rendezett hatost értünk, ahol

- /i/  $A$  és  $B$   $\mathcal{K}$ -objektumok, a generátor objektumok,
- /ii/  $Q: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$  funktor, az állapot-funktor,
- /iii/  $i: A \longrightarrow QB$   $\mathcal{K}$ -morfizmus, a kezdő állapot morfizmus
- /iv/  $\tau: XQ \longrightarrow QY^{\#}$  természetes transzformáció, az átmenet-kimenet transzformáció

/v/  $\beta: Q \rightarrow I$  természetes transzformáció, a végállapot transzformáció.

#### 4.2. Definíció

A  $\mathcal{U} = (A, B, Q, i, \tau, \beta)$  X-Y transzformátor által megvalósított  $f_{\mathcal{U}}: X^{\#}A \rightarrow Y^{\#}B$   $\mathcal{K}$ -morfizmuson az  $f_{\mathcal{U}} = \beta Y^{\#}B \cdot \tau^{\#}B \cdot X^{\#}i$  kompozíciót értjük, ahol  $\tau^{\#}: X^{\#}Q \rightarrow QY^{\#}$  természetes transzformáció, az átmenet-kimenet kiterjesztése ugyan úgy definiált, mint az X-Y automaták esetében.

#### 4.3. Definíció

X és Y input-funktorok esetében inverz állapotú X-Y transzformátoron olyan  $\mathcal{U} = (A, B, Q, \alpha, \tau, t)$  rendezett hatost értünk, ahol /i/ A és B  $\mathcal{K}$ -objektumok,

/ii/  $Q: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  funktor, amelynek van jobb adjungáltja,

/iii/  $\alpha: I \rightarrow Q$  természetes transzformáció, a kezdő állapot transzformáció,

/iv/  $\tau: QX \rightarrow Y^{\#}Q$  az átmenet-kimenet transzformáció,

/v/  $t: QA \rightarrow B$   $\mathcal{K}$ -morfizmus, a végállapot morfizmus.

#### 4.4. Definíció

A  $\mathcal{U} = (A, B, Q, \alpha, \tau, t)$  X-Y transzformátor által megvalósított  $f_{\mathcal{U}}: X^{\#}A \rightarrow Y^{\#}B$  morfizmuson az  $Y^{\#}t \cdot \tau^{\#}A \cdot \alpha X^{\#}A$   $\mathcal{K}$ -morfizmust értjük, ahol az inverz állapotú X-Y automaták esetében definiált  $\tau^{\#}: QX^{\#} \rightarrow Y^{\#}Q$  természetes transzformáció.

#### 4.5. Definíció

Az  $f: X^{\#}A \rightarrow Y^{\#}B$   $\mathcal{K}$ -morfizmust /inverz állapotú/ X-Y transz-





formációnak nevezzük, ha van olyan /inverz állapotú/  $X$ - $Y$  transzformátor, amely  $f$ -et valósítja meg.

#### 4.6. Tétel

Bármely  $f: X^{\#}A \longrightarrow Y^{\#}B$  inverz állapotú transzformáció a  $\mathcal{K}$  kategóriában megvalósítható  $X$ - $Y$  transzformátorral.

#### Bizonyítás

A feltétel szerint van olyan  $\mathcal{M} = (A, B, Q, \alpha, \tau, t)$  inverz állapotú  $X$ - $Y$  transzformátor, hogy  $f = f_{\mathcal{M}}$ .

Mivel a  $Q$  állapot-funktornak létezik jobb adjungáltja, így létezik a  $(Q, \bar{Q}, \nu, \varepsilon) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$  adjunkció. Tekintsük azt a  $\mathcal{M}_1 = (A, B, \bar{Q}, i, \tau_1, \beta_1)$   $X$ - $Y$  transzformátort, ahol

$$/i/ \quad i: A \xrightarrow{\nu_A} \bar{Q}QA \xrightarrow{\bar{Q}t} \bar{Q}B$$

$$/ii/ \quad \tau_1: X\bar{Q} \xrightarrow{\nu_X\bar{Q}} \bar{Q}QX\bar{Q} \xrightarrow{\bar{Q}\tau\bar{Q}} \bar{Q}Y^{\#}Q\bar{Q} \xrightarrow{\bar{Q}t^{\#}\varepsilon} \bar{Q}Y$$

$$/iii/ \quad \beta_1: \bar{Q} \xrightarrow{\nu_{\bar{Q}}} Q\bar{Q} \xrightarrow{\varepsilon} I.$$

Megmutatjuk, hogy  $f_{\mathcal{M}} = f_{\mathcal{M}_1}$ , ahol definíció szerint

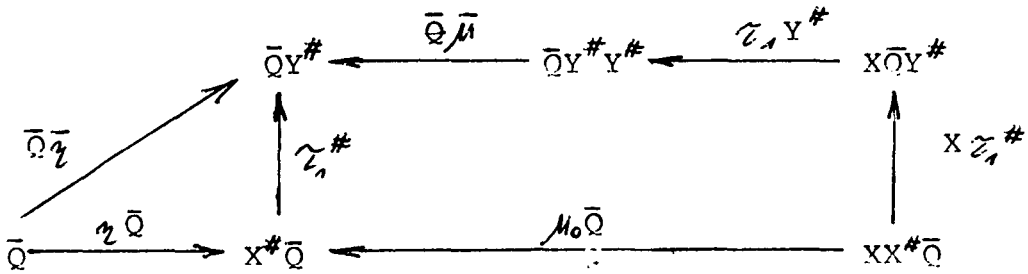
$$f_{\mathcal{M}} = Y^{\#}t \cdot \tau_{\#}A \cdot \alpha X^{\#}A.$$

A  $\tau_{\#}: QX^{\#} \longrightarrow Y^{\#}Q$  természetes transzformáció a  $\mathcal{M}$  transzformátor definíciója szerint az az egyértelműen meghatározott természetes transzformáció, amelyre a (4.6.1) diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y^{\#}Q & \xleftarrow{\bar{\mu}Q} & Y^{\#}Y^{\#}Q & \xleftarrow{Y^{\#}\tau_{\#}} & Y^{\#}XQ \\
 & \nearrow \bar{\tau}Q & \uparrow \tau_{\#} & & & & \uparrow \tau X^{\#} \\
 Q & \xrightarrow{Q\tau} & QX^{\#} & \xleftarrow{Q\mu_0} & QXX^{\#} & & 
 \end{array}$$

4.6.1

Az  $X$  és  $Y$  input-funktorokhoz tartozó input strukturákat most is az  $(X^\#, \mu_0; \eta)$  illetve  $(Y^\#, \bar{\mu}_0; \bar{\eta})$  hármasokkal jelöljük. Az  $f_{\mathcal{M}_1}: X^\#A \rightarrow Y^\#B$  definíciója szerint  $f_{\mathcal{M}_1} = \beta_1 Y^\#B \cdot \mathcal{Z}_1^\#B \cdot X^\#i$ , ahol a  $\mathcal{Z}_1^\#$  természetes transzformációt a (4.6.2) diagram definiálja.



4.6.2

Figyelembe véve  $\mathcal{Z}_1$  definícióját, valamint a (2.11) Tétel során bebizonyított (2.11.4) egyenlőséget, azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{Z}_1^\# = \bar{Q}Y^\# \varepsilon \cdot \bar{Q}\mathcal{Z}_\# \bar{Q} \cdot \vee X^\# \bar{Q} \quad (4.6.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Tehát } f_{\mathcal{M}_1} &= (\beta_1 Y^\# \cdot \bar{Q}Y^\# \varepsilon \cdot \bar{Q}\mathcal{Z}_\# \bar{Q} \cdot \vee X^\# \bar{Q})B \cdot X^\#i = \\ &= (\varepsilon Y^\# \cdot \mathcal{A} \bar{Q}Y^\# \cdot \bar{Q}Y^\# \varepsilon \cdot \bar{Q}\mathcal{Z}_\# \bar{Q} \cdot \vee X^\# \bar{Q})B \cdot X^\# \bar{Q}t \cdot X^\# \vee A = \\ &= Y^\#t \cdot (\varepsilon Y^\# Q \cdot \mathcal{A} \bar{Q}Y^\# Q \cdot \bar{Q}Y^\# \varepsilon Q \cdot \bar{Q}\mathcal{Z}_\# \bar{Q} Q \cdot \vee X^\# \bar{Q} Q \cdot X^\# \vee)A = \\ &= Y^\#t \cdot (\varepsilon Y^\# Q \cdot Q \bar{Q}Y^\# \varepsilon Q \cdot Q \bar{Q}\mathcal{Z}_\# \bar{Q} Q \cdot Q \vee X^\# \bar{Q} Q \cdot Q X^\# \vee \cdot \mathcal{A} X^\#)A. \end{aligned}$$

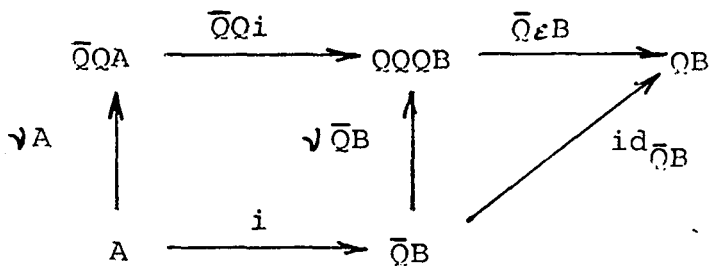
A továbbiakban elegendő bebizonyítani az  $Y^\#t \cdot \mathcal{Z}_\#A \cdot \mathcal{A}X^\#A = f_{\mathcal{M}_1}$  egyenlőséghez elegendő bebizonyítani, hogy kommutatív a (4.6.4) diagram.



Az  $f_M = f_L$  egyenlőséghez elegendő megmutatni, hogy a  $L$  transzformátorra alkalmazva a (4.6) Tétel konstrukcióját, visszakapjuk a  $M$  transzformátort. A (2.13) Tétel szerint a  $\bar{\mathcal{Z}}$  átmenet-kimenetre alkalmazva a (4.6) Tételben a /ii/ konstrukciót, visszakapjuk  $\bar{\mathcal{Z}}$ -t. Az /i/ szerint

$$i' = \bar{Q}t. \forall A = \bar{Q}(\varepsilon B.Qi). \forall A = \bar{Q}\varepsilon B\bar{Q}Qi. \forall A$$

A (4.7.1) diagram természetes volta, valamint a  $(Q, Q, \nu, \varepsilon)$  adjunkcióra vonatkozó azonosság szerint kommutatív, tehát  $i' = \text{id}_{\bar{Q}B}.i = i$



4.7.1

A (4.6) /iii/ kompozíció szerint

$$\beta' = \varepsilon . \angle \bar{Q} = \varepsilon . \beta \bar{Q} \bar{Q}. \nu \bar{Q} = \beta . \bar{Q} \varepsilon . \nu \bar{Q} = \beta . \text{id}_{\bar{Q}} = \beta . \square$$

#### 4.8. Definíció

Tegyük fel, hogy a  $\mathcal{K}$  kategóriában létezik szorzat. Ekkor a  $M = (A, B, Q, i, \tau, \beta)$   $X$ - $Y$  transzformátor és az általa megvalósított  $f : X^{\#}A \rightarrow Y^{\#}B$  transzformációt szekvenciálisnak nevezzük, ha a  $Q$  állapot-funktor szorzat-funktor, továbbá a  $\beta$  végállapot transzformáció projekció, tehát  $\beta = \pi_{Q_0}^2$ , ha  $Q = Q_0 X$ - valamely  $Q_0$   $\mathcal{K}$ -objektumra.

Az  $f : X^{\#}A \rightarrow Y^{\#}B$   $\mathcal{K}$ -morfizmus szekvenciálisnak nevezzük,

ha megvalósítható szekvenciális X-Y transzformátorral.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a  $\mathcal{K}$  kategóriában létezik szorzat. A szorzattal kapcsolatban használjuk a 3. fejezetben bevezetett jelöléseket.

#### 4.9. Jelölés

Bármely  $X$  input-funktor és  $A$   $\mathcal{K}$ -objektum esetén használjuk a  $\Gamma_A := X^{\#}A \times$  funktor jeölést, tehát

$$\Gamma_A = C_{X^{\#}A} \times I = X^{\#}C_A \times I.$$

A következőkben a szekvenciális morfizmusoknak egy automatáktól független jellemzését adjuk.

#### 4.10. Definíció

Legyen  $X$  és  $Y$  input-funktor a  $\mathcal{K}$  kategóriában, és jelöljük a megfelelő input struktúrákat az  $(X^{\#}, \mu_0; \eta)$  illetve  $(Y^{\#}, \bar{\mu}_0; \bar{\eta})$  hármasokkal. Az  $f: X^{\#}A \rightarrow Y^{\#}B$   $\mathcal{K}$ -morfizmust

/i/ generátor-megőrzőnek nevezzük, ha van olyan  $j: A \rightarrow B$

$\mathcal{K}$ -morfizmus, hogy kommutativ a (4.10.1) diagram;

/ii/ kezdőszelet-megőrzőnek nevezzük, ha van olyan

$\zeta: X \Gamma_A \rightarrow Y^{\#}$  természetes transzformáció, hogy a (4.10.2) kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} X^{\#}A & \xrightarrow{f} & Y^{\#}B \\ \uparrow \zeta^A & & \uparrow \bar{\zeta}^B \\ A & \xrightarrow{j} & B \end{array}$$

4.10.1

$$\begin{array}{ccccc}
 X^{\#}A & \xrightarrow{f} & Y^{\#}B & & \\
 \uparrow \mu_A & & \uparrow \bar{\mu}_B & & \\
 XX^{\#}A & \xrightarrow{X\bar{f}} & X\Gamma_A Y^{\#}B & \xrightarrow{\zeta Y^{\#}B} & Y^{\#}Y^{\#}B
 \end{array}$$

4.10.2

A (4.10.2) diagramban szereplő  $\bar{f}$  morfizmus definíciója

$$\bar{f}: X^{\#}A \xrightarrow{\iota_{X^{\#}A}} X^{\#}A \times X^{\#}A \xrightarrow{id_{X^{\#}A} \times f} X^{\#}A \times Y^{\#}B = \Gamma_A Y^{\#}B.$$

#### 4.11. Tétel

Az  $f: X^{\#}A \rightarrow Y^{\#}B$   $\mathcal{K}$ -morfizmus akkor és csak akkor szekven-  
ciális, ha generátor- és kezdőszelet-megőrző.

#### Bizonyítás

Elegendőség: Tegyük fel, hogy a  $j: A \rightarrow B$   $\mathcal{K}$ -morfizmusra és  
a  $\zeta: X\Gamma_A \rightarrow Y^{\#}$  természetes transzformációra teljesül a  
(4.10.1) illetve a (4.10.2) diagram kommutativitása.

Vegyük azt a  $\mathcal{M} = (A, B, \Gamma_A, i, \zeta, \beta)$   $X$ - $Y$  transzformátort, ahol

$$i: A \xrightarrow{\iota_A} \Delta A \xrightarrow{\iota_A \times j} X^{\#}A \times B = \Gamma_A B,$$

$$\zeta: X\Gamma_A \xrightarrow{\iota_{X\Gamma_A}} \Delta X\Gamma_A \xrightarrow{\mu_{C_A} \cdot \delta \pi'_{X^{\#}A} \times \zeta} \Gamma_A Y^{\#},$$

$$\beta = \pi_{X^{\#}A}^2: \Gamma_A \rightarrow I.$$



Bizonyítsuk be először az  $\bar{f} \cdot \eta^A = h$  egyenlőséget. Az  $\bar{f}$  morfizmus definícióját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\bar{f} \cdot \eta^A &= (\text{id}_{X^{\#}A} \times f) \cdot \iota_{X^{\#}A} \cdot \eta^A = (\text{id}_{X^{\#}A} \times f) \cdot \Delta \eta^A \cdot \iota_A = \\ &= (\text{id}_{X^{\#}A} \times f) \cdot (\eta^A \times \eta^A) \cdot \iota_A = (\text{id}_{X^{\#}A} \cdot \eta^A \times \bar{f} \cdot \eta^A) \cdot \iota_A = \\ &= (\eta^A \times \bar{f} \cdot \eta^A) \cdot \iota_A.\end{aligned}$$

Felhasználva a tétel feltétele szerint teljesülő (4.10.1) diagram kommutativitását

$$\bar{f} \cdot \eta^A = (\eta^A \times \bar{\eta}^B \cdot \bar{f}) \cdot \iota_A \quad (4.11.4)$$

A  $h$  morfizmus definíciója szerint

$$h = \Gamma_A \bar{\eta}^B \cdot i = \Gamma_A \bar{\eta}^B \cdot (\eta^A \times \eta^A) \cdot \iota_A = \Gamma_A (\bar{\eta}^B) \cdot (\eta^A \times \eta^A) \cdot \iota_A$$

A (3.15) Állítás /c/ azonosságát alkalmazva a  $\Gamma_A = X^{\#}A \times$ -szorzat-funktorra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}h &= (\text{id}_{X^{\#}A} \times \bar{\eta}^B) \cdot (\eta^A \times \eta^A) \cdot \iota_A = (\text{id}_{X^{\#}A} \cdot \eta^A \times \bar{\eta}^B \cdot \eta^A) \cdot \iota_A = \\ &= (\eta^A \times \bar{\eta}^B \cdot \eta^A) \cdot \iota_A. \text{ Tehát (4.11.3) I. részdiagramja kommu-} \\ &\text{tativ.}\end{aligned}$$

Lássuk ezek után a (4.11.3) II. kommutativitásának, azaz az

$$\bar{f} \cdot \mu_o A = g \cdot X \bar{f} \text{ egyenlőségnek a bizonyítását.}$$

$$\begin{aligned}\bar{f} \cdot \mu_o A &= (\text{id}_{X^{\#}A} \times f) \cdot \iota_{X^{\#}A} \cdot \mu_o A = (\text{id}_{X^{\#}A} \times f) \cdot \Delta \mu_o A \cdot \iota_{XX^{\#}A} = \\ &= (\text{id}_{X^{\#}A} \times f) \cdot (\mu_o A \times \mu_o A) \cdot \iota_{XX^{\#}A} = \\ &= (\mu_o A \times f \cdot \mu_o A) \cdot \iota_{XX^{\#}A}.\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a kezdőszelet megőrzést kifejező (4.10.2) diagram kommutativitását.

$$\bar{f} \cdot \mu_o A = (\mu_o A \times \bar{\mu}^B \cdot \eta^{Y^{\#}B} \cdot X \bar{f}) \cdot \iota_{XX^{\#}A} \quad (4.11.5)$$

A  $g$  morfizmus valamint a  $\eta$  természetes transzformáció definícióját figyelembe véve teljesülnek a következő egyenlőségek:



$$\begin{aligned}
 g.X\bar{f} &= \Gamma_A \bar{\mu}_B . \zeta_{Y^{\#}B} . X\bar{f} = \\
 &= \Gamma_A \bar{\mu}_B . (\mu_{C_A} . X \pi_{X^{\#}A}^1 \times \zeta) . \zeta X \Gamma_A Y^{\#}B . X\bar{f} = \\
 &= \Gamma_A \bar{\mu}_B . (\mu_{C_A} Y^{\#}B . X \pi_{X^{\#}A}^1 Y^{\#}B \times \zeta Y^{\#}B) . \zeta X \Gamma_A Y^{\#}B . X\bar{f}.
 \end{aligned}$$

A (3.15) Állítás /c/ azonossága szerint

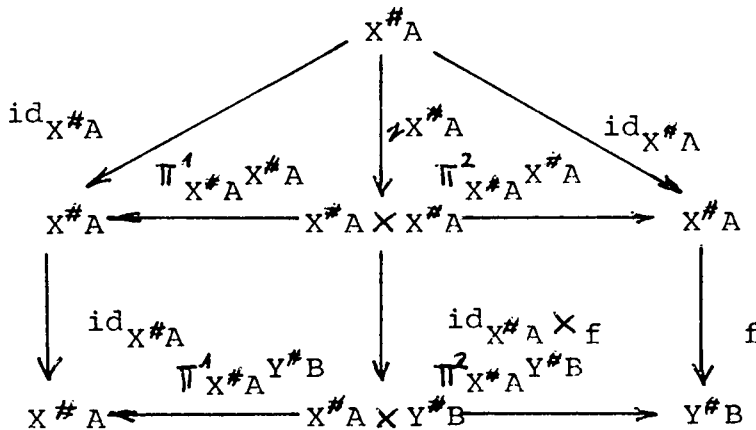
$$\begin{aligned}
 \Gamma_A \bar{\mu}_B &= (\text{id}_{X^{\#}A} \times \bar{\mu}_B), \text{ tehát} \\
 g.X\bar{f} &= (\mu_{C_A} Y^{\#}B . X \pi_{X^{\#}A}^1 Y^{\#}B \times \bar{\mu}_B . \zeta Y^{\#}B) . \zeta X \Gamma_A Y^{\#}B . X\bar{f} \\
 &\text{természetes volta miatt } \zeta X \Gamma_A Y^{\#}B . X\bar{f} = \Delta X\bar{f} . \zeta X X^{\#}A = \\
 &= (X\bar{f} \times X\bar{f}) . \zeta X X^{\#}A. \text{ A (3.2) Állítás szerint a kompozíció} \\
 &\text{disztributív a szorzás felett, tehát}
 \end{aligned}$$

$$g.X\bar{f} = (\mu_{C_A} Y^{\#}B . X \pi_{X^{\#}A}^1 Y^{\#}B . X\bar{f} \times \bar{\mu}_B . \zeta Y^{\#}B . X\bar{f}) . \zeta X X^{\#}A$$

Ez utóbbi egyenlőséget egybevetve a (4.11.5) egyenlőséggel, elegendő a továbbiakban bebizonyítani a (4.11.6) egyenlőséget.

$$\mu_{C_A} = \mu_{C_A} Y^{\#}B . X \pi_{X^{\#}A}^1 Y^{\#}B . X\bar{f} \quad (4.11.6)$$

Tekintsük e célból a (4.11.7) diagramot.



4.11.7

A (3.13) Definíció szerint a  $\pi_{X^{\#}A}^1$  természetes transzformáció-ra teljesül a III. és IV. részdiagram kommutativitása, a I. és

II. pedig (3.8) Definíciója szerint kommutatív. Tehát

$\pi_{X^{\#}A}^1 Y^{\#}B. (id_{X^{\#}A} \times f). \downarrow X^{\#}A = id_{X^{\#}A}$ . Ezt, valamint  $\bar{f}$  definícióját felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mu_0 C_A Y^{\#}B. (X(\pi_{X^{\#}A}^1 Y^{\#}B). X\bar{f}) &= \mu_0 C_A Y^{\#}B. X(\pi_{X^{\#}A}^1 Y^{\#}B. \bar{f}) = \\ &= \mu_0 C_A Y^{\#}B. X(\pi_{X^{\#}A}^1 Y^{\#}B. (id_{X^{\#}A} \times f). \downarrow X^{\#}A) = \\ &= \mu_0 C_A Y^{\#}B. X id_{X^{\#}A} = \mu_0 C_A Y^{\#}B = \mu_0 A. \end{aligned}$$

Ezzel a (4.11.6), és egyuttal a (4.11.1) egyenlőséget bebizonyítottuk. Tehát

$$\begin{aligned} \downarrow_{\mathcal{A}} &= \beta Y^{\#}B. \gamma^{\#}B. X^{\#}i = \pi_{X^{\#}A}^2 Y^{\#}B. \bar{f} = \\ &= \pi_{X^{\#}A}^2 Y^{\#}B. (id_{X^{\#}A} \times f). \downarrow X^{\#}A. \end{aligned}$$

Igy a (4.11.7) diagram II. és IV. részdiagramjának kommutativitása éppen a keresett  $\downarrow_{\mathcal{A}} = \bar{f}$  egyenlőséghez vezet. Ezzel az elegendőséget bebizonyítottuk.

### Szükségesség

Tegyük fel, hogy az  $f: X^{\#}A \rightarrow Y^{\#}B$   $\mathcal{K}$ -morfizmus megvalósítható a  $\mathcal{M} = (A, B, Q, i, \gamma, \beta)$   $X$ - $Y$  transzformátorral, ahol  $Q = Q_0 \times -$ , és  $\beta = \pi_{Q_0}^2$  valamely  $Q_0$   $\mathcal{K}$ -objektumra. Tehát

$$f = \pi_{Q_0}^2 Y^{\#}B. \gamma^{\#}B. X^{\#}i \quad 4.11.8$$

Megmutatjuk, hogy a (4.11.9) illetve (4.11.10) által definiált  $\gamma$  illetve  $\gamma$  kielégíti a (4.10.1) illetve (4.10.2) diagramok kommutativitását, tehát  $f$  generátor- és kezdőszelet-megőrző.

$$\gamma: A \xrightarrow{i} QB \xrightarrow{\pi_{Q_0}^2 \beta} B \quad (4.11.9)$$

$$\gamma: X \vdash_A \xrightarrow{\Sigma(\gamma \times id_I)} XQ \xrightarrow{\gamma} QY^{\#} \xrightarrow{\pi_{Q_0}^2 \gamma^{\#}B} Y^{\#} \quad (4.11.10)$$

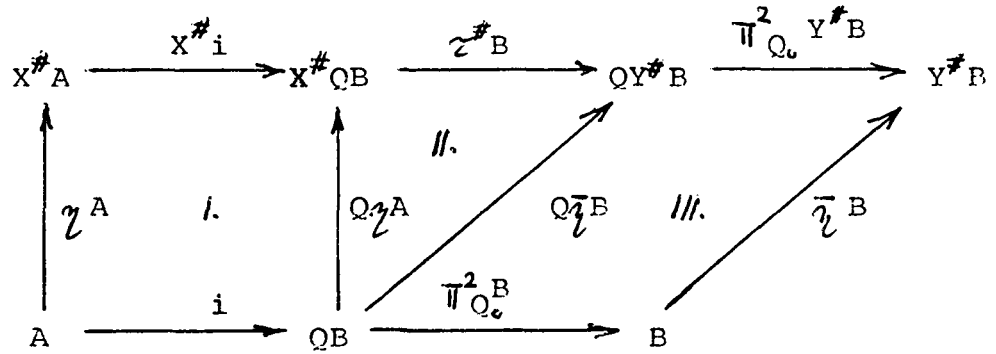
Az  $\Delta$  morfizmus definíciója:

$$\Delta: X^{\#}A \xrightarrow{\Sigma^{\#}i} X^{\#}QB \xrightarrow{\gamma^{\#}B} QY^{\#}B \xrightarrow{\pi_{Q_0}^1 \gamma^{\#}B} Q_0. \quad (4.11.11)$$



A (4.11.12) diagramban I. és III.  $\gamma$ , illetve  $\pi_{Q_0}^2$  természetes volta miatt, II. pedig  $\gamma^\#$  definíciója szerint kommutatív. Így (4.11.8) miatt

$f \cdot \gamma_A = \bar{\gamma}_B \cdot \pi_{Q_0}^2 \cdot B \cdot i = \bar{\gamma}_B \cdot \bar{\gamma}_B$ . Tehát a (4.10.1) feltétel teljesül.



4.11.12

A (4.11.8) egyenlőséget felhasználva, valamint figyelembe véve, hogy  $i$  és  $\gamma$  teljesíti a (4.11.2) diagram kommutativitását, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f \cdot \mu_A &= \pi_{Q_0}^2 \cdot Y^\#B \cdot \gamma^\#B \cdot X^\#i \cdot \mu_A = \\ &= \pi_{Q_0}^2 \cdot Y^\#B \cdot Q \bar{\mu}_B \cdot \gamma^\#B \cdot X \gamma^\#B \cdot X X^\#i = \\ &= \bar{\mu}_B \cdot \pi_{Q_0}^2 \cdot Y^\#Y^\#B \cdot \gamma^\#B \cdot X (\gamma^\#B \cdot X^\#i) \end{aligned}$$

4.11.13

Tekintsük a bizonyítandó egyenlőség másik oldalát. A  $\zeta$  természetes transzformáció (4.11.10), valamint a  $f$  morfizmus definícióját felhasználva kapjuk a

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_B \cdot \zeta \cdot Y^\#B \cdot X f &= \bar{\mu}_B \cdot (\pi_{Q_0}^2 \cdot Y^\# \cdot \gamma \cdot X (\tilde{\gamma} \times \text{id}_I)) \cdot Y^\#B \cdot X ((\text{id}_{X^\#A} \times f) \cdot \iota_{X^\#A}) = \\ &= \bar{\mu}_B \cdot \pi_{Q_0}^2 \cdot Y^\#Y^\#B \cdot \gamma^\#B \cdot X ((\tilde{\gamma} Y^\#B \times f) \cdot \iota_{X^\#A}) \end{aligned}$$

egyenlőséget. Azonban  $\tilde{s}$  (3.11) definíciója szerint  $\tilde{s}Y^{\#}B = s$ , tehát a fenti egyenlőséget (4.11.13)-al összevetve elegendő bebizonyítani a továbbiakban a (4.11.14) egyenlőséget.

$$\tau^{\#}B.X^{\#}i = (s \times f). \downarrow X^{\#}A$$

4.11.14

Az  $s$  és az  $f$  morfizmus (4.11.8) definícióját felhasználva

$$\begin{aligned} (s \times f). \downarrow X^{\#}A &= (\pi_{Q_0}^1 Y^{\#}B. \tau^{\#}B.X^{\#}i \times \pi_{Q_0}^2 Y^{\#}B. \tau^{\#}B.X^{\#}i). \downarrow X^{\#}A = \\ &= (\pi_{Q_0}^1 Y^{\#}B \times \pi_{Q_0}^2 Y^{\#}B). (\tau^{\#}B.X^{\#}i \times \tau^{\#}B.X^{\#}i). \downarrow X^{\#}A = \\ &= (\pi_{Q_0}^1 \times \pi_{Q_0}^2) Y^{\#}B. \downarrow QY^{\#}B. \tau^{\#}B.X^{\#}i = \\ &= ((\pi_{Q_0}^1 \times \pi_{Q_0}^2). \downarrow Q) Y^{\#}B. \tau^{\#}B.X^{\#}i. \end{aligned}$$

A (3.16.21) diagram kommutativitása szerint  $(\pi_{Q_0}^1 \times \pi_{Q_0}^2). \downarrow Q = \text{id}_Q$ , tehát valóban teljesül a (4.11.14) egyenlőség. Ezzel a feltétel szükségességét bebizonyítottuk.

#### 4.12. Definíció

A  $\mathcal{A} = (A, B, Q, i, \tau, \beta)$  szekvenciális X-Y transzformátort hosszmegőrzőnek nevezzük, ha a  $\tau$  átmenet-kimenet transzformáció hosszmegőrző.

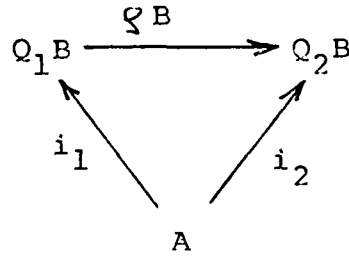
#### 4.13. Következmény

A (4.11) tételből és a (3.18) következményből egyenesen következik, hogy ha az  $f: X^{\#}A \longrightarrow Y^{\#}B$  szekvenciális morfizmus hosszmegőrző, azaz  $\tau: X\Gamma_A \longrightarrow Y^{\#}$  hosszmegőrző a (4.10) definícióban, akkor van olyan  $\mathcal{A}$  hosszmegőrző szekvenciális X-Y transzformátor, amely megvalósítja  $f$ -et, és fordítva.

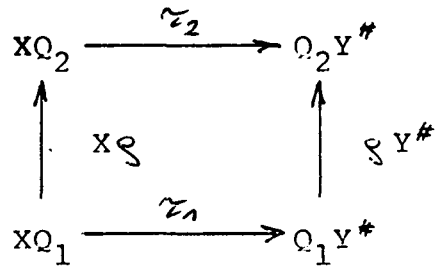
#### 4.14. Definíció

A  $\varphi: Q_1 \longrightarrow Q_2$  természetes transzformációt a  $\mathcal{V}_1 =$

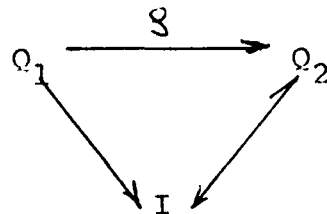
$= (A, B, Q_1, i_1, \tau_1, \beta_1)$  X-Y transzformátorból a  $\mathcal{M}_2 =$   
 $= (A, B, Q_2, i_2, \tau_2, \beta_2)$  X-Y transzformátorba való szimuláció-  
 nak /röviden szimulációnak/ nevezzük, ha teljesül az alábbi  
 diagramok kommutativitása



4.14.1



4.14.2



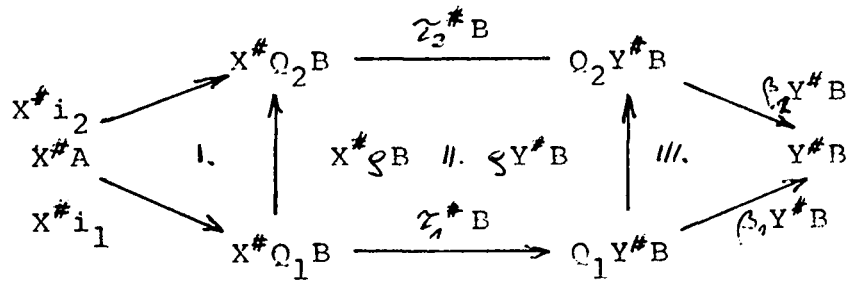
4.14.3

#### 4.15. Tétel

Ha létezik a  $\mathcal{M}_1 = (A, B, Q_1, i_1, \tau_1, \beta_1)$  X-Y transzformátorból  
 a  $\mathcal{M}_2 = (A, B, Q_2, i_2, \tau_2, \beta_2)$  X-Y transzformátorba szimuláció,  
 akkor  $f_{\mathcal{M}_1} = f_{\mathcal{M}_2}$ .

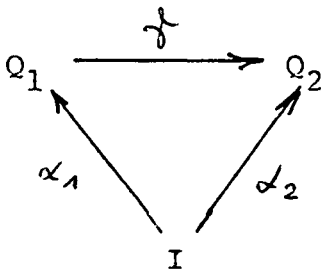
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy  $\xi: Q_1 \xrightarrow{\cdot} Q_2$  szimuláció.

Tekintsük a (4.15.1) diagramot. Ebben a I. részdiagram a  $Q$  szimulációra vonatkozó (4.14.1) a III. részdiagram pedig a (4.14.2) miatt kommutatív. A (2.23) Tételben bebizonyítottuk a (2.23.3) II. részdiagramjának kommutativitását, amely szerint tehát (4.15.1) II. részdiagramja és kommutatív. Tehát azt kaptuk, hogy  $f = {}_1Y \cdot B \cdot {}_1B \cdot Xi_1 = {}_2Y \cdot B \cdot {}_2B \cdot X = f$

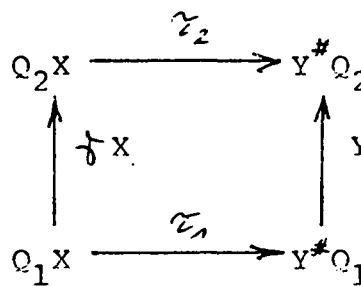


4.15.1

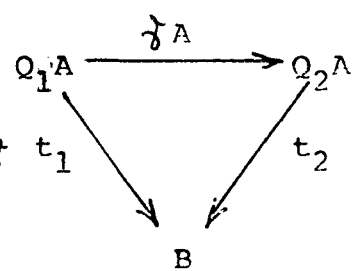
**4.16. Definíció** A  $\gamma: Q_1 \rightarrow Q_2$  természetes transzformációt a  $\mathcal{N}_1 = (A, B, Q_1, \alpha_1, \tau_1, t_1)$  inverz állapotú X-Y transzformátorból a  $\mathcal{N}_2 = (A, B, Q_2, \alpha_2, \tau_2, t_2)$  inverz állapotú X-Y transzformátorba való szimulációnak nevezzük, ha teljesül a (4.16.1) - (4.16.3) diagram kommutativitása.



4.16.1



4.16.2



4.16.3

#### 4.17. Tétel

Ha létezik a  $\mathcal{N}_1$  inverz állapotú X-Y transzformátorból a  $\mathcal{N}_2$  inverz állapotú X-Y transzformátorba a  $\gamma$  szimuláció, akkor  $f_{\mathcal{N}_1} = f_{\mathcal{N}_2}$ .

Bizonyítás Jelöljük a  $Q_1$  illetve  $Q_2$  állapot-funktorhoz tartozó adjunkciókat a  $(Q_1, \bar{Q}_1, \nu_1, \varepsilon_1)$  illetve  $(Q_2, \bar{Q}_2, \nu_2, \varepsilon_2)$  négyessel. A (4.6) Tétel szerint van olyan

$$\bar{\mathcal{U}}_1 = (A, B, Q_1, i_1, \bar{\varepsilon}_1, \beta_1) \text{ és } \bar{\mathcal{U}}_2 = (A, B, Q_2, i_2, \bar{\varepsilon}_2, \beta_2)$$

X-Y transzformátorok, hogy  $f_{\mathcal{U}_1} = f_{\bar{\mathcal{U}}_1}$  és  $f_{\mathcal{U}_2} = f_{\bar{\mathcal{U}}_2}$ , ahol

$$i_k = \bar{Q}_k t_k \cdot \nu_k A; \quad (k = 1, 2),$$

$$\bar{\varepsilon}_k = \bar{Q}_k Y^* \varepsilon_k \cdot \bar{Q}_k \tau_k \bar{Q}_k \cdot \nu_k X \bar{Q}_k; \quad (k = 1, 2),$$

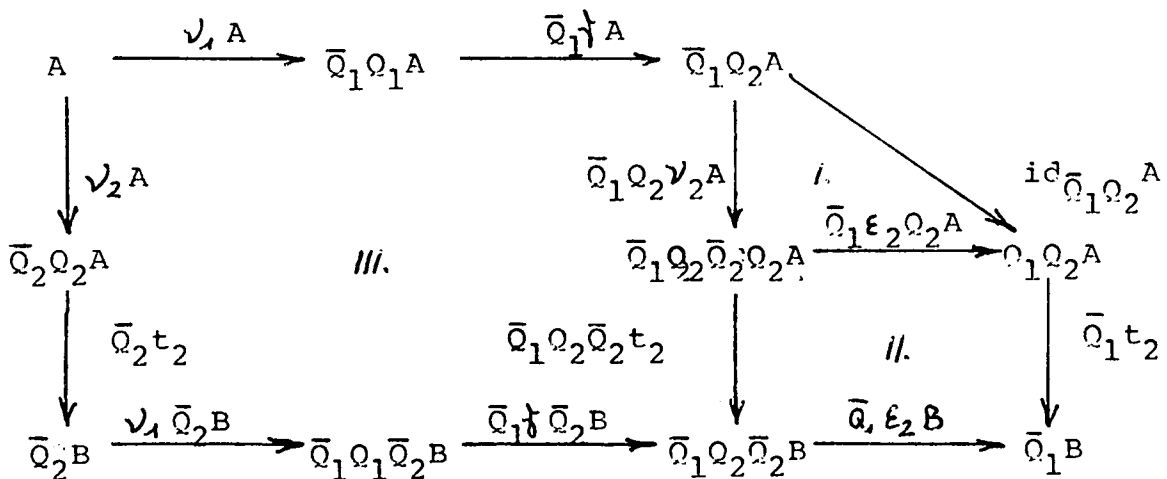
$$\beta_k = \varepsilon_k \cdot \omega_k \bar{Q}_k; \quad (k = 1, 2).$$

Tekintsük a  $\bar{\gamma} : \bar{Q}_2 \xrightarrow{\nu_1 \bar{Q}_2} \bar{Q}_1 Q_1 \bar{Q}_2 \xrightarrow{\bar{Q}_1 t_1 \bar{Q}_2} \bar{Q}_1 Q_2 \bar{Q}_2 \xrightarrow{\bar{Q}_1 \varepsilon_2} \bar{Q}_1$  természetes transzformációt.

A (2.25) tétel során bebizonyítottuk, hogy az így definiált  $\bar{\gamma}$ -ra teljesül a  $\bar{\varepsilon}_1 \cdot X \bar{\gamma} = \bar{\gamma} Y^* \cdot \bar{\varepsilon}_2$  egyenlőség, azaz teljesül a (4.14.2) kommutativitása. Megmutatjuk, hogy  $\bar{\gamma}$  kielégíti a (4.14.1) és (4.14.3) diagramoknak megfelelő egyenlőségeket is, azaz  $\bar{\gamma}$  szimuláció lesz a  $\bar{\mathcal{U}}_2$ -ből  $\bar{\mathcal{U}}_1$ -be.

De akkor a (4.15) Tétel szerint  $f_{\bar{\mathcal{U}}_1} = f_{\bar{\mathcal{U}}_2}$ , tehát  $f_{\mathcal{U}_1} = f_{\mathcal{U}_2}$ .

Tekintsük a (4.17.1) diagramot.



A I. részdiagram a  $(Q_2, \bar{Q}_2, \nu_2, \varepsilon_2)$  adjunkcióra vonatkozó azonosság miatt, a II.  $\bar{Q}_1 \varepsilon_2$  természetes volta, a III. pedig  $\bar{Q}_1 \bar{\nu}_1$  természetes volta miatt kommutatív, tehát figyelembe véve, hogy a feltétel szerint  $t_2 \bar{\nu}_1 A = t_1$ , kapjuk a

$$\begin{aligned} i_1 &= \bar{Q}_1 t_1 \cdot \nu_1 A = \bar{Q}_1 t_2 \cdot \bar{Q}_1 \bar{\nu}_1 A \cdot \nu_1 A = \\ &= \bar{Q}_1 \varepsilon_2 B \cdot \bar{Q}_1 \bar{\nu}_1 \bar{Q}_2 B \cdot \nu_1 \bar{Q}_2 B \cdot \bar{Q}_2 t_2 \cdot \nu_2 A = \\ &= \bar{\nu}_1 \cdot i_2 \text{ egyenlőséget.} \end{aligned}$$

A harmadik,  $\beta_1 \cdot \bar{\nu}_1 = \beta_2$  egyenlőség bizonyítása megtalálható a (2.25) tételnél.

#### 4.18. Tétel

A transzformációk osztálya zárt a kompozícióra nézve, azaz bármely  $f: X^{\#}A \longrightarrow Y^{\#}B$   $X \rightarrow Y$  és  $g: Y^{\#}B \longrightarrow Z^{\#}C$   $Y \rightarrow Z$  transzformáció esetén  $g.f: X^{\#}A \longrightarrow Z^{\#}C$  és  $X \rightarrow Z$  transzformáció lesz.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy van olyan  $\mathcal{N}_1 = (A, B, Q_1, i_1, \bar{\nu}_1, \beta_1)$   $X \rightarrow Y$  és  $\mathcal{N}_2 = (B, C, Q_2, i_2, \bar{\nu}_2, \beta_2)$   $Y \rightarrow Z$  transzformátor, hogy  $f = f_{\mathcal{N}_1}$  és  $g = f_{\mathcal{N}_2}$ . Tekintsük ekkor azt a  $\mathcal{N} = (A, C, Q_1 Q_2, i, \bar{\nu}, \beta)$   $X \rightarrow Z$  transzformátort, ahol

$$\begin{aligned} i: A &\xrightarrow{i_1} Q_1 B \xrightarrow{Q_1 i_2} Q_1 Q_2 C, \\ \bar{\nu}: X Q_1 Q_2 &\xrightarrow{\bar{\nu}_1 Q_2} Q_1 Y^{\#} Q_2 \xrightarrow{Q_1 \bar{\nu}_2^{\#}} Q_1 Q_2 Z^{\#}, \\ \beta: Q_1 Q_2 &\xrightarrow{Q_1 \beta_2} Q_1 \xrightarrow{\beta_1} I. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy  $f_{\mathcal{N}} = g.f$ .

Nézzük a (4.18.1) diagramot, ahol a I. részdiagram  $i$ , III. pedig  $\beta$  definíciója szerint kommutatív. A II. kommutativitását a (2.17) tétel során már bebizonyítottuk. A IV. és V. részdiagrammok  $\beta_1$  illetve  $\beta_1 \bar{\nu}_1^{\#}$  természetes voltának megfe-





értelemben. Bármely  $A$  halmaz esetén

$$\mathcal{A}:FA \longrightarrow TA;$$

$$\mathcal{A}:f(\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle) \longmapsto Th(\alpha_n(f)), \text{ ahol}$$

$$h:V_n \longrightarrow A \text{ olyan függvény, hogy } h(v_i) = a_i.$$

Könnyen belátható, hogy így valóban természetes transzformációt kapunk, tehát, hogy  $\mathcal{A}:FA \longrightarrow TA$  természetes  $A$ -ban. Arbib-Manes [3] 12. tétele szerint minden  $\mathcal{A}:F \longrightarrow T$  természetes transzformáció megadható ilyen módon, ha  $F$  műveleti funktor. Ezt a tényt figyelembe véve azonnal látható, hogy a halmazok kategóriában minden  $\mathcal{U} = (A, B, Q, i, \gamma, \beta)$   $F$ - $G$  transzformátor, ahol  $F$  és  $G$  műveleti funktorok,  $Q$  pedig szorzat-funktor, egy ugynevezett bojtom-up fa-transzformátort határoz meg. /A fa-transzformátor fogalmára nézve lásd J.W. Thatcher [8] és J. Engelfriet [4] cikkét./ Fordítva, minden bojtom-up fa-transzformátor, amely generátor-megőrző, amin azt értjük, hogy a generátorokra vonatkozó átírási szabályok egy  $i:A \longrightarrow QB$  függvénnyel adhatók meg, megadható valamely  $\mathcal{U} = (A, B, Q, i, \gamma, \beta)$   $F$ - $G$  transzformátorral, ahol a  $Q$  állapot-funktor szorzat-funktor. Fa-transzformátorok esetében általában megengedett  $i:A \longrightarrow QG^*B$  alakú átírás a generátorokra.

A generátor-megőrző top-down fa-transzformátor fogalma szintén egybeesik az inverz állapotú  $F$ - $G$  transzformátor fogalmával. Generátor-megőrzőnek nevezünk egy top-down fa-transzformátort, ha a végállapotot megadó átírási szabályok halmaza megadható  $t:QA \longrightarrow B$  függvénnyel, míg általában ez  $t:QA \longrightarrow G^*B$  alakú lehet.

Megjegyezzük, hogy az eddig elmondottak csak determinisztikus fa-transzformatorokra érvényes.

Az  $X$ - $Y$  transzformator definíciójában a kezdőállapot morfizmus  $i:A \longrightarrow QY^*B$  alakú is lehetne. Ugyan így az inverz állapotú  $X$ - $Y$  transzformatoroknál a végállapot morfizmus lehetne  $t:QA \longrightarrow Y^*B$  alakú is.

Hivatkozások

- [1] S. Alagić, Natural state transformations, Journal of Computer and System Sciences 10 /1975/ 266-307.
- [2] M.A. Arbib - E.G. Manes, A Categorist's View of Automata and Systems. Category Theory Applied to Computation and Control, Proceedings of the First International Symposium. Lecture Notes in Computer Science 25, Berlin, 1975.
- [3] M.A. Arbib - F.G. Manes, Tree Transformations and Semantics of Loop free Programs. Acta Cybernetica, 1978, megjelenés alatt.
- [4] J. Engelfriet, Bottom-up and Top-down Tree Transformations: A Comparison. Mathematical Systems Theory, 9 /1975/, 198-231.
- [5] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [6] F.G. Manes, Algebraic Theories, GTM 26, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [7] W.C. Rounds, Mappings and Grammars on Trees, Mathematical Systems Theory 4 /1970/, 257-287.
- [8] J.W. Thatcher, Generalized<sup>2</sup> Sequential Machine Maps, Journal of Computer and System Sciences, 4 /1970/, 339-367.