B 1615

Egyetemi doktori disszertáció

ELDÖNTHETŐSÉGI KÉRDÉSEK A FATRANSZFORMÁCIÓK KÖRÉBEN

Ésik Zoltán

József Attila Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Szeged, 1978

B 1615

Véges automaták mint nyelveket reprezentáló eszközök lényegében egy unoidnak, vagyis csupa egyváltozós müveletekkel rendelkező univerzális algebrának is tekinthetők. Igy az automata bemenő jeleit egyváltozós müveleti szimbólumokként az általa reprezentált nyelvet pedig egyváltozós müveleti szimbólumokból felépülő polinomszimbólumokból álló halmazként is felfoghatjuk. Innen már csak egy lépés a faautomata fogalma: a faautomata a véges automata olyan általánositása, amelyben a bemenő jelek többváltozós müveleti szimbólumok is lehetnek. Következésképpen egy faautomata egy esetleg többváltozós müveleti szimbólumokat is tartalmazó polinomszimbólum halmazt reprezentál. Automata elméleti szempontból talán ez a tényező motiválta a faautomata fogalmának bevezetését. Másrészről egyáltalában nem lebecsülendő az sem, hogy már a kutatások kezdeti szakaszában kiderült, hogy a faautomatákkal reprezentálható polinomszimbólum halmazok lényegében megegyeznek a környezetfüggetlen nyelvtanok derivációs fáinak halmazaival (THATCHER[1967]). Ily módon lehetőség nyilt elegánsabb bizonyitás adására néhány, a környezetfüggetlen nyelvekre vonatkozó tételt illetőleg: erre nézve egy bevezetés található pld. THATCHER [1973] -ban.

A faautomaták elmélete egy másik ágon is kapcsolódik a számitástudományban napjainkban folyó kutatásokhoz: a faautomatákkal reprezentálható, vagy annál általánosabb polinomszimbólum halmazok (TURNER [1975]) vizsgálata szorosan kapcsolódik a programsémáknak SCOTT [1971]-ben inditott elméletéhez (ld.

Jósa Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

NIVAT [1973], INDERMARK [1976], GOUGEN-THACHER-WAGNER-
-WRIGHT [1977], DAMM [1977]).

A véges automata egy másik felfogása szerint nyelveket nyelvekbe transzformáló eszköz. Ismét, ehelyett azt is mondhatjuk, hogy a véges automaták egyváltozós müveleti szimbólumokból felépülő polinomszimbólumokhoz rendelnek ugyancsak egyváltozós müveleti szimbólumokból felépülő polinomszimbólumokat. A fatranszformátor az igy felfogott véges automata általánositása többváltozós esetre.

Elsősorban mint a forditóprogramok ugynevezett forditási fázisának, vagy általánosabban, szemantikus feldolgozó részeinek matematikai modelljei a fatranszformátorhoz számos közel álló fogalom alakult ki a számitástudományban - általánositott szintaxis-vezérelt forditási sémák (AHO-ULLMAN [1973]), attributum nyelvtan (KNUTH [1968]), tulajdonság nyelvtan (STEARNS-LEWIS [1969]), transzformációs nyelvtan (SALOMAA [1973]). Ezek közül az elsőnek emlitett általánositott szintaxisvezérelt forditási séma áll legközelebb a fatranszformátorhoz: ha egy fatranszformátor által indukált transzformáció komponenseire alkalmazzuk azt a függvényt, amely minden polinomszimbólumhoz a levelein lévő nullaváltozós müveleti szimbólumok összeolvasásával kapott szót rendeli, az általánositott szintaxis-vezérelt forditási séma fogalmához jutunk.

Mig a faautomaták alapvető tulajdonságainak eldönthetőségét megvizsgálták (THATCHER[1968], BRAINERD [1968]), addig

ez fatranszformátorokról nem mondható el.

A dolgozatban először a determinisztikus fatranszformátorok egy-egyértelmüségének eldönthetőségével foglalkozunk. Ezzel kapcsolatban bebizonyitjuk, hogy az egy-egyértelmüség a determinisztikus fatranszformátoroknak általában eldönthetetlen tulajdonsága. Ugyanez igaz az ugynevezett felszálló determinisztikus fatranszformátoroknak egy szükebb osztályára is. Ugyanakkor a lineáris determinisztikus fatranszformátorok egy-egyértelmüsége eldönthető.

Foglalkozunk a nemdeterminisztikus fatranszformátorok egyértelmüségének eldönthetőségével is, és megmutatjuk, hogy az egyértelmüség mindig eldönthető. Ennek következményeként bizonyitást nyer az, hogy létezik olyan algoritmus, amely tetszőleges két determinisztikus fatranszformátorról eldönti, hogy ekvivalensek-e.

Vizsgálatainkat olyan esetekre is kiterjesztjük, amikor az egy-egyértelmüséget illetve az ekvivalenciát véges sok azonosság erejéig értjük. Ebben az irányban minden eredményünk negativ, még akkor is, ha a legegyszerübb esetre szoritkozunk.

Végül a lineáris nemdeterminisztikus fatranszformátorok egyértelmüségének eldöntésére egy erősebb algoritmust adunk, és ebből származtatjuk azt a tételt, hogy minden végtelen reguláris egyenletrendszerhez effektiven konstruálható vele lineárisan ekvivalens véges egyenletrendszer.

Köszönetemet fejezem ki Gécseg Ferenc egyetemi tanár urnak, aki a dolgozatban megoldott problámákra felhivta figyelmemet, és hasznos tanácsaival segitségemre volt a dolgozat megirásában.

1. Alapvető fogalmak

Ebben a fejezetben megadjuk a dolgozatban felhasznált fogalmak, jelölések döntő többségét. A néhány univerzális algebrai fogalom bevezetéséhez elsősorban GRÄTZER [1968]-at, mig a faautomatákkal és fatranszformátorokkal kapcsolatos definiciók megadásában a THACHER [1967], [1970], THACHER-WRIGHT [1968], BRAINERD [1968], ROUNDS [1970] és ENGELFRIET [1975] munkákat valamint Gécseg Ferenc egyetemi tanár szemináriumi előadásait vettük alapul.

Legyen a véges F halmaz a nemnegativ egészekkel in-dexelt, páronként diszjunkt F_n halmazok egyesitése. Tegyük fel továbbá, hogy F_0 nemüres. Akkor F-et tipusnak és minden $n(\geq 0)$ egész számra F_n elemeit n-változós müveleti szimbólumoknak nevezzük. Ahelyett, hogy $f(\in F_n)$ n-változós müveleti szimbólum általában azt mondjuk, hogy hogy f aritása n: $\nu(f) = n$. Mivel minden F tipus véges halmaz, van legnagyobb olyan egész szám, amelyre $F_n \neq \emptyset$. Ez a továbbiakban $\nu(F)$-fel jelölt szám az F aritáshatára. Ha $\nu(F) \leq 1$ F unáris, ha pedig $\nu(F) \leq 2$ F bináris. (Ez a szóhasználat az irodalomban megszokottól némiképpen eltér.)

Ha adott egy F tipus, bevezethetjük az F tipusu algebra fogalmát. Ez egy $\underline{A}(= (A, \{(f)_{\underline{A}} | f \in F\}))$ rendszer, amelyben A egy nemüres halmaz, és tetszőleges n nemnegativ egész számra valamint $f(\in F_n)$ n-változós müveleti szimbólumra $(f)_{\underline{A}}$ az A^n halmaznak A-ba való leképezése: az f müveleti szimbólum realizációja. Ha n = 0, akkor $(f)_{\underline{A}}$-t általában A egy elemével

azonositjuk. Az F tipusu algebrák között a szokásos módon definiálhatók a homomorfizmusok, és igy megkapjuk az F tipusu algebrák kategóriáját.

Ismeretes, hogy ebben a kategóriában tetszőleges Y halmazhoz létezik izomorfizmus erejéig egyértelmüen meghatározoss $T_{F,Y}$ Y által generált szabad algebra. Ez a szabad algebra több különböző módon reprezentálható. Egy reprezentációja nyerhető azáltal, hogy $T_{F,Y}$-t ugy definiáljuk, hogy legyen a legszükebb olyan halmaz, amelyre az alábbi két feltétel teljesül:

(1) $Y, F_0 \subseteq T_{F,Y}$ (az általánosság megszoritása nélkül mindig feltehetjük, hogy $F \cap Y = \emptyset$),

(2) ha $n>0$, $f \in F_n$ és $t_1,\dots,t_n \in T_{F,Y}$, akkor $f(t_1,\dots,t_n) \in T_{F,Y}$; és az által, hogy $T_{F,Y}$-t $\underline{T}_{F,Y} = (T_{F,Y}, \{(f)_{\underline{T}_{F,Y}} \mid f \in F\})$ algebrává tesszük az

(1) $(f)_{\underline{T}_{F,Y}} = f$, ha $f \in F_0$, és

(2) $(f)_{\underline{T}_{F,Y}}(t_1,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,t_n)$, ha $n>0$, $f \in F_n$, $t_1,\dots,t_n \in T_{F,Y}$ definicióval.

$T_{F,Y}$ elemei reprezentálhatóak ugy is, mint F illetve Y elemeivel cimkézett véges irányitott és rendezett fák. Innen származnak például a faautomata, fatranszformátor és az alább bevezetett részfa elnevezések is.

Legyen t a $T_{F,Y}$ tetszőleges eleme. Ha $t \in F_0 \cup Y$, akkor t-nek egyetlen részfaja van, önmaga. Ha $t = f(t_1,\dots,t_n)$ $(n>0, f \in F_n, t_1,\dots,t_n \in T_{F,Y})$, akkor t részfái önmaga és

a $t_1,\dots,t_n$ részfái. Ha t_1 a t_2 részfája és $t_1 \neq t_2$, akkor t_1 a t_2 valódi részfája.

Beszélhetünk $T_{F,Y}$ elemeinek mélységéről és rangjáról is. Valamely $t(\in T_{F,Y})$ $dp(t)$ mélysége 0 és $rn(t)$ rangja 1, ha $t \in F_0 \cup Y$; különben, ha $t = f(t_1,\dots,t_n)$ $(n>0,\ f \in F_n,\ t_1,\dots,t_n \in T_{F,Y})$, akkor $dp(t) = \max\{dp(t_i) \mid 1 \leq i \leq n\} + 1$, $rn(t) = 1 + \sum_{i=1}^{n} rn(t_i)$. Legyen a t ismét a $T_{F,Y}$ egy eleme. Ha $t \in F_0 \cup Y$, akkor t-nek önmaga a gyökere, $root(t) = t$. Különben $root(t)$ az F azon egyértelmüen meghatározott f eleme, amelyhez van olyan $t_1,\dots,t_{\nu(f)}(\in T_{F,Y})$, hogy $t = f(t_1,\dots,t_{\nu(f)})$.

Most bevezetjük a polinomszimbólum fogalmát. E célból legyen $X(=\{x_1,\dots,x_n,\dots\})$ egy, az egész dolgozatban egyszer és mindenkorra rögzitett megszámlálhatóan végtelen halmaz. X elemeit változóknak nevezzük, és minden n nemnegativ egész számra X_n-nel jelöljük az első n változó halmazát: $X_n = \{x_1,\dots,x_n\}$. Igy $X_0 = \emptyset$. Ezek után n változós polinomszimbólumokon egyszerüen a T_{F,X_n} elemeit értjük. Megjegyezzük, hogy T_{F,X_n} helyett általában $T_{F,n}$-et irunk és $T_{F,0}$-t egyszerüen T_F-fel jelöljük.

Vegyünk most egy tetszőleges $p(\in T_{F,n})$ polinomszimbólumot valamint egy $\underline{A}(=(A, \{(f)_{\underline{A}} \mid f \in F\}))$ algebrát. A p indukál $\underline{A}$ felett egy n változós $(p)_{\underline{A}}$ függvényt, amelyet a p által $\underline{A}$-ban indukált polinomnak nevezünk: minden $a_1,\dots,a_n(\in A)$-ra

(1) ha $p = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $(p)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = a_i$,

(2) ha $p = f$, $f \in F_0$, akkor $(p)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = (f)_{\underline{A}}$,

(3) ha $p = f(p_1,\ldots,p_m)$ $(m > 0,\ f \in F_m, p_1,\ldots,p_m \in T_{F,n})$, akkor $(p)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = (f)_{\underline{A}}((p_1)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n),\ldots$ $\ldots,(p_m)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n))$. A továbbiakban egy $\underline{A}$ algebra $(A, \{(f)_{\underline{A}} | f \in F\})$ jelölése helyett általában az egyszerübb $(A, \{f | f \in F\})$, illetve (A,F) jelölést használjuk, és ezt a jelölésbeli egyszerüsitést tovább vive $(p)_{\underline{A}}$ helyett p-t irunk. Ezt annál is inkább megtehetjük, mert általában csak szabad algebrákkal dolgozunk, és $Y \subseteq Z$ esetén $T_{F,Y}$ a $T_{F,Z}$ részalgebrája, igy minden $p(\in T_{F,n})$-re $(n \geq 0)$ $(p)_{T_{F,Y}}$ a $(p)_{T_{F,Z}}$-nek $T^n_{F,Y}$-re való restingálásával kapható: $(p)_{T_{F,Y}} = (p)_{T_{F,Z}}|_{T^n_{F,Y}}$. Ha $p \in T_F$, vagyis p 0 változós polinomszimbólum, akkor tetszőleges $\underline{A}$ F tipusu algebrára $(p)_{\underline{A}}$-t általában A egy elemével azonositjuk.

Vegyük észre, hogy $n \leq m$ esetén $T_{F,n} \subseteq T_{F,m}$, igy a $T_{F,n}$ egy p elemét felhasználhatjuk egy n és egy m változós polinom indukálására is. A dolgozatban ezt a lehetőséget több helyen ki is fogjuk használni.

Polinomszimbólumokkal kapcsolatban még két fogalmat vezetünk be. Ezekhez azonban szükségünk van a szabad monoid definiciójára. Legyen Y tetszőleges halmaz. Y által generált szabad monoidnak nevezzük azt az $(Y^*, \cdot, \lambda)$ algebrát, amelyben Y^* az Y elemeiből képzett összes véges sorozatok - továbbiakban szavak - halmaza, $\cdot$ egy kétváltozós müvelet, a szavak

konkatenációja, λ pedig - függetlenül attól, hogy melyik szabad monoidból kerül ki - az üres szó. Igy az Y^* minden u elemére $\lambda.u = u.\lambda = u$. A továbbiakban a konkatenáció müveletét nem irjuk általában ki, és igy $(Y^*, ., \lambda)$ helyett is csak az Y^* jelölést használjuk. Ha a $w,u,v (\in Y^*)$ szavakra $wu = v$, w-t a v kezdőszeletének nevezzük. Ha még $u \neq \lambda$ is teljesül, w a v valódi kezdőszelete. Természetes módon definiálhatjuk a szavak hosszát is: valamely $w (\in Y^*)$ szó $|w|$ hossza az Y elemeinek w-ben multiplicitással együtt való előfordulásainak száma. Igy $|\lambda| = 0$. Y^+-szal jelöljük Y^* pozitiv hosszuságu elemeinek halmazát, vagyis $Y^+ = Y^* - \{\lambda\}$.

Legyen ezután a kitérő után F ismét egy tipus. Az alábbi három eset valamelyike minden $p (\in T_{F,X})$-re definiálja a p $fr(p)$-vel jelölt határát, ami X^* egy eleme:

(1) minden $f (\in F_0)$-ra $fr(f) = \lambda$,

(2) minden $n (\geq 1)$-re $fr(x_n) = x_n$,

(3) ha $n > 0$, $f \in F_n$, $p_1, \ldots, p_n \in T_{F,X}$, akkor $fr(f(p_1, \ldots, p_n)) = fr(p_1) \ldots fr(p_n)$.

Az fr függvényt polinomszimbólumokból álló vektorokra is kiterjeszthetjük: tetszőleges n nemnegativ egész számra és $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n) (\in T^n_{F,X})$-re $fr(\underline{p}) = fr(p_1) \ldots fr(p_n)$. Igy $T^0_{F,X}$ egyetlen elemének, vagyis az üres vektornak λ a határa. Ha már vektoroknál tartunk, bevezetünk néhány, az egész dolgozatban használt konvenciót. Ha A egy tetszőleges nemüres halmaz, n egy nemnegativ egész szám, $\underline{a}$ pedig A^n egy eleme, azaz A elemeiből álló n komponensü vektor, akkor minden $i (1 \leq i \leq n)$-re a_i-vel jelöljük az $\underline{a}$ i-dik komponensét. Más-

szóval $\underline{a}$ megegyezik $(a_1,\ldots,a_n)$-nel. Természetes, hogy az A és az A^1 halmazokat azonositjuk, igy A minden eleme felfogható vektorként is. Sőt, általánosabban, ha $a \in A$, n pedig nemnegativ egész szám, $\underline{a}^{(n)}$-nel jelöljük azt az A^n-beli elemet, amely minden komponense a. Ha $\underline{a} \in A^n$, $\underline{b} \in A^m$ $(n,m \geq 0)$, $(\underline{a},\underline{b})$ adja az $(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m)$ n+m komponensü vektort. Világos hogy igy tulajdonképpen az A által generált szabad monoidot kaptuk, csupán annak elemeit vektorokként interpretáltuk. Az egységelem szerepét az üres vektor vette át. Ha most $\underline{A}(= (A,F))$ egy F tipusu algebra, tehát az A az $\underline{A}$ algebra tartóhalmaza, $p(\in T_{F,n})$ pedig egy n változós polinomszimbólum, akkor a $p(\underline{a})$ jelölést is használhatjuk a hosszabb $p(a_1,\ldots,a_n)$ helyett.

Tárgyalásunkban néha az is előfordul, hogy polinomszimbólumokból (helyesebben polinomokból) álló vektort alkalmazunk egy algebra elemeire. Ha $\underline{A}(= (A,F))$ mint az előbb, egy F tipusu algebra, n,m nemnegativ egész számok, $\underline{p} \in T^m_{F,n}$, $\underline{a} \in A^n$, akkor $\underline{p}(\underline{a})$-n a $(p_1(\underline{a}),\ldots,p_m(\underline{a}))$ vektort értjük. Abban az esetben, amikor $m = 0$, ez az üres vektor, ha pedig $n = 0$, vagyis $\underline{a}$ az üres vektor, akkor $\underline{p}(\underline{a})$ megegyezik $\underline{p}$-vel. (Megjegyezzük, hogy a $\{T^m_{F,n} \mid n,m \geq 0\}$ rendszer az itt bevezetett alkalmazás és a korábban már bevezetett un. vektorok konkatenációjának müveletével bizonyithatóan és csupán kis különbséggel megegyezik az ARNOLD-DAUCHET [1977]-ben bevezetett szabad projektiv magmoid fogalmával.)

Az fr függvény segitségével tetszőleges n nemnegativ egész számra megadhatjuk a $T_{F,n}$ elemeinek egy osztályozását. Valamely $p(\in T_{F,n})$ lineáris, ha fr(p)-ben X_n egyetlen eleme sem fordul elő kétszer. Ugyanez a p rendezéstartó, ha $fr(p) = x_1 \ldots x_n$. (Ez utóbbi fogalom nyilván függ attól, hogy melyik n-re tekintjük a p-t $T_{F,n}$ elemének. Ezért azt mindig specifikálni fogjuk, ha a rendezéstartó szóhasználattal élünk.) $T_{F,n}$ rendezéstartó elemeinek halmazát $\hat{\hat{T}}_{F,n}$-nel fogjuk jelölni, mig a $\hat{T}_{F,n}$ jelölést fenntartjuk a $T_{F,n}$ ugynevezett lineáris nemtörlő elemeire: $\hat{T}_{F,n} = \{p(\in T_{F,n}) \mid fr(p)$ az $x_1,\ldots,x_n$ változók permutációja$\}$. Ha n és m tetszőleges nemnegativ egész számok, $\hat{T}^m_{F,n}$-en mást értünk, mint ami az előzőek alapján várható lenne: $\hat{T}^m_{F,n} = \{p(\in T^m_{F,n}) \mid fr(p_1)\ldots$ $\ldots fr(p_m)$ az $x_1,\ldots,x_n$ változók permutációja$\}$.

A részfa fogalmához hasonlóan bevezethetjük a szuperfa fogalmát is. Legyen Y tetszőleges halmaz, $t \in T_{F,Y}$. Valamely n nemnegativ egész számra a $\hat{\hat{T}}_{F,n}$ egy p elemét a t szperfájának nevezünk, ha létezik olyan $(t_1,\ldots,t_n) \in T^n_{F,Y}$, hogy $t = p(t_1,\ldots,t_n)$.

A polinomszimbólumokkal kapcsolatos fogalmak sorának befejezése képpen említést teszünk még az ugynevezett utakról. Tetszőleges n természetes számra és $p(\in T_{F,X})$ polinomszimbólumra az n-utak a természetes számok által generált szabad monoid - $\mathbb{N}^*$ - egy részhalmazát adják, amelyet $path_n(p)$-vel jelölünk. A pontos definició a következő:

(1) $path_n(p) = \emptyset$, ha $p \in F_0$ vagy $p \in X - \{x_n\}$,

(2) $path_n(p) = \{\lambda\}$, ha $p = x_n$,

(3) $path_n(p) = \{iw \mid 1 \leq i \leq m,\ w \in path_n(p_i)\}$, ha $p = f(p_1,\dots,p_m)$, ahol $m > 0$, $f \in F_m$, $p_1,\dots,p_m \in T_{F,X}$. Végül $path(p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} path_n(p)$. Ha valamely n-re $path_n(p)$ egyetlen elemet tartalmaz, mondjuk w-t, akkor néha $path_n(p)$-n magát a w szót értjük. Ugyanez áll path(p)-vel kapcsolatban is.

Most már készen állunk ahhoz, hogy definiáljuk a faautomata fogalmát. E célból legyen F ismét egy tetszőleges típus. Egy $\underline{A}(= (F,A,A_0))$ rendszert F típusu faautomatának nevezzük, ha (A,F) egy - általában szintén A-val jelölt - véges F típusu algebra (azaz A véges), A_0 pedig az A egy kitüntetett részhalmaza. Az A illetve A_0 halmazok elemeit rendre állapotoknak illetve végállapotoknak nevezzük. Minden faautomata reprezentál egy polinomszimbólum halmazt, vagy erdőt. Az A által reprezentált $T(\underline{A})$ erdőt a $T(\underline{A}) = \{p(\in T_F) \mid (p)_{\underline{A}} \in A_0\}$ egyenlőség határozza meg. Az A és B faautomaták ekvivalensek, ha $T(\underline{A}) = T(\underline{B})$.

A faautomatákkal reprezentálható erdőknek sikerült egy Kleene-típusu jellemzését megadni, ezért a faautomatákkal reprezentálható erdőket a dolgozatban röviden reguláris erdőknek fogjuk nevezni. Ismeretes, hogy a reguláris erdők legalapvetőbb tulajdonságai - pl. üresség, végesség, tartalmazás, egyenlőség - általában eldönthetőek. Ezeket a pozitiv eredményeket a dolgozatban helyenként minden külön említés nélkül használjuk ki.

Néha szükségünk lesz arra, hogy részben definiált avagy nemdeterminisztikus faautomatákkal dolgozzunk. Ehhez először

adjuk meg a nemdeterminisztikus algebra fogalmát. Valamely F tipusra F tipusu nemdeterminisztikus algebrának nevezünk egy $\underline{A}(=(A, \{(f)_{\underline{A}} | f \in F\}))$ rendszert, ha A egy nemüres halmaz és minden $n(\geq 0)$-ra $(f)_{\underline{A}}$ az A^n-nek az A hatványhalmazába, vagyis P(A)-ba való leképezése. Akárcsak közönséges esetben, az $(A, \{(f)_{\underline{A}} | f \in F\})$ jelölés helyett egyszerüen az (A,F) irásmódot használjuk.

Minden $\underline{A}(=(A, \{(f)_{\underline{A}} | f \in F\}))$ nemdeterminisztikus algebrához tartozik egy $P(\underline{A})(=(P(A), \{(f)_{P(\underline{A})} | f \in F\}))$ algebra, amelyben tetszőleges $n(\geq 0)$-ra, $f(\in F_n)$-re és $A_1,\ldots,A_n(\subseteq A)$-ra $(f)_{P(\underline{A})}(A_1,\ldots,A_n) = \bigcup((f)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n) | a_1 \in A_1,\ldots,a_n \in A_n)$. Igy minden $p(\in T_{F,n})$ n-változós polinomszimbólumra könnyen definiálhatjuk a p által $\underline{A}$-ban indukált n-változós $(p)_{\underline{A}}$ polinomot: minden $a_1,\ldots,a_n(\in A)$-ra $(p)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = (p)_{P(\underline{A})}(\{a_1\},\ldots,\{a_n\})$.

Egy $\underline{A}(=(A, \{(f)_{\underline{A}} | f \in F\}))$ nemdeterminisztikus algebrát parciális algebrának nevezünk, ha minden n nemnegativ egész számra és f n-változós müveleti szimbólumra továbbá $a_1,\ldots,a_n(\in A)$-ra $(f)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n)$ legfeljebb egyelemü. Ha egy p n-változós müveleti szimbólumra vagy n-változós polinomszimbólumra és az $\underline{A}$ $a_1,\ldots,a_n$ elemeire $(p)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = \{a\}$, akkor röviden azt irjuk, hogy $(p)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = a$.

Ezek után definiáljuk a nemdeterminisztikus illetve parciális faautomata fogalmát: F tipusu nemdeterminisztikus (parciális) faautomatának nevezünk egy $\underline{A}(=(F,A,A_0))$ rendszert, ha A véges halmaz, (A,F) nemdeterminisztikus (parciális)

algebra, A_0 pedig az A egy kitüntetett részhalmaza. Ugyanugy, mint közönséges esetben, az (A,F) nemdeterminisztikus illetve parciális algebrát is $\underline{A}$-val jelöljük, A és A_0 elemeit pedig rendre állapotoknak illetve végállapotoknak nevezzük. Az $\underline{A}$ által reprezentált erdő a $T(\underline{A}) = \{p(\in T_F) \mid (p)_{\underline{A}} \cap A_0 \neq \emptyset\}$ halmaz. Parciális esetben ez $\{p(\in T_F) \mid (p)_{\underline{A}} \in A_0\}$ alakban is irható. Ismeretes, hogy mind a nemdeterminisztikus mind pedig a parciális automatákkal reprezentálható erdők osztálya a reguláris erdők osztályát adja. Az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ nemdeterminisztikus (parciális) faautomaták ekvivalensek, ha $T(\underline{A}) = T(\underline{B})$.

A következőkben rátérünk a fatranszformátor definiciójának megadására. Nemdeterminisztikus felszálló fatranszformátornak egy olyan $\underline{A}(= (F, A, G, A_0, \Sigma_{\underline{A}}))$ rendszert nevezünk, amelyben

(1) F és G tipusok (rendre az $\underline{A}$ input illetve output tipusai),

(2) A véges nemüres halmaz, az állapotok halmaza,

(3) A_0 ($\subseteq A$), a kezdőállapotok halmaza,

(4) $\Sigma_{\underline{A}}$ $af \to p(a_1 x_{i_1}, \ldots, a_m x_{i_m})$ tipusu (vagy ekvivalens módon $af(x_1, \ldots, x_n) \to p(a_1 x_{i_1}, \ldots, a_m x_{i_m})$ tipusu) szabályok véges halmaza, ahol $n, m \geq 0$, $f \in F_n$, $a, a_1, \ldots, a_m \in A$, $p \in T_{G,m}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n$. Igy $\Sigma_{\underline{A}}$ felfogható $(A \times F) \times T_{G, A \times X}$, avagy $(A \times T_{F,X}) \times T_{G, A \times X}$ részhalmazaként. A "felszálló fatranszformátor" szavak helyett röviden ff-transzformátort irunk.

Legyen az $\underline{A}$ a fent definiált nemdeterminisztikus ff-transzformátor, Y pedig tetszőleges halmaz. $T_{G, A \times T_{F,Y}}$-on

bevezethetünk egy binér $\underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow}$ relációt, a közvetlen derivációt: valamely $t,t'(\in T_{G,A\times T_{F,Y}})$-ra $t \underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow} t'$ akkor és csakis akkor áll fenn, ha van olyan $n,m(\geq 0)$, $k(>0)$, $i(1\leq i\leq k)$, $p(\in T_{G,k})$, $f(\in F_n)$, $t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_k(\in T_{F,Y})$, $s_1,\ldots,s_n(\in T_{F,Y})$, $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m(\in A)$ és $q(\in T_{G,m})$, hogy az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

(1) $t = p(a_1t_1,\ldots,a_{i-1}t_{i-1},a_if(s_1,\ldots,s_n),a_{i+1}t_{i+1},\ldots,a_kt_k)$,

(2) $a_if \longrightarrow q(b_1x_{i_1},\ldots,b_mx_{i_m}) \in \Sigma_{\underline{A}}$,

(3) $t' = p(a_1t_1,\ldots,a_{i-1}t_{i-1},q(b_1s_{i_1},\ldots,b_ms_{i_m}),a_{i+1}t_{i+1},\ldots,a_kt_k)$. (Vegyük észre, hogy $A\times T_{F,Y}$ (a,t) alaku elemei helyett egyszerüen at-t irtunk.) A derivációt, melyet $\overset{*}{\underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow}}$-nal jelölünk, a közvetlen derivációt reflexiv tranzitiv lezártja. Mivel $Y\subseteq Z$ esetén $\overset{*}{\underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow}} \subseteq \overset{*}{\underset{\underline{A},Z}{\Longrightarrow}}$, a $\overset{*}{\underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow}}$ jelölésben Y-t elhagyhatjuk. Ha félreértés veszélye nem forog fenn, ugyanezt $\underline{A}$-val is megtehetjük. Igy a $\overset{*}{\underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow}}$ helyett egyszerüen $\overset{*}{\Longrightarrow}$-ot irhatunk. Megemlitjük még, hogy ha $n(\geq 0)$, $\underline{a}\in A^n$, $\underline{p}\in T^n_{F,Y}$, $\underline{q}\in T^n_{G,A\times T_{F,Y}}$, akkor az $\underline{a}\underline{p} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{q}$ irásmóddal élünk abban az esetben, ha minden $i(1\leq i\leq n)$-re $a_ip_i \overset{*}{\Longrightarrow} q_i$.

A derivació segitségével definiálhatjuk az $\underline{A}$ által indukált $\tau_{\underline{A}}$ transzformációt: $\tau_{\underline{A}} = \{(p,q)\mid p\in T_F, q\in T_G, \exists a_0\in A_0,\ a_0p \overset{*}{\Longrightarrow} q\}$. Ez biztosan függvény ha $\underline{A}$ determinisztikus, vagyis ha valahányszor $af\longrightarrow p$, $af\longrightarrow q \in \Sigma_{\underline{A}}$ $(a\in A, f\in F, q,p\in T_{G,A\times X})$, mindig teljesül hogy $p = q$, és az is, hogy A_0 egyetlen állapotot tartalmaz. Ha ez a_0, akkor A_0 helyett általában csak ezt adjuk meg.

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

Általában elegendő lesz a dolgozatban csak olyan ff-transzformátorokra szoritkoznunk, amelyek kétszeresen összefüggőek, vagyis nem tartalmaznak felesleges szabályt. Pontosabban, egy $A(=(F,A,G,a_o,\underline{\Sigma}_A))$ nemdeterminisztikus ff-transzformátort kétszeresen összefüggő, ha a $\underline{\Sigma}_A$ minden $af(x_1,\ldots,x_n) \to p(a_1x_{i_1},\ldots,a_mx_{i_m})$ $(n,m\geqslant 0, a,a_1,\ldots,a_m \in A, f\in F_n, p\in \hat{T}_{G,m}, 1\leqslant i_1,\ldots,i_m\leqslant n)$ alaku eleméhez találhatók olyan $q(\in \hat{T}_{F,1})$, $r_1,\ldots,r_n(\in T_F)$, $q'(\in \hat{T}_{G,1})$ $r'_1,\ldots,r'_m(\in T_G)$ polinomszimbólumok valamint $a_o(\in A_o)$ kezdőállapot, hogy $a_oq(f(r_1,\ldots,r_n)) \overset{*}{\Longrightarrow} q'(af(r_1,\ldots,r_n))$ és $a_jr_{i_j} \overset{*}{\Longrightarrow} r'_j$ $(j=1,\ldots,m)$.

A fatranszformátorok egy másik tipusát alkotják a nemdeterminisztikus leszálló fatranszformátorok (lf-transzformátorok). Ezek $\underline{A}(=(F,A,G,A_o,\underline{\Sigma}_A))$ alaku rendszerek, ahol F,A,G és A_o ugyanazoknak a feltételeknek tesznek eleget, mint felszálló esetben, csak azzal a különbséggel, hogy A_o-t most a végállapotok halmazának nevezzük, $\underline{\Sigma}_A$ pedig $f(a_1x_1,\ldots,a_nx_n)\to$ $\to ap$ (vagy ekvivalens módon $f(a_1x_1,\ldots,a_nx_n)\to ap(x_1,\ldots,x_n)$) alaku szabályok véges halmaza, ahol $n\geqslant 0$, $f\in F_n$, $a_1,\ldots,a_n$, $a\in A$, $p\in T_{G,n}$. Tehát $\underline{\Sigma}_A \subseteq T_{F,A\times X}\times(A\times T_{G,X})$. Ha minden $n(\geqslant 0)$, $f(\in F_n)$, $a_1,\ldots,a_n$, $a,a'(\in A)$ és $p,p'(\in T_{G,X})$-re teljesül az, hogy ha az $f(a_1x_1,\ldots,a_nx_n)\to ap$ és $f(a_1x_1,\ldots,a_nx_n)\to a'p'$ szabályok $\underline{\Sigma}_A$ elemei, akkor $a=a'$ és $p=p'$, akkor $\underline{A}$ determinisztikus.

Vegyük az előzőekben definiált $\underline{A}$ nemdeterminisztikus lf-transzformátort. Ez indukál tetszőleges Y halmazra $T_{F,A\times T_{G,Y}}$-on egy $\underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow}$ binér relációt: bármely

$t,t'(\in T_{F,A\times T_{G,Y}})$-ra $t \underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow} t'$ akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $n,k(\geqslant 0)$, $i(1\leqslant i\leqslant k+1)$, $p(\in T_{F,k+1})$, $f(\in F_n)$, $t_1,\ldots,t_k,s_1,\ldots,s_k(\in T_{G,Y})$, $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_n$, $b(\in A)$ és $q(\in T_{G,n})$, hogy az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

(1) $t=p(a_1 t_1,\ldots,a_i t_i,f(b_1 s_1,\ldots,b_n s_n),a_{i+1}t_{i+1},\ldots$
$\ldots,a_k t_k)$,

(2) $f(b_1 x_1,\ldots,b_n x_n) \longrightarrow b\ q \in \underline{\Sigma}_{\underline{A}}$,

(3) $t'=p(a_1 t_1,\ldots,a_i t_i,bq(s_1,\ldots,s_n),a_{i+1}t_{i+1},\ldots$
$\ldots,a_k t_k)$.

A $\underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow}$ reláció reflexiv, tranzitiv burkát itt is <u>derivációnak</u> nevezzük, és $\overset{*}{\underset{\underline{A},Y}{\Longrightarrow}}$ -nal jelöljük. Ebből az $\underline{A}$-t és Y-t általában elhagyjuk.

A deriváció segitségével definiáljuk az $\underline{A}$ által <u>indukált</u> $\tau_{\underline{A}}$ <u>transzformációt</u>: $\tau_{\underline{A}} = \{(p,q) \mid p\in T_F,\ q\in T_G,\ \exists a_o(\in A_o),\ p \overset{*}{\Longrightarrow} a_o q\}$. Ha $\underline{A}$ determinisztikus, $\tau_{\underline{A}}$ függvény.

A felszálló esethez hasonlóan definiálhatjuk a kétszeresen összefüggőség fogalmát. Egy $\underline{A}(=(F,A,G,A_o,\underline{\Sigma}_{\underline{A}}))$ nemdeterminisztikus lf-transzformátort <u>kétszeresen összefüggőnek</u> nevezzük, ha a $\underline{\Sigma}_{\underline{A}}$ bármely $f(b_1x_1,\ldots,b_nx_n) \longrightarrow b\ p$ $(n\geqslant 0,\ f\in F_n,$ $b_1,\ldots,b_n,b\in A,\ p\in T_{G,n})$ alaku eleméhez található olyan $k(\geqslant 0)$, $i(0\leqslant i\leqslant k)$, $t_1,\ldots,t_k$, $s_1,\ldots,s_n(\in T_F)$, $t'_1,\ldots,t'_k$, $s'_1,\ldots,s'_n(\in T_G)$, $q(\in \hat{T}_{F,k+1})$, $q'(\in T_G)$, $a_1,\ldots,a_k(\in A)$, $a_o(\in A_o)$, hogy

(1) $t_i \overset{*}{\Longrightarrow} a_i t'_i$, $s_j \overset{*}{\Longrightarrow} b_j s'_j$ $(i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,n)$,

(2) $q(a_1 t'_1,\ldots,a_i t'_i,\ b\ p(s'_1,\ldots,s'_n),a_{i+1}t'_{i+1},\ldots,a_k t'_k) \overset{*}{\Longrightarrow}$
$\overset{*}{\Longrightarrow} a_o q'$.

Ismeretes, hogy minden $\underline{A}$ nemdeterminisztikus lf-(ff-) transzformátorhoz effektiven konstruálható vele ekvivalens, tehát ugyanazon transzformációt indukáló kétszeresen összefüggő lf-(ff-)transzformátor azáltal, hogy a szabályok halmazából kihagyjuk a "feleslegeseket". Az is ismert, hogy minden nemdeterminisztikus ff-(lf-)transzformátorral indukálható transzformáció értelmezési tartománya reguláris, és forditva is, minden T reguláris erdőhöz (effektiven) konstruálható olyan $\underline{A}$ nemdeterminisztikus ff-(lf-)transzformátor, hogy az $\underline{A}$ által indukált transzformáció értelmezési tartománya - továbbiakban $\mathrm{Dom}\tau_{\underline{A}}$ - megegyzik T-vel. Ugyanez leszálló fatranszformátorok esetén determinisztikus esetben is érvényes mig felszálló esetben nem.

A következőkben a fatranszformátorokat különböző szempontok szerint osztályozni fogjuk. E célból legyen először $\underline{A}(=(F,A,G,A_o,\Sigma_{\underline{A}}))$ nemdeterminisztikus ff-transzformátor. $\underline{A}$-t uniformnak nevezzük, ha $\Sigma_{\underline{A}}$ minden eleme $af(x_1,\ldots,x_n)\rightarrow$ $\rightarrow p(a_1x_1,\ldots,a_nx_n)$ alakban irható, ahol $n\geqslant 0$, $f\in F_n$, $a,a_1,\ldots,a_n\in A$, $p\in T_{G,n}$.

Most legyen $\underline{A}(=(F,A,G,A_o,\Sigma_{\underline{A}}))$ tetszőleges nemdeterminisztikus uniform ff-transzformátor, $\underline{B}(=(F,B,G,B_o,\Sigma_{\underline{B}}))$ pedig nemdeterminisztikus lf-transzformátor. Legyenek továbbá

(*) $af(x_1,\ldots,x_n)\longrightarrow p(a_1x_1,\ldots,a_nx_n)$ és

(**) $f(b_1x_1,\ldots,b_nx_n)\longrightarrow bp(x_1,\ldots,x_n)$

($n\geqslant 0$, $f(\in F_n)$, $a,a_1,\ldots,a_n(\in A)$, $b,b_1,\ldots,b_n(\in B)$, $p(\in T_{G,n})$) tipikus szabályok $\Sigma_{\underline{A}}$-ban, illetve $\Sigma_{\underline{B}}$-ben. $\underline{A}(\underline{B})$ lineáris, ha a $\Sigma_{\underline{A}}(\Sigma_{\underline{B}})$ minden (*)((**)) alaku szabályában p lineáris.

Hasonlóan A(B) nemtörlő, ha az A(B) tipikus (*)((**)) alaku szabályaiban p nemtörlő. Végül A(B) rendezéstartó, ha p-re mindig teljesül, hogy $p \in \hat{\hat{T}}_{G,n}$. Ha egy uniform ff-transzformátor lineáris vagy rendezéstartó, az uniform jelzőt elhagyjuk.

Ha egy A nemdeterminisztikus ff-(lf-)transzformátor input tipusa F, output tipusa pedig G, akkor azt mondjuk, hogy A F-ből G-be való fatranszformátor, és ugy jelöljük, hogy $A:F \to G$. Ha $\nu(F), \nu(G) \leq 1$, akkor A-t unárisnak nevezzük. Hasonlóan, ha $\nu(F), \nu(G) \leq 2$, A bináris. Az unáris fatranszformátorok lényegében megegyeznek az általánositott szekvenciális gépekkel (ld. AHO-ULLMAN [1972]).

Legyenek F és G tetszőleges tipusok, $\varphi : F \to T_{G,X}$ pedig aritástartó leképezés, azaz olyan leképezés, amely bármely $n(\geq 0)$-ra és $f(\in F_n)$-re kielégiti a $\varphi(f) \in T_{G,n}$ feltételt. φ-t kiterjeszthetjük $\bar{\varphi} : T_F \to T_G$ leképezéssé:

(1) $\bar{\varphi}(f) = \varphi(f)$, ha $f \in F_0$,

(2) $\bar{\varphi}(f(p_1,\ldots,p_n)) = \varphi(f)(\bar{\varphi}(p_1),\ldots,\bar{\varphi}(p_n))$, ha $n>0$, $f \in F_n$, $p_1,\ldots,p_n \in T_F$. A dolgozatban a φ-t és $\bar{\varphi}$-t általában azonositjuk és homomorfizmusnak nevezzük. Minden homomorfizmus indukálható egyetlen állapotu determinisztikus leszálló és felszálló fatranszformátorral is. A homomorfizmusok speciális esetét alkotják a projekciók: egy $\varphi : F \to T_{G,X}$ homomorfizmus projekció, ha bármely $n(\geq 0)$-ra és $f(\in F_n)$-re $\varphi(f)$ $g(x_1,\ldots,x_n)$ alaku valamely $g(\in G_n)$-re. Nyilvánvaló, hogy minden φ projekciót azonosithatunk egy $\varphi : F \to G$ aritástartó leképezéssel. Hasonlóan triviális az is, hogy bármely

F tipusra a T_F feletti identikus függvény - id_F - projekció.

Az alapvető definiciók sorát bezárólag még egy jelölésmódról teszünk említést. Ha $\underline{A}(=(F, A, G, A_o, \underline{\Sigma}_A))$ egy tetszőleges nemdeterminisztikus ff-(lf-)transzformátor és a az $\underline{A}$ egy állapota, $\underline{A}(a)$-val jelöljük azt a fatranszformátort, amelyet ugy kapunk, hogy a-t tesszük meg az egyetlen kezdő (vég) állapotnak.

Végezetül megjegyezzük, hogy az irodalomban - pl. a felsoroltban is - helyenként az itt közölttől eltérően definiálják a faautomata, illetve fatranszformátor fogalmát. Ezek az eltérések három fő csoportra bonthatóak. Az egyik az, hogy például faautomata esetén egy ugynevezett kezdővektort is megengednek, és ezáltal alkalmassá teszik a faautomatákat többváltozós polinomszimbólumok reprezentálására is. Hasonlóan egy fatranszformátort is alkalmassá lehet tenni többváltozós polinomszimbólumok transzformálására. Egy másik eltérés az, hogy néha megengedik azt, hogy egy müveleti szimbólumnak egynél több aritása is legyen. Ennek talán az az oka, hogy még szorosabbá tegyék a környezetfüggetlen nyelvtanok derivációs fái és a reguláris erdők közti kapcsolatot. A harmadik lehetséges eltérés az, hogy felszálló esetben a transzformáció eredményének összeállitását elhalasztják a feldolgozás végére. Mindaddig, amig a dolgozatban tárgyalt eldönthetőségi kérdésekkel foglalkozunk, ezek az eltérések csak technikai jellegüek, a dolgozat eredményeit nem befolyásolják.

2. Fatranszformációk egy-egyértelmüsége

A Post Megfelelkezési Probléma (SALOMAA [1973]) eldönthetetlenségét felhasználva könnyen igazolható, hogy nem létezik olyan algoritmus, amely az egyértelmü alapnyelvtannal rendelkező determinisztikus - AHO-ULLMAN [1973] szerint szemantikusan egyértelmü - általánositott szintaxis-vezérelt forditási sémák egy viszonylag szük osztályából kikerülő, egyébként tetszőleges sémára eldöntené, hogy az általa indukált transzformáció, amely jelen esetben függvény, egy-egyértelmü-e. Mármost ha az általánositott szintaxis-vezérelt forditási sémákat nem ugy fogjuk fel, hogy szavakat transzformálnak szavakba, hanem ugy, hogy fákat feleltetnek meg fáknak, és az általánositott szintaxis-vezérelt forditási séma helyett a neki lényegében megfelelő fatranszformátor fogalmát használjuk, akkor, az előzőhöz hasonlóan, azt a problémát vethetjük fel, hogy eldönthető-e a determinisztikus fatranszformátorok egy-egyértelmüsége, ahol most és a továbbiakban egy-egyértelmünek nevezünk egy determinisztikus fatranszformátort, ha az általa indukált függvény egy-egyértelmü.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a lineáris fatranszformátorok egy-egyértelmüsége eldönthető, mig általában eldönthetetlen. Bebizonyitjuk továbbá azt, hogy még unáris lineáris fatranszformátorok esetén is negativ a válasz a felvetett problémára, ha egy-egyértelmüségen véges sok azonosság erejéig való egy-egyértelmüséget értünk.

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

E fejezet lényegében teljes egészében megtalálható ÉSIK [1978]-ban, ahol az egy-egyértelmüség eldönthetőségén tul a szerző az un. kvázi egy-egyértelmüség eldönthetőségével is foglalkozott. A lineáris esetben kapott pozitiv eredmény felhasználható MARÓTI [1978] azon tételének bizonyitásához, amely szerint a GÉCSEG [1977]-ben bevezetett racionális reprezentálhatóság eldönthető.

Mielőtt rátérnénk a legfontosabb tételek tárgyalására, szükségünk van néhány előkészitő jellegü lemmára, amelyek közül az első kettőt bizonyitás nélkül közöljük, mivel bizonyitásuk származtatható azon - pl. ENGELFRIET [1975]-ben gyakorta kihasznált - ötletből, hogy egy fatranszformátor szabályainak halmazát tekintsük mint tipust.

(2.1) Lemma Legyen $\underline{A}:F \longrightarrow G$ tetszőleges egy végállapottal rendelkező, nemtörlő determinisztikus lf-transzformátor. Létezik olyan F' tipus és $\underline{A}':F' \longrightarrow G$ uniform determinisztikus ff-transzformátor, hogy $\nu(F)=\nu(F')$, és valamely $\underline{B}:F \longrightarrow F'$ és $\underline{C}:F' \longrightarrow F$ determinisztikus fatranszformátorra:

(i) $\tau_{\underline{C}} \circ \tau_{\underline{B}} = id_F|_{Dom\,\tau_{\underline{B}}}$,

(ii) $\tau_{\underline{B}} \circ \tau_{\underline{C}} = id_{F'}|_{Dom\,\tau_{\underline{C}}}$,

(iii) $\tau_{\underline{A}} = \tau_{\underline{A}'} \circ \tau_{\underline{B}}$,

(iv) $\tau_{\underline{A}'} = \tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{C}}$,

(v) ha $\underline{A}$ lineáris, akkor $\underline{A}'$ is lineáris.

Továbbá igaz az, hogy egy az (i)-(v) feltételeknek eleget tevő $\underline{A}'$ effektiven meghatározható.

(2.2) Lemma Bármely $\underline{A}:F \to G$ nemtörlő determinisztikus uniform ff-transzformátorhoz effektiven meghatározható egy olyan F' tipus és $\underline{A}':F' \to G$ determinisztikus lf-transzformátor, hogy $\nu(F) = \nu(F')$ és az előző lemma (i)-(v) feltételei kielégülnek alkalmas $\underline{B}:F \to F'$ és $\underline{C}:F' \to F$ determinisztikus fatranszformátorokra.

Az előző két lemma következményeként könnyen bizonyitható a

(2.3) Lemma A determinisztikus lf-transzformátorok egy-egyértelmüsége akkor és csak akkor dönthető el, ha az uniform determinisztikus ff-transzformátorok egy-egyértelmüsége eldönthető.

Bizonyitás Hogy a lemma állitásának elegendőségét bizonyitsuk, vegyünk egy tetszőleges $\underline{A}:F \to G$ uniform determinisztikus ff-transzformátort. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $\underline{A}$ kétszeresen összefüggő. Mármost ha $\underline{A}$ törlő, akkor nem egy-egyértelmü - igy az állitás következik abból, hogy konstruálható nem egy-egyértelmü determinisztikus lf-transzformátor. Ha $\underline{A}$ nemtörlő, akkor a (2.2) lemma felhasználásával adódik egy olyan $\underline{A}':F' \to G$ determinisztikus lf-transzformátor, amely akkor és csakis akkor egy-egyértelmü, ha $\underline{A}$ egy-egyértelmü.

Forditva, legyen $\underline{A}=(F, A, G, A_o, \Sigma_{\underline{A}})$ tetszőleges, kétszeresen összefüggő determinisztikus lf-transzformátor. Egy egyszerü konstrukció mutatja, hogy a bizonyitás hátra levő részében feltehetjük, hogy A_o egyetlen elemet tartalmaz.

Valóban, ha $A_G \neq \emptyset$, akkor $\underline{A}$ egy-egyértelmü. Különben legyen $F_m^* = F_m$ ha $m \neq 1$, $F_1^* = F_1 \cup \{f^*\}$, $A^* = A \cup \{a^*\}$, ahol f^* és a^* uj szimbólumok. Definiáljuk $\Sigma_{\underline{A}^*}$-ot a $\Sigma_{\underline{A}^*} = \Sigma_{\underline{A}} \cup \{f^*(ax_1) \rightarrow a^*x_1 \mid a \in A_o\}$ egyenlőséggel. Világos, hogy $\underline{A}$ akkor és csakis akkor egy-egyértelmü, ha $\underline{A}^* = (F^*, A^*, G, \{a^*\}, \Sigma_{\underline{A}^*})$ egy-egyértelmü.

Ezek után tegyük fel, hogy létezik $\Sigma_{\underline{A}}$-ban egy olyan, mondjuk $f(a_1x_1, \ldots, a_mx_m) \rightarrow ap$ $(m \geq 1,\ f \in F_m,\ p \in T_{G,m},$ $a, a_1, \ldots, a_m \in A)$ alaku szabály és i $(1 \leq i \leq m)$ természetes szám, hogy x_i nem fordul elő fr(p)-ben - amit a későbbiekben $x_i \notin fr(p)$-vel, mig azt, hogy x_i előfordul fr(p)-ben $x_i \in fr(p)$ irásmóddal fogjuk jelölni - valamint hogy $\mathrm{Dom}\, \tau_{\underline{A}}(a_i)$ legalább két elemü. Ebben az esetben $\underline{A}$ nem egy-egyértelmü. Ellenkező esetben konstruáljuk meg azt az $\underline{A}' = (F', A, G, A_o, \Sigma_{\underline{A}'})$ determinisztikus lf-transzformátort, amelyben

$$F'_m = \{\sigma (\in \Sigma_{\underline{A}}) \mid \sigma = f(a_1x_1, \ldots, a_nx_n) \rightarrow ap,\ |\{x \mid x \in fr(p)\}| = m\} \quad (m \geq 0),$$

$$\Sigma_{\underline{A}'} = \{\sigma(a_{i_1}x_1, \ldots, a_{i_m}x_m) \rightarrow ap(\underline{x}_1^{(i_1)}, \underline{x}_2^{(i_2-i_1)}, \ldots$$
$$\ldots, \underline{x}_{m-1}^{(i_m-i_{m-1})}, \underline{x}_m^{(n-i_m)}) \mid \sigma = f(a_1x_1, \ldots, a_nx_n) \rightarrow ap(\in \Sigma_{\underline{A}}),$$
$$1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n,\ fr(p) \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}^*\}$$

Egyszerü számolással igazolható, hogy $\underline{A}$ akkor és csak akkor egy-egyértelmü, ha $\underline{A}'$ egy-egyértelmü. Igy a lemma állitásának szükségessége következik a (2.1) lemmából és abból, hogy létezik olyan algoritmus, amely tetszőleges reguláris erdőre eldönti, hogy egynél több elemet tartalmaz-e. □

Ha az előző lemma bizonyitásában kihasználjuk a (2.1) és (2.2) lemmák kimondásában szereplő $\nu(F) = \nu(F')$ és (v) feltételeket is, akkor a következő két lemmához jutunk:

(2.4) Lemma Az unáris input tipussal rendelkező determinisztikus lf-fatranszformátorok egy-egyértelmüsége akkor és csakis akkor eldönthető, ha az unáris input tipussal rendelkező uniform determinisztikus ff-fatranszformátorok egy-egyértelmüsége is eldönthető.

(2.5) Lemma A lineáris determinisztikus lf-fatranszformátorok egy-egyértelmüsége akkor és csakis akkor eldönthető, ha a lineáris determinisztikus ff-fatranszformátorok egy-egyértelmüsége eldönthető.

Utolsó előkészitő lemmaként bebizonyitjuk a következő állitást:

(2.6) Lemma Tetszőleges $\underline{A}$ lineáris determinisztikus ff-transzformátorhoz effektiven konstruálható olyan $\underline{A}'$ rendezéstartó determinisztikus ff-transzformátor, hogy $\underline{A}$ akkor és csakis akkor egy-egyértelmü, ha $\underline{A}'$ egy-egyértelmü.

Bizonyitás Legyen $\underline{A} = (F, A, G, a_o, \Sigma_{\underline{A}})$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $\underline{A}$ kétszeresen összefüggő és nemtörlő. Definiáljuk a $\underline{A}' = (F, A, G, a_o, \Sigma_{\underline{A}},)$ lineáris determinisztikus ff-transzformátort az $af(x_1,\ldots,x_m) \rightarrow p'(a_1x_1,\ldots,a_mx_m) \in \Sigma_{\underline{A}}$, akkor és csakis akkor, ha van az $\{1,\ldots,m\}$ halmaznak olyan π permutációja, és van olyan $p(\in T_{G,m})$ polinomszimbólum, hogy

(1) $af(x_1,\ldots,x_m) \rightarrow p(a_{\pi^{-1}(1)}x_1,\ldots,a_{\pi^{-1}(m)}x_m) \in \Sigma_{\underline{A}}$,

(2) $fr(p) = x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(m)}$,

(3) $p' = p(x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(m)})$,

ahol π^{-1} jelöli a π inverzét, $m \geq 0$, $f \in F_m$, $p' \in T_{G,m}$, $a, a_1, \ldots, a_m \in A$. Könnyen látható, hogy $\underline{A}$ akkor és csakis akkor egy-egyértelmü, ha $\underline{A}'$ az. □

A következő lemmában feltesszük, hogy $\underline{A}(=(F, A, G, a_o, \Sigma_{\underline{A}}))$ determinisztikus uniform nemtörlő ff-transzformátor, valamint azt, hogy q_1^1, q_2^1, q_1^2, $q_2^2 \in \hat{T}_{F,1}$, q_3^1, $q_3^2 \in T_F$, $r^1 \in \hat{T}_{F,k}$, $k > 0$. Feltesszük továbbá még azt is, hogy a k_i $(i=1,\ldots,4)$ nemnegativ egész számokra $\sum_{i=1}^{4} k_i = k-1$ és hogy $\underline{s}_i^1$, $\underline{t}_i^1 \in T_F^{k_i}(i=1,\ldots,4)$, q_1, $q_2 \in T_{G,1}$, $q_3 \in T_G$, $r_1 \in T_{G,k_1+k_4+1}$, $r_2 \in T_{G,k_2+k_3+1}$, $\underline{s}_i$, $\underline{t}_i \in T_G^{k_i}$, $\underline{e}_i \in A^{k_i}(i=1,\ldots,4)$, $a, b, c, d \in A$.

Ezekkel a jelölésekkel a lemma a következő képpen mondható ki:

(2.7) Lemma Tegyük fel, hogy $dp(q_1^1), dp(q_1^2), dp(r^1) > 0$, $root(q_1^1) \neq root(q_1^2)$, továbbá azt, hogy az alábbi (i)-(iv) feltételek mindegyike kielégül:

(i) $aq_1^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_1(bx_1)$, $cq_2^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_2(bx_1)$, $cq_3^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_3$,

(ii) $\underline{e}_i \underline{s}_i^1 \overset{*}{\Rightarrow} \underline{s}_i$, $\underline{e}_i \underline{t}_i^1 \overset{*}{\Rightarrow} \underline{t}_i$ $(i=1,\ldots,4)$,

(iii) $aq_1^2 \overset{*}{\Rightarrow} q_1(r_1(\underline{s}_1, dx_1, \underline{s}_4))$,
$dq_2^2 \overset{*}{\Rightarrow} r_2(\underline{s}_2, q_2(r_1(\underline{t}_1, dx_1, \underline{t}_4)), \underline{s}_3)$,
$dq_3^2 \overset{*}{\Rightarrow} r_2(\underline{t}_2, q_3, \underline{t}_3)$,

(iv) $br^1 \overset{*}{\Rightarrow} r_1(\underline{e}_1\underline{x}_1, r_2(\underline{e}_2\underline{x}_2, cx_{k_1+k_2+1}, \underline{e}_3\underline{x}_3), \underline{e}_4\underline{x}_4)$,

ahol $\underline{x}_1 = (x_1, \ldots, x_{k_1})$, $\underline{x}_2 = (x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_1+k_2})$,

$\underline{x}_3 = (x_{k_1+k_2+2}, \ldots, x_{k-k_3})$, $\underline{x}_4 = (x_{k-k_3+1}, \ldots, x_k)$.

Akkor $p^1 (= q_1^1(r^1(\underline{s}_1^1, \underline{s}_2^1, p^{1*}, \underline{s}_3^1, \underline{s}_4^1)))$-re és $p^2 (= q_1^2(q_2^2(q_3^2)))$-ra, ahol $p^{1*} = q_1^1(r^1(\underline{t}_1^1, \underline{t}_2^1, q_3^1, \underline{t}_3^1, \underline{t}_4^1))$, igaz, hogy van olyan p_o^1, $p_o^2 (\in T_F)$, amelyekre

(v) $root(p_o^1) \neq root(p_o^2)$,

(vi) $p_o^1, p_o^2 \in Dom\, \tau_{\underline{A}(a)}$, $\tau_{\underline{A}(a)}(p_o^1) = \tau_{\underline{A}(a)}(p_o^2)$,

(vii) $rn(p_o^1) < rn(p^1)$, $rn(p_o^2) \leq rn(p^2)$.

Bizonyitás Először is megjegyezzük, hogy a lemma feltevéseiből következik az, hogy (v) és (vi) p^1-re illetve p^2-re is teljesülnek. Egyébként a lemma bizonyitása egyszerü számoláson mulik, ha p_o^1-t $q_1^1(r^1(\underline{s}_1^1, \underline{t}_2^1, q_3^1, \underline{t}_3^1, \underline{s}_4^1))$-nek, p_o^2-t pedig $q_1^2(q_3^2)$-nak választjuk, hiszen ekkor $root(p_o^1) = root(q_1^1)$, $root(p_o^2) = root(q_1^2)$, igy $root(q_1^1) \neq root(q_1^2)$ miatt $root(p_o^1) \neq root(p_o^2)$; $dp(r^1) > 0$ miatt $rn(p_o^1) < rn(p^1)$, továbbá világos hogy $rn(p_o^2) \leq rn(p^2)$ és

$$ap_o^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_1(br^1(\underline{s}_1^1, \underline{t}_2^1, q_3^1, \underline{t}_3^1, \underline{s}_4^1)) \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} q_1(r_1(\underline{e}_1\underline{s}_1^1, r_2(\underline{e}_2\underline{t}_2^1, cq_3^1, \underline{e}_3\underline{t}_3^1), \underline{e}_4\underline{s}_4^1)) \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} q_1(r_1(\underline{s}_1, r_2(\underline{t}_2, q_3, \underline{t}_3), \underline{s}_4)),$$

$$ap_o^2 \overset{*}{\Rightarrow} q_1(r_1(\underline{s}_1, dq_3^2, \underline{s}_4)) \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} q_1(r_1(\underline{s}_1, r_2(\underline{t}_2, q_3, \underline{t}_3), \underline{s}_4)). \square$$

(2.8) Tétel A lineáris determinisztikus fatranszformátorok egy-egyértelmüsége eldönthető.

Bizonyitás A (2.5) és (2.6) lemmák felhasználásával látható, hogy elegendő a tétel állitását csupán rendezéstartó ff-transzformátorokra igazolni. Vegyünk tehát egy

ilyen $\underline{A}(= (F, A, G, a_o, \Sigma_{\underline{A}}))$ fatranszformátort. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $\underline{A}$ kétszeresen összefüggő. Ha valamely $a(\in A)$ állapotra és $p \in T_{F,1}$ fára $dp(p) > 0$ és $ap \overset{*}{\Rightarrow} ax_1$, akkor $\underline{A}$ nem egy-egyértelmü. Mivel az $\underline{A}$ itt emlitett tulajdonsága eldönthető, feltehetjük, hogy bármely $a, b(\in A)$ és $p(\in T_{F,1})$ esetén ha $ap \overset{*}{\Rightarrow} bx_1$ és $dp(p) > 0$, akkor $a \neq b$.

Legyen most

$$K = \max\{dp(q) \mid q \in T_{G, A\times X}, \exists a \in A, p \in T_{F,X} \quad ap \to q \Sigma_{\underline{A}}\},$$

$$L = \max\{path(p) \mid p \in \hat{T}_{F,1}, \exists a, b \in A \quad ap \overset{*}{\Rightarrow} bx_1\} + 1.$$

Legyen továbbá M a $\{p(\in T_{F,X}) \mid dp(p) = KL, \exists m > 0$ $fr(p) = x_1 \ldots x_m\}$ halmaz számossága, N az $1, \ldots, \nu(G)$ halmaz feletti összes, legfeljebb K hosszuságu szavak száma, végül legyen $|A|$ az A számossága.

Ha K=0, akkor a tétel állitása kézenfekvő. Ellenkező esetben legyen

$$P = \{(p^1, p^2) \in T_F^2 \mid root(p^1) \neq root(p^2), \exists a \in A \quad p^1, p^2 \in Dom\tau_{\underline{A}(a)}$$

$$\tau_{\underline{A}(a)}(p^1) \neq \tau_{\underline{A}(a)}(p^2)\}.$$

A bizonyitás hátra lévő részében megmutatjuk, hogy P akkor és csak akkor nem üres, ha van olyan (p^1, p^2) $(\in P)$, hogy $dp(p^1), dp(p^2) < (|A|^2MN+2)KL$. Könnyen belátható, hogy ebből a tétel állitása következik.

Legyen ezért $(p^1, p^2)(\in P)$ olyan, hogy a P bármely más, mondjuk $(p^{1'}, p^{2'})$ elemére $rn(p^1) + rn(p^2) \leq rn(p^{1'}) + rn(p^{2'})$. Tegyük fel, hogy például $dp(p^1) \geq (|A|^2MN+2)KL$, és jelöljük n-nel az $|A|^2MN+1$ számot.

Attila József Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

Mivel $dp(p^1) \geq (n+1)KL$, van olyan $p_0^1,\ldots,p_{n-1}^1 \in \hat{T}_{F,1}$, $p_n^1 \in T_F$, hogy $|path(p_i^1)| = KL$ $(i=0,\ldots,n-1)$, $dp(p_n^1) \geq KL$, $p^1 = p_0^1(\ldots(p_n^1)\ldots)$. Jelöljük minden $i(0 \leq i \leq n)$ esetén $\check{p}_i^1$-gyel a $p_0^1(\ldots(p_i^1)\ldots)$ polinomszimbólumot, minden j $(0 \leq j \leq n-1)$ esetén pedig $\hat{p}_j^1$-vel a $p_{j+1}^1(\ldots(p_n^1)\ldots)$ polinomszimbólumot, ρ_j-vel pedig a $\hat{p}_j^1$ azon egyértelmüen meghatározott KL mélységü szuperfáját, amelyre a $\hat{p}_j^1$ bármely más - mondjuk ρ_j' - KL mélységü szuperfája esetén $dp(\rho_j') \leq$ $\leq dp(\rho_j)$ vagy $|fr(\rho_j')| \leq |fr(\rho_j)|$.

Tekintettel arra, hogy $(p^1,p^2) \in P$, valamely $a,a_1^1,\ldots$ $\ldots,a_n^1 (\in A)$ állapotokra, $u_0^1,\ldots,u_{n-1}^1 (\in \hat{T}_{G,1})$ és $u_n^1,p (\in T_G)$ polinomszimbólumokra

(1) $p = u_0^1(\ldots(u_n^1)\ldots)$,

(2) $ap_0^1 \overset{*}{\Rightarrow} u_0^1(a_1x_1)$, $a_i^1p_i^1 \overset{*}{\Rightarrow} u_i^1(a_{i+1}^1x_1)$ $(i=1,\ldots,n-1)$, $a_n^1p_n^1 \overset{*}{\Rightarrow} u_n^1$,

(3) $ap^2 \overset{*}{\Rightarrow} p$.

(Megjegyezzük, hogy (2)-ből $ap^1 \overset{*}{\Rightarrow} p$ is következik.) Mivel minden i-re $(0 \leq i < n)$ $|path(p_i^1)| = KL$ és $dp(p_n^1) \geq KL$, minden $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ esetén $path(u_i^1) \geq K$ és $dp(u_n^1) \geq K$. Ily módon található olyan $p_0^2,\ldots,p_{n-1}^2 (\in \hat{T}_{F,1})$, $p_n^2 (\in T_F)$, $u_0^2,\ldots,u_{n-1}^2 (\in \hat{T}_{G,1})$ $u_n^2 (\in T_G)$, $a_1^2,\ldots,a_n^2 (\in A)$, hogy

(1) $p^2 = p_0^2(\ldots(p_n^2)\ldots)$, $p = u_0^2(\ldots(u_n^2)\ldots)$,

(2) $ap_0^2 \overset{*}{\Rightarrow} u_0^2(a_1^2x_1)$, $a_i^2p_i^2 \overset{*}{\Rightarrow} u_i^2(a_{i+1}^2x_1)$ $(i=1,\ldots,n-1)$, $a_n^2p_n^2 \overset{*}{\Rightarrow} u_n^2$,

(3) bármely i-re $(i=0,\ldots n-1)$ $path(\check{u}_i^1)$ a $path(\check{u}_i^2)$ valódi kezdőszelete, $|path(\check{u}_i^2)| - |path(\check{u}_i^1)| \leq K$, bármely i-re

$(i=0,\ldots,n-2)$ $path(\check{u}_i^2)$ a $path(\check{u}_{i+1}^1)$ kezdőszelete, ahol minden i $(0\leqslant i\leqslant n)$ esetén $\check{p}_i^2 = p_o^2(\ldots(p_i^2)\ldots)$, $\check{u}_i^2 = u_o^2(\ldots(u_i^2)\ldots)$ - és a továbbiakban - minden j $(0\leqslant j\leqslant n-1)$ esetén $\hat{p}_j^2 = p_{j+1}^2(\ldots(p_n^2)\ldots)$, $\hat{u}_j^2 = u_{j+1}^2(\ldots(u_n^2)\ldots)$. (Vegyük észre, hogy $p_o^2 \neq x_1$, igy $root(p_o^1) \neq root(p_o^2)$.)

Mivel $n = |A|^2MN+1$, van olyan i, j $(1\leqslant i<j\leqslant n)$, hogy

(1) $a_i^1 = a_j^1$ $(=b)$, $a_i^2 = a_j^2$ $(=d)$,

(2) $\rho_{i-1} = \rho_{j-1}$ $(=r^1)$,

(3) $path(\check{u}_{i-1}^2)/path(\check{u}_{i-1}^1) = path(\check{u}_{j-1}^2)/path(\check{u}_{j-1}^1)$.+

Nyilván teljesül, hogy valamely $k(>0)$ egész számra $r^1 \in \hat{\hat{T}}_{F,k} - \{x_1\}$. Vezessük be most a $q_1^1 = \check{p}_{i-1}$, $q_2^1 = p_{i+1}^1(\ldots(p_{j-1}^1)\ldots)$ jelöléseket és legyen $q_3^1 (\in T_F)$ az az egyértelmüen meghatározott polinomszimbólum, illetve $\underline{s}_1^{1'}, \underline{t}_1^{1'} (\in T_F^{k_1'})$ és $\underline{s}_2^{1'}$, $\underline{t}_2^{1'}$ $(\in T_F^{k_2'})$ azok az egyértelmüen meghatározott vektorok, amelyekre

(1) $k_1' + k_2' + 1 = k$,

(2) $path(r^1(\underline{s}_1^{1'}, x_1, \underline{s}_2^{1'})) = path(r^1(\underline{t}_1^{1'}, x_1, \underline{t}_2^{1'}))$,

(3) $\check{p}_i^1 = \check{p}_{i-1}^1(r^1(\underline{s}_1^{1'}, x_1, \underline{s}_2^{1'}))$, $\hat{p}_{j-1}^1 = r^1(\underline{t}_1^{1'}, q_3^1, \underline{t}_2^{1'})$.

Nyilván teljesül, hogy $p^1 = q_1^1(r^1(\underline{s}_1^{1'}, p^{1*}, \underline{s}_2^{1'}))$, ahol $p^{1*} = q_2^1(r^1(\underline{t}_1^{1'}, q_3^1, \underline{t}_2^{1'}))$. Legyen továbbá $q_1^2 = \check{p}_{i-1}^2$, $q_2^2 = p_i^2(\ldots(p_{j-1}^2)\ldots)$, $q_3^2 = \hat{p}_{j-1}^2$. Evidens, hogy $p_2^2 = q_1^2(q_2^2(q_3^2))$, továbbá az, hogy $aq_1^2 \overset{*}{\Longrightarrow} \check{u}_{i-1}^2(dx_1)$,

---

+ Tetszőleges V^* szabad monoidra és $u,v,w(\in V^*)$-re ha $uv=w$, akkor $v = w/u$.

$dq_2^2 \overset{*}{\Rightarrow} u_i^2(\ldots(u_{j-1}^2(dx_1))\ldots)$, $dq_3^2 \overset{*}{\Rightarrow} \hat{u}_{j-1}^2$.

Jelölje ezek után rendre $q_1, q_2(\in \hat{T}_{G,1}), q_3(\in T_G), r(\in \hat{\hat{T}}_{G,k})$ $\underline{s}_1', \underline{t}_1'(\in T_G^{k_1'}), \underline{s}_2', \underline{t}_2'(\in T_G^{k_2'})$, $c(\in A)$, $\underline{e}_1'(\in A^{k_1'})$, $\underline{e}_2'(\in A^{k_2'})$ azokat az egyértelmüen meghatározott polinomszimbólumokat, állapotokat, illetve vektorokat, amelyekre

(1) a $q_1^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_1(bx_1)$,

(2) b $r^1 \overset{*}{\Rightarrow} r(\underline{e}_1' \underline{x}_1', cx_{k_1'+1}, \underline{e}_2' \underline{x}_2')$,

(3) c $q_2^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_2(bx_1)$,

(4) c $q_3^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_3$,

(5) $\underline{e}_i' \underline{s}_i^{1'} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{s}_i'$, $\underline{e}_i' \underline{t}_i^{1'} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{t}_i'$ $(i=1,2)$, ahol $\underline{x}_1' = (x_1, \ldots, x_{k_1'})$ $\underline{x}_2' = (x_{k_1'+2}, \ldots, x_k)$.

Világos, hogy $q_1 = \check{u}_{i-1}^1$, $r(\underline{s}_1', x_1, \underline{s}_2') = u_i^1$, $q_2 =$ $= u_{i+1}^1(\ldots(u_{j-1}^1)\ldots)$, $r(\underline{t}_1', q_3, \underline{t}_2') = \hat{u}_{j-1}^1$; következésképpen $p = q_1(r(\underline{s}_1', p^*, \underline{s}_2'))$, ahol $p^* = q_2(r(\underline{t}_1', q_3, \underline{t}_2'))$. Másrészt $p = \check{u}_{i-1}^2(\hat{u}_{i-1}^2) = \check{u}_{j-1}^2(\hat{u}_{j-1}^2)$ is teljesül, és igy, figyelembe véve, hogy $path(q_1)$ a $path(\check{u}_{i-1}^2)$-nek, $path(q_1(r(\underline{s}_1', q_2, \underline{s}_2'))$ a $path(\check{u}_{j-1}^2)$-nek, $path(\check{u}_{i-1}^2)$ a $path(q_1(r(\underline{s}_1', x_1, \underline{s}_2')))$-nek, $path(\check{u}_{j-1}^2)$ pedig a $path(q_1(r(\underline{s}_1', q_2(r(\underline{t}_1', x_1, \underline{t}_2')), \underline{s}_2')))$-nek a kezdőszelete, valamint azt, hogy $path(\check{u}_{i-1}^2)/path(q_1) =$ $= path(\check{u}_{j-1}^2)/path(q_1(r(\underline{s}_1', q_2, \underline{s}_2')))$, azt kapjuk, hogy valamely k_1, k_2, k_3, k_4 nemnegativ egész számokra, továbbá $r_1(\in \hat{\hat{T}}_{G,k_1+k_4+1})$ és $r_2(\in \hat{\hat{T}}_{G,k_2+k_3+1})$ polinomszimbólumokra és $\underline{e}_i \in A^{k_i}$, $\underline{t}_i \in T_G^{k_i}$, $\underline{s}_i \in T_G^{k_i}$ $(i=1,\ldots,4)$ vektorokra

(1) $k_1' = k_1+k_2$, $k_2' = k_3+k_4$,

(2) $r = r_1(\underline{x}_1, r_2(\underline{x}_2, x_{k_1+k_2+1}, \underline{x}_3), \underline{x}_4)$, ahol $\underline{x}_1 = (x_1,\dots,x_{k_1})$, $\underline{x}_2 = (x_{k_1+1},\dots,x_{k_1+k_2})$, $\underline{x}_3 = (x_{k_1'+2},\dots,x_{k_1'+k_3+1})$, $\underline{x}_4 = (x_{k_1'+k_3+2},\dots,x_k)$,

(3) $\underline{e}_1' = (\underline{e}_1,\underline{e}_2)$, $\underline{e}_2' = (\underline{e}_3,\underline{e}_4)$,
$\underline{s}_1' = (\underline{s}_1,\underline{s}_2)$, $\underline{s}_2' = (\underline{s}_3,\underline{s}_4)$,
$\underline{t}_1' = (\underline{t}_1,\underline{t}_2)$, $\underline{t}_2' = (\underline{t}_3,\underline{t}_4)$.

Összefoglalva az eddigieket, megmutattuk, hogy $dp(p^1) \geq (|A|^2MN+2)KL$ feltevéssel élve a p^1, p^2 és p polinomszimbólumok felbonthatóak ugy, hogy erre a felbontásra a (2.7) lemma minden feltétele teljesül. Igy a (2.7) lemma alkalmazásával nyerhetünk egy olyan $(p^{1'}, p^{2'})$ T_F feletti polinomszimbólum párt, hogy egyrészt $(p^{1'}, p^{2'}) \in P$, másrészt $rn(p^{1'})+rn(p^{2'}) < rn(p^1,+rn(p^2)$. Ez nyilván ellentmondás, igy a tétel helyességét bebizonyitottuk. □

A következőkben szeretnénk megmutatni, hogy az unáris input tipussal rendelkező determinisztikus uniform ff-, illetve determinisztikus lf-transzformátorok egy-egyértelmüsége is eldönthető. E célból szükségünk van három lemmára.

Ezen lemmák mindegyikében feltesszük azt, hogy $\underline{A}$ uniform, nemtörlő determinisztikus ff-transzformátor, nevezetesen $\underline{A} = (F, A, G, a_o, \mathcal{E}_{\underline{A}})$, amelyre $\nu(F) \leq 1$ teljesül. Emellett feltesszük azt, hogy ha valamely $p(\in T_{F,1})$-re és $a(\in A)$-ra $ap \overset{*}{\Rightarrow} ax_1$, akkor $p=x_1$, és azt is, hogy a K és L konstansok ugyanugy vannak definiálva, mint az előző tétel bizonyitásában, vagyis

$$K = \max\{dp(q) \mid \exists a \in A,\ p \in T_{F,X}\ \ ap \to q \in \underline{\Sigma}_A\},$$

$$L = \max\{path(p) \mid p \in \hat{T}_{F,1},\ \exists a,b \in A\ \ ap \overset{*}{\Rightarrow} bx_1\} + 1.$$

(2.9) Lemma Legyen $q_1^1, q_1^2 \in \hat{T}_{F,1}$, $q_2^1, q_2^2 \in T_F$, $p^1 = q_1^1(q_2^1)$, $p^2 = q_1^2(q_2^2)$, $q \in \hat{T}_{G,2}$, $r \in \hat{T}_{G,1}$, $s \in T_G$, valamint $a,b,c \in A$. Tegyük fel, hogy

(i) $ap^1 \overset{*}{\Rightarrow} q(bq_2^1, bq_2^1) \overset{*}{\Rightarrow} q(r(s), r(s))$,

(ii) $ap^2 \overset{*}{\Rightarrow} q(r(cq_2^2), r(s)) \overset{*}{\Rightarrow} q(r(s), r(s))$,

(iii) $dp(s) \geq K$.

Akkor $ap^2 \overset{*}{\Rightarrow} q(r(cq_2^2), r(cq_2^2))$.

Bizonyitás Tegyük fel, hogy ellenkezőleg, ap^2-ből nem deriválható $q(r(cq_2^2), r(cq_2^2))$, és jelöljük $t(\in T_{G,1})$-vel azt a polinomszimbólumot, amelyre $aq_1^2 \overset{*}{\Rightarrow} t(cx_1)$. Ekkor három eset lehetséges.

A1. path(t) egyetlen eleme sem kezdőszelete path(q(r(s),r))-nek, és path(q(r(s),r)) sem kezdőszelete a path(t) egyetlen elemének sem. Más szóval ez azt jelenti, hogy van olyan $u_1^2, u_2^2 (\in \hat{T}_{F,1})$, $f(\in F_1)$, $u_1, u_2, v(\in T_{G,1})$, $d,e(\in A)$, amelyekre

(1) $u_1^2(f(u_2^2)) = q_1^2$,

(2) $au_1^2 \overset{*}{\Rightarrow} u_1(dx_1)$, $df \to v(ex_1) \in \underline{\Sigma}_A$, $eu_2^2 \overset{*}{\Rightarrow} u_2(cx_1)$,

(3) $path(u_1)$ valamelyik eleme a path(q(r(s),r)) kezdőszelete,

(4) path(q(r(s),r)) a $path(u_1(v))$ egyetlen elemének sem kezdőszelete és $path(u_1(v))$ egyetlen eleme sem kezdőszelete path(q(r(s),r))-nek.

Ez pedig nyilván ellentmond (iii)-nek, hiszen egyrészt igy a $p^2 \overset{*}{\Rightarrow} u_1(v(u_2(s)))$ miatt $u_1(v(u_2(s))) = q(r(s),r(s))$, amiből az következik, hogy s a v valódi részfája, másrészt $dp(v) \leq K$.

A2. path(t) valamely eleme a path(q(r(s),r)) valódi kezdőszelete. Másképpen ez azt jelenti, hogy van olyan $u(\in \hat{T}_{G,1})$, hogy $ap^2 \overset{*}{\Rightarrow} u(cq_2^2)$ és path(u) a path(q(r(s),r)) valódi kezdőszelete. Ekkor, mivel $cq_2^2 \overset{*}{\Rightarrow} s$, $ap^2 \overset{*}{\Rightarrow} u(s)$, következésképpen $u(s) = q(r(s),r(s))$. Ez nyilván ellentmondás, hiszen ebből az adódik, hogy s önmagának valódi részfája.

A3. path(q(r(s),r)) a path(t) valamely elemének valódi kezdőszelete. Ez az eset akárcsak A2. arra vezet, hogy s önmaga valódi részfája. □

A következő lemma felfogható az előző megforditásaként. Mivel bizonyitása az előző lemmáéhoz hasonlóan történhet, igazolását mellőzzük.

(2.10) Lemma Legyen $q_1^1, q_2^1 \in \hat{T}_{F,1}, q_1^2, q_2^2 \in T_F$, $p^1 = q_1^1(q_2^1)$, $p^2 = q_1^2(q_2^2), q,t,r \in \hat{T}_{G,1}, s \in T_G, a,b,c \in A$. Tegyük fel, hogy

(i) $ap^1 \overset{*}{\Rightarrow} q(bq_2^1) \overset{*}{\Rightarrow} q(r(s))$,

(ii) $ap^2 \overset{*}{\Rightarrow} q(r(cq_2^2)) \overset{*}{\Rightarrow} q(r(s))$, $ap^2 \overset{*}{\Rightarrow} t(cq_2^2)$,

(iii) $dp(s) \geq K$.

Akkor van olyan $q', r' (\in \hat{T}_{G,1})$, hogy $t = q'(r')$ és $ap^1 \overset{*}{\Rightarrow} q'(bq_2^1)$.

(2.11) Lemma Legyen $q_1^1, r^1, q_1^2 \in \hat{T}_{F,1}, q_2^1, q_2^2 \in T_F$, $q_1', r_1', r_2' \in \hat{T}_{G,1}, q_2 \in T_G$, $a,b,c,d \in A$, $p^1 = q_1^1(r^1(q_2^1))$, $p^2 = q_1^2(q_2^2)$. Tegyük fel, hogy

(i) $ap^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_1'(br^1(q_2^1)) \overset{*}{\Rightarrow} q_1'(r_1'(r_2'(cq_2^1))) \overset{*}{\Rightarrow}$

$\overset{*}{\Rightarrow} q_1'(r_1'(r_2'(q_2)))$,

(ii) $ap^2 \overset{*}{\Rightarrow} q_1'(r_1'(dq_2^2)) \overset{*}{\Rightarrow} q_1'(r_1'(r_2'(q_2)))$,

(iii) $dp(q_2^1) \geq KL$.

Akkor van olyan $q_1, r_1, r_2 (\in T_{G,1})$, amelyekre az

(iv) $aq_1^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_1(bx_1)$,

(v) $br^1 \overset{*}{\Rightarrow} r_1(r_2(cx_1))$,

(vi) $aq_2^1 \overset{*}{\Rightarrow} q_1(r_1(dx_1))$

relációk mindegyike teljesül.

Bizonyitás A lemma bizonyitása a (2.9) és (2.10) lemmák összevetésével közvetlenül adódik, figyelembe véve, hogy (iii) miatt mind $dp(q_2)$ mind $dp(r_2'(q_2))$ legalább K. □

Most már készen vagyunk második pozitiv eredményünk kimondásához:

(2.12) Tétel Mind az unáris input tipusu uniform determinisztikus ff-transzformátorok mind pedig az unáris input tipusu determinisztikus lf-transzformátorok egy-egyértelmüsége eldönthető.

Bizonyitás A (2.4) lemma értelmében elegendő a tétel állitását csak ff-transzformátorok esetére bizonyitani. Vegyünk tehát egy tetszőleges, $\underline{A} = (F, A, G, a_0, \Sigma_{\underline{A}})$ uniform determinisztikus ff-transzformátort, amelyben $\nu(F) \leq 1$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $\underline{A}$ nemtörlő, kétszeresen összefüggő, valamint azt, hogy bármely $a (\in A)$ állapotra és $p (\in T_{F,1})$ polinomszimbólumra ha $ap \overset{*}{\Rightarrow} ax_1$, akkor $p = x_1$. Legyen, mint a (2.8) tétel bizonyitásában is, $|A|$

az A számossága,

$$K = \max\{dp(q) \mid \exists a \in A,\ p \in T_{F,X}\ \ ap \rightarrow q \in \Sigma_A^*\},$$

$$L = \max\{path(p) \mid p \in \hat{T}_{F,1},\ \exists a,b \in A\ \ ap \overset{*}{\Rightarrow} bx_1\} + 1.$$

Jelölje M a $\hat{T}_{F,1}$ KL mélységü elemeinek számát, N pedig az $\{1,2,\ldots,\nu(G)\}$ halmaz fölötti, legfeljebb K hosszuságu szavak halmaza hatvány halmazának számosságát.

Csakugy, mint a (2.8) tétel bizonyitásakor, vezessük be a $P = \{(p^1,p^2)(\in T_F^2) \mid root(p^1) \neq root(p^2),\ \exists a \in A\ \tau_{\underline{A}(a)}(p^1) = \tau_{\underline{A}(a)}(p^2)\}$ jelölést. A (2.11) és (2.7) lemmák kihasználásával a (2.8) tétel bizonyitásával analóg módon megmutatható, hogy P akkor és csakis akkor nemüres, ha van a P-nek olyan - mondjuk (p^1,p^2) eleme, amelyre $dp(p^1), dp(p^2) < (|A|^2 MN+3)KL$. Mivel másrészt P üres volta szükséges és elegendő ahhoz, hogy A egy-egyértelmü legyen, a tétel állitását bebizonyitottuk. □

Eddig a pozitiv eredmények. Mielőtt a negativ jellegü állitások tárgyalására áttérnénk, felidézzük a Post Megfelelkezési Probléma - továbbiakban PMP - fogalmát (ld. SALOMAA [1973], AHO-ULLMAN [1972]).

Egy konkrét PMP egy (V,k,α,β) négyes, ahol V véges, nemüres halmaz, k egy természetes szám, α, β pedig $[k]$-nak V^+-ba való leképezése, ahol most és a továbbiakban tetszőleges n nemnegativ egész számra $[n]$-nel jelöljük az $\{1,\ldots,n\}$ halmazt. Az α és β leképezéseket kiterjeszthetjük homomorf módon $[k]^*$-ból V^*-ba való leképezéssé - az igy nyert leképezéseket továbbra is α-val illetve β-val fogjuk jelölni. Legyen most $w \in V^+$. Azt mondjuk, hogy w megoldása a (V,k,α,β)

PMP-nek, ha $\alpha(w) = \beta(w)$, vagy $\alpha_w = \beta_w$, ha α_w-t irunk $\alpha(w)$, β_w-t pedig $\beta(w)$ helyett.

Ismeretes, hogy nem létezik olyan algoritmus, amely tetszőleges PMP-re eldöntené, hogy van-e megoldása, más szóval a Post Megfelelkezési Probléma eldönthetetlen.

Ezek után kimondhatjuk első negativ állitásunkat:

(2.13) Tétel Az unáris input tipussal rendelkező determinisztikus ff-transzformátorok egy-egyértelmüsége eldönthetetlen.

Bizonyitás A tétel igazolásának céljából vegyünk egy tetszőleges (V,k,α,β) PMP-t. Definiáljuk az F és G tipusokat a következő módon. Minden $m(>1)$ esetén legyen $F_m = G_{m+1} = \emptyset$ és legyen $F_0 = G_0 = \{h\}$, $F_1 = [k] \cup \{\alpha,\beta\}$, $G_1 = [k] \cup V$, $G_2 = \{g\}$.

Ezek után tekintsük azt az $\underline{A} = (F,A,G,a_0,\Sigma_{\underline{A}})$ ff-transzformátort, amelyben $A = \{a_0,a,b,c,c'\}$, és amelyben $\Sigma_{\underline{A}}$ az alábbi (1)-(5) szabályokból áll:

(1) $a_0\alpha(x_1) \longrightarrow g(ax_1,cx_1)$, $a_0\beta(x_1) \longrightarrow g(bx_1,cx_1)$,

(2) $ai(x_1) \longrightarrow \alpha_{i,1}(\ldots \alpha_{i,n_i}(ax_1)\ldots)^+$ $(i \in [k],\ n_i=|\alpha_i|)$,

(3) $bi(x_1) \longrightarrow \beta_{i,1}(\ldots (\beta_{i,m_i}(bx_1)\ldots)$ $(i \in [k],\ m_i=|\beta_i|)$,

(4) $ci(x_1) \longrightarrow i(c'x_1)$, $c'i(x_1) \longrightarrow i(c'x_1)$,

(5) $ah \longrightarrow h$, $bh \longrightarrow h$, $c'h \longrightarrow h$.

Nyilnvánvaló, hogy $\underline{A}$ determinisztikus, és az, hogy $\mathrm{Dom}\tau_{\underline{A}} = \{\alpha(i_1(\ldots(i_n(h))\ldots))|\ n\geq 1,\ i_1,\ldots,i_n \in [k]\} \cup \cup\{\beta(i_1(\ldots(i_n(h))\ldots))|\ n\geq 1,\ i_1,\ldots,i_n \in [k]\}$. n-szerinti

---

+ Általában tetszőleges V^* szabad monoidra $v(\in V^*)$-ra és $i(1\leq i\leq |v|)$-re v_i jelöli a v i-dik komponensét.

teljes indukciót alkalmazva az is megmutatható, hogy bármely $n \geq 1$, $i_1, \ldots, i_n \in [k]$ esetén $\tau_{\underline{A}}(\alpha(i_1(\ldots(i_n(h))\ldots))) = g(i_1(\ldots(i_n(h))\ldots), \alpha_{i_1}(\ldots(\alpha_{i_n}(h))\ldots))$,

$\tau_{\underline{A}}(\beta(i_1(\ldots(i_n(h))\ldots))) = g(i_1(\ldots(i_n(h))\ldots), \beta_{i_1}(\ldots(\beta_{i_n}(h))\ldots))$, ahol tetszőleges i $(1 \leq i \leq k)$ esetén $\alpha_i = \alpha_{i,1}(\ldots(\alpha_{i,n_i}(x_1))\ldots)$, $\beta_i = \beta_{i,1}(\ldots(\beta_{i,m_i}(x_1))\ldots)$. Ezért $\underline{A}$ akkor és csakis akkor egy-egyértelmü, ha (V,k,α,β)-nak nincs megoldása, amiből a tétel állitása következik. □

Láthatjuk, hogy az előző tétel azt mondja ki, hogy a (2.12) tétel nem erősithető azáltal, hogy uniform determinisztikus ff-transzformátorok helyett megengedünk tetszőleges determinisztikus ff-transzformátort. Hasonlóan, a következő tétel azt mondja ki, hogy a (2.8) tétel nem általánositható determinisztikus lf- és uniform ff-transzformátorokra.

(2.14) Tétel A determinisztikus lf- és uniform ff-transzformátorok egy-egyértelmüsége eldönthetetlen.

Bizonyitás Vegyünk egy tetszőleges (V,k,α,β) PMP-t. Legyen minden n természetes számra $F_{\alpha,n+2} = \{i_\alpha \mid 1 \leq i \leq k, |\alpha_i| = n\}$, $F^1_{\beta,n} = \{i^1_\beta \mid 1 \leq i \leq k, |\beta_i| = n\}$, $F^2_{\beta,n+2} = \{i^2_\beta \mid 1 \leq i \leq k, |\beta_i| = n\}$. Definiáljuk az F és G tipusokat az

(1) $F_0 = G_0 = \{h\}$,

(2) $F_1 = F^1_{\beta,1} \cup [k] \cup V \cup \{\alpha,\beta\}$,

(3) $F_2 = F^1_{\beta,2} \cup \{g\}$,

(4) $F_n = F_{\alpha,n} \cup F^1_{\beta,n} \cup F^2_{\beta,n}$ $(n>2)$,

(5) $G_1 = [k] \cup V$,

(6) $G_2 = \{g\}$,

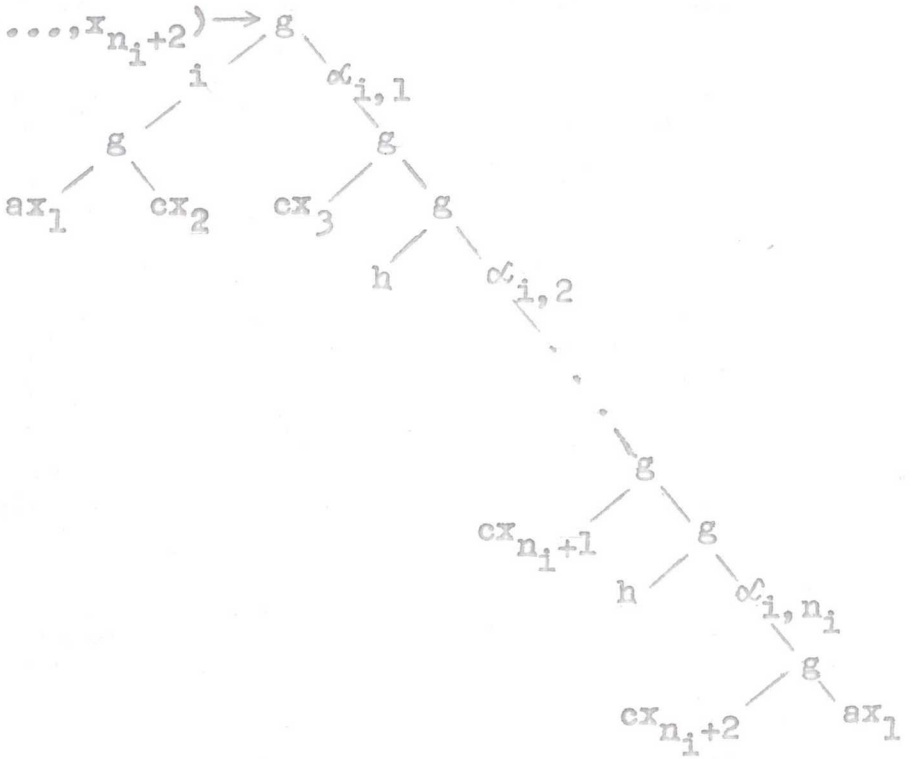
(7) $G_n = \emptyset$ $(n>2)$

egyenlőségekkel. (Természetesen feltesszük azt, hogy az (1)-(7) definiciókban szereplő halmazok páronként diszjunktak.)

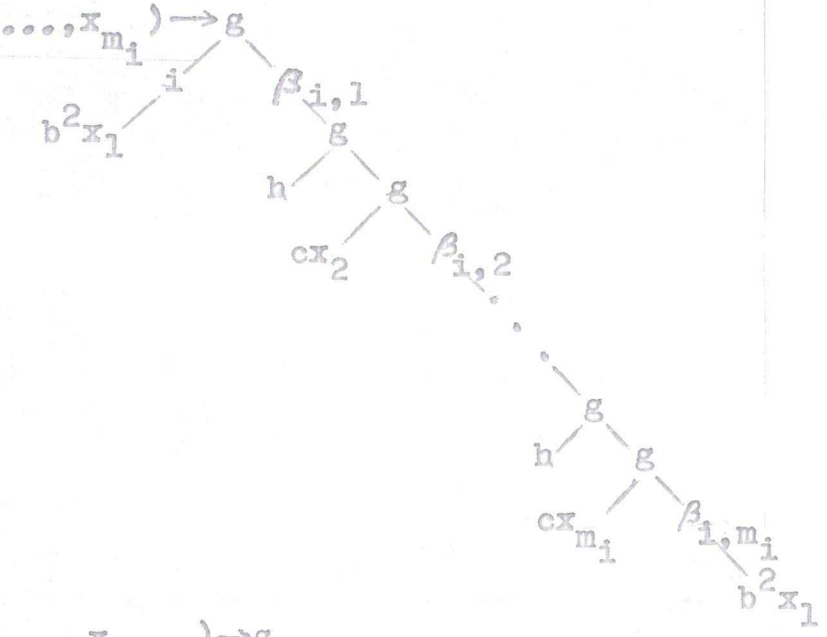
Ezek után tekintsük azt az $\underline{A} = (F, A, G, a_0, \Sigma_{\underline{A}})$ ff-transzformátort, amelyben $A = \{a_0, a, b^1, b^2, c\}$, és amely bármely i $(\in [k])$ és $v \in V$ esetén az alábbi (1)-(6) szabályokat tartalmazza (jelölésekre nézve lásd az előző tétel bizonyitását):

(1) $a_0 \alpha(x_1) \rightarrow ax_1$, $a_0 \beta(x_1) \rightarrow b^1 x_1$,

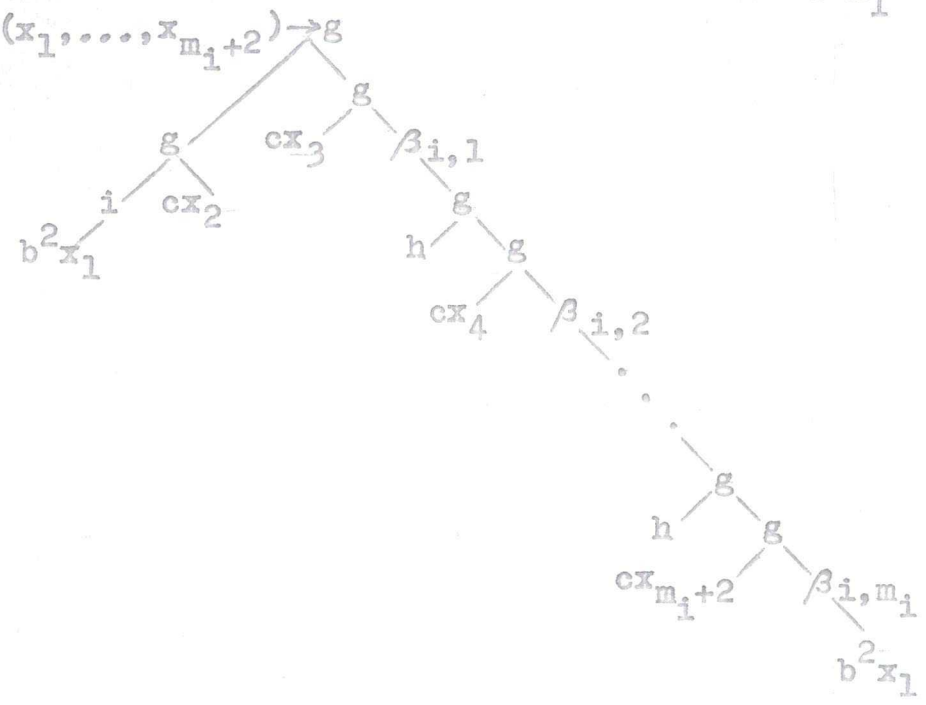
(2) $ai_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_i+2}) \rightarrow$



(3) $b^1 i^1_\beta (x_1, \ldots, x_{m_i}) \rightarrow$



(4) $b^2 i^2_\beta (x_1, \ldots, x_{m_i+2}) \rightarrow$



(5) $ah \to h$, $b^2h \to g(h,h)$,

(6) $ci(x_1) \to i(cx_1)$, $cv(x_1) \to v(cx_1)$, $cg(x_1,x_2) \to$

$\to g(cx_1,cx_2)$, $ch \to h$, ahol $n_i = |\alpha_i|$, $m_i = |\beta_i|$.

A konstrukcióból látni való, hogy $\underline{A}$ determinisztikus, uniform transzformátor, és az is, hogy Dom $\tau_{\underline{A}}$ =

$$= \{\alpha(i_1(i_2(\ldots i_{n-1}(i_n(h,p_n),p_{n-1}),\ldots,p_2),p_1)) \mid n \geq 0,$$

$$i_1,\ldots,i_n \in [k],\ p_1 \in T_G^{n_{i_1}+1},\ \ldots,\ p_n \in T_G^{n_{i_n}+1}\} \cup$$

$$\cup \{\beta(i_1(i_2(\ldots i_{n-1}(i_n(h,p_n),p_{n-1}),\ldots,p_2),p_1)) \mid n \geq 1,$$

$$i_1,\ldots,i_n \in [k],\ p_1 \in T_G^{m_{i_1}-1},\ p_2 \in T_G^{m_{i_2}+1},\ \ldots,p_n \in T_G^{m_{i_n}+1}\}.$$

Legyen most $\varphi: T_F \to F^+$ az a leképezés, amely T_F tetszőleges eleméhez hozzárendeli az illető elem "legbaloldalibb ágán" szereplő müveleti szimbólumokat, $\psi: T_F \to F^+$ pedig az a leképezés, amely minden $p(\in T_F)$-hez hozzárendeli a p "legjobboldalibb ágán" szereplő müveleti szimbólumokat. Formálisan:

(1) ha $p \in F_o$, akkor $\varphi(p) = p$, $\psi(p) = p$,

(2) ha $p = f(p_1,\ldots,p_n)$ $(n \geq 1,\ f \in F_n,\ p_1,\ldots,p_n \in T_F)$, akkor $\varphi(p) = f\,\varphi(p_1)$, $\psi(p) = f\,\psi(p_n)$.

Teljes indukcióval megmutatható, hogy Dom $\tau_{\underline{A}}$ bármely $p = \alpha(i_1(i_2(\ldots i_{n-1}(i_n(h,p_n),p_{n-1}),\ldots,p_2),p_1))$ alaku elemére $\varphi(\tau_{\underline{A}}(p)) = gi_1ggi_2\ldots i_{n-1}ggi_ngh$, $\psi(\tau_{\underline{A}}(p)) =$

$= g\alpha_{i_1,1}gg\alpha_{i_1,2}\ldots\alpha_{i_1,n_1-1}gg\alpha_{i_1,n_1}gg\ldots gg\alpha_{i_n,1}gg\alpha_{i_n,2}\ldots$

$\ldots\alpha_{i_n,n_{i_n}-1}\,gg\alpha_{i_n,n_{i_n}}\,gh$, hasonlóan, a Dom $\tau_{\underline{A}}$ bármely

$p = \beta(i_1(i_2(\ldots i_{n-1}(i_n(h, p_n), p_{n-1}), \ldots, p_2), p_1))$ elemére
$\psi(\tau_{\underline{A}}(p)) = gi_1 ggi_2 \ldots i_{n-1} ggi_n gh$, $\psi(\tau_{\underline{A}}(p)) = g\beta_{i_1,1} gg\beta_{i_1,2} \cdots$
$\cdots \beta_{i_1,m_1-1} gg\beta_{i_1,m_1} gg \ldots gg\beta_{i_n,1} gg\beta_{i_n,2} \cdots \beta_{i_n,m_{i_n}-1} gg\beta_{i_n,m_{i_n}} gh$.
Következésképpen ha $\underline{A}$ egy-egyértelmü, akkor a (V,k,α,β) PMP-nek nincs megoldása. A forditott irányu implikáció is érvényes, vagyis ha (V,k,α,β)-nak nincs megoldása, akkor $\underline{A}$ egy-egyértelmü. Ez következik az eddig mondottakból és abból, hogy $\tau_{\underline{A}(c)} = id_G$. Tehát $\underline{A}$ akkor és csakis akkor egy-egyértelmü, ha (V,k,α,β)-nak nincs megoldása. Ebből és a (2.3) lemmából a tétel állitása következik. □

A szerző nem tudta bizonyitani az előző tételt abban az erősebb formában, hogy nem létezik olyan algoritmus, amely tetszőleges bináris input és output tipussal rendelkező determinisztikus lf-, illetve uniform determinisztikus ff-transzformátorra eldöntené, hogy egy-egyértelmü-e. Szorosan összefügg ezzel az a sejtés, hogy bármely F és G tipushoz effektiven konstruálható olyan F' és G' tipus, hogy $\nu(F') = \nu(F)+1$, $\nu(G') = \nu(G)$, és hogy az F-ből G-be való determinisztikus ff-transzformátorok egy-egyértelmüségének eldöntése visszavezethető (reducibilis) az F'-ből G'-be való uniform determinisztikus ff-transzformátorok egy-egyértelmüségének eldöntésére. Az hogy ez utóbbi $\nu(F') = \nu(F)$ mellett nem igaz, a (2.12) és (2.13) tételekből következik. Azt pedig, hogy ez igaz ha $\nu(F')$-re semmilyen kikötést nem teszünk, a (2.14) tételhez hasonlóan bebizonyitható.

Mielőtt a fejezet utolsó tételét is kimondanánk, ismét bevezetünk egy fogalmat.

Legyen G tetszőleges tipus, E pedig egy G-feletti azonosság bázis, vagyis $T^2_{G,X}$ részhalmaza. E indukál többek között T_G felett is egy <u>teljesen invariáns</u> Θ_E <u>kongruenciát</u> (ld. GRÄTZER [1968]). Vegyünk most egy $\underline{A} = (F, A, G, A_o, \Sigma_{\underline{A}})$ determinisztikus fatranszformátort. Az mondjuk, hogy $\underline{A}$ <u>E-re nézve egy-egyértelmü</u>, ha bármely $p,q(\in \mathrm{Dom}\tau_{\underline{A}})$-ra $\tau_{\underline{A}}(p)\ \Theta_E\ \tau_{\underline{A}}(q)$ esetén $p=q$.

<u>(2.15) Tétel</u> Az unáris determinisztikus fatranszformátorok véges azonosság bázisra vonatkozó egy-egyértelmüsége eldönthetetlen.

<u>Bizonyitás</u> Elegendő a tételt csupán ff-transzformátorokra igazolni. E célból pedig vegyünk egy tetszőleges (V,k,α,β) PMP-t. Definiáljuk az F és G unáris tipusokat az $F_o=G_o=\{h\}$, $F_1=[k]\cup\{\alpha,\beta\}$, $G_1=[k]\cup V$ egyenlőségekkel.

Tekintsük ezek után az $E = \{(v(i(x_1)), i(v(x_1)) \mid i \in k, v \in V\}$ azonosság bázist. Világos, hogy bármely $p,q(\in T_G)$-re $p\ \Theta_E q$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $\varphi(p) = \varphi(q)$ és $\psi(p) = \psi(q)$, ahol a $\varphi: T_G \longrightarrow [k]^*$ és $\psi: T_G \longrightarrow V^*$ a következőképpen definiáltak:

(1) ha $p \in G_o$, akkor $\varphi(p) = \psi(p) = \lambda$,

(2) ha $p = v(p')$, $(v \in V,\ p' \in T_G)$, akkor $\varphi(p) = \varphi(p')$, $\psi(p) = v\psi(p')$,

(3) ha $p = i(p')$ $(i \in [k],\ p' \in T_G)$, akkor $\varphi(p) = i\varphi(p')$, $\psi(p) = \psi(p')$.

Ezt az észrevételt kihasználva egyszerü számolással igazolható, hogy a (V,k,α,β) PMP-nek akkor és csakis akkor nincs megoldása, ha $\underline{A} = (F,A,G,a_0,\Sigma_{\underline{A}})$ egy-egyértelmü E-re nézve, ahol $A = \{a_0,a,a',b\}$, $\Sigma_{\underline{A}}$ pedig az alábbi (1)-(5) pontokban felsorolt szabályokból áll:

(1) $a_0\alpha(x_1) \longrightarrow ax_1$, $a_0\beta(x_1) \longrightarrow bx_1$,

(2) $ai(x_1) \longrightarrow i(\alpha_{i,1}(\ldots(\alpha_{i,n_i}(a'x_1))\ldots)$ $(i \in [k]$, $n_i = |\alpha_i|)$,

(3) $a'i(x_1) \longrightarrow i(\alpha_{i,1}(\ldots(\alpha_{i,n_i}(a'x_1))\ldots)$ $(i \in [k]$, $n_i = |\alpha_i|)$,

(4) $bi(x_1) \longrightarrow i(\beta_{i,1}(\ldots(\beta_{i,m_i}(bx_1))\ldots)$ $(i \in [k]$, $m_i = |\beta_i|)$,

(5) $a'h \longrightarrow h$, $bh \longrightarrow h$. □

3. Fatranszformátorok egyértelmüsége

Nevezzünk egy A nemdeterminisztikus transzformátort egyértelmünek, ha τ_A függvény. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a nemdeterminisztikus fatranszformátorok egyértelmüsége eldönthető. Ennek következményeként bebizonyitjuk, hogy létezik olyan algoritmus, amely tetszőleges A nemdeterminisztikus és B determinisztikus fatranszformátorra eldönti, hogy ekvivalensek-e. Ez az eredmény annál is érdekesebb, mivel a környezetfüggetlen nyelvek egyenlőségének eldönthetetlensége miatt (ld. AHO-ULLMAN [1972], SALOMAA [1973]) az általánositott szintaxisvezérelt forditási sémák ekvivalenciája még determinisztikus esetben is eldönthetetlen. (Sőt még akkor is, ha kiköt jük az alapnyelvtanok egyértelmüségét is.) Továbbá érdekes az eredmény azért is, mivel az un. felületi erdők - azaz reguláris erdők fatranszformációk melletti képei - egyenlősége eldönthetetlen, mint ahogyan az kitünik ROUNDS [1970]-ből. Megjegyezzük elöljáróban még azt, hogy GRIFFITHS [1968] szerint a nemdeterminisztikus általánositott szekvenciális gépek ekvivalenciája eldönthetetlen, következésképpen még az unáris nemdeterminisztikus fatranszformátorok ekvivalenciája is eldönthetetlen.

A determinisztikus lf-transzformátorok ekvivalenciájának eldönthetőségét a szerzőtől függetlenül és az itt bemutatottól különböző módon Zachar Zoltán is bebizonyitotta (ZACHAR [1978]).

Hogy tárgyalásunkban ne kelljen különbséget tenni az lf- és ff-transzformátorok között, bevezetjük az általánositott ff-transzformátor fogalmát.

Az $\underline{A} = (F, T, A, G, A_0, \Sigma_{\underline{A}})$ rendszert <u>általánositott nemdeterminisztikus ff-transzformátornak</u> nevezzük, ha $(F, A, G, A_0, \Sigma_{\underline{A}})$ nemdeterminisztikus ff-transzformátor (az $\underline{A}$-hoz tartozó ff-transzformátor), $T (\subseteq T_F)$ pedig reguláris erdő. Ha az $\underline{A}$-hoz tartozó ff-transzformátor determinisztikus, $\underline{A}$-t is determinisztikusnak nevezzük. Hasonlóan ha az $\underline{A}$-hoz tartozó ff-transzformátor x-tipusu (x=uniform, lineáris, rendezéstartó), akkor $\underline{A}$ is x-tipusu.

Legyen $\underline{A}$ az előzőekben definiált általánositott nemdeterminisztikus ff-transzformátor, $\underline{A}'$ pedig a hozzá tartozó ff-transzformátor. Az $\underline{A}$ által <u>indukált transzformáció</u> a $\tau_{\underline{A}} = \tau_{\underline{A}'}|_T$ transzformáció. $\underline{A}$-t egyértelmünek nevezzük, ha $\tau_{\underline{A}}$ függvény.

A fenti definicióból nyilvánvaló, hogy minden nemdeterminisztikus ff-, ill. lf-transzformátorhoz effektiven konstruálható vele <u>ekvivalens</u> - vagyis ugyanazt a transzformációt indukáló - általánositott nemdeterminisztikus ff-transzformátor. Valóban, ha $\underline{A} = (F, A, G, A_0, \Sigma_{\underline{A}})$ tetszőleges nemdeterminisztikus ff-transzformátor, akkor $\underline{A}$ ekvivalens az $\underline{A}' = (F, T_F, A, G, A_0, \Sigma_{\underline{A}})$ általánositott nemdeterminisztikus ff-transzformátorral, ha pedig az $\underline{A}$ nemdeterminisztikus lf-transzformátor, akkor $\underline{A}$ ekvivalens azzal az $\underline{A}' = (F, \mathrm{Dom}\,\tau_{\underline{A}}, A, G, A_0, \Sigma_{\underline{A}'})$ általánositott nemdeterminisztikus ff-transzformátorral, amelyben $\Sigma_{\underline{A}'} = \{af(x_1, \ldots, x_m) \rightarrow$

$\longrightarrow p(a_1x_1,\ldots,a_mx_m) \mid m \geq 0,\ f \in F_m,\ p \in T_{G,m},\ a, a_1,\ldots,a_m \in A,$
$f(a_1x_1,\ldots,a_mx_m) \longrightarrow ap(x_1,\ldots,x_m) \in \Sigma_{\underline{A}}\}$. Mindkét esetben igaz az, hogy ha $\underline{A}$ lineáris, akkor $\underline{A}'$ is lineáris.

A következőkben bebizonyitunk néhány előkészitő jellegü lemmát. Ezekben mindig feltesszük, hogy az $\underline{A}(=(F,T,A,G,A_o,\Sigma_{\underline{A}}))$ általánositott nemdeterminisztikus ff-transzformátor, a $\underline{B}(=(F,B,B_o))$ pedig olyan - mondjuk parciális - faautomata, amelyre $T(\underline{B}) = T$. Továbbá P-vel jelöljük ezekben a lemmákban a $\{p(\in T_F) \mid \exists q,q' \in T_G \quad q \neq q' ,\ (p,q),(p,q') \in \tau_{\underline{A}}\}$ halmazt.

(3.1) Lemma Legyen $p_1,p_2 \in \hat{T}_{F,1}, p_3 \in T_F, n_1,n_1',n_2,n_2' \geq 0$, $q_1 \in \hat{T}_{G,n_1}, q_1' \in \hat{T}_{G,n_1'}, \underline{q}_2 \in \hat{T}^{n_1}_{G,n_2}, \underline{q}_2' \in \hat{T}^{n_1'}_{G,n_2'}, \underline{q}_3 \in T_G^{n_2}, \underline{q}_3' \in T_G^{n_2'}$, $a_o,a_o' \in A_o, \underline{a}_i \in A^{n_i}, \underline{a}_i' \in A^{n_i'}$ $(i=1,2)$. Vezessük be az $A_i = \{a_{i,j} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$, $A_i' = \{a_{i,j}' \mid 1 \leq j \leq n_i'\}$ $(i=1,2)$ jelöléseket. Tegyük fel, hogy

(i) $p_1(p_2(p_3)) \in T$,

(ii) $a_o p_1 \overset{*}{\Longrightarrow} q_1(\underline{a}_1\underline{x}_1^{(n_1)})$, $a_o' p_1 \overset{*}{\Longrightarrow} q_1(\underline{a}_1'\underline{x}_1^{(n_1')})$,

(iii) $\underline{a}_1 p_2^{(n_1)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{q}_2(\underline{a}_2\underline{x}_1^{(n_2)})$, $\underline{a}_1' p_2^{(n_1')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{q}_2'(\underline{a}_2'\underline{x}_1^{(n_2')})$,

(iv) $\underline{a}_2 p_3^{(n_2)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{q}_3$, $\underline{a}_2' p_3^{(n_2')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{q}_3'$,

(v) $(p_3)_{\underline{B}} = (p_2(p_3))_{\underline{B}}$, $A_1 \subseteq A_2$, $A_1' \subseteq A_2'$,

(vi) bármely $\underline{r}(\in T_G^{n_1})$-re és $\underline{r}'(\in T_G^{n_1'})$-re $q_1(\underline{r}) \neq q_1'(\underline{r}')$.

Akkor $p_1(p_3) \in P$.

Bizonyitás Először is megjegyezzük, hogy a lemma feltételeiből $p_1(p_2(p_3)) \in P$ is következik.

Legyenek a $\varphi:[n_1]\longrightarrow[n_2]$ és a $\varphi':[n_1']\longrightarrow[n_2']$ olyan leképezések, hogy bármely $i(\in[n_1])$-re $a_{1,i}=a_{2,\varphi(i)}$, és bármely $i(\in[n_1'])$-re $a'_{1,i}=a'_{2,\varphi'(i)}$. Világos, hogy igy $\underline{a}_1 p_3^{(n_1)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{r}$, $\underline{a}'_1 p_3^{(n_1')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{r}'$, ahol $\underline{r}=(q_{3,\varphi(1)},\ldots,q_{3,\varphi(n_1)})$, $\underline{r}'=(q'_{3,\varphi'(1)},\ldots,q'_{3,\varphi'(n_1')})$. Összevetve ezt (ii)-vel azt kapjuk, hogy $a_o p_1(p_3) \Longrightarrow q_1(\underline{r})$, $a'_o p_1(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q'_1(\underline{r}')$. (vi) szerint $q_1(\underline{r})\neq q'_1(\underline{r}')$, ugyanakkor $(p_1(p_3))_{\underline{B}}=(p_1(p_2(p_3)))_{\underline{B}}(\in B_o)$ miatt $p_1(p_3)\in T$. Ezért $p_1(p_3)\in P$ is teljesül. □

(3.2) Lemma Legyen $p_1\in\hat{T}_{F,1}$, $p_2\in T_F$, $n,n'>0$, $q_1\in\hat{T}_{G,n}$, $q'_1\in\hat{T}_{G,n'}$, $\underline{q}_2\in T_G^n$, $\underline{q}'_2\in T_G^{n'}$, $a_o,a'_o\in A_o$, $\underline{a}\in A^n$, $\underline{a}'\in A^{n'}$. Legyen továbbá $\|A\|=2^{|A|}$ - ahol $|A|$ az A számossága -, $|B|$ a B számossága, K pedig $\max\{dp(q)\mid \exists a\in A;\ p\in T_{F,X}$ $ap\longrightarrow q\in\Sigma_{\underline{A}}\}$. Tegyük fel, hogy

(i) $p_1(p_2)\in T$,

(ii) $a_o p_1 \overset{*}{\Longrightarrow} q_1(\underline{a}\,\underline{x}_1^{(n)})$, $a'_o p_1 \overset{*}{\Longrightarrow} q'_1(\underline{a}'\underline{x}_1^{(n')})$,

(iii) $\underline{a}\,p_2^{(n)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{q}_2$, $\underline{a}'p_2^{(n')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{q}'_2$,

(iv) $path_1(q_1)$ a $path_1(q'_1)$ kezdőszelete, $|path_1(q'_1)|-|path_1(q_1)|>\|A\|^2|B|K$, $dp(p_2)\geq\|A\|^2|B|$.

Akkor van olyan $r(\in T_F)$, hogy $p_1(r)\in P$, $rn(r)<rn(p_2)$.

Bizonyitás Legyen $R=\{r(\in T_F)\mid p_1(r)\in T, rn(r)\leq rn(p_2), \exists\underline{s}(\in T_G^n),\underline{s}'(\in T_G^{n'})\ \underline{a}\,\underline{r}^{(n)}\overset{*}{\Longrightarrow}\underline{s},\ \underline{a}'\underline{r}^{(n')}\overset{*}{\Longrightarrow}\underline{s}'\}$. Világos, hogy $R\neq\emptyset$. Jelölje r az R egy minimális rangu elemét. Megmutatjuk, hogy erre $p_1(r)\in P$ és $dp(r)<\|A\|^2|B|$ is teljesül.

Tegyük fel először, hogy $dp(r) \geq \|A\|^2 |B|$. Ekkor van olyan $r_1, r_2 (\in \hat{T}_{F,1})$, $r_3 (\in T_F)$, $m_1, m_1', m_2, m_2' (\geq 0)$, $\underline{s}_1 (\in \hat{T}^n_{G,m_1})$, $\underline{s}_1' (\in \hat{T}^{n'}_{G,m_1'})$, $\underline{s}_2 (\in \hat{T}^{m_1}_{G,m_2})$, $\underline{s}_2' (\in \hat{T}^{m_1'}_{G,m_2'})$, $\underline{s}_3 (\in T_G^{m_2})$, $\underline{s}_3' (\in T_G^{m_2'})$, $\underline{b}_i (\in A^{m_i})$, $\underline{b}_i' (\in A^{m_i'})$ $(i=1,2)$, hogy

(1) $r = r_1(r_2(r_3))$, $r_2 \neq x_1$,

(2) $\underline{a}\, \underline{r}_1^{(n)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}_1(\underline{b}_1 \underline{x}_1^{(m_1)})$, $\underline{a}'\, \underline{r}_1^{(n')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}_1'(\underline{b}_1' \underline{x}_1^{(m_1')})$,

(3) $\underline{b}_1 \underline{r}_2^{(m_1)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}_2(\underline{b}_2 \underline{x}_1^{(m_2)})$, $\underline{b}_1' \underline{r}_2^{(m_1')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}_2'(\underline{b}_2' \underline{x}_1^{(m_2')})$,

(4) $\underline{b}_2 \underline{r}_3^{(m_2)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}_3$, $\underline{b}_2' \underline{r}_3^{(m_2')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}_3'$,

(5) $(r_3)_{\underline{B}} = (r_2(r_3))_{\underline{B}}$, $B_1 \subseteq B_2$, $B_1' \subseteq B_2'$, ahol

$B_i = \{b_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m_i\}$, $B_i' = \{b_{i,j}' \mid 1 \leq i \leq m_i'\}$ $(i=1,2)$.

Ezek után legyenek a $\varphi : [m_1] \longrightarrow [m_2]$ és $\varphi' : [m_1'] \longrightarrow [m_2']$ olyan leképezések, amelyek kielégitik a $b_{1,i} = b_{2,\varphi(i)}$ $(1 \leq i \leq m_1)$, illetve $b_{1,i}' = b_{2,\varphi'(i)}'$ $(1 \leq i \leq m_1')$ feltételeket. Világos, hogy $\underline{a}\, \underline{r_1(r_3)}^{(n)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}_1(s_{3,\varphi(1)}, \ldots, s_{3,\varphi(m_1)})$, $\underline{a}'\, \underline{r_1(r_3)}^{(n')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}_1'(s_{3,\varphi'(1)}', \ldots, s_{3,\varphi'(m_1')}')$. Összevetve ezt azzal, hogy (5) miatt $(r_1(r_3))_{\underline{B}} = (r)_{\underline{B}}$, az adódik, hogy $r_1(r_3) \in R$. Ez viszont nyilván lehetetlen, mert $rn(r_1(r_3)) < rn(r)$.

Tehát $dp(r) < \|A\|^2 |B|$. Igy bármely olyan $\underline{s} (\in T_G^n)$ és $\underline{s}' (\in T_G^{n'})$ vektorra, amelyre $\underline{a}\, \underline{r}^{(n)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}$ és $\underline{a}\, \underline{r}^{(n')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}'$, $dp(s_1)$, $dp(s_1') \leq \|A\|^2 |B| K$. Felhasználva (vi)-t, ebből nyilván következik a lemma állitása. □

Lemma (3.3) Legyen $p_1, p_2, p_3 \in \hat{T}_{F,1}$, $p_4 \in T_F$, $n_i \geq 0$, $n_i', m_i \geq 0$ $(i=1,2,3)$, $q_1 \in \hat{T}_{G,n_1+1}$, $q_1' \in \hat{T}_{G,n_1'+1}$, $r_1 \in \hat{T}_{G,m_1}$, $q_2 \in \hat{T}_{G,n_2}^{n_1}$, $q_2' \in \hat{T}_{G,n_2'}^{n_1'}$, $r_2 \in \hat{T}_{G,m_2}^{m_1}$, $q_3 \in \hat{T}_{G,n_3}^{n_2}$, $q_3' \in \hat{T}_{G,n_3'}^{n_2'}$, $r_3 \in \hat{T}_{G,m_3}^{m_2}$, $q_4 \in T_G^{n_3}$, $q_4' \in T_G^{n_3'}$, $r_4 \in T_G^{m_3}$, $a_o, a_o' \in A_o$, $\underline{a}_i \in A^{n_i}$, $\underline{a}_i' \in A^{n_i'}$, $\underline{b}_i \in A^{m_i}$ $(i=1,2,3)$. Legyen végül $v \in T_G$, és vezessük be a $v' = r_1(\underline{r}_2(\underline{r}_3(r_4)))$ valamint az $A_i = \{a_{i,j} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$, $A_i' = \{a_{i,j}' \mid 1 \leq j \leq n_i'\}$, $B_i = \{b_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m_i\}$ $(i=1,2,3)$ jelöléseket.

Tegyük fel, hogy

(i) $p_1(p_2(p_3(p_4))) \in T$,

(ii) $a_o p_1 \overset{*}{\Rightarrow} q_1(ax_1, \underline{a}_1\underline{x}_1^{(n_1)})$, $a_o' p_1 \overset{*}{\Rightarrow} q_1'(r_1(\underline{b}_1\underline{x}_1^{(m_1)}, \underline{a}_1'\underline{x}_1^{(n_1')})$,

(iii) $\underline{a}_1 p_2^{(n_1)} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{q}_2(\underline{a}_2\underline{x}_1^{(n_2)})$, $\underline{a}_1' p_2^{(n_1')} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{q}_2'(\underline{a}_2'\underline{x}_1^{(n_2')})$,
$a p_2 \overset{*}{\Rightarrow} a x_1$, $\underline{b}_1 p_2^{(m_1)} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{r}_2(\underline{b}_2\underline{x}_1^{(m_2)})$,

(iv) $\underline{a}_2 p_3^{(n_2)} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{q}_3(\underline{a}_3\underline{x}_1^{(n_3)})$, $\underline{a}_2' p_3^{(n_2')} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{q}_3'(\underline{a}_3'\underline{x}_1^{(n_3')})$,
$a p_3 \overset{*}{\Rightarrow} a x_1$, $\underline{b}_2 p_3^{(m_2)} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{r}_3(\underline{b}_3\underline{x}_1^{(m_3)})$,

(v) $\underline{a}_3 p_4^{(n_3)} \overset{*}{\Rightarrow} q_4$, $\underline{a}_3' p_4^{(n_3')} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{q}_4'$,
$a p_4 \overset{*}{\Rightarrow} v$, $\underline{b}_3 p_4^{(m_3)} \overset{*}{\Rightarrow} \underline{r}_4$,

(vi) $(p_4)_{\underline{B}} = (p_3(p_4))_{\underline{B}} = (p_2(p_3(p_4)))_{\underline{B}}$,
$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$, $A_1' \subseteq A_2' \subseteq A_3'$, $B_1 = B_2 \subseteq B_3$,

(vii) $v \neq v'$, $\mathrm{path}_1(q_1) = \mathrm{path}_1(q_1')$.

Akkor a $p_1(p_2(p_4)), p_1(p_3(p_4))$ és $p_1(p_4)$ polinomszimbólumok közül legalább az egyik P-ben van.

Bizonyitás Először is megjegyezzük, hogy a lemma feltételeiből az is következik, hogy $p_1(p_2(p_3(p_4))) \in P$, hiszen $a_o p_1(p_2(p_3(p_4))) \overset{*}{\Longrightarrow} u(v)$, $a'_o p_1(p_2(p_3(p_4))) \overset{*}{\Longrightarrow} u'(v')$ és $u(v) \neq u'(v')$, ahol $u = q_1(x_1, q_2(q_3(q_4)))$, $u' = q'_1(x_1, q'_2(q'_3(q'_4)))$.

Legyenek $i=1,2$ esetén $\varphi_i : [n_i] \to [n_{i+1}]$, $\varphi'_i : [n'_i] \to [n'_{i+1}]$ és $\psi_i : [m_i] \to [m_{i+1}]$ rendre olyan leképezések, amelyekre $a_{i,j} = a_{i+1,\varphi_i(j)}$ $(i=1,2,\ 1 \leq j \leq n_i)$, $a'_{i,j} = a'_{i+1,\varphi'_i(j)}$ $(i=1,2,\ 1 \leq j \leq n'_i)$, $b_{i,j} = b_{i+1,\psi_i(j)}$ $(i=1,2,\ 1 \leq j \leq m_i)$. Legyen továbbá $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1$, $\varphi'_3 = \varphi'_2 \circ \varphi'_1$, $\psi_3 = \psi_2 \circ \psi_1$.

Vezessük be az

$\underline{s}_1 = (q_{3,\varphi_1(1)}, \ldots, q_{3,\varphi_1(n_1)})(q_4)$, $\underline{s}'_1 = (q'_{3,\varphi'_1(1)}, \ldots$

$\ldots, q'_{3,\varphi'_1(n'_1)})(q'_4)$,

$\underline{t}_1 = (r_{3,\psi_1(1)}, \ldots, r_{3,\psi_1(m_1)})(r_4)$,

$\underline{s}_2 = q_2(q_{4,\varphi_2(1)}, \ldots, q_{4,\varphi_2(n_2)})$, $\underline{s}'_2 = q'_2(q'_{4,\varphi'_2(1)}, \ldots$

$\ldots, q'_{4,\varphi'_2(n'_2)})$,

$\underline{t}_2 = r_2(r_{4,\psi_2(1)}, \ldots, r_{4,\psi_2(m_2)})$,

$\underline{s}_3 = (q_{4,\varphi_3(1)}, \ldots, q_{4,\varphi_3(n_1)})$, $\underline{s}'_3 = (q'_{4,\varphi'_3(1)}, \ldots, q'_{4,\varphi'_3(n'_1)})$,

$\underline{t}_3 = (r_{4,\psi_3(1)}, \ldots, r_{4,\psi_3(m_1)})$ jelöléseket. Nyilvánvaló, hogy

$a_o p_1(p_3(p_4)) \overset{*}{\Longrightarrow} q_1(v, \underline{s}_1)$, $a'_o p_1(p_3(p_4)) \overset{*}{\Longrightarrow} q'_1(r_1(\underline{t}_1), \underline{s}'_1)$,

$a_o p_1(p_2(p_4)) \overset{*}{\Longrightarrow} q_1(v, \underline{s}_2)$, $a'_o p_1(p_2(p_4)) \overset{*}{\Longrightarrow} q'_1(r_1(\underline{t}_2), \underline{s}'_2)$,

$a_o p_1(p_4) \overset{*}{\Longrightarrow} q_1(v, \underline{s}_3)$, $a'_o p_1(p_4) \overset{*}{\Longrightarrow} q'_1(r_1(\underline{t}_3), \underline{s}'_3)$ és az is,

hogy $p_1(p_3(p_4))$, $p_1(p_2(p_4))$, $p_1(p_4) \in T$.

Tegyük most fel, hogy $p_1(p_2(p_4)) \notin P$. Ekkor az előzőekből és (vii)-ből az következik, hogy $m_1, m_2, m_3 > 0$ és hogy van olyan i $(1 \leq i \leq m_2)$, hogy $r_{3,i}(\underline{r}_4) \neq r_{4,\psi_2(i)}$. A ψ_1 leképezés megválasztható ugy, hogy ez az i benne van a ψ_1 értékkészletében, vagyis van olyan j $(1 \leq j \leq m_1)$, hogy $\psi_1(j) = i$. Ha ezután még azt is feltesszük, hogy $p_1(p_3(p_4))$, $p_1(p_4) \notin P$, akkor $r_1(\underline{t}_1) = r_1(\underline{t}_2) = r_1(\underline{t}_3)$ következik. Ez utóbbi azonban lehetetlen, hiszen $t_{1,j} \neq t_{3,j}$. □

Megjegyezzük, hogy az előző lemma állitása akkor is igaz, ha $A_2' \subseteq A_3'$ és $B_2 \subseteq B_3$ helyett $A_2' \cup B_2 \subseteq A_3' \cup B_3$-at tesszük fel.

A következő lemma bizonyitását mellőzzük, mert azt az előző lemmáéhoz hasonlóan lehet végig vinni.

(3.4) Lemma Legyen $p_1, p_2, p_3 \in \hat{T}_{F,1}$, $p_4 \in T_F$, $n_i, n_i', m_i \geq 0$ $(i=1,2,3)$, $q_1 \in \hat{T}_{G,n_1+1}$, $q_1' \in \hat{T}_{G,n_1'+1}$, $r_1 \in \hat{T}_{G,m_1}$, $\underline{q}_2 \in \hat{T}_{G,n_2}^{n_1}$, $\underline{q}_2' \in \hat{T}_{G,n_2'}^{n_1'}$, $\underline{r}_2 \in \hat{T}_{G,m_2}^{m_1}$, $\underline{q}_3 \in \hat{T}_{G,n_3}^{n_2}$, $\underline{q}_3' \in \hat{T}_{G,n_3'}^{n_2'}$, $\underline{r}_3 \in \hat{T}_{G,m_3}^{m_2}$, $\underline{q}_4 \in T_G^{n_3}$, $\underline{q}_4' \in T_G^{n_3'}$, $\underline{r}_4 \in T_G^{m_3}$, $a_o, a_o' \in A_o$, $\underline{a}_i \in A^{n_i}$, $\underline{a}_i' \in A^{n_i'}$, $\underline{b}_i \in A^{m_i}$ $(i=1,2,3)$, végül legyen $v' \in T_G$. Vezessük be a $v = r_1(\underline{r}_2(\underline{r}_3(\underline{r}_4)))$, valamint az $A_i = \{a_{i,j} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$, $A_i' = \{a_{i,j}' \mid 1 \leq j \leq n_i'\}$ és $B_i = \{b_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m_i\}$ jelöléseket. Tegyük fel, hogy

(i) $p_1(p_2(p_3(p_4))) \in T$,

(ii) $a_o p_1 \overset{*}{\Longrightarrow} q_1(r_1(\underline{b}_1\underline{x}_1^{(m_1)}), \underline{a}_1\underline{x}_1^{(n_1)})$,

$a_o' p_1 \overset{*}{\Longrightarrow} q_1'(v', \underline{a}_1'\underline{x}_1^{(n_1')})$,

(iii) $\underline{a}_1 p_2^{(n_1)} \overset{*}{\Longrightarrow} q_2(\underline{a}_2\underline{x}_1^{(n_2)})$, $\underline{a}_1' p_2^{(n_1')} \overset{*}{\Longrightarrow} q_2'(\underline{a}_2'\underline{x}_1^{(n_2')})$,

$\underline{b}_1 p_2^{(m_1)} \overset{*}{\Longrightarrow} r_2(\underline{b}_2\underline{x}_1^{(m_2)})$,

(iv) $\underline{a}_2 p_3^{(n_2)} \overset{*}{\Longrightarrow} q_3(\underline{a}_3\underline{x}_1^{(n_3)})$, $\underline{a}_2' p_3^{(n_2')} \overset{*}{\Longrightarrow} q_3'(\underline{a}_3'\underline{x}_1^{(n_3')})$,

$\underline{b}_3 p_3^{(m_2)} \overset{*}{\Longrightarrow} r_3(\underline{b}_3\underline{x}_1^{(m_3)})$,

(v) $\underline{a}_3 p_4^{(n_3)} \overset{*}{\Longrightarrow} q_4$, $\underline{a}_3' p_4^{(n_3')} \overset{*}{\Longrightarrow} q_4'$, $\underline{b}_3 p_4^{(m_3)} \overset{*}{\Longrightarrow} r_4$,

(vi) $(p_4)_{\underline{B}} = (p_3(p_4))_{\underline{B}} = (p_2(p_3(p_4)))_{\underline{B}}$,

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$, $A_1' \subseteq A_2' \subseteq A_3'$, $B_1 = B_2 \subseteq B_3$,

(vii) $v \neq v'$, $\mathrm{path}_1(q_1) = \mathrm{path}_1(q_1')$.

Akkor a $p_1(p_2(p_4))$, $p_1(p_3(p_4))$, $p_1(p_4)$ polinomszimbólumok közül legalább az egyik P-ben van.

(3.5) Lemma Legyen $p_1, p_2 \in \hat{T}_{F,1}$, $p_3 \in T_F$, $k, \ell, m, k', \ell', m' \geq 0$, $q_1 \in \hat{T}_{G,k+1}$, $q_1' \in \hat{T}_{G,k'+1}$, $q_2 \in \hat{T}_{G,\ell+1}$, $q_2' \in \hat{T}_{G,\ell'+1}$, $\underline{r} \in \hat{T}^k_{G,m}$, $\underline{r}' \in \hat{T}^{k'}_{G,m'}$, $q_3 \in \hat{T}_{G,1}$, $q_3', v \in T_G$, $\underline{s} \in T_G^{\ell}$, $\underline{s}' \in T_G^{\ell'}$, $\underline{t} \in T_G^{m}$, $\underline{t}' \in T_G^{m'}$, $a_o, a_o', a, a' \in A$, $\underline{a} \in A^k$, $\underline{a}' \in A^{k'}$, $\underline{b} \in A^{\ell}$, $\underline{b}' \in A^{\ell'}$, $\underline{c} \in A^m$, $\underline{c}' \in A^{m'}$. Jelölje rendre A_1, B_1 és C_1 az $\underline{a}$, $\underline{b}$ illetve $\underline{c}$ vektorok komponenseiből álló halmazokat, A_1', B_1' és C_1' pedig az $\underline{a}'$, $\underline{b}'$ illetve $\underline{c}'$ komponenseinek halmazát. Tegyük fel, hogy

(i) $p_1(p_2(p_3)) \in T$,

(ii) $a_o p_1 \overset{*}{\Longrightarrow} q_1(ax_1, \underline{a}\, \underline{x}_1^{(k)})$, $a'_o p_1 \overset{*}{\Longrightarrow} q'_1(a'x_1, \underline{a}'\underline{x}_1^{(k')})$,

(iii) $a\, p_2 \overset{*}{\Longrightarrow} q_2(ax_1, \underline{b}\, \underline{x}_1^{(\ell)})$, $a'\, p_2 \overset{*}{\Longrightarrow} q'_2(a'x_1, \underline{b}'\underline{x}_1^{(\ell')})$,

$\underline{a}\, p_2^{(k)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{r}(\underline{c}\, \underline{x}_1^{(m)})$, $\underline{a}'\, p_2^{(k')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{r}'(\underline{c}'\, \underline{x}_1^{(m')})$,

(iv) $a\, p_3 \overset{*}{\Longrightarrow} q_3(v)$, $a'\, p_3 \overset{*}{\Longrightarrow} q'_3$, $\underline{b}\, p_3^{(\ell)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}$, $\underline{b}'\, p_3^{(\ell')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{s}'$,

$\underline{c}\, p_3^{(m)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{t}$, $\underline{c}'\, p_3^{(m')} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{t}'$,

(v) $A_1 \subseteq B_1 \cup C_1$, $A'_1 \subseteq B'_1 \cup C'_1$,

$(p_3)_{\underline{B}} = (p_2(p_3))_{\underline{B}}$,

(vi) $\mathrm{path}_1(q'_1) = \mathrm{path}_1(q_1)\, \mathrm{path}(q_3)$, $\mathrm{path}_1(q_2)\, \mathrm{path}(q_3) =$

$= \mathrm{path}(q_3)\, \mathrm{path}_1(q'_2)$, $v \neq q'_3$.

Akkor $p_1(p_3) \in P$.

<u>Bizonyitás</u> Vezessük be a $\underline{d} = (\underline{b}, \underline{c})$, $\underline{d}' = (\underline{b}', \underline{c}')$, $\underline{u} = (\underline{s}, \underline{t})$, $\underline{u}' = (\underline{s}', \underline{t}')$ jelöléseket. Legyenek a $\varphi : [k] \to [\ell + m]$ és $\varphi' : [k'] \to [\ell' + m']$ olyan leképezések, amelyek kielégitik az $a_i = d_{\varphi(i)}$ $(1 \leq i \leq k)$, $a_i = d_{\varphi'(i)}$ $(1 \leq i \leq k')$ feltételeket. Nyilvánvaló, hogy $a_o p_1(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q_1(q_3(v), u_{\varphi(1)}, \ldots, u_{\varphi(k)})$ és $a'_o p_1(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q'_1(q'_3, u'_{\varphi'(1)}, \ldots, u'_{\varphi'(k')})$, továbbá az is, hogy $p_1(p_3) \in T$. Mivel pedig $\mathrm{path}(q_1(q_3, u_{\varphi(1)}, \ldots, u_{\varphi(k)})) =$ $= \mathrm{path}(q'_1(x_1, u'_{\varphi'(1)}, \ldots, u'_{\varphi'(k')}))$ és $q'_3 \neq v$, $q_1(q_3(v), u_{\varphi(1)}, \ldots$ $\ldots, u_{\varphi(k)}) \neq q'_1(q'_3, u'_{\varphi'(1)}, \ldots, u'_{\varphi'(k')})$. Mindez összesen azt jelenti, hogy $p_1(p_3) \in P$. □

Ezek után már kimondhatjuk azt a lemmát, amelyből a fejezet összes pozitiv eldönthetőségi eredmény származtatható.

Ebben $|A|$ és $|B|$ jelöli rendre az A illetve B számosságát.

(3.6) Lemma Effektiven meghatározható egy olyan, az $|A|$, $|B|$, K és $\nu(G)$[†] számoktól függő m konstans hogy P akkor és csakis akkor nem üres, ha létezik m-nél kisebb mélységü eleme.

Bizonyitás Legyen $\|A\| = 2^{|A|}$, L a $[\nu(G)]$ elemeiből alkotható, legfeljebb $\|A\|^2|B|K$ hosszuságu nemüres szavak száma. Legyen továbbá $k = \|A\|^2|A|^2|B|(2L+1)$, $\ell = k + 2\|A\|^5|A||B|^2K$, $m = \ell + 2\|A\|^3|B|$.

Megmutatjuk, hogy P akkor és csakis akkor nem üres, ha valamely elemének mélysége m-nél kisebb. Mivel ez nyilvánvaló, ha K=0, feltehetjük, hogy $K \neq 0$. Legyen ekkor p a P egy minimális rangu eleme, $q, q' (\in T_G)$ pedig legyenek olyanok, amelyekre $q \neq q'$, $(p,q), (p,q') \in \tau_{\underline{A}}$ teljesül.

Tegyük fel, hogy $dp(p) \geq m$. Akkor van olyan $a_o, a_o' (\in A_o)$, $p_o, \ldots, p_m (\in \hat{T}_{F,1})$, $p_{m+1} (\in T_F)$, $n_i, n_i' (\geq 0)$ $(i=0,\ldots,m)$, $q_o (\in \hat{T}_{G,n_o})$, $q_o' (\in \hat{T}_{G,n_o'})$, $\underline{q}_i (\in \hat{T}_{G,n_i}^{n_{i-1}})$, $\underline{q}_i' (\in \hat{T}_{G,n_i'}^{n_{i-1}'})$ $(i=1,\ldots,m)$, $\underline{q}_{m+1} (\in T_G^{n_m})$, $\underline{q}_{m+1}' (\in T_G^{n_m'})$, $\underline{a}_i (\in A^{n_i})$, $\underline{a}_i' (\in A^{n_i'})$ $(i=0,\ldots,m)$, hogy

(1) $p = p_o(p_1(\ldots(p_{m+1})\ldots))$, $p_i \neq x_1$ $(i=1,\ldots,m)$,

(2) $q = q_o(\underline{q}_1(\ldots(\underline{q}_{m+1})\ldots))$, $q' = q_o'(\underline{q}_1'(\ldots(\underline{q}_{m+1}')\ldots))$,

(3) $a_o p_o \overset{*}{\Longrightarrow} q_o(\underline{a}_o x_1^{(n_o)})$, $a_o' p_o \overset{*}{\Longrightarrow} q_o'(\underline{a}_o' x_1^{(n_o')})$,
$\underline{a}_i p_{i+1}^{(n_i)} \overset{*}{\Longrightarrow} q_{i+1}(\underline{a}_{i+1} x_1^{(n_{i+1})})$, $\underline{a}_i' p_{i+1}^{(n_i')} \overset{*}{\Longrightarrow}$
$\overset{*}{\Longrightarrow} q_{i+1}'(\underline{a}_{i+1}' x_1^{(n_{i+1}')})$ $(i=0,\ldots,m-1)$,

---

[†] Az $|A|$, $|B|$ és K jelölésekre nézve ld. (3.2) lemmát

$$\underline{a}_m p_{m+1}^{(n_m)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{q}_{m+1}, \quad \underline{a}'_m p_{m+1}^{(n'_m)} \overset{*}{\Longrightarrow} \underline{q}'_{m+1}.$$

Vezessük be $i=0,\dots,m+1$ esetén a $\check{p}_i = p_0(p_1(\dots(p_i)\dots))$, $\check{q}_i = q_0(q_1(\dots(q_i)\dots))$, $\check{q}'_i = q'_0(q'_1(\dots(q'_i)\dots))$, $i=0,\dots,m$ esetén pedig a $\hat{p}_i = p_{i+1}(\dots(p_{m+1})\dots)$, $\hat{q}_i = \underline{q}_{i+1}(\dots(\underline{q}_{m+1})\dots)$, $\hat{q}'_i = \underline{q}'_{i+1}(\dots(\underline{q}'_{m+1})\dots)$ továbbá az $A_i = \{a_{i,j} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$, $A'_i = \{a'_{i,j} \mid 1 \leq j \leq n'_i\}$ jelöléseket.

Ha most bármely $\underline{v}(\in T_G^{n_\ell})$-re és $\underline{v}'(\in T_G^{n'_\ell})$-re $\check{\underline{q}}_\ell(v) \neq \check{\underline{q}}'_\ell(\underline{v}')$, akkor a (3.1) lemma felhasználásával és abból a tényből, hogy az $\{\ell,\dots,m\}$ halmaz számossága nagyobb, mint $\|A\|^2|B|+1$ következik, hogy valamely i,j-re $(\ell \leq i < j \leq m)$ $\check{p}_i(\hat{p}_j) \in P$. Ez pedig nyilván ellentmondás, hiszen $rn(\check{p}_i(\hat{p}_j)) < rn(p)$.

Ily módon feltehető, hogy - például - $n_\ell > 0$, valamint az, hogy van olyan $i_\ell (1 \leq i_\ell \leq n_\ell)$, $u'(\in \hat{T}_{G,1})$ és $v'(\in T_G)$, hogy a $q' = u'(v')$, $path(u') = path_{i_\ell}(\check{q}_\ell)$ valamint $v' \neq \hat{q}_{\ell,i_\ell}$ feltételek mindegyike teljesül. Világos, hogy ekkor minden $i(<\ell)$-re $n_i > 0$. Legyenek most $i_j (0 \leq i < \ell,\ 1 \leq j \leq n_i)$ azok az egyértelműen meghatározott számok, amelyekre teljesül, hogy $path_{i_j}(\check{q}_i)$ a $path_{i_\ell}(\check{q}_\ell)$ kezdőszelete. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $i_0 = \dots = i_\ell = 1$.

Tegyük ezek után fel, hogy nem létezik olyan $\alpha'(\in path(\check{q}'_\ell))$, hogy $path_1(\check{q}_\ell)$ az α' kezdőszelete vagy α' a $path_1(\check{q}_\ell)$ kezdőszelete. Legyen ekkor minden $i(\ell \leq i \leq m)$ esetén $B_i = \{a_{i,j} \mid path_1(\check{q}_\ell)$ a $path_j(\check{q}_i)$ kezdőszelete$\}$, $C_i = \{a_{i,j} \mid path_1(\check{q}_\ell)$ a $path_j(\check{q}_i)$-nek nem kezdőszelete$\}$. Mivel az $\{\ell,\dots,m\}$ halmaz számossága $2\|A\|^3|B|+1$, van olyan i_1,i_2,i_3 $(\ell \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m)$, hogy a következő feltételek teljesülnek:

$(\hat{p}_{i_1})_{\underline{B}} = (\hat{p}_{i_2})_{\underline{B}} = (\hat{p}_{i_3})_{\underline{B}}$, $B_{i_1} = B_{i_2} \subseteq B_{i_3}$, $C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq C_{i_3}$, $A'_{i_1} \subseteq A'_{i_2} \subseteq A'_{i_3}$. A (3.4) lemma felhasználásával ebből az következik, hogy a $\check{p}_{i_1}(\hat{p}_{i_2})$, $\check{p}_{i_2}(\hat{p}_{i_3})$, $\check{p}_{i_1}(\hat{p}_{i_3})$ polinomszimbólumok közül legalább az egyik P-ben van. Ez ismét ellentmondás.

Tehát valamely $\alpha'(\in \mathrm{path}(\check{q}'_\ell))$-re $\mathrm{path}_1(\check{q}_\ell)$ az α' kezdőszelete, vagy forditva, α' a $\mathrm{path}_1(\check{q}_\ell)$ kezdőszelete. Ily módon bármely i-re $(0 \leq i \leq \ell)$ $n'_i > 0$ és léteznek olyan $i_1, \ldots, i_\ell$ számok, hogy $\mathrm{path}_{i_j}(\check{p}'_j)$ a $\mathrm{path}_1(\check{p}_\ell)$ kezdőszelete vagy $\mathrm{path}_1(\check{p}_\ell)$ a $\mathrm{path}_{i_j}(\check{p}'_j)$ kezdőszelete $(0 \leq j \leq \ell)$. Az általánosság megszoritása nélkül ismét feltehető, hogy $i_o = \ldots = i_\ell = 1$. Ily módon minden j $(0 \leq j \leq \ell)$ esetén $\mathrm{path}_1(\check{p}_j)$ a $\mathrm{path}_1(\check{p}'_j)$ kezdőszelete, vagy forditva. Feltehetjük még azt is, hogy $\mathrm{path}_1(\check{p}'_j)$ a $\mathrm{path}_1(\check{p}'_\ell)$ kezdőszelete $(j=0,\ldots,\ell)$.

Ezek után két eset lehetséges. Tegyük fel először azt, hogy $\mathrm{path}_1(\check{q}'_k)$ a $\mathrm{path}_1(\check{q}_\ell)$ kezdőszelete. Ha ezen az eseten belül van olyan i $(0 \leq i \leq k)$, hogy $\|\mathrm{path}_1(\check{q}_i)| - |\mathrm{path}_1(\check{q}'_i)\| > \|A\|^2 |B| K$, akkor a (3.2) lemma szerint van olyan $r(\in T_P)$ polinomszimbólum, amelyekre $\check{p}_i(r) \in P$ és $\mathrm{rn}(r) < \mathrm{rn}(\hat{p}_i)$. Ez nyilván ellentmondás, hiszen igy $\mathrm{rn}(\check{p}_i(r)) < \mathrm{rn}(p)$ is teljesül. Tehát bármely i $(0 \leq i \leq k)$-re $\|\mathrm{path}_1(\check{q}_i)| - |\mathrm{path}_1(\check{q}'_i)\| \leq \|A\|^2 |B| K$. Ekkor azonban, mivel a $\{0,\ldots,k\}$ halmaz számossága $\|A\|^2 |A|^2 |B| (2L+1) + 1$, azt kapjuk, hogy valamely i,j $(0 \leq i < j \leq k)$ egészekre - mondjuk - $\mathrm{path}_1(\check{q}_i)$ a $\mathrm{path}_1(\check{q}'_i)$,

$path_1(\check{q}_j)$ a $path_1(\check{q}'_j)$ kezdőszelete, $path_1(\check{q}'_i)/path_1(\check{q}_i) = path_1(\check{q}'_j)/path_1(\check{q}_j)$, továbbá $(\hat{p}_j)_{\underline{B}} = (\hat{p}_i)_{\underline{B}}$, $a_{i,1} = a_{j,1}$, $a'_{i,1} = a'_{j,1}$, $B_i \subseteq B_j$, $B'_i \subseteq B'_j$, ahol $B_s = \{a_{s,t} \mid 2 \leq t \leq n_s\}$, $B'_s = \{a'_{s,t} \mid 2 \leq t \leq n'_s\}$ $(s=i,j)$. Igy a (3.5) lemma alkalmazásával az következik, hogy $\check{p}_i(\hat{p}_j) \in P$, ami ismét ellentmondás, hiszen $rn(\check{p}_i(\hat{p}_j)) < rn(p)$.

Tehát $path_1(\check{q}_\ell)$ a $path_1(\check{q}'_k)$ kezdőszelete. Ha megmutatjuk, hogy $|path_1(\check{q}_\ell)| - |path_1(\check{q}_k)| > \|A\|^2 |B| K$, akkor $|path_1(\check{q}'_k)| - |path_1(\check{q}_k)| > \|A\|^2 |B| K$ is teljesül, igy a (3.2) lemma alkalmazásával ismét ellentmondásba kerülünk azzal a feltevéssel, hogy p a P elemei közt minimális rangu. Elegendő tehát azt megmutatni, hogy $|path_1(\check{q}_\ell)| - |path_1(\check{q}_k)| > \|A\|^2 |B| K$.

Tegyük fel, hogy ellenkezőleg, $|path_1(\check{q}_\ell)| - |path_1(\check{q}_k)| \leq \|A\|^2 |B| K$. Ekkor mivel a $\{k,\dots,\ell\}$ halmaz számossága $(2\|A\|^3 |A||B|)(\|A\|^2 |B| K) + 1$, van olyan i_1, i_2 $(k \leq i_1 < i_2 \leq \ell)$, hogy $i_2 - i_1 = 2\|A\|^3 |A||B| + 1$, $path_1(\check{q}_{i_1}) = \dots = path_1(\check{q}_{i_2})$ - vagyis $q_{i_1+1,1} = \dots = q_{i_2,1} = x_1$. Legyen most minden j $(i_1 \leq j \leq i_2)$ esetén $B_j = \{a'_{j,t} \mid 1 \leq t \leq n'_j$, $path_t(\check{q}'_j)$-nek a $path_1(\check{q}_{i_1})$ kezdőszelete$\}$, $C_j = \{a'_{j,t} \mid 1 \leq t \leq n'_j$, $path_t(\check{q}'_j)$-nek $path_1(\check{q}_{i_1})$ nem kezdőszelete$\}$. Mivel az $\{i_1,\dots,i_2\}$ halmaz számossága $2\|A\|^3 |A||B|+1$, van olyan j_1, j_2, j_3 $(i_1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq i_2)$, hogy $(\hat{p}_{j_1})_{\underline{B}} = (\hat{p}_{j_2})_{\underline{B}} = (\hat{p}_{j_3})_{\underline{B}}$, $\bar{A}_{j_1} \subseteq \bar{A}_{j_2} \subseteq \bar{A}_{j_3}$, $B_{j_1} = B_{j_2} \subseteq B_{j_3}$, $C_{j_1} \subseteq C_{j_2} \subseteq C_{j_3}$, ahol $\bar{A}_{j_t} = \{a_{j_t,s} \mid 2 \leq s \leq n_t\}$ $(t=1,2,3)$, és hogy

$a_{j_1,1} = a_{j_2,1} = a_{j_3,1}$. Igy a (3.3) lemma felhasználásával adódik, hogy a $\check{p}_{j_1}(\hat{p}_{j_2})$, $\check{p}_{j_2}(\hat{p}_{j_3})$, $\check{p}_{j_1}(\hat{p}_{j_3})$ polinomszimbólumok közül legalább az egyik P-ben van. Ez ismét ellentmondás. □

A következő lemma az előző közvetlen következménye.

(3.7) Lemma Bármely $\underline{A} = (F, A, G, A_o, \Sigma_{\underline{A}})$ nemdeterminisztikus (felszálló vagy leszálló) fatranszformátorhoz effektiven meghatározható egy olyan csak A számosságától, $\nu(G)$-től és $\max\{dp(q) \mid \exists\, p \quad p \to q \in \Sigma_{\underline{A}}\}$-tól függő m szám, hogy $\underline{A}$ akkor és csakis akkor nem egyértelmü, ha van olyan $p(\in T_F)$ és $q, q'(\in T_G)$, hogy a $dp(p) < m$, $q \neq q'$ és $(p,q), (p,q') \in \tau_{\underline{A}}$ feltételek egyaránt teljesülnek.

(3.8) Tétel Létezik olyan algoritmus, amely

(i) tetszőleges $\underline{A}$ nemdeterminisztikus felszálló (leszálló) fatranszformátorra eldönti, hogy $\underline{A}$ egyértelmü-e,

(ii) tetszőleges $\underline{A}$ és $\underline{B}$ egyértelmü nemdeterminisztikus felszálló (leszálló) fatranszformátorra eldönti, hogy $\tau_{\underline{A}} \subseteq \tau_{\underline{B}}$ teljesül-e,

(iii) tetszőleges $\underline{A}$ és $\underline{B}$ egyértelmü nemdeterminisztikus felszálló (leszálló) fatranszformátorra eldönti, hogy ekvivalensek-e,

(iv) tetszőleges $\underline{A}$ nemdeterminisztikus felszálló (leszálló) és $\underline{B}$ determinisztikus felszálló (leszálló) fatranszformátorra eldönti, hogy ekvivalensek-e.

Bizonyitás Nyilvánvaló, hogy (i) következik a (3.7) lemmából, továbbá az, hogy (iii) következik (ii)-ből és

(iv) következik (i)-ből és (iii)-ből.

Ily módon elegendő csak a tétel második állitását bizonyitani, sőt, itt is szoritkozhatunk csak pl. a felszálló esetre.

Legyenek tehát $\underline{A}(=(F_1, A, G_1, A_o, \Sigma_{\underline{A}}))$ és $\underline{B}(=(F_2, B, G_2, B_o, \Sigma_{\underline{B}}))$ egyértelmü, nemdeterminisztikus ff-transzformátorok. Feltehető, hogy $F_1 = F_2 (= F)$, $G_1 = G_2 (= G)$ és az, hogy $A \cap B = \emptyset$. Tekintsük ezek után azt a $\underline{C}(=(F, C, G, C_o, \Sigma_{\underline{C}}))$ nemdeterminisztikus ff-transzformátort, amelyben $C = A \cup B$, $C_o = A_o \cup B_o$, $\Sigma_{\underline{C}} = \Sigma_{\underline{A}} \cup \Sigma_{\underline{B}}$. Világos, hogy $\tau_{\underline{C}} = \tau_{\underline{A}} \cup \tau_{\underline{B}}$, igy $\tau_{\underline{A}} \subseteq \tau_{\underline{B}}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $\mathrm{Dom}\tau_{\underline{A}} \subseteq \mathrm{Dom}\tau_{\underline{B}}$ és $\underline{C}$ egyértelmü. Mivel ez utóbbi feltételek eldönthetőek, a tétel állitása igaz. □

(3.9) Tétel

(i) Bármely egyértelmü, nemdeterminisztikus felszálló (leszálló) fatranszformátorhoz effektiven konstruálható vele ekvivalens, minimális állapotszámu nemdeterminisztikus felszálló (leszálló) fatranszformátor.

(ii) Bármely determinisztikus felszálló (leszálló) fatranszformátorhoz effektiven konstruálható vele ekvivalens, minimális állapotszámu determinisztikus felszálló (leszálló) fatranszformátor.

Bizonyitás Mivel eddigi eredményeink szerint a tétel két állitása hasonlóan igazolható és mivel mindkét esetben a felszálló és leszálló esetre is hasonló bizonyitás adható, csak a tétel második állitását igazoljuk és ezt is csak felszálló esetre.

Ehhez viszont elegendő azt megmutatni, hogy ha $\underline{A} = (F, A, G, a_o, \Sigma_{\underline{A}})$ olyan determinisztikus ff-transzformátor, hogy $\tau_{\underline{A}} \neq \emptyset$ és $\underline{B} = (F, B, G, b_o, \Sigma_{\underline{B}})$ vele ekvivalens, kétszeresen összefüggő determinisztikus ff-transzformátor, akkor $L \leq 2K\|A\|$-nak teljesülnie kell, ahol

$K = \max\{dp(q) \mid \exists p \in T_{F,X},\ a \in A\ \ ap \to q \in \Sigma_{\underline{A}}\}$,

$L = \max\{dp(q) \mid \exists p \in T_{F,X},\ b \in B\ \ bp \to q \in \Sigma_{\underline{B}}\}$,

$\|A\| = 2^{|A|}$, $|A|$ az A számossága.

Tegyük fel, hogy ellenkezőleg, $\underline{A}$ ekvivalens $\underline{B}$-vel és mégis, $L > 2K\|A\|$. Ekkor van olyan $n, m (\geq 0)$, $f \in F_n$, $b, b_1, \ldots, b_m \in B$ és $p \in \hat{T}_{G,m}$ továbbá $i_1, \ldots, i_m (\in [n])$, hogy $bf(x_1, \ldots, x_m) \to p(b_1 x_{i_1}, \ldots, b_m x_{i_m}) \in \Sigma_{\underline{B}}$ és $dp(p) > 2K\|A\|$ teljesül. Mivel $\underline{B}$ kétszeresen összefüggő, találhatók olyan $q (\in \hat{T}_{F,1})$, $q_1, \ldots, q_n (\in T_F)$ továbbá $r (\in \hat{T}_{G,1})$, $r_1, \ldots, r_m (\in T_G)$ polinomszimbólumok, hogy

$$b_o q(f(q_1, \ldots q_n)) \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} r(p(r_1, \ldots, r_m)).$$

Sőt, egyszerü számolással az is megmutatható, hogy a $q, q_1, \ldots, q_n$ polinomszimbólumok ugy is megválaszthatóak, hogy a $dp(q) < \|A\|$, $dp(q_1), \ldots, dp(q_n) < \|A\|$ egyenlőtlenségek mindegyike teljesül. Következésképpen $dp(q(f(q_1, \ldots, q_n)) < 2\|A\|$. De igy máris ellentmondáshoz jutunk, hiszen egyrészt $dp(r(p(r_1, \ldots, r_m))) > 2K\|A\|$ mivel $dp(p) > 2K\|A\|$, másrészt $dp(r(p(r_1, \ldots, r_m)) \leq 2K\|A\|$, mivel $dp(q(f(q_1, \ldots, q_n))) < 2\|A\|$ és $\underline{A}$ és $\underline{B}$ ekvivalenciája miatt $(q(f(q_1, \ldots, q_n)), r(p(r_1, \ldots r_m))) \in \tau_{\underline{A}}$. □

A fejezet hátra levő részében egy, a fatranszformátorok ekvivalenciájával kapcsolatos, negativ jellegü állitást fogunk bebizonyitani. E célból azonban szükségünk van néhány ujabb fogalom, elsősorban a Turing-gép fogalmának bevezetésére (ld. DAVIS [1958], SALOMAA [1973]).

Turing gépen - az irodalomtól némiképp eltérően de alapjában véve ekvivalens módon - egy $\underline{A}(=(T_I, A, T, a_o, \beta, \not\beta, \delta))$ rendszert fogunk érteni, ahol

(1) T_I véges, nemüres halmaz (az input ábécé),

(2) A véges, nemüres halmaz (az állapotok halmaza),

(3) T véges halmaz, $T_I \subseteq T$, $A \cap T = \emptyset$,

(4) a_o az A kitüntetett eleme (a kezdőállapot),

(5) β és $\not\beta$ a $T - T_I$ kitüntetett, különböző elemei,

(6) $\delta: A \times T \to A \times T^* \times \{1,0,-1\}$ olyan parciális függvény, amely kielégiti azt, hogy

(6.1) bármely $a(\in A)$ és $x(\in T-\{\not\beta,\beta\})$ esetén ha $\delta(a,x)$ definiált, akkor $\delta(a,x) \in A \times (T-\{\not\beta,\beta\})^* \times \{1,0,-1\}$,

(6.2) bármely $a(\in A)$-ra ha $\delta(a,\beta)$ definiált, akkor $\delta(a,\beta) \in A \times \{\beta\}(T-\{\beta,\not\beta\})^* \times \{1,0\}$,

(6.3) bármely $a(\in A)$-ra ha $\delta(a,\not\beta)$ definiált, akkor $\delta(a,\not\beta) \in A \times (T-\{\beta,\not\beta\})^* \times \{0,-1\}$.

Minden, az előzőekben megadott $\underline{A}$ Turing-géphez definiálhatjuk a $K(\underline{A})(=\{\beta\}(T-\{\beta,\not\beta\})^* A (T-\{\beta,\not\beta\})^* \{\not\beta\} \cup \cup (A \cup \{\lambda\})\{\beta\}(T-\{\beta,\not\beta\})^* \{\not\beta\})$ konfiguráció halmazt. Bevezethetünk továbbá $K(\underline{A})$-n egy $\vdash_{\underline{A}}$ -val jelölt binér relációt, az átmeneti függvényt. Definició szerint bármely $w, w' (\in K(\underline{A}))$-

ra $w \vdash_{\underline{A}} w'$ akkor és csakis akkor, ha az alábbi (1)-(4) feltételek egyike teljesül:

(1) $w = w_1 a x w_2$, $w' = w_1 y b w_2$ $(w_1, w_2, y \in T^*, x \in T, a, b \in A)$ és $\delta(a,x) = (b,y,1)$,

(2) $w = w_1 a x w_2$, $w' = w_1 b y w_2$ $(w_1, w_2, y \in T^*, x \in T, a, b \in A)$ és $\delta(a,x) = (b,y,0)$,

(3) $w = w_1 x a y w_2$, $w' = w_1 b x z w_2$ $(w_1, w_2, z \in T^*, x, y \in T,$ $a, b \in A)$ és $\delta(a,x) = (b,y,-1)$,

(4) $w = w_1 a x w_2$, $w' = w_1 x w_2$ $(w_1, w_2 \in T^*, x \in T)$ és $\delta(a,x)$ definiálatlan.

Ezek után az $\underline{A}$ Turing gép <u>által indukált függvény</u> a $\tau_{\underline{A}} = \{(\$a_0 w \not{c}, \$w' \not{c}) \mid w \in T_I^*, w' \in (T - \{\$, \not{c}\})^*, \$a_0 w \not{c} \vdash_{\underline{A}}^* \$w' \not{c}\}$ parciális függvény.

Legyen most $\underline{A}(=(T_I, A, T, a_0, \$, \not{c}, \delta))$ tetszőleges Turing gép és definiáljuk az $F(\underline{A})$ unáris tipust valamint az $E(\underline{A})$ $F(\underline{A})$ feletti azonosság bázist az $F(\underline{A})_0 = \{\not{c}\}$, $F(\underline{A})_1 = (A \cup T) - \{\not{c}\}$ illetve $E(\underline{A}) = \{(a(y(x_1)), \underset{\sim}{t}(b(x_1))) \mid y \in T, t \in T^*, a, b \in A, \delta(a,y) = (b,t,1)\} \cup \{(a(y(x_1)), b(\underset{\sim}{t}(x_1))) \mid y \in T, t \in T^*, a, b \in A, \delta(a,y) = (b,t,0)\} \cup \{(y(a(z(x_1))), b(y(t(x_1)))) \mid y, z \in T, t \in T^*, a, b \in A, \delta(a,y) = (b,t,-1)\} \cup \{(a(y(x_1)), y(x_1)) \mid y \in T, a \in A, \delta(a,y)$ nem definiált$\}$ egyenlőségekkel, ahol - most és a továbbiakban - tetszőleges F unáris tipusra és $p(\in F^*)$-ra $\underset{\sim}{p} = f_1(\ldots(f_n(x_1))\ldots)$, ha $p = f_1 \ldots f_n$ $(n \geq 0)$.

A következő lemma - amelynek bizonyitását azért mellőzzük, mert az az előzőek alapján egyszerü számolással

József Attila Tudományegyetem Könyvtára SZEGED

adódik - azt mondja ki, hogy tetszőleges $\underline{A}$ esetén $E(\underline{A})$ "szimulálja" $\underline{A}$ működését.

(3.10) Lemma Bármely $w(\in T_I^*)$-ra és $w'(\in (T-\{\beta,\phi\})^*)$-ra $\tau_{\underline{A}}(\beta\, a_o\, w\, \phi) = \beta\, w'\, \phi$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $\beta\, a_o\, w\, \phi\ \Theta_{E(\underline{A})}\ \beta\, w\, \phi$, ahol $\Theta_{E(\underline{A})}$ jelöli az $E(\underline{A})$ által $T_{F(\underline{A})}$-n indukált teljesen invariáns kongruencia relációt.

Legyenek most F és G tetszőleges tipusok, E G-feletti azonosságbázis, $\underline{A},\underline{B}:F \longrightarrow G$ pedig determinisztikus ff-(lf-) transzformátorok. Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ és $\underline{B}$ *E-re vonatkozóan ekvivalensek*, ha $\mathrm{Dom}\,\tau_{\underline{A}} = \mathrm{Dom}\,\tau_{\underline{B}}$ és bármely $p(\in T_F)$ $q,r(\in T_G)$ esetén $(p,q)\in \tau_{\underline{A}}$-ból és $(p,r)\in \tau_{\underline{B}}$-ből $q\ \Theta_E\ r$ következik, ahol Θ_E az E által T_G-felett indukált teljesen invariáns kongruencia.

Ezek után már kimondhatjuk a fejezet utolsó tételét:

(3.11) Tétel Nem létezik olyan algoritmus, amely tetszőleges F és G unáris tipusra valamint E G-feletti véges azonosság bázisra és $\underline{A},\underline{B}:F \longrightarrow G$ determinisztikus ff-(lf-) transzformátorra eldöntené, hogy E-re vonatkozóan ekvivalensek-e.

Bizonyitás Vegyünk egy tetszőleges, (V,k,α,β) PMP-t. Rendezzük V-t lineárisan és terjesszük ezt ki V^* lexikografikus rendezésévé. Ennek jelölésére tartsuk fenn a $\prec$ jelet. Vezessük be a $K = \max\{|\alpha_i|, |\beta_i| \mid i \in [k]\}$ jelölést.

Legyen tetszőleges $i \in [k]$ esetén $\varphi_i^{(1)} = w_1 \# \ldots \# w_m$, ahol $\{w_1,\ldots,w_m\} = \{w(\in V^*) \mid |w| = |\alpha_i|,\ w \neq \alpha_i\}$ és $w_1 \prec \ldots \prec w_m$; $\varphi_i^{(2)} = w_1 \# \ldots \# w_m$, ahol $\{w_1,\ldots,w_m\} =$

$= \{w(\in V^*) \mid 1 \leq |w| < |\alpha_i|\}$ és $w_1 \prec \ldots \prec w_m$, végül legyen $\varphi_i^{(3)} = w_1 \# \ldots \# w_m$, ahol most $\{w_1, \ldots, w_m\} = \{w(\in V^*) \mid |\alpha_i| < |w| \leq K\}$, $w_1 \prec \ldots \prec w_m$. Definiáljuk a $\psi_i^{(1)}$, $\psi_i^{(2)}$, $\psi_i^{(3)}$ szavakat β-ra nézve ugyanúgy, mint ahogyan a $\varphi_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(2)}$, $\varphi_i^{(3)}$ szavakat definiáltuk α-ra vonatkozóan. Jelölje minden $i \in [k]$ esetén τ_i azt a $w_1 \# \ldots \# w_m$ szót, amelyre $\{w_1, \ldots, w_m\} = \{w(\in V^*) \mid 1 \leq |w| \leq K\}$, $w_1 \prec \ldots \prec w_m$ teljesül.

Ezek után legyen minden $n(\geq 1)$, $i_1, \ldots, i_n (\in [k])$ esetén $\sigma_{i_1 \ldots i_n} = \mathfrak{B} c_0 \varphi_{i_1} \psi_{i_1} \ldots \varphi_{i_n} \psi_{i_n} \mathfrak{E}$ és $\nu_{i_1 \ldots i_n} = \mathfrak{B} d_0 \tau_{i_1} | \ldots | \tau_{i_n} \mathfrak{E}$ ahol bármely $i(\in [k])$-ra rendre φ_i illetve ψ_i jelöli a $\approx \varphi_i^{(1)} \sqsubset \varphi_i^{(2)} \sqsupset \varphi_i^{(3)}$ illetve $\approx \psi_i^{(1)} \sqsubset \psi_i^{(2)} \sqsupset \psi_i^{(3)}$ szót. (Természetesen mindenhol feltettük, hogy $\mathfrak{B}, \mathfrak{E}, \#, |, \approx, \sqsubset, \sqsupset, c_0, d_0$ különböző elemek és egyiküket sem tartalmazza V.)

A "másoló" Turing-gép stb. (ld. DAVIS [1958]) konstrukciójához hasonlóan belátható, hogy van olyan $\underline{C} (= (T_I, C, T, c_0, \mathfrak{B}, \mathfrak{E}, \delta_{\underline{C}}))$ és $\underline{D} = (T_I, D, T, d_0, \mathfrak{B}, \mathfrak{E}, \delta_{\underline{D}})$ $(T_I = V \cup \{\#, |, \approx, \sqsubset, \sqsupset\})$ Turing-gép, amelyekre $\tau_{\underline{C}} \subseteq \{(\sigma_{i_1 \ldots i_n}, \sigma^*_{i_1 \ldots i_n}) \mid n \geq 1, i_1, \ldots, i_n \in [k]\}$, $\tau_{\underline{D}} \subseteq \{(\nu_{i_1 \ldots i_n}, \nu^*_{i_1 \ldots i_n}) \mid n \geq 1, i_1, \ldots, i_n \in [k]\}$, ahol tetszőleges $i_1 \ldots i_n \in [k]^+$ esetén $\sigma^*_{i_1 \ldots i_n}$ az a $\mathfrak{B} w_1 \# \ldots \# w_m \mathfrak{E}$ szó, amelyre $\{w_1, \ldots, w_m\} = \{w(\in V^*) \mid 1 \leq |w| \leq nK, w \neq \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_n}\} \cup \{w(\in V^*) \mid 1 \leq |w| \leq nK, w \neq \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_n}\}$, $w_1 \prec \ldots \prec w_m$, $\nu^*_{i_1 \ldots i_n}$ pedig az a

$\$w_1\# \dots \#w_m¢$ alaku szó, amelyre $\{w_1,\dots,w_m\} = \{w(\in V^*) \mid 1 \leq |w| \leq nK\}$, és mint az előbb is, $w_1 \prec \dots \prec w_m$. $\underline{C}$-re és $\underline{D}$-re nyilván feltehető, hogy $C \cap D = \emptyset$.

Legyen most $F_0 = \{¢\}$ $F_1 = [k]$, $G_0 = \{¢\}$, $G_1 = F(\underline{C})_1 \cup \cup F(\underline{D})_1$, $F_i = G_i = \emptyset$ ha $i > 1$ és legyen $E = E(\underline{C}) \cup E(\underline{D})$. Tekintsük azt az $\underline{A}(=(F,A,G,a_0,\Sigma_{\underline{A}}))$ és $\underline{B}(=(F,B,G,b_0,\Sigma_{\underline{B}}))$ determinisztikus ff-transzformátort, amelyre:

(1) $A = \{a_0,a_1\}$, $B = \{b_0,b_1\}$,

(2) $\Sigma_{\underline{A}} = \{a_0 i(x_1) \to \underbrace{\$c_0 \varphi_i \psi_i}(a_1x_1) \mid i \in [k]\} \cup \cup \{a_1 i(x_1) \to \underbrace{\varphi_i \psi_i}(a_1x_1) \mid i \in [k]\} \cup \{a_1¢ \to ¢\}$,

(3) $\Sigma_{\underline{B}} = \{b_0 i(x_1) \to \underbrace{\$d_0 \tau_i}(b_1x_1) \mid i \in [k]\} \cup \cup \{b_1 i(x_1) \to \underbrace{|\tau_i(b_1x_1)} \mid i \in [k]\} \cup \{b_1¢ \to ¢\}$.

Világos, hogy $\tau_{\underline{A}} = \{(\underbrace{i_1\dots i_n}¢, \underset{\sim}{\sigma}_{i_1\dots i_n}) \mid n \geq 1, i_1,\dots,i_n \in [k]\}$, $\tau_{\underline{B}} = \{(\underbrace{i_1\dots i_n}¢, \underset{\sim}{\nu}_{i_1\dots i_n} \mid n \geq 1, i_1,\dots,i_n \in [k]\}$.

Igy az eddig mondottakból - figyelembe véve, hogy $C \cap D = \emptyset$ - a (3.10) lemma alkalmazásával az következik, hogy a (V,k,α,β) PMP-nek akkor és csakis akkor nincs megoldása, ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ E-re nézve ekvivalensek. □

Megjegyzendő, hogy mind az előző, mind pedig a (2.15) tétel bizonyitható abból is, hogy nem létezik olyan algoritmus, amely tetszőleges unáris F tipusra és F feletti véges E azonosság bázisra és egy további azonosságra eldöntené, hogy az az E-ből következik-e.

4. Lineáris fatranszformátorok egyértelműsége

Az előző fejezetben bebizonyitottuk, hogy minden $\underline{A}:F \to G$ nemdeterminisztikus ff-(lf-)transzformátorhoz effektiven meghatározható egy olyan m konstans, hogy $\underline{A}$ akkor és csakis akkor nem egyértelmű, ha van olyan $p(\in T_F)$, $q,q'(\in T_G)$, hogy a $(p,q),(p,q') \in \tau_{\underline{A}}$, $q \neq q'$, $dp(p) < m$ feltételek mindegyike teljesül. Ez az m azonban függött a transzformátor szabályainak halmazától. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy lineáris esetben a szabályoktól független - igy végülis csak az állapotok számától függő - és a fent jelzett tulajdonságokkal rendelkező m konstans is megadható. Ez vezet majd az 5. fejezet azon tételéhez, hogy minden reguláris egyenletrendszer lineárisan ekvivalens egy effektiven meghatározható véges egyenletrendszerrel.

A következőkben fel fogunk használni néhány, a szabad monoidok feletti egyenletrendszerekre vonatkozó állitást is. Ehhez az a meggondolás vezet, hogy ha F tetszőleges tipus, akkor $\hat{T}_{F,1}$-et szabad monoiddá tehetjük az által, hogy két elem - mondjuk p és q - szorzatát a $pq = p(q)$ egyenlőséggel értelmezzük. E monoid (szabad) generátorrendszere a $\{p(\in \hat{T}_{F,1}) \mid |path(p)| = 1\}$ halmaz, egységeleme pedig az x_1 változó. Ily módon LENTIN [1973]-ból közvetlenül adódik az alábbi két állitás:

(4.1) Állitás Legyen $p,q \in \hat{T}_{F,1}$. Ha $pq = qp$, akkor van olyan $u(\in \hat{T}_{F,1})$ és k,ℓ nemnegativ egész szám, hogy

$p = u^k$, $q = u^\ell$.

(4.2) Állitás Tegyük fel, hogy a $p,q,r(\in \hat{T}_{F,1})$ polinomszimbólumok kielégitik a $pq = qr$ egyenlőséget. Akkor valamely $u,v(\in \hat{T}_{F,1})$-re és k nemnegativ egész számra $p = uv$, $r = vu$, $q = (uv)^k u$.

Az előző két állitás alapján bizonyithatjuk a következő lemmát:

(4.3) Lemma Tegyük fel, hogy a $p_i,p_i',q(\in \hat{T}_{F,1})$ $(i=1,2)$ polinomszimbólumok kielégitik a $p_2qp_1' = p_1p_2q$, $qp_1'p_2' = p_2qp_1'$ és $p_1p_2 = p_2p_1$ egyenlőségeket. Akkor léteznek olyan $u,v(\in \hat{T}_{F,1})$ polinomszimbólumok és k_1,k_2,k nemnegativ egész számok, amelyekre $p_i = (uv)^{k_i}$, $p_i' = (vu)^{k_i}$ $(i=1,2)$, $q = (uv)^k u$.

Bizonyitás A lemma feltételeiből nyilván következik, hogy $|path(p_i)| = |path(p_i')|$ $(i=1,2)$. Ezért ha valamely i-re $(i=1,2)$ $p_i = x_1$ akkor $p_i' = x_1$, és forditva - igy a lemma a (4.2) állitásból közvetlenül következik. Tegyük tehát fel, hogy $p_i,p_i' \neq x_1$ $(i=1,2)$. A (4.2) állitás szerint valamely $u_i,v_i(\in \hat{T}_{F,1})$-re $(i=1,2)$ és ℓ_1, ℓ_2 nemnegativ egész számra

$$p_1 = u_1v_1, \quad p_1' = v_1u_1, \quad p_2q = (u_1v_1)^{\ell_1}u_1,$$

$$p_2 = u_2v_2, \quad p_2' = v_2u_2, \quad qp_1' = (u_2v_2)^{\ell_2}u_2.$$

Mivel $p_1p_2 = p_2p_1$, a (4.1) állitás szerint van olyan $z(\in \hat{T}_{F,1})$, $k_1,k_2(>0)$, hogy $p_1 = z^{k_1}$, $p_2 = z^{k_2}$. Mivel p_1 és p_2 x_1-től különböznek, k_1 és k_2 határozottan pozitiv.

Tekintsük most a p_2qp_1' polinomszimbólumot. Egyrészt

$$p_2qp_1' = (u_1v_1)^{\ell_1} u_1v_1u_1 = (u_1v_1)^{\ell_1+1} u_1 = z^{k_1(\ell_1+1)} u_1,$$

$$p_2qp_1' = u_2v_2(u_2v_2)^{\ell_2} u_2 = (u_2v_2)^{\ell_2+1} u_2 = z^{k_2(\ell_2+1)} u_2.$$

Ezért $z^{k_1(\ell_1+1)} u_1 = z^{k_2(\ell_2+1)} u_2$. Ebből viszont ha még egyszer figyelembe vesszük, hogy u_1v_1 és u_2v_2 egyaránt a z hatványai, az következik, hogy van olyan $u,v(\in \hat{T}_{F,1})$, n_i,n_i' (≥ 0) $(i=1,2)$, hogy $z = uv$, $u_1 = (uv)^{n_1}u$, $v_1 = (vu)^{n_1'}v$, $u_2 = (uv)^{n_2}u$, $v_2 = (vu)^{n_2'}v$. (Világos, hogy $n_1+n_1'+1 = k_1$, $n_2+n_2'+1 = k_2$.)

Legyen ezek után $k = \ell_1k_1 + n_1 - k_2$. Láttuk, hogy

$p_1 = z^{k_1} = (uv)^{k_1}$, $p_2 = z^{k_2} = (uv)^{k_2}$, $p_1' = v_1u_1 = (vu)^{n_1'}v(uv)^{n_1}u$

$= (vu)^{n_1+n_1'+1} = (vu)^{k_1}$, $p_2' = v_2u_2 = (vu)^{n_2'}v(uv)^{n_2}u =$

$= (vu)^{n_2+n_2'+1} = (vu)^{k_2}$, továbbá $p_2qp_1 = z^{k_1(\ell_1+1)} u_1 =$

$= (uv)^{k_1\ell_1+k_1+n_1}u$-ból és a $p_2 = (uv)^{k_2}$, $p_1 = (vu)^{k_1}$

egyenlőségekből $q = (uv)^{k_1\ell_1+n_1-k_2} u = (uv)^k u$. □

A soron következő öt lemmában tegyük fel, hogy $\underline{A}(=(F,T,A,G,A_o,\Sigma_{\underline{A}}))$ egy tetszőleges általánositott lineáris nemdeterminisztikus fatranszformátor, $\underline{B}(=(F,B,B_o))$ pedig olyan - mondjuk parciális - faautomata, amely a T reguláris erdőt reprezentálja. Ezen kivül a (4.4) és (4.5) lemmákban feltesszük azt is, hogy $p(\in T)$ kielégiti azt a feltételt, hogy bármely $q(\in T)$-re és $r_1,r_2(\in T_G)$-re ha $rn(q) \leq rn(p)$, $(q,r_1),(q,r_2) \in \tau_{\underline{A}}$, akkor $r_1 = r_2$.

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

(4.4) Lemma Legyen $p_o, p_1, p_2 \in \hat{T}_{F,1}, p_3 \in T_F, q, p_1', p_2', r, p_1'', p_2'' \in \hat{T}_{G,1}, s \in T_G$ valamint $a_o, a_o' \in A_o, a, a' \in A$. Tegyük fel, hogy

(i) $p = p_o(p_1(p_2(p_3)))$, $(p_3)_{\underline{B}} = (p_2(p_3))_{\underline{B}} = (p_1(p_2(p_3)))_{\underline{B}}$

(ii) $a_o p_o \overset{*}{\Longrightarrow} q(ax_1)$, $a_o' p_o \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(p_2'(r(dx_1))))$,

(iii) $ap_i \overset{*}{\Longrightarrow} p_i'(ax_1)$, $a'p_i \overset{*}{\Longrightarrow} p_i''(a'x_1)$ $(i=1,2)$,

(iv) $ap_3 \overset{*}{\Longrightarrow} r(p_1''(p_2''(s)))$, $a'p_3 \overset{*}{\Longrightarrow} s$,

(v) $dp(p_1')$, $dp(p_2') > 0$.

Akkor léteznek olyan $u, v (\in \hat{T}_{G,1})$ polinomszimbólumok és k_1, k_2, k nemnegativ egész számok, hogy $p_i' = (uv)^{k_i}$, $p_i'' = (vu)^{k_i}$ $(i=1,2)$ és $q = (uv)^k u$.

Bizonyitás Először megjegyezzük, hogy feltevéseinkből az is következik, hogy $dp(p_1'')$, $dp(p_2'') > 0$, valamint hogy $dp(p_1)$, $dp(p_2) > 0$.

Most megmutatjuk, hogy $path(p_1'(p_2')) = path(p_2'(p_1'))$. E célból tekintsük a $p_o(p_2(p_1(p_3)))$ polinomszimbólumot. Nyilvánvaló, hogy $a_o p_o(p_2(p_1(p_3))) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_2'(p_1'(r(p_1''(p_2''(s))))))$, $a_o' p_o(p_2(p_1(p_3))) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(p_2'(r(p_2''(p_1''(s))))))$, $rn(p_o(p_2(p_1(p_3)))) = rn(p)$, valamint az, hogy $(p_o(p_2(p_1(p_3))))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$ $(\in B_o)$. Igy a $q(p_2'(p_1'(r(p_1''(p_2''(s)))))) = q(p_1'(p_2'(r(p_2''(p_1''(s))))))$ egyenlőségnek teljesülnie kell. Ezért ha feltesszük, hogy $path(p_1'(p_2')) \neq path(p_2'(p_1'))$, akkor csak az alábbi két A1 és A2 eset egyike lehetséges:

A1. Van olyan $u (\in \hat{T}_{G,2})$, hogy $p_2' = u(x_1, p_2''(p_1''(s)))$ és $p_1'(p_2'(r)) = u(p_1'(r(p_1''(p_2''(s)))), x_1)$.

Ekkor

$$a_o p_o(p_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q(ap_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q(u(ap_3, p_2''(p_1''(s)))) \overset{*}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{*}{\Longrightarrow} q(u(r(p_1''(p_2''(s))), p_2''(p_1''(s)))$$

és

$$a_o' p_o(p_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q(u(p_1'(r(p_1''(p_2''(s)))), p_2''(a'p_3))) \overset{*}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{*}{\Longrightarrow} q(u(p_1'(r(p_1''(p_2''(s)))), p_2''(s))).$$

Tekintettel arra, hogy $rn(p_o(p_2(p_3))) < rn(p)$ és $(p_o(p_2(p_3)))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$ $(\in B_o)$, a fenti derivációk létezéséből szükségképpen $q(u(r(p_1''(p_2''(s))), p_2''(p_1''(s))) = q(u(p_1'(r(p_1''(p_2''(s)))), p_2''(s)))$ majd pedig $r(p_1''(p_2''(s))) = p_1'(r(p_1''(p_2''(s))))$ és $p_1''(s) = s$ következik. Ezen egyenlőségek azonban egyaránt lehetetlenek, mivel $d(p_1'), dp(p_1'') > 0$.

A2. Valamely $u(\in \hat{T}_{G,2})$-re $p_1' = u(x_1, p_2''(p_1''(s)))$ és $p_1'(p_2'(r)) = p_2'(u(r(p_1''(p_2''(s))), x_1))$.

Ebben az esetben

$$a_o p_o(p_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q(ap_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_2'(ap_3)) \overset{*}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{*}{\Longrightarrow} q(p_2'(r(p_1''(p_2''(s)))))$$

és

$$a_o' p_o(p_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_2'(u(r(p_1''(p_2''(s))), a'p_2(p_3))) \overset{*}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{*}{\Longrightarrow} q(p_2'(u(r(p_1''(p_2''(s))), p_2''(a'p_3))) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_2'(u(r(p_1''(p_2''(s))),$$
$$p_2''(s))).$$

Ezért ha figyelembe vesszük még azt is, hogy $rn(p_o(p_2(p_3))) < rn(p)$, $(p_o(p_2(p_3)))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$, azt kapjuk, hogy $q(p_2'(r(p_1''(p_2''(s))))) = q(p_2'(u(r(p_1''(p_2''(s))), p_2''(s)))$, vagyis azt, hogy $r(p_1''(p_2''(s))) = u(r(p_1''(p_2''(s))), p_2''(s))$. Ez nyilván ellentmondás.

Mivel a $path(p_1'(p_2')) \neq path(p_2'(p_1'))$ feltevés mindkét esetben ellentmondáshoz vezetett, $path(p_1'(p_2')) = path(p_2'(p_1'))$. Ezért van olyan $k_1, k_2 (\geq 0)$, $\gamma (\in \mathbb{N}^*)$, hogy $path(p_1') = \gamma^{k_1}$, $path(p_2') = \gamma^{k_2}$. $p_1', p_2' \neq x_1$ miatt $k_1, k_2 > 0$ is teljesül, és $\gamma \neq \lambda$. (Megjegyezzük, hogy a $path(p_1'(p_2')) = path(p_2'(p_1'))$ egyenlőség akkor is érvényes, ha $path(p_1') = \lambda$ vagy $path(p_2') = \lambda$ vagyis ha $p_1' = x_1$ vagy $p_2' = x_1$. Azt a feltevést, hogy $p_1', p_2' \neq x_1$ később fogjuk erősen kihasználni.)

Most legyenek $u (\in \hat{T}_{G,1})$ és $v (\in T_G)$ azok az egyértelműen meghatározott polinomszimbólumok, amelyekre teljesül, hogy $u(v) = r(p_1''(p_2''(s)))$, $path(u)$ a γ hatványa, és az, hogy ha valamely $v_1 (\in \hat{T}_{G,1})$-re és $v_2 (\in T_G)$-re $v = v_1(v_2)$, akkor γ nem kezdőszelete $path(v_1)$-nek. Legyen továbbá m az a szám, amelyre $path(u) = \gamma^m$. Megmutatjuk, hogy $path(r(p_1''))$ a γ^m valódi kezdőszelete. Valóban, ha ennek ellenkezőjét tesszük fel, akkor az alábbi három eset egyike teljesül:

Bl. Van olyan $z (\in \hat{T}_{G,2})$, hogy $r = z(x_1, v)$ és $u = z(p_1''(p_2''(s)), x_1)$.

Ekkor

$$a_o p_o(p_1(p_3)) \overset{*}{\Rightarrow} q(ap_1(p_3)) \overset{*}{\Rightarrow} q(p_1'(ap_3)) \overset{*}{\Rightarrow} q(p_1'(u(v)))$$

és

$$a_o' p_o(p_1(p_3)) \overset{*}{\Rightarrow} q(p_1'(p_2'(z(a'p_1(p_3), v)))) \overset{*}{\Rightarrow}$$
$$\overset{*}{\Rightarrow} q(p_1'(p_2'(z(p_1''(ap_3), v)))) \overset{*}{\Rightarrow} q(p_1'(p_2'(z(p_1''(s), v)))).$$

Mivel továbbá $rn(p_o(p_1(p_3))) < rn(p)$ és $(p_o(p_1(p_3)))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$, a fenti derivációk létezéséből $q(p_1'(u(v))) = q(p_1'(p_2'(z(p_1''(s), v))))$ majd pedig $u(v) = p_2'(z(p_1''(s), v))$ következik. Csakhogy

$path(u) = \gamma^m$, $path(p_2'(z(p_1''(s),x_1))) = \gamma^{m+k_2}$ és $k_2 > 0$, ezért létezniük kell olyan $v_1 (\in \hat{T}_{G,1})$ és $v_2 (\in T_G)$ polinomszimbólumoknak, amelyekre $v = v_1(v_2)$, $path(v_1) = \gamma$. Ez ellentmondás.

B2. Van olyan $z (\in \hat{T}_{G,2})$, hogy $p_1'' = z(x_1, v), u = r(z(p_2''(s), x_1))$.

Ekkor $a_o p_o(p_1(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(u(v)))$ és $a_o' p_o(p_1(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow}$ $\overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(p_2'(r(a'p_1(p_3))))) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(p_2'(r(z(a'p_3, v))))) \overset{*}{\Longrightarrow}$ $\overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(p_2'(r(z(s,v))))))$, amiből ugyanugy, mint az előbb $u(v) = p_2'(r(z(s,v)))$ következik. Ez ismét ellentmondás, mivel $path(u) = \gamma^m$, $path(p_2(r(z(s,x_1)))) = \gamma^{m+k_2}$ és $k_2 > 0$.

B3. Van olyan $z (\in \hat{T}_{G,1})$, hogy $r(p_1'') = u(z)$. Ebben az esetben $a_o p_o(p_1(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(u(v)))$, $a_o' p_o(p_1(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow}$ $\overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(p_2'(r(a'p_1(p_3))))) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(p_2'(u(z(a'p_3))))) \overset{*}{\Longrightarrow}$ $\overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1(p_2(u(z(s))))))$ valamint $rn(p_o(p_1(p_3))) < rn(p)$, $(p_o(p_1(p_3)))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$ miatt $u(v) = p_2'(u(z(s)))$, ami ismét lehetetlen, hiszen $path(u) = \gamma^m$, $path(p_2'(u)) = \gamma^{m+k_2}$ és $k_2 > 0$.

Mivel mind a három eset ellentmondáshoz vezetett, $path(r(p_1''))$ a γ^m valódi kezdőszelete. Hasonlóan, a $p_o(p_1(p_2(p_3)))$ polinomszimbólum helyett a $p_o(p_2(p_1(p_3)))$ polinomszimbólummal indulva, az is belátható, hogy $path(r(p_2''))$ a γ^m valódi kezdőszelete. (Megjegyezzük itt még azt, hogy mivel $k_2 > 0$, m szükségképpen pozitiv.)

Ezek után legyenek α, β $(\in \mathbb{N}^*)$ azok az egyértelmüen meghatározott szavak, és legyen $k (\geq 0)$ az az egyértelmüen

meghatározott egész szám, amelyre $\gamma = \alpha\beta$, $path(r) = (\alpha\beta)^k\alpha$. Tekintsük továbbá a $p_o(p_2(p_3))$ polinomszimbólumot. Mivel az $a_o p_o(p_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q(p_2'(r(p_1''(p_2''(s))))),\ a_o' p_o(p_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow}$ $\overset{*}{\Longrightarrow} q(p_1'(p_2'(r(p_2''(s))))),\ rn(p_o(p_2(p_3))) < rn(p),\ (p_o(p_2(p_3)))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$ relációk egyaránt fennállnak, $p_1'(p_2'(r(p_2''(s))))$ szükségképpen megegyezik $p_2'(r(p_1''(p_2''(s))))$-sel. Ebből - tekintettel arra, hogy $path(p_1'(p_2'(r))) = (\alpha\beta)^{k+k_1+k_2}\alpha$ és $path(p_2'(r)) = (\alpha\beta)^{k+k_2}\alpha$ - az következik, hogy valamely $u(\in \hat{T}_{G,1})$-re és $v(\in T_G)$-re $p_1''(p_2''(s)) = u(v)$, $path(u) = (\beta\alpha)^{k_1}$. Összevetve ezt azzal, hogy $path(r(p_1''))$ a γ valamely hatványának kezdőszelete, az adódik, hogy az alábbi C1 és C2 esetek egyike teljesül.

C1. Van olyan $z(\in \hat{T}_{G,1})$, hogy $p_1'' = u(z)$.

Ebben az esetben $p_1'(p_2'(r(p_2''(s)))) = p_2'(r(u(z(p_2''(s)))))$ következik, ami viszont csak ugy lehet, hogy $z = x_1$, hiszen $path(p_1'(p_2'(r))) = path(p_2'(r(u))) = (\alpha\beta)^{k+k_1+k_2}\alpha$ miatt különben $p_2''(s) = z(p_2''(s))$ teljesülne, ami lehetetlen.

C2. Van olyan $z(\in \hat{T}_{G,1})$, hogy $p_1''(z) = u$.

Ekkor $p_1'(p_2'(r(z(v)))) = p_2'(r(u(v)))$, majd ismét $z = x_1$ következik.

Mivel mindkét esetben $z = x_1$ teljesül, $path(p_1'') = (\beta\alpha)^{k_1}$. Hasonlóan látható, hogy $path(p_2'') = (\beta\alpha)^{k_2}$.

Összefoglalva az eddigieket, megmutattuk, hogy léteznek olyan $k_1, k_2, k(\geq 0)$ egész számok és $\alpha, \beta\ (\in \mathbb{N}^*)$ szavak,

hogy $path(p_i') = (\alpha\beta)^{k_i}$, $path(p_i'') = (\beta\alpha)^{k_i}$ $(i=1,2)$, és $path(r) = (\alpha\beta)^k\alpha$. Tekintettel arra, hogy a $(p_o(p_2(p_3)),q(p_2'(r(p_1''(p_2''(s))))))$, $(p_o(p_2(p_3)),q(p_1'(p_2'(r(p_2''(s))))))$, $(p_o(p_1(p_3)),q(p_1'(r(p_1''(p_2''(s))))))$, $(p_o(p_1(p_3)),q(p_1'(p_2'(r(p_1''(s))))))$, $(p_o(p_2(p_1(p_3))),q(p_2'(p_1'(r(p_1''(p_2''(s))))))$ és végül a $(p_o(p_2(p_1(p_3))),q(p_1'(p_2'(r(p_2''(p_1''(s))))))$ rendezett párok mindegyike $\tau_{\underline{A}}$-ban van, és első komponenseik rangja legfeljebb annyi, mint p rangja, ebből $p_2'rp_1'' = p_1'p_2'r$, $rp_1''p_2'' = p_2'rp_1''$ és $p_1'p_2' = p_2'p_1'$ következik, ahonnan a (4.3) lemma alkalmazásával közvetlenül a lemma állitását kapjuk. □

(4.5) Lemma Legyen $p_o,p_1,p_2 \in \hat{T}_{F,1}$, $p_3 \in T_F$, $q_i,q_i' \in \hat{T}_{G,1}$ $(i=0,1,2)$, $r \in T_G$, $a_o,a_o' \in A_o$, $a,a' \in A$. Tegyük fel, hogy

(i) $p = p_o(p_1(p_2(p_3)))$, $(p_3)_{\underline{B}} = (p_2(p_3))_{\underline{B}} = (p_1(p_2(p_3)))_{\underline{B}}$,

(ii) $a_op_o \overset{*}{\Longrightarrow} q_o(ax_1)$, $a_o'p_o \overset{*}{\Longrightarrow} q_o(q_o'(a'x_1))$,

(iii) $ap_i \overset{*}{\Longrightarrow} q_{i-1}'(q_i(ax_1))$, $a'p_i \overset{*}{\Longrightarrow} q_i(q_i'(a'x_1))$ $(i=1,2)$,

(iv) $ap_3 \overset{*}{\Longrightarrow} q_2'(r)$, $a'p_3 \overset{*}{\Longrightarrow} r$,

akkor $q_o' = q_1'$.

Bizonyitás Mivel $a_op_o(p_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q_o(q_1'(q_2(q_2'(r))))$, $a_o'p_o(p_2(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q_o(q_o'(q_2(q_2'(r))))$, továbbá $(p_o(p_2(p_3)))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$ és $rn(p_o(p_2(p_3))) \leqslant rn(p)$ elegendő azt megmutatni, hogy $path(q_o') = path(q_1')$.

Tegyük fel, hogy ellenkezőleg, $path(q_o') \neq path(q_1')$. Akkor három eset lehetséges:

A1. Van olyan $q(\in \hat{T}_{G,2})$, hogy $q_1' = q(x_1,q_2(q_2'(r)))$ és $q_o' = q(q_2(q_2'(r)),x_1)$.

Tekintsük ekkor a $p_0(p_3)$ polinomszimbólumot. Nyilvánvaló, hogy $(p_0(p_3))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$, $rn(p_0(p_3)) \leqslant rn(p)$ és az, hogy $a_0 p_0(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q_0(q_2'(r))$, $a_0' p_0(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q_0(q(q_2(q_2'(r)),r))$. Igy szükségképpen $q_2'(r) = q(q_2(q_2'(r),r)$, ami lehetetlen.

A2. Van olyan $q(\in \hat{T}_{G,1})$, hogy $q \neq x_1$, $q_1' = q_0'(q)$. Ekkor ellentmondásba kerülünk azzal, hogy $q_0(q_0'(q_2(q_2'(r)))) = q_0(q_1'(q_2(q_2'(r))))$, hiszen $q(q_2(q_2'(r))) \neq q_2(q_2'(r))$.

A3. Van olyan q $(\in \hat{T}_{G,1})$, hogy $q \neq x_1$, $q_0' = q_1'(q)$. Ez hasonlóan vezet ellentmondáshoz, mint A2. □

A következő három lemmában - ellentétben az előző kettővel - legyen $p(\in T_F)$ minimális rangu azon $q(\in T)$ polinomszimbólumok között, amelyekhez van két olyan különböző $r_1, r_2(\in T_G)$ polinomszimbólum, hogy $(q,r_1),(q,r_2) \in \sim_{\underline{A}}$.

<u>(4.6) Lemma</u> Nem létezik olyan $p_0, p_1, p_2(\in \hat{T}_{F,1})$, $p_3(\in T_F)$, $q_i, q_i'(\in \hat{T}_{G,1})$ $(i=0,1,2)$, $q_3, q_3'(\in T_G)$, $a_0, a_0'(\in A_0)$, $a, a'(\in A)$, hogy:

(i) $p = p_0(p_1(p_2(p_3)))$, $(p_3)_{\underline{B}} = (p_2(p_3))_{\underline{B}} = (p_1(p_2(p_3)))_{\underline{B}}$,

(ii) $a_0 p_0 \overset{*}{\Longrightarrow} q_0(ax_1)$, $a_0' p_0 \overset{*}{\Longrightarrow} q_0'(a'x_1)$,

(iii) $ap_i \overset{*}{\Longrightarrow} q_i(ax_1)$, $a'p_i \overset{*}{\Longrightarrow} q_i'(a'x_1)$ $(i=1,2)$,

(iv) $ap_3 \overset{*}{\Longrightarrow} q_3$, $a'p_3 \overset{*}{\Longrightarrow} q_3'$,

(v) $q_i, q_i' \neq x_1$ $(i=1,2)$

és

(vi) $path(q_0)$ nem kezdőszelete $path(q_0')$-nek és $path(q_0')$ sem kezdőszelete $path(q_0)$-nak, vagy

(vi') $path(q_0)$ a $path(q_0')$, $path(q_0'(q_1'))$ pedig a

$path(q_0(q_1))$ kezdőszelete, és legalább az egyik valódi kezdőszelet is.

Bizonyitás Tegyük fel először, hogy a lemma kimondásában szereplő polinomszimbólumok kielégitik az (i) - (v) valamint a (vi) feltételeket. Ekkor tekintettel arra, hogy $a_0p_0(p_1(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q_0(q_1(q_3))$ és $a_0'p_0(p_1(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q_0'(q_1'(q_3'))$, $(p_0(p_1(p_3)))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$ és $rn(p_0(p_1(p_3)))<rn(p)$, $q_0(q_1(q_3)) = q_0'(q_1'(q_3'))$ következik. (vi) szerint igy van olyan $q(\in \hat{T}_{G,2})$, amelyre $q_0 = q(x_1, q_1'(q_3'))$, $q_0' = q(q_1(q_3), x_1)$.

Most tekintsük a $p_0(p_3)$ polinomszimbólumot. Igaz, hogy $rn(p_0(p_3))< rn(p)$, $p_0(p_3)\in T$ és az, hogy $a_0p_0(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q(q_3, q_1'(q_3'))$, $a_0'p_0(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q(q_1(q_3), q_3')$. Következésképpen $q(q_3, q_1'(q_3')) = q(q_1(q_3), q_3')$, vagyis $q_3 = q_1(q_3)$ és $q_1'(q_3') = q_3'$. Ez nyilván ellentmondás.

Másodszorra tegyük fel, hogy az (i) - (v) és (vi) feltételek mindegyike teljesül az a_0, a_0', a, a' állapotokra és a p_i, q_i, q_i' $(i=0,\ldots,3)$ polinomszimbólumokra. Ekkor, mivel a $q_0(q_1(q_3)) = q_0'(q_1'(q_3'))$ egyenlőségnek éppugy teljesülnie kell, mint az előző esetben, (vi) szerint azt kapjuk, hogy pl. q_3 a q_3' valódi részfája. Ugyanakkor $p_0(p_3)\in T$, $rn(p_0(p_3))< rn(p)$ valamint $a_0p_0(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q_0(q_3)$ és $a_0'p_0(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q_0'(q_3')$ miatt $q_0(q_3) = q_0'(q_3')$-nek is teljesülnie kell, ami azt eredményezi, hogy q_3' a q_3 részfája. Ez nyilván ellentmondás. □

(4.7) Lemma Nem létezik olyan $p_0, p_1, p_2(\in \hat{T}_{F,1}), p_3(\in T_F)$, $q_0, q_1, q_2(\in \hat{T}_{G,1})$, $q_3, q_0'(\in T_G)$, $a_0, a_0'(\in A_0)$ és $a(\in A)$, hogy

(i) $p_o(p_1(p_2(p_3))) = p$, $(p_3)_{\underline{B}} = (p_2(p_3))_{\underline{B}} = (p_1(p_2(p_3)))_{\underline{B}}$,

(ii) $a_o p_o \overset{*}{\Longrightarrow} q_o(ax_1)$, $a'_o p_o \overset{*}{\Longrightarrow} q'_o$

(iii) $ap_i \overset{*}{\Longrightarrow} q_i(ax_1)$ $(i=1,2)$, $ap_3 \overset{*}{\Longrightarrow} q_3$,

(iv) $q_1, q_2 \neq x_1$.

Bizonyitás (iv) miatt $q_o(q_1(q_3)) \neq q'_o$ vagy $q_o(q_3) \neq q'_o$ biztosan teljesül. Másrészt $p_o(p_3), p_o(p_1(p_3)) \in T$, $rn(p_o(p_3))$, $rn(p_o(p_1(p_3))) < rn(p)$, $a_o p_o(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q_o(q_3)$, $a'_o p_o(p_3) \overset{*}{\Longrightarrow} q'_o$ és $a_o p_o(p_1(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow} q_o(q_1(q_3))$, $a'_o p_o(p_1(p_3)) \overset{*}{\Longrightarrow}$ $\overset{*}{\Longrightarrow} q'_o$ miatt $q_o(q_3) = q_o(q_1(q_3)) = q'_o$-nek is teljesülnie kell. Ez ellentmondás. □

(4.8) Lemma Legyen $p_o, p_1 \in \hat{T}_{F,1}$, $p_2 \in T_F$, $q_o, q'_o \in T_G$, $a_o, a'_o \in A_o$. Tegyük fel, hogy

(i) $p_o(p_1(p_2)) = p$, $(p_2)_{\underline{B}} = (p_1(p_2))_{\underline{B}}$,

(ii) $a_o p_o \overset{*}{\Longrightarrow} q_o$, $a'_o p_o \overset{*}{\Longrightarrow} q'_o$,

(iii) $p_1 \neq x_1$.

Akkor $q_o = q'_o$.

Bizonyitás - triviális. □

Ezek után már kimondhatjuk a fejezet központi állitását:

(4.9) Lemma Legyen $\underline{A} = (F, A, T, G, A_o, \Sigma_{\underline{A}})$ tetszőleges általánositott lineáris nemdeterminisztikus fatranszformátor, $\underline{B} = (T, B, B_o)$ pedig olyan parciális faautomata, amelyre $T(\underline{B}) = T$. Effektiven meghatározható egy olyan csak A, illetve B állapotainak számától függő m konstans, hogy $\underline{A}$ akkor és csakis akkor nem egyértelmü, ha van olyan $p(\in T)$ valamint $r_1, r_2 (\in T_G)$, hogy $(p, r_1), (p, r_2) \in \tau_{\underline{A}}$, $dp(p) < m$ és $r_1 \neq r_2$.

Bizonyitás Vezessük be a $P = \{p(\in T) \mid \exists r_1, r_2 (\in T_G), r_1 \neq r_2, (p, r_1), (p, r_2) \in \tau_{\underline{A}}\}$ jelölést. Jelölje továbbá p a P egy minimális rangu elemét, $|A|$ és $|B|$ pedig rendre az A illetve B számosságát. Megmutatjuk, hogy $dp(p) < (7|A|^2 + 2|A| + 1)|B|$.

Tegyük fel, hogy ellenkezőleg, $dp(p) \geq (7|A|^2+2|A|+1)|B|$, és legyen $k = 7|A|^2+2|A|+1$, $\ell = 7|A|^2$. Nyilvánvalóan van olyan $p_i (\in \hat{T}_{F,1})$ $(i=0,\ldots,k)$, $p_{k+1} (\in T_F)$ és $b (\in B)$ amelyekre:

(1) $p = p_0(\ldots(p_{k+1})\ldots)$,

(2) $p_i \neq x_1$ $(i=1,\ldots,k)$,

(3) $(p_{k+1})_{\underline{B}} = b$, $(p_i)_{\underline{B}}(b) = b$ $(i=1,\ldots,k)$.

Legyenek most $a_0, a_0' (\in A_0)$, $q \neq q' (\in T_G)$ olyanok, hogy $a_0 p \overset{*}{\Longrightarrow} q$, $a_0' p \overset{*}{\Longrightarrow} q'$. A (4.8) lemma alkalmazásával közvetlenül adódik az, hogy nem lehetséges az, hogy $a_0 p_0(\ldots(p_{k-1})\ldots) \overset{*}{\Longrightarrow} q$, $a_0' p_0(\ldots(p_{k-1})\ldots) \overset{*}{\Longrightarrow} q'$. Mivel az $\{\ell, \ldots, k-1\}$ halmaz számossága $2|A|+1$, a (4.7) lemma felhasználásával az is adódik, hogy nem lehetséges az, hogy valamely $a (\in A)$ állapotra és $r (\in \hat{T}_{G,1})$, $s (\in T_G)$ polinomszimbólumokra $r(s) = q$, $a_0 p_0(\ldots(p_\ell)\ldots) \overset{*}{\Longrightarrow} r(ax_1)$, $ap_{\ell+1}(\ldots(p_{k+1})\ldots) \overset{*}{\Longrightarrow} s$ és $a_0 p_0(\ldots(p_\ell)\ldots) \overset{*}{\Longrightarrow} q'$.

E kettő összevetéséből kapjuk, hogy léteznek olyan $q_i, q_i' (\in \hat{T}_{G,1})$ $(i=0,\ldots,\ell)$, $q_{\ell+1}, q_{\ell+1}' (\in T_G)$ polinomszimbólumok és $c_i, c_i' (\in A)$ $(i=0,\ldots,\ell)$ állapotok, amelyekre az alábbi feltételek mindegyike teljesül, ahol most, és a továbbiakban $r = p_{\ell+1}(\ldots(p_{k+1})\ldots)$:

(1) $q_0(\ldots(q_{\ell+1})\ldots) = q$, $q'_0(\ldots(q'_{\ell+1})\ldots) = q'$,

(2) $a_0p_0 \overset{*}{\Longrightarrow} q_0(c_0x_1)$, $a'_0p_0 \overset{*}{\Longrightarrow} q'_0(c'_0x_1)$,

(3) $c_ip_{i+1} \overset{*}{\Longrightarrow} q_{i+1}(c_{i+1}x_1)$, $c'_ip_{i+1} \overset{*}{\Longrightarrow} q'_{i+1}(c'_{i+1}x_1)$ $(i=1,\ldots,\ell-1)$,

(4) $c_\ell r \overset{*}{\Longrightarrow} q_{\ell+1}$, $c'_\ell r \overset{*}{\Longrightarrow} q'_{\ell+1}$.

Mivel a $\{0,\ldots,\ell\}$ halmaz számossága $7|A|^2+1$, léteznek olyan $j_1,\ldots,j_8$ egész számok $(0 \leqslant j_1 < \ldots < j_8 \leqslant \ell)$, hogy $c_{j_1} = \ldots = c_{j_8}$, $c'_{j_1} = \ldots = c'_{j_8}$. Legyen a továbbiakban $r_0 = p_0(\ldots(p_{j_1})\ldots)$, $s_0 = q_0(\ldots(q_{j_1})\ldots)$, $s'_0 = q'_0(\ldots(q'_{j_1})\ldots)$, $r_i = p_{j_i+1}(\ldots(p_{j_{i+1}})\ldots)$, $s_i = q_{j_i+1}(\ldots(q_{j_{i+1}})\ldots)$, $s'_i = q'_{j_i+1}(\ldots(q'_{j_{i+1}})\ldots)$ $(i=1,\ldots,7)$, végül legyen $r_8 = p_{j_8+1}(\ldots(p_\ell(r))\ldots)$, $s_8 = (q_{j_8+1}(\ldots(q_{\ell+1})\ldots)$, $s'_8 = q'_{j_8+1}(\ldots(q'_{\ell+1})\ldots)$.

Nyilvánvaló az, hogy ha valamely i-re $(1 \leqslant i \leqslant 7)$ $s_i = x_1$ és $s'_i = x_1$ egyaránt teljesül, akkor az $r_0(\ldots(r_{i-1}(r_{i+1}(\ldots(r_8)\ldots)))\ldots)$ P-ben van, ami ellentmondás. Másrészt egyszerű számolással igazolható, hogy nincs olyan i $(1 \leqslant i \leqslant 7)$, amelyre $s_i = x_1$ és $s'_i \neq x_1$, vagy forditva, $s_i \neq x_1$ és $s'_i = x_1$. Valóban, ha például $s_1 = x_1$ és $s'_1 \neq x_1$, akkor az $s_0(s_1(s_8)) = s'_0(s'_1(s'_8))$ és az $s_0(s_8) = s'_0(s'_8)$ egyenlőségeknek teljesülniük kell, hiszen az $a_0r_0(r_1(r_8)) \overset{*}{\Longrightarrow} s_0(s_1(s_8))$, $a'_0r_0(r_1(r_8)) \overset{*}{\Longrightarrow} s'_0(s'_1(s'_8))$, $a_0r_0(r_8) \overset{*}{\Longrightarrow} s_0(s_8)$, $a'_0r_0(r_8) \overset{*}{\Longrightarrow} s'_0(s'_8)$ valamint az $(r_0(r_1(r_8)))_{\underline{B}} = (r_0(r_8))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$ és $rn(r_0(r_8)) < rn(r_0(r_1(r_8))) < rn(p)$ relációk mindegyike fennáll. Ez

azonban ellentmondás, mert $s_o(s_1(s_8)) = s_o(s_8)$ és $s'_o(s'_1(s'_8)) \neq s'_o(s'_8)$. Feltehetjük tehát, hogy az s_i, s'_i $(i=1,\ldots,7)$ polinomszimbólumok mindegyike x_1-től különbözik.

A (4.6) lemma felhasználásával egy egyszerü okoskodás megmutatja azt is, hogy csak az alábbi három eset egyike lehetséges:

A1. path$(s_o(s_1(s_2)))$ a path(s'_o) kezdőszelete. Legyen ekkor $t_i = r_i$, $u_i = s_i$, $u'_i = s'_i$ $(i=0,\ldots,3)$, $t_4 = r_4(\ldots(r_8)\ldots)$, $u_4 = s_4(\ldots(s_8)\ldots)$, $u'_4 = s'_4(\ldots(s'_8)\ldots)$. Mivel $a_o t_o(t_1(t_2(t_4))) \overset{*}{\Rightarrow} u_o(u_1(u_2(u_4)))$, $a'_o t_o(t_1(t_2(t_4))) \overset{*}{\Rightarrow}$ $\overset{*}{\Rightarrow} u'_o(u'_1(u'_2(u'_4)))$, továbbá $rn(t_o(t_1(t_2(t_4)))) < rn(p)$ és $(t_o(t_1(t_2(t_4))))_{\underline{B}} = (p)_{\underline{B}}$, $u_o(u_1(u_2(u_4))) = u'_o(u'_1(u'_2(u'_4)))$. Ha ezek után figyelembe vesszük, hogy path$(u_o(u_1(u_2)))$ a path(u'_o) kezdőszelete, a (4.4) lemma szerint azt kapjuk, hogy van olyan $v_1, z, w (\in \hat{T}_{G,1})$, $v_2 (\in T_G)$ $k, k_1, k_2 (\geq 0)$, hogy

(1) $u_o = v_1$, $u'_o = v_1 (zw)^{k+k_1+k_2} z$

(2) $u_1 = (zw)^{k_1}$, $u'_1 = (wz)^{k_1}$,

(3) $u_2 = (zw)^{k_2}$, $u'_2 = (wz)^{k_2}$,

(4) $u_4 = ((zw)^{k+k_1+k_2} z)(v_2)$, $u'_4 = v_2$.

Vegyük most a $t_o(t_2(t_3(t_4)))$ polinomszimbólumot.

$a_o t_o(t_2(t_3(t_4))) \overset{*}{\Rightarrow} (v_1 (zw)^{k_2} u_3 (zw)^{k+k_1+k_2} z)(v_2)$ és

$a'_o t_o(t_2(t_3(t_4))) \overset{*}{\Rightarrow} (v_1 (zw)^{k+k_1+2k_2} z\, u'_3)(v_2)$. Csakugy, mint az előbb, ebből $(u_3 (zw)^{k+k_1+k_2} z)(v_2) = ((zw)^{k+k_1+k_2} z\, u'_3)(v_2)$

következik. De akkor $q = (v_1(zw)^{k_1+k_2} u_3(zw)^{k+k_1+k_2} z)(v_2) =$

$= (v_1(zw)^{k+2k_1+2k_2} z\, u_3')(v_2) = q'$, ami ellentmondás.

A2. i=0,1-re path$(r_0(\ldots(r_i)\ldots))$ a path$(r_0'(\ldots(r_i')\ldots))$, ez utóbbi pedig a path$(r_0(\ldots(r_{i+1})\ldots))$ kezdőszelete.

Legyen ekkor t_i, u_i, u_i' $(i=0,\ldots,4)$ polinomszimbólumok ugyanugy definiálva mint az előző esetben. A (4.4) lemma helyett a (4.5) lemmát alkalmazva hasonlóan mint előzőleg beláthatjuk, hogy léteznek olyan $v_0, v_1, v_2, z (\in \hat{T}_{G,1})$ polinomszimbólumok, amelyekre

(1) $u_0 = v_0$, $u_0' = v_0 z$,

(2) $u_1 = z v_1$, $u_1' = v_1 z$,

(3) $u_2 = z(v_2)$.

Tekintsük most ismét a $t_0(t_2(t_3(t_4)))$ polinomszimbólumot: $a_0 t_0(t_2(t_3(t_4))) \overset{*}{\Longrightarrow} v_0(z(v_2(u_3(u_4))))$, $a_0' t_0(t_2(t_3(t_4))) \overset{*}{\Rightarrow}$ $\overset{*}{\Longrightarrow} v_0(z(u_2'(u_3'(u_4'))))$. Ezért $v_2(u_3(u_4)) = u_2'(u_3'(u_4'))$, ami ismét ellentmondáshoz vezet, hiszen

$q = v_0(z(v_1(z(v_2(u_3(u_4)))))) = v_0(z(v_1(z(u_2'(u_3'(u_4'))))))) = q$.

A3. i=0,2-re path$(r_0(\ldots(r_i)\ldots))$ a path$(r_0'(\ldots(r_i')\ldots))$, ez pedig a path$(r_0(\ldots(r_{i+2})\ldots))$ kezdőszelete.

Ez A2-höz hasonlóan ellentmondáshoz vezet.

Mivel mindhárom esetben ellentmondást kaptunk, $dp(p) < m$ adódik, amit be kellett bizonyitanunk. □

A (4.9) lemma közvetlen következményeként adódik a

(4.10) Lemma Minden $A: F \longrightarrow G$ lineáris nemdeterminisztikus felszálló (leszálló) fatranszformátorhoz effektiven

meghatározható egy olyan, csak az állapotok számától függő m konstans, hogy $\underline{A}$ akkor és csakis akkor nem egyértelmű, ha léteznek olyan $p(\in T_F)$ és $r_1, r_2 (\in T_G)$ polinomszimbólumok, amelyekre a $(p, r_1), (p, r_2) \in \tau_{\underline{A}}$, $r_1 \neq r_2$, $dp(p) < m$ feltételek mindegyike teljesül.

5. Reguláris egyenletrendszerek

Ebben a fejezetben bevezetjük a reguláris egyenletrendszer fogalmát, és bebizonyitjuk, hogy minden reguláris egyenletrendszerhez effektiven konstruálható vele lineárisan ekvivalens ((G,k)-ekvivalens) véges egyenletrendszer. Már elöljáróban megjegyezzük, hogy az általunk használt reguláris egyenletrendszer fogalom nem egyezik meg az irodalomban használt reguláris, vagy más néven algebrai egyenletrendszer fogalommal (ld. MEZEI - WRIGHT [1967]).

Legyen Σ tetszőleges tipus, E pedig a T^2_Σ részhalmaza. Akkor E-t Σ feletti egyenletrendszernek nevezzük. Ha most adott egy másik - mondjuk F - tipus és egy e: $\Sigma \longrightarrow T_{F,X}$ homomorfizmus, akkor beszélhetünk arról, hogy e az E megoldása, értvén ez alatt azt, hogy bármely $(\tau_1, \tau_2)(\in E)$-re $e(\tau_1) = e(\tau_2)$.

Ezek után tekintsünk két E_1 és E_2 Σ feletti egyenletrendszert. E_1 ekvivalens (lineárisan ekvivalens) E_2-vel, ha bármely F tipusra és e: $\Sigma \longrightarrow T_{F,X}$ homomorfizmusra (lineáris homomorfizmusra) e akkor és csakis akkor megoldása E_1-nek, ha megoldása az E_2-nek is. Hasonlóan, egy rögzitett F tipusra és k nemnegativ egész számra E_1 (F,k)-ekvivalens E_2-vel, ha bármely olyan e: $\Sigma \longrightarrow T_{F,X}$ homomorfizmusra amely kielégiti azt, hogy $\max\{dp(e(\sigma)) \mid \sigma \in \Sigma\} \leq k$ e akkor és csakis akkor megoldása E_1-nek, ha E_2-nek megoldása.

A következőkben kimondunk egy egyszerű lemmát. Előtte azonban bevezetünk még egy fogalmat. Legyenek Σ és Σ' tipusok, $\varphi : \Sigma \to \Sigma'$ projekció, E pedig Σ-feletti egyenletrendszer. Alkossuk meg a $\varphi(E) = \{(\varphi(\tau_1), \varphi(\tau_2)) \mid (\tau_1, \tau_2) \in E\}$ Σ'-feletti egyenletrendszert - ez az egyenletrendszer az E φ melletti képe. Nyilvánvaló, hogy bármely $e: \Sigma' \to T_{F,X}$ homomorfizmusra ahhoz, hogy e megoldása legyen $\varphi(E)$-nek, szükséges és elegendő az, hogy $e \circ \varphi$ megoldása legyen E-nek. Ebből rögtön adódik az

(5.1) Lemma Bármely Σ, Σ' és F tipusra, k nemnegativ egész számra és E_1, E_2 Σ-feletti egyenletrendszerre továbbá $\varphi : \Sigma \to \Sigma'$ projekcióra ha E_1 ekvivalens (lineárisan ekvivalens, (F,k)-ekvivalens) E_2-vel, akkor $\varphi(E_1)$ ekvivalens (lineárisan ekvivalens, (F,k)-ekvivalens) $\varphi(E_2)$-vel.

Mielőtt tovább haladnánk, bevezetjük a reguláris egyenletrendszer fogalmát is. E célból legyen Σ ismét egy tipus. Konstruáljuk meg Σ önmagával alkotott direkt szorzatát, azaz azt a $\Sigma \times \Sigma$ tipust, amelyben az n-változós műveleti szimbólumok halmazát a $\Sigma_n \times \Sigma_n$ adja tetszőleges $n(\geq 0)$ esetén. Természetes módon definiálható $\Sigma \times \Sigma$-ból Σ-ba két projekció, π_{1_Σ} és π_{2_Σ}, a $\pi_{1_\Sigma}(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1$, $\pi_{2_\Sigma}(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2$ $(n \geq 0, \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_n)$ egyenlőségekkel. E két projekció összetevésével kapunk egy $\pi_\Sigma : T_{\Sigma \times \Sigma} \to T_\Sigma^2$ leképezést, amelyet a $\pi_\Sigma(\tau) = (\pi_{1_\Sigma}(\tau), \pi_{2_\Sigma}(\tau))$ $(\tau \in T_{\Sigma \times \Sigma})$ egyenlőség definiál.

Legyen most E Σ-feletti egyenletrendszer. Azt mondjuk, hogy E <u>reguláris</u>, ha van olyan $\Theta (\subseteq T_{\Sigma \times \Sigma})$ reguláris erdő, hogy $E = \tau_{\Sigma}(\Theta)$, vagyis E megegyezik Θ τ_{Σ} melletti teljes képével.

Vegyünk most egy $\underline{A}(=(F,A,A_0))$ nemdeterminisztikus faautomatát és egy Σ tipust. Σ-t az <u>A-hoz tartozó tipusnak</u> nevezzük - jelölve: $\Sigma = \Sigma_{\underline{A}}$ - ha van olyan $\delta_{\underline{A}}$ egy-egyértelmü függvény, hogy bármely n nemnegativ egész számra $\Sigma_n = \{\delta_{\underline{A}}(f,a_1,\ldots,a_n,a) \mid f \in F_n, a_1,\ldots,a_n,a \in A, a \in (f)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n)\}$. A továbbiakban $\Sigma_{\underline{A}}$-t mindig $\delta_{\underline{A}}$-val együtt tekintjük adottnak.

Legyen mint az előbb $\underline{A}(=(F,A,A_0))$ nemdeterminisztikus faautomata, $\underline{B}(=(F,A,G,A_0,\bar{\varphi}_{\underline{B}}))$ pedig egy nemdeterminisztikus lf-transzformátor. $\underline{B}$-t a $\underline{A}$ <u>kiterjesztésének</u> nevezzük, ha valamely $e_{\underline{A},\underline{B}}: \Sigma_{\underline{A}} \to T_{G,X}$ homomorfizmusra $\bar{\varphi}_{\underline{B}} = \{f(a_1x_1,\ldots,a_nx_n) \to a e_{\underline{A},\underline{B}}(\delta_{\underline{A}}(f,a_1,\ldots,a_n,a)) \mid n \geq 0, f \in F_n, a_1,\ldots,a_n,a \in A, a \in (f)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n)\}$. Hasonlóan mint ahogyan $\Sigma_{\underline{A}}$-t a $\delta_{\underline{A}}$ függvénnyel együtt tekintettünk adottnak, a következőkben ha $\underline{B}$ az $\underline{A}$ kiterjesztése, az $e_{\underline{A},\underline{B}}$-t is adottnak tekintjük. Ezt most annál is inkább megtehetjük, mert a fenti definicióban ha $e_{\underline{A},\underline{B}}$ létezik, akkor egyértelmüen meghatározott. Megjegyezzük, hogy az is kitünik az $e_{\underline{A},\underline{B}}$ definiciójából, hogy ha $\underline{A}$ parciális automata akkor annak minden $\underline{B}$ kiterjesztése determinisztikus. Nyilvánvaló az is, hogy ha $\underline{B}$ az $\underline{A}$ kiterjesztése, akkor $\mathrm{Dom}\tau_{\underline{B}} = T(\underline{A})$.

Bevezethetjük még az ugynevezett lineáris, illetve (G,k) kiterjesztés fogalmát is. Legyen ezért $\underline{A}$ ismét egy egy nemdeterminisztikus faautomata, $\underline{B}$ pedig egy nemdeterminisztikus lf-transzformátor. $\underline{B}$ az $\underline{A}$ *lineáris kiterjesztése*, ha $\underline{B}$ az $\underline{A}$ kiterjesztése és $e_{\underline{A},\underline{B}}$ lineáris (vagyis $\underline{B}$ lineáris). Hasonlóan, valamely rögzitett G tipusra és k nemnegativ egész számra $\underline{A}$-nak a $\underline{B}$ *(G,k)-kiterjesztése*, ha kiterjesztése és $\underline{B}$ output tipusa G, továbbá $\max\{dp(e_{\underline{A},\underline{B}}(\sigma)) \mid \sigma \in \Sigma_{\underline{A}}\}$ legfeljebb k.

Most már kimondhatjuk a következő állitást:

(5.2) Lemma Bármely $\underline{A}(=(F,A,A_o))$ nemdeterminisztikus faautomatához effektiven konstruálható $\Sigma_{\underline{A}}$ felett egy olyan reguláris $E_{\underline{A}}$-val jelölt egyenletrendszer, hogy az $\underline{A}$ tetszőleges $\underline{B}$ kiterjesztése akkor és csakis akkor egyértelmü, ha $e_{\underline{A},\underline{B}}$ az $E_{\underline{A}}$ megoldása.

Bizonyitás Vezessük be az egyszerübb $\Sigma = \Sigma_{\underline{A}}$, $\sigma = \sigma_{\underline{A}}$, $\pi = \pi_{\Sigma}$, $\pi_1 = \pi_{1_{\Sigma}}$, $\pi_2 = \pi_{2_{\Sigma}}$ jelöléseket. Legyen $\underline{C}(=(F,A,\Sigma,A_o,\Phi_{\underline{C}}))$ az a nemdeterminisztikus lf-transzformátor, amelyben $\Phi_{\underline{C}} = \{f(a_1x_1,\ldots,a_nx_n) \to a\,\sigma(f,a_1,\ldots,a_n,a)(x_1,\ldots,x_n) \mid n \geq 0,\ f \in F_n,\ a_1,\ldots,a_n,a \in A,\ a \in (f)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n)\}$. Legyen továbbá a $\underline{D} = (\Sigma\times\Sigma, A\times A, A_o\times A_o)$ parciális faautomata a $((\sigma_1,\sigma_2))_{\underline{D}}((a_1,b_1),\ldots(a_n,b_n)) = (a,b)$ akkor és csakis akkor, ha van olyan $f(\in F_n)$, hogy $a \in (f)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n)$, $b \in (f)_{\underline{A}}(b_1,\ldots,b_n)$, $\sigma_1 = \sigma(f,a_1,\ldots,a_n,a)$, $\sigma_2 = \sigma(f,b_1,\ldots,b_n,b)$ $(n \geq 0,\ \sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma_n,\ a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n,a,b \in A)$ ekvivalenciával definiálva.

Megmutatjuk, hogy bármely $t(\in T_F)$, τ_1, $\tau_2(\in T_\Sigma)$ polinomszimbólumra és $a,b(\in A)$ állapotra ha $t \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} a\tau_1$ és $t \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} b\tau_2$ akkor az is teljesül, hogy van olyan $\tau(\in T_{\Sigma\times\Sigma})$, amelyre $\pi_1(\tau) = \tau_1$, $\pi_2(\tau) = \tau_2$ és $(\tau)_D = (a,b)$.

Tegyük fel először, hogy $t = f$, $f \in F_0$. Ekkor $f \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} a\tau_1$ és $f \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} b\tau_2$, igy $a,b \in (f)_A$, $\tau_1 = \sigma(f,a)$, $\tau_2 = \sigma(f,b)$. A keresett τ tehát a $(\tau_1,\tau_2)(\in \Sigma_0 \times \Sigma_0)$ polinomszimbólum. Másodszorra tegyük fel, hogy állitásunk igaz a legfeljebb $k(\geq 0)$ mélységü t polinomszimbólumokra, és azt, hogy $t = f(r_1,\ldots,r_n)$, $dp(t) = k+1$, ahol $n>0$, $f \in F_n$, $r_1,\ldots,r_n \in T_F$. Akkor mivel $t \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} a\tau_1$ és $t \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} b\tau_2$, létezik olyan $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n(\in A)$, $\sigma_1,\sigma_2(\in \Sigma_n)$, $\rho_1^{(1)},\ldots,\rho_n^{(1)}$, $\rho_1^{(2)},\ldots,\rho_n^{(2)}(\in T$), hogy $r_i \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} a_i\rho_i^{(1)}$, $r_i \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} b_i\rho_i^{(2)}$ $(i=1,\ldots,n)$, $\tau_j = \sigma_j(\rho_1^{(j)},\ldots,\rho_n^{(j)})$ $(j=1,2)$, $f(a_1x_1,\ldots,a_nx_n) \longrightarrow a\,\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)$, $f(b_1x_1,\ldots,b_nx_n) \longrightarrow$ $\longrightarrow b\,\sigma_2(x_1,\ldots,x_n) \in \overline{\emptyset}_C$. Indukciós feltevésünk szerint igy valamely ρ_i $(\in T_{\Sigma\times\Sigma}$) $(i=1,\ldots,n)$ polinomszimbólumokra $\pi_1(\rho_i) = \rho_i^{(1)}$, $\pi_2(\rho_i) = \rho_i^{(2)}$, $(\rho_i)_D = (a_i,b_i)$ $(i=1,\ldots,n)$. C konstrukciója szerint azonban $a \in (f)_A$ $(a_1,\ldots,a_n)$ $b \in (f)_B$ $(b_1,\ldots,b_n)$ és $\sigma_1 = \sigma(f,a_1,\ldots,a_n,a)$, $\sigma_2 = \sigma(f,b_1,\ldots,b_n)$. Következésképpen $((\sigma_1,\sigma_2))_D$ $((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) = (a,b)$, igy állitásunk érvényessége igaz $\tau = (\sigma_1,\sigma_2)$ $(\rho_1,\ldots,\rho_n)$-re.

Forditva hasonlóan egyszerü számolással igazolható, hogy ha valamely $\tau(\in T_{\Sigma\times\Sigma})$-ra és $a,b(\in A)$-ra $(\tau)_D = (a,b)$,

akkor van olyan $t(\in T_F)$ polinomszimbólum, hogy $t \overset{*}{\underset{C}{\Longrightarrow}} a\tau_1$ és $t \overset{*}{\underset{C}{\Longrightarrow}} b\tau_2$, ahol $\tau_i = \pi_i(\tau)$ $(i=1,2)$. Következésképpen bármely $\tau(\in T_{\Sigma_A \times \Sigma_A})$-ra $\tau \in T(D)$ akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $t(\in T_F)$, hogy $(t,\tau_1),(t,\tau_2) \in \tau_C$.

Másrészt az A-nak egy B kiterjesztése akkor és csakis akkor egyértelmü, ha bármely $t(\in T_F)$-re és $\tau_1,\tau_2(\in T_{\Sigma_A})$-ra teljesül az, hogy $e_{A,B}(\tau_1) = e_{A,B}(\tau_2)$ amennyiben $(t,\tau_1),(t,\tau_2) \in \tau_C$. Ezért a lemma állitása következik az eddigiekből E_A-nak $\pi(T(D))$-t választva. □

(5.3) Tétel

(i) Bármely A nemdeterminisztikus faautomatához effektiven konstruálható egy olyan Σ_A feletti véges $\tilde{E}_A$ egyenletrendszer, hogy az A egy tetszőleges B lineáris kiterjesztése akkor és csakis akkor egyértelmü, ha $e_{A,B}$ az $\tilde{E}_A$ megoldása.

(ii) Bármely A nemdeterminisztikus faautomatához, G tipushoz és k nemnegativ egész számhoz effektiven konstruálható egy olyan véges $\tilde{E}_A$ egyenletrendszer a Σ_A tipus fölött, hogy az A minden B (G,k) kiterjesztésére igaz, hogy B akkor és csakis akkor egyértelmü, ha $e_{A,B}$ az $\tilde{E}_A$ megoldása.

Bizonyitás Legyen $A = (F,A,A_0)$, E_A pedig az A-hoz az előző lemmában konstruált egyenletrendszer. Az előző lemma bizonyitásából kitünik, hogy akárhogyan is adott az A egy $B(=(F,A,G,A_0,\Phi_B))$ kiterjesztése, valamint a $T^2_{\Sigma_A}$ egy (τ_1,τ_2) eleme, $(\tau_1,\tau_2) \in E_A$ akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $t(\in T_F)$, $r_1,r_2(\in T_G)$, hogy $(t,r_1),(t,r_2) \in \tau_B$ és $e_{A,B}(\tau_1) = r_1$, $e_{A,B}(\tau_2) = r_2$. Ebből és a (4.10), illetve

(3.7) lemmából a tétel állitása közvetlenül következik. □

Az előző tételhez hasonló állitás kimondható akkor is, ha két, ugyanazt az erdőt reprezentáló parciális faautomata ekvivalens kiterjesztéseit vizsgáljuk. Ehhez azonban egy ujabb fogalmat is be kell vezetnünk.

Legyenek $F^{(1)}$ és $F^{(2)}$ tetszőleges tipusok, φ_1 és φ_2 pedig rendre $F^{(1)}$-ből, illetve $F^{(2)}$-ből egy ujabb G tipusba való homomorfizmusok. Az F tipust az $F^{(1)}$ és $F^{(2)}$ diszjunkt összegének nevezzük, ha minden $n(\geq 0)$ egész számra $F_n = F^{(1)}_n \times \{0\} \cup F^{(2)}_n \times \{1\}$. Ahogyan az $F^{(1)}$ és $F^{(2)}$ tipusokból konstruáltuk az F tipust, a φ_1 és φ_2 homomorfizmusokból is összerakhatunk egy ujabb $(\varphi_1,\varphi_2):F \longrightarrow T_{G,X}$ homomorfizmust a $(\varphi_1,\varphi_2)(f_1,0) = \varphi_1(f_1)$, $(\varphi_1,\varphi_2)(f_2,1) = \varphi_2(f_2)$ $(f_1 \in F^{(1)}, f_2 \in F^{(2)})$ definicióval.

(5.4) Tétel

(i) Bármely $\underline{A}$ és $\underline{B}$ ugyanazon erdőt reprezentáló parciális faautomatához effektiven konstruálható a $\Sigma_{\underline{A}}$ és $\Sigma_{\underline{B}}$ tipusok diszjunkt összege felett egy olyan véges $\widetilde{E}_{\underline{A},\underline{B}}$ egyenletrendszer, hogy az $\underline{A}$ bármely $\underline{C}$ és a $\underline{B}$ bármely $\underline{D}$ (azonos output tipussal rendelkező) lineáris kiterjesztésére $\underline{C}$ akkor és csakis akkor ekvivalens $\underline{D}$-vel, ha $(e_{\underline{A},\underline{C}}, e_{\underline{B},\underline{D}})$ az $\widetilde{E}_{\underline{A},\underline{B}}$ megoldása.

(ii) Bármely $\underline{A}$ és $\underline{B}$ ugyanazon erdőt reprezentáló parciális faautomatához, G tipushoz és k nemnegativ egész számhoz effektiven konstruálható a $\Sigma_{\underline{A}}$ és $\Sigma_{\underline{B}}$ tipusok diszjunkt összege felett egy olyan véges $\widetilde{E}_{\underline{A},\underline{B}}$ egyenletrendszer,

hogy az $\underline{A}$ bármely $\underline{C}$ és a $\underline{B}$ bármely $\underline{D}$ (G,k) kiterjesztésére $\underline{C}$ akkor és csakis akkor ekvivalens $\underline{D}$-vel, ha $(e_{\underline{A},\underline{C}}, e_{\underline{B},\underline{D}})$ az $\tilde{E}_{\underline{A},\underline{B}}$ megoldása.

Bizonyitás A tétel állitása következik az előző tételből, és abból, hogy ha $\underline{A}(=(F,A,G,A_o,\bar{\Phi}_{\underline{A}}))$ és $\underline{B}(=(F,B,G,B_o,\bar{\Phi}_{\underline{B}}))$ olyan nemdeterminisztikus lf-transzformátorok, amelyekre $\mathrm{Dom}\tau_{\underline{A}} = \mathrm{Dom}\tau_{\underline{B}}$ és $A \cap B = \emptyset$, akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy $\underline{A}$ ekvivalens legyen $\underline{B}$-vel az, hogy a $\underline{C}(=(F,A \cup B,G,A_o \cup B_o,\bar{\Phi}_{\underline{A}} \cup \bar{\Phi}_{\underline{B}}))$ fatranszformátor egyértelmü legyen. □

A fejezet központi eredménye a következő tétel:

(5.5) Tétel

(i) Bármely reguláris egyenletrendszerhez effektiven konstruálható vele lineárisan ekvivalens, véges egyenletrendszer,

(ii) Bármely E reguláris egyenletrendszerhez, G tipushoz és k nemnegativ egész számhoz effektiven konstruálható E-vel (G,k)-ekvivalens véges egyenletrendszer.

Bizonyitás Legyen Σ tetszőleges tipus, $\Theta = T(\underline{A})$, ahol $\underline{A}(=(\Sigma \times \Sigma, A, A_o))$ tetszőleges parciális faautomata. Végül legyen $E = \pi(\Theta)$, ahol az egyszerüség kedvéért π-t irtunk π_Σ helyett. (Hasonlóan $\pi_{i\Sigma}$ (i=1,2) helyett a rövidebb π_i jelölést fogjuk használni.) Megmutatjuk, hogy effektiven konstruálható egy olyan $\underline{B}(=(\Sigma \times \Sigma, B, B_o))$ nemdeterminisztikus faautomata, hogy egy $\varphi: \Sigma_{\underline{B}} \to \Sigma$ projekcióra $E = \varphi(E_{\underline{B}} - \{(\tau,\tau) \mid \tau \in T_{\Sigma_{\underline{B}}}\})$. Igy a tétel állitása az (5.1), (4.10) és (3.7) lemmából következik.

Vegyük fel $\underline{A}$-t még egy példányban, azaz legyen $\underline{A}' = (\Sigma' \times \Sigma, A', A'_0)$, ahol $A' = \{a' | a \in A\}$, $A'_0 = \{a' | a \in A_0\}$ és bármely $n(\geq 0)$, $\sigma_1, \sigma_2 (\in \Sigma_n)$ és $a_1, \ldots, a_n, a (\in A)$ esetén $((\sigma_1, \sigma_2))_{\underline{A}}, (a'_1, \ldots, a'_n) = a'$ akkor és csakis akkor, ha $((\sigma_1, \sigma_2))_{\underline{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a$. Legyen ezek után $B = A \cup A'$, $B_0 = A_0 \cup A'_0$, és legyen $\underline{B}(=(\Sigma' \times \Sigma, B, B_0))$ az a nemdeterminisztikus faautomata, amelyben tetszőleges $n(\geq 0)$-ra, $\sigma_1, \sigma_2 (\in \Sigma_n)$-re és $b_1, \ldots, b_n, b (\in B)$-re $b \in ((\sigma_1, \sigma_2))_{\underline{B}} (b_1, \ldots, b_n)$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $b_1, \ldots, b_n, b \in A$ és $((\sigma_1, \sigma_2))_{\underline{A}}$ $(b_1, \ldots, b_n) = b$ vagy $b_1, \ldots, b_n, b \in A'$ és $((\sigma_1, \sigma_2))_{\underline{A}'}$ $(b_1, \ldots, b_n) = b$.

Legyen $\Sigma' = \Sigma_{\underline{B}}$ és vezessük be a $\sigma' = \sigma_{\underline{B}}$, $\pi' = \pi_{\Sigma'}$, $\pi'_i = \pi_{i_{\Sigma'}}$ $(i=1,2)$ jelöléseket. Legyen továbbá $E' = E_{\underline{B}}$. Emlékeztetőül, $E' = \pi'(\Theta')$, ahol $\Theta' = T(\underline{C})$, $\underline{C}(=(\Sigma' \times \Sigma', B \times B, B_0 \times B_0))$ pedig az a parciális faautomata, amelyben tetszőleges $n(\geq 0)$-ra $\sigma'_1, \sigma'_2 (\in \Sigma'_n)$-re és $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, a, b (\in B)$-re $((\sigma'_1, \sigma'_2))_{\underline{C}}$ $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = (a, b)$ akkor és csakis akkor, ha van olyan $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_n$, hogy $((\sigma_1, \sigma_2))_{\underline{B}}$ $(a_1, \ldots, a_n) \ni a$, $((\sigma_1, \sigma_2))_{\underline{B}}(b_1, \ldots, b_n) \ni b$, $\sigma'_1 = \sigma'((\sigma_1, \sigma_2), a_1, \ldots, a_n, a)$, $\sigma'_2 = \sigma'((\sigma_1, \sigma_2), b_1, \ldots, b_n, b)$.

Tekintsük most azt a $\varphi: \Sigma' \to \Sigma$ projekciót, amelyre bármely $n(\geq 0)$, $\nu' (\in \Sigma'_n)$, $\nu_1 (\in \Sigma_n)$ esetén $\varphi(\nu') = \nu_1$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan $\nu_2 (\in \Sigma_n)$, $a_1, \ldots, a_n, a (\in A)$, hogy $((\nu_1, \nu_2))_{\underline{A}} (a_1, \ldots, a_n) = a$ $(\Leftrightarrow a \in ((\nu_1, \nu_2))_{\underline{B}}$ $(a_1, \ldots, a_n))$ és $\nu' = \sigma'((\nu_1, \nu_2), a_1, \ldots, a_n, a)$ vagy van olyan $\nu_2 (\in \Sigma_n)$, $a_1, \ldots, a_n, a (\in A)$, hogy $((\nu_2, \nu_1))_{\underline{A}}$,

$(a'_1,\ldots,a'_n) = a'$ $(\Leftrightarrow a' \in ((\nu_2,\nu_1))_{\underline{B}}(a'_1,\ldots,a'_n))$ és $\nu' = \sigma'((\nu_2,\nu_1),a'_1,\ldots,a'_n,a')$.

Indukcióval megmutatjuk, hogy ha valamely $\tau(\in T_{\Sigma\times\Sigma})$-ra és $a(\in A)$-ra $(\tau)_{\underline{A}} = a$, akkor van olyan $\tau'(\in T_{\Sigma'\times\Sigma'})$, hogy $(\tau')_{\underline{C}} = (a,a')$ $\pi_i(\tau) = \varphi(\pi'_i(\tau'))$ $(i=1,2)$ és $\pi'_1(\tau') \neq \pi'_2(\tau')$ teljesül.

Valóban, ha $\tau \in \Sigma_0 \times \Sigma_0$ és $(\tau)_{\underline{A}} = a$, akkor $\underline{B}$ definiciója szerint $a,a' \in (\tau)_{\underline{B}}$. Igy állitásunk teljesül, ha τ'-t $(\sigma'(\tau,a),\sigma'(\tau,a'))$-nek választjuk. Tegyük most fel, hogy állitásunk a legfeljebb k mélységü polinomszimbólumokra igaz és azt, hogy $dp(\tau) = k+1$. Ekkor van olyan $n(>0)$, $\sigma \in \Sigma_n \times \Sigma_n$ és $\tau_1,\ldots,\tau_n \in T_{\Sigma\times\Sigma}$, hogy $\tau = \sigma(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, $\max\{dp(\tau_i) \mid i=1,\ldots,n\} = k$. Továbbá, mivel $(\tau)_{\underline{A}} = a$, valamely $a_1,\ldots,a_n(\in A)$ állapotokra $(\tau_i)_{\underline{A}} = a_i$ $(i=1,\ldots,n)$ és $(\sigma)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = a$. Indukciós feltevésünk szerint igy léteznek olyan $\tau'_1,\ldots,\tau'_n(\in T_{\Sigma'\times\Sigma'})$ polinomszimbólumok, hogy minden i $(1 \leq i \leq n)$-re $(\tau')_{\underline{C}} = (a_i,a'_i)$, $\pi_j(\tau_i) = \varphi(\pi'_j(\tau'_i))$ $(j=1,2)$, $\pi'_1(\tau'_i) \neq \pi'_2(\tau'_i)$. Mivel $(\sigma)_{\underline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = a$, a $(\sigma)_{\underline{A}'}(a'_1,\ldots,a'_n) = a'$ egyenlőség is fennáll, igy $\underline{C}$ konstrukciója szerint $\sigma'_1 = \sigma'(\sigma,a_1,\ldots,a_n,a)$ és $\sigma'_2 = \sigma'(\sigma,a'_1,\ldots,a'_n,a')$ definiáltak és $((\sigma'_1,\sigma'_2))_{\underline{C}}((a_1,a'_1),\ldots,(a_n,a'_n)) = (a,a')$. Következésképpen $\tau' = (\sigma'_1,\sigma'_2)(\tau'_1,\ldots,\tau'_n)$-re $(\tau')_{\underline{C}} = (a,a')$. Másrészt φ definiciója szerint ha $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2)$, akkor $\varphi(\sigma'_1) = \sigma_1$ és $\varphi(\sigma'_2) = \sigma_2$. Ebből és indukciós feltevésünkből $\pi_i(\tau) = \varphi(\pi'_i(\tau'))$ $(i=1,2)$ is következik, és nyilván igaz a $\pi'_1(\tau') \neq \pi'_2(\tau')$ egyenlőtlenség is.

Mivel $E = \pi(\Theta)$ és $E' = \pi'(\Theta')$, az eddigiek alapján $E \subseteq \varphi(E' - \{(\tau',\tau') \mid \tau' \in T_{\Sigma'}\})$. Másrészt hasonlóan könnyü számolással igazolható a forditott irányu tartalmazás is, igy $E = \varphi(E' - \{(\tau',\tau') \mid \tau' \in T_{\Sigma'}\})$. □

Az előző tétel kapcsán szükséges egy megjegyzést tennünk. A szerző nem tudta bizonyitani, hogy vajon a tétel abban az erősebb formában is igaz-e, amikor a lineáris, illetve (G,k) ekvivalenciát egyszerüen az ekvivalenciával helyettesitjük. A dolgozat felépitése szerint, sőt, tulajdonképpen ettől függetlenül is, ennek igazsága azon mulik, hogy minden $\underline{A}(=(F,A,G,A_o,\Phi_{\underline{A}}))$ nemdeterminisztikus lf-transzformátorhoz (vagy uniform nemdeterminisztikus ff-transzformátorhoz) megadható-e effektiven egy olyan m, csak az A számosságától függő konstans, hogy $\underline{A}$ akkor és csakis akkor egyértelmü, ha $\tau_{\underline{A}}$ a legfeljebb m mélységü polinomszimbólumokon függvény.

Egy másik megjegyzésünk az, hogy ha Σ unáris és a megoldásokat is unárisakra szoritjuk, akkor a tételnek egy független bizonyitása adható annak az észrevételnek a segitségével, hogy ha egy M^* szabad monoid p,q,r,s és p',q',r',s' elemeire a ps = p's', pqs = p'q's' és prs = p'r's' egyenlőségek mindegyike fennáll, akkor a pqrs = p'q'r's' egyenlőség is teljesül, amiből az is következik, hogy bármely k továbbá $m_1,n_1,\ldots,m_k,n_k$ nemnegativ egész számra $pq^{m_1}r^{n_1}\ldots q^{m_k}r^{n_k}s = p'q'^{m_1}r'^{n_1}\ldots q'^{m_k}r'^{n_k}s'$. Sőt, ezt az ötletet felhasználva belátható még az is, hogy a reguláris

egyenletrendszer fogalmát kissé általánositva is igaz a tétel ezen unáris esetre megfogalmazott alakja. Igy a dolgozatban bemutatott módszertől függetlenül is bebizonyitható az, hogy az ugynevezett determinisztikus általánositott szekvenciális gépek ekvivalenciája eldönthető, amelyet AHO-ULLMAN [1972] nyitott problémaként emlit.

A következőkben még rá szeretnénk mutatni, hogy az (5.3) és (5.4) tételek átvihetők felszálló esetre is. Ehhez azonban a felszálló algebrának és faautomatának az irodalomban megszokottól (ld. MAGIDOR-MORAN [1969]) kissé eltérő definiciójára van szükségünk.

E szerint egy F tipusu <u>nemdeterminisztikus felszálló algebra</u> egy $\underline{A} = (A_*, \{(f)_{\underline{A}} | f \in F\})$ rendszer, ahol A nemüres halmaz, $* \notin A$, $A_* = A \cup \{*\}$, mig minden $n(>0)$-ra és $f(\in F_n)$-re $(f)_{\underline{A}}$ A^*-nak $P(A_*^n)$-be való olyan leképezése, amelyre $(f)_{\underline{A}}(*) = \{(*,\ldots,*)\}$ (n-szer), továbbá minden $f(\in F_0)$-ra $(f)_{\underline{A}}$ az A-nak egy, a $*$-ot tartalmazó részhalmaza.

Minden, az előzőekben definiált $\underline{A}$ nemdeterminisztikus felszálló algebrához hozzárendelhetünk egy $\underline{A}'(=(A_*, \{(f)_{\underline{A}'} | f \in F\})$ nemdeterminisztikus F tipusu algebrát azáltal, hogy tetszőleges $n(>0)$-ra és $a_1,\ldots,a_n(\in A_*)$-ra az $(f)_{\underline{A}'}(a_1,\ldots,a_n)$-et az $\{a(\in A_*) | (a_1,\ldots,a_n) \in (f)_{\underline{A}}(a)\}$ halmazzal, tetszőleges $f(\in F_0)$-ra $(f)_{\underline{A}'}$-t pedig az $(f)_{\underline{A}}$ halmazzal definiáljuk. E hozzárendelés segitségével tetszőleges $p(\in T_F)$ polinomszimbólumra értelmezhetjük a p-nek $\underline{A}$-ban való $(p)_{\underline{A}}$ realizációját: $(p)_{\underline{A}} = (p)_{\underline{A}'} - \{*\}$.

Ugyanugy mint ahogyan a nemdeterminisztikus algebra speciális esete a parciális, a nemdeterminisztikus felszálló algebra fogalmából megkaphatjuk a parciális felszálló algebra fogalmát. Legyen $\underline{A}(=(A_*, \{(f)_{\underline{A}} \mid f \in F\}))$ nemdeterminisztikus felszálló algebra. $\underline{A}$-t <u>parciális felszálló algebrának</u> nevezzük, ha minden $n(>0)$-ra és $f(\in F_n)$-re és $a(\in A)$-ra $(f)_{\underline{A}}(a)$ legfeljebb egyelemü, továbbá minden $f(\in F_0)$-ra $(f)_{\underline{A}} - \{*\}$ legfeljebb egy elemet tartalmaz. A felszálló algebrák $(A_*, \{(f)_{\underline{A}} \mid f \in F\})$ bonyolult jelölése helyett pedig a rövidebb (A_*, F) irásmóddal élünk.

Az F-tipusu felszálló algebrákra épitve most definiáljuk az F-tipusu felszálló faautomata fogalmát. F-tipusu <u>nemdeterminisztikus felszálló faautomatának</u> nevezünk egy $\underline{A}(=(F, A_*, A_0))$ rendszert, ha (A_*, F) véges nemdeterminisztikus felszálló algebra (azaz A véges), amelyet szintén $\underline{A}$-val jelölünk, A_0 pedig az A részhalmaza - a kezdő állapotok halmaza. Ha (A_*, F) parciális és A_0 egyetlen elemet tartalmaz, mondjuk $A_0 = \{a_0\}$, akkor $\underline{A}$ is <u>parciális</u>. Ebben az esetben célszerübb az egyszerübb (F, A_*, a_0) jelölést használni. A $T(\underline{A}) = \{p(\in T_F) \mid (p)_{\underline{A}} \cap A_0 \neq \emptyset\}$ halmazt az $\underline{A}$ által <u>reprezentált erdőnek</u> nevezzük. Könnyen meg lehet mutatni, hogy ez mindig reguláris, mig a forditott tartalmazás nemdeterminisztikus esetre teljesül, parciálisra nem.

Minden $\underline{A}(=(F,A_*,A_o))$ nemdeterminisztikus felszálló faautomatához hozzárendelhetünk egy $\Sigma_{\underline{A}}$ tipust: $(\Sigma_{\underline{A}})_n =$ $= \{\sigma_{\underline{A}}(f,a_1,\ldots,a_n,a) \mid f \in F_n, a_1 \ldots a_n \in A_*, a \in A, (a_1,\ldots,a_n) \in$ $\in (f)_{\underline{A}}(a)$ ha $n>0$, $(\Sigma_{\underline{A}})_o = \{\sigma_{\underline{A}}(f,a) \mid f \in F_o, a \in A,$ $a \in (f)_{\underline{A}}\}$, ahol $\sigma_{\underline{A}}$ egy-egyértelmü függvény, amelyet $\Sigma_{\underline{A}}$-val mindig adottnak tekintünk. Ezek után egy $\underline{B}(=(F,A,G,$ $A_o, \Phi_{\underline{B}}))$ uniform nemdeterminisztikus fatranszformátort az $\underline{A}$ kiterjesztésének mondunk, ha $\Phi_{\underline{B}} = \{af(x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow$ $\longrightarrow e_{\underline{A},\underline{B}}(\sigma)(a_1 x_1,\ldots,a_n x_n) \mid n \geq 0, f \in F_n, a_1,\ldots,a_n \in A_*,$ $a \in A, \sigma = \sigma_{\underline{A}}(f,a_1,\ldots,a_n,a)\}$ alakban irható, ahol $e_{\underline{A},\underline{B}} : \Sigma_{\underline{A}} \longrightarrow T_{G,X}$ olyan homomorfizmus, amelyre tetszőleges $n(>0)$, $a_1,\ldots,a_n(\in A_*)$, $a(\in A)$ esetén ha $\sigma = \sigma(f,a_1,\ldots,a_n,a)$ és x_i $(1 \leq i \leq n)$ előfordul $fr(e_{\underline{A},\underline{B}}(\sigma))$-ban akkor $a_i \neq *$, különben $a_i =$. Igaz, hogy ha $\underline{A}$ parciális, $\underline{B}$ az $\underline{A}$ kiterjesztése, akkor $\underline{B}$ determinisztikus. Ha $e_{\underline{A},\underline{B}}$ lineáris, akkor $\underline{B}$ az $\underline{A}$ lineáris kiterjesztése.

E definiciókat szem előtt tartva bebizonyitható, hogy az (5.3) és (5.4) tételek átvihetőek felszálló esetre is.

Irodalomjegyzék

AHO, A.,V. - ULLMAN, J.,D. [1972], The Theory of Parsing, Translation, and Compiling I, Prentice-Hall.

AHO, A.,V. - ULLMAN, J.,D. [1973], The Theory of Parsing, Translation, and Compiling II, Prentice-Hall.

ARNOLD, A. - DAUCHET, M. [1977], Theories des magmoides, Publications du Laboratoire de Calcul, Universite de Lille I.

BRAINERD, W.,S. [1968], The Minimalization of Tree-automata, Information and Control 13, 484-491.

DAMM, W. [1977], Higher Type Program Schemes and Their Tree Languages, Actes du Deuxieme Colloque de Lille sur les arbes en algebre et en programmation, Universite de Lille I, 1-22.

DAVIS, M. [1958], Computability and Unsolvability, Mac Graw-Hill Book Company.

ENGELFRIET, J. [1975], Bottom-up and Top-down Tree Transformations - A Comparison, Mathematical Systems Theory 9, 198-231.

ÉSIK, Z. [1978], On Decidability of Injectivity of Tree Transformations, Actes du Troisiéme Colloque de Lille sur les arbes en algébre et en programmation, 107-133.

GÉCSEG, F. [1977], Universal Algebras and Tree Automata, Proc. of the Conference on Fundamentals of Computation Theory, Lecture Notes in Computer Science 56, 98-112.

GOUGEN, J.,A. - THATCHER, J.,W. - WAGNER, E.G. - WRIGHT, J.,B. [1977], Initial Algebraic Semantics and Continuous Algebras, Journal of ACM 24, 68-95.

GRÄTZER, G., [1968], Universal Algebra, D. Van Nostrand Company.

INDERMARK, K. [1976], Schemes with Recursion on Higher Types, Proc. of the 5th Conference on Mathematical Foundations of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 45.

GRIFFITHS, T.,V. [1968], The Unsolvability of the Equivalence Problem of λ-free Nondeterministic Generalized Machines, Journal of ACM 15, 409-413.

KNUTH, D.,E. [1968], Semantics of Context-Free Languages, Mathematical Systems Theory 2, 127-145.

LENTIN, A. [1973], Equations in Free Monoids, Proc. of the 1th Conference on Automata, Languages and Programming, North-Holland Company, 67-86.

Sciences 1, 317-322.

Automata Theory, Journal of Computer and System

Context-Free Grammars trough a Generalization of Finite

THATCHER, J.,W. [1967], Characterizing Derivation Trees of

and Table Machines, Information and Control 14, 524-540.

STEARNS, R.,E. - LEWIS, P.,M. [1969], Property Grammars

Lecture Notes in Mathematics 188, 311-399.

the Symposium on Semantics of Algorithmic Languages,

SCOTT, D. [1971], The Lattice of Flow Diagrams, Proc. of

SALOMAA, A. [1973], Formal Languages, Academic Press.

Mathematical Systems Theory 4, 257-287.

ROUNDS, W.C. [1970], Mappings and Grammars on Trees.

North-Holland Company, 293-308.

Ith Conference on Automata, Languages and Programming,

et semantique des schémas de programmes, Proc. of the

NIVAT, M. [1973], Langages algébriques sur le magma libre

Context-Free Sets, Information and Control 11, 3-29.

MEZEI, J. - WRIGHT, J.,B [1967], Algebraic Automata and

Tree Automata, Acta Cybernetica 3, 309-320.

MAROLI, G. [1978], Rational Representation of Forests by

The Hebrew University of Jerusalem.

Finite Trees, Technical Report, Dpt. of Mathematics,

MAGIDOR, M., - MORAN, G. [1969], Finite Automata over

MAGIDOR, M., - MORAN, G. [1969], Finite Automata over Finite Trees, Technical Report, Dpt. of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem.

MARÓTI, G. [1978], Rational Representation of Forests by Tree Automata, Acta Cybernetica 3, 309-320.

MEZEI, J. - WRIGHT, J.,B [1967], Algebraic Automata and Context-Free Sets, Information and Control 11, 3-29.

NIVAT, M. [1973], Langages algébriques sur le magma libre et semantique des schémas de programmes, Proc. of the 1th Conference on Automata, Languages and Programming, North-Holland Company, 293-308.

ROUNDS, W.C. [1970], Mappings and Grammars on Trees, Mathematical Systems Theory 4, 257-287.

SALOMAA, A. [1973], Formal Languages, Academic Press.

SCOTT, D. [1971], The Lattice of Flow Diagrams, Proc. of the Symposium on Semantics of Algorithmic Languages, Lecture Notes in Mathematics 188, 311-366.

STEARNS, R.,E. - LEWIS, P.,M. [1969], Property Grammars and Table Machines, Information and Control 14, 524-549.

THATCHER, J.,W. [1967], Characterizing Derivation Trees of Context-Free Grammars trough a Generalization of Finite Automata Theory, Journal of Computer and System Sciences 1, 317-322.

THATCHER, J.,W. [1970], Generalized^2 Sequential Machine Maps, Journal of Computer and System Sciences 4, 339-367.

THATCHER, J.,W. [1973], Tree Automata: an Informal Survey, Currents in the Theory of Computing, Prentice-Hall, 143-172.

THATCHER, J.,W. - WRIGHT, J.,B. [1968], Generalized Finite Automata Theory with an Application to a Decision--Problem of Second-Order Logic, Mathematical Systems Theory 2, 57-81.

TURNER, R. [1975], An Algebraic Theory of Formal Languages, Proc. of the 4th Conference on Mathematical Foundations of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 32, 426-431.

ZACHAR, Z. [1978], The Solvability of the Equivalence Problem for Deterministic Frontier-to-Root Tree Transducers, Acta Cybernetica 4, megjelenés alatt.