

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MINTAFÜGGVÉNYEK FUNKCIONÁLIS TELJESSÉGE

VÁRMONOSTORY ENDRE
doktori értekezése

SZEGED

1980.

Handwritten text in a cursive script, likely from a 19th-century document. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through from the reverse side.



Continuation of handwritten text in cursive script, also mostly illegible due to fading and bleed-through.

I. BEVEZETÉS

Ebben a dolgozatban véges halmazokon értelmezett függvényekkel foglalkozunk. A halmazokat latin nagy betűkkel jelöljük. Egyszerűség kedvéért rendszerint feltesszük, hogy a tekintett n elemű véges halmaz a $0, 1, \dots, n-1$ elemekből áll. Azt fogjuk vizsgálni, hogy az utóbbi alaphalmazon értelmezett bizonyos függvényekből vagy függvényből előállítható-e az ott értelmezett összes függvény összetett függvényképzéssel. Speciálisan, főként azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy az alaphalmazon értelmezett bizonyos függvény vagy függvények, hozzájukvéve még az identikus függvényt és a konstans függvényeket, összetett függvényként előállítják-e az összes függvényt ugyanezen az alaphalmazon.

Először ismeretjük a felhasználandó fogalmakat.

Az A halmaznak a B halmazba való olyan megfeleltetését, amelynél az A minden egyes elemének pontosan egy képe van, az A halmaz B halmazba való leképezésének nevezzük.

Legyen A tetszőleges nem üres halmaz, n pedig nem negatív egész szám. Az A^n halmaznak az A halmazba való A -n értelmezett n változós leképezését műveletnek nevezzük. A műveleteket vagy hagyományos módon /pl: összeradás-jellel/, vagy a függvény-jelölés szokásos módján /kis latin betűkkel/



jelöljük. Művelet helyett gyakran függvényt mondunk. Projekciónak, részletesebben n -változós i -edik projekciónak nevezzük azt az n -változós műveletet, amely minden elem n -es-hez, annak i -edik elemét rendeli hozzá. Az n -változós első, második, stb. projekciót $x_1, x_2, \dots, x_n$ jelöli. Az $A = \{a_1, \dots\}$ halmaz a eleme karakterisztikus függvényén azt a χ_a egyváltozós függvényt értjük, amely a -n az 1, A többi elemén pedig a 0 értéket veszi fel. Az A halmaz a eleméhez tartozó konstans függvényén pedig azt a c_a egyváltozós függvényt értjük, amely A minden elemén az a értéket veszi fel. Nevezzük kvázitriviális függvénynek f -et, ha minden $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}. \quad (f: A^n \rightarrow A; a_i \in A).$$

Azt mondjuk, hogy az A halmazon értelmezett f n -változós függvény lényegesen függ i -edik változójától ($1 \leq i \leq n$), ha vannak olyan $a_1, \dots, a_{i-1}, a, b, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$ elemek, hogy

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Lényegesnek nevezzük az f függvényt, ha f legalább két változójától lényegesen függ, továbbá f értékei között A minden eleme előfordul.

A következő fogalmat Quackenbush vezette be.

Az $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ és $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ elem n -esekről akkor mondjuk, hogy azonos mintájuk, ha $1 \leq i, j \leq n$ esetén $a_i = a_j$ -ből következik $b_i = b_j$ és fordítva. Egy n változós f függvényt akkor nevezünk mintafüggvénynek, ha bármilyen $x_1, x_2, \dots, x_n$ esetén

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ ($1 \leq i \leq n$), ahol i úgy függ az $x_1, x_2, \dots, x_n$ -től, hogy $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_i$, ugyanazzal az i -vel, ha $\langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ ugyanolyan mintájú, mint $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

Legyen A tetszőleges nem üres halmaz. Az A halmazon értelmezett n -változós ρ reláción tetszőleges $\rho \subseteq A^n$ részhalmazt értünk.

A következő definíció Csákány Bélától származik. Az $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ és $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ elem n -eseket nevezzük azonos mintájúaknak a két változós ρ relációra nézve, ha minden (i, j) párra ($1 \leq i, j \leq n$) $a_i \rho a_j$ akkor és csakis akkor, ha $b_i \rho b_j$. Egy n -változós f függvényt akkor nevezünk ρ -mintafüggvénynek, ha bármely $x_1, x_2, \dots, x_n$ esetén $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ ($1 \leq i \leq n$), ahol i úgy függ az $x_1, x_2, \dots, x_n$ -től, hogy $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_i$, ugyanazzal az i -vel, ha az $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ és $\langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ azonos mintájúak ρ -ra nézve. A közönséges mintafüggvény a ρ -mintafüggvénynek az a speciális esete, amikor ρ az egyenlőség-reláció. Hasonlóan definiálható a ρ -mintafüggvény tetszőleges változósámu ρ reláció esetén.

Akkor mondjuk, hogy az f A halmazon értelmezett n változós művelet tiszteli /másképpen: megőrzi/ az ugyanott értelmezett kétváltozós ρ relációt, ha valahányszor $a_1 \rho b_1, \dots, a_n \rho b_n$, mindannyiszor $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \rho f(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Ez a definíció is természetes módon átvihető tetszőleges vál-

tozó számú relációkra.

Nevezzük az $\mathcal{F}$ függvényt funkcionálisan teljesnek vagy függvényt teljesnek az A halmazon, ha belőle, a konstansokból és az identikus függvényből minden, az A -n értelmezett /akárhány változós/ függvény összetett függvény képzéssel előállítható. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az $\langle A; \mathcal{F} \rangle$ algebra - vagyis az A alaphalmazu és $\mathcal{F}$ műveletü algebrai struktura - funkcionálisan teljes.

Legyen adva az A n elemü halmaz. Jelöljük P_n -nel az A halmazon értelmezett összes műveletek halmazát. Legyen $\mathcal{M}$ a P_n egy részhalmaza. $\mathcal{M}$ lezárásának nevezzük a P_n -ből vett összes olyan függvények $[\mathcal{M}]$ halmazát, amelyek kifejezhetők összetett függvény képzéssel az $\mathcal{M}$ elemeiből és a projekciókból.

Ha az $\mathcal{M}$ -hez tartozó függvények tisztelik ρ relációt, akkor az azokból képzett összetett függvények is, mivel a projekciók minden relációt tisztelnek, az $\mathcal{M}$ lezárásában tartozó függvények is tisztelik a ρ relációt.

Tartozzék az $F(x)$ függvény az $\mathcal{M}$ függvényhalmaz lezárásához. Azt mondjuk, hogy $F(x)$ mélysége $\mathcal{M}$ -re vonatkozóan n , ha n a legkisebb olyan nem negatív egész szám, amelyre létezik $F(x)$ -nek $\mathcal{M}$ -beli függvényekből és projekciókból összetett függvényként való előállítása, amelyben az $\mathcal{M}$ -beli függvények összesen n -szer fordulnak elő.

Az $\mathcal{M}$ függvényhalmazt zárt halmaznak vagy klónnak nevezzük, ha $[\mathcal{M}] = \mathcal{M}$.

Azt mondjuk, hogy az A halmazon értelmezett függvényekből álló $\{f_1, f_2, \dots\}$ halmaz teljes, ha P_n bármely függvénye felírható e rendszer függvényei segítségével, azaz $[\{f_1, f_2, \dots\}] = P_n$. A definícióból látszik, hogy egy f függvény pontosan akkor funkcionálisan teljes, ha az a halmaz, amely f -ből és az összes konstans függvényekből áll, funkcionálisan teljes.

A P_n -ből képzett függvények $\mathcal{M}$ halmazát maximálisnak nevezzük, ha $\mathcal{M}$ nem teljes, de bármely olyan f függvényre, amelyre $f \in P_n$ és $f \notin \mathcal{M}$, az $\mathcal{M} \cup \{f\}$ halmaz teljes. A meghatározásból következik, hogy minden maximális osztály zárt osztály.

II. TELJESSÉGI TÉTELEK

Ebben a részben két ismert, függvényrendszerek teljességére vonatkozó tételt /röviden teljességi tételt/ mutatunk be, amelyeket funkcionális teljességi vizsgálatainkban felhasználunk. Ezenkívül felsorolunk néhány ismert, funkcionális teljességre vonatkozó tételt; köztük azokat is, amelyek vizsgálatainkat motiválták.

Számos szerző vizsgálta véges algebrák funkcionális teljességét. Az első nevezetes eredmény ilyen irányban Rédei és Szele [3] tétele, amely szerint a véges testek funkcionálisan teljesek, alapműveleteknek az összeadást és a szorzást tekintve.

Az utóbbi általánosításaként Kuznyecov [7] bebizonyította, hogy a véges gyűrűk közül pontosabban a nem triviális szorzásu egyszerű gyűrűk funkcionálisan teljesek. Kuznyecov mutatta meg először, hogy egy véges csoport akkor és csakis akkor funkcionálisan teljes, ha nem Abel-csoport és egyszerű.

Kifejtési tétel /Wille [6] , Werner [5] /:

Legyen $H = \{0, 1, \dots\}$ véges halmaz. Legyen $\wedge$ és $\vee$ olyan kétváltozós műveletek H -n, hogy minden $a \in H$ -ra teljesül

$$\underline{a \wedge 1 = a, \quad a \wedge 0 = 0, \quad a \vee 0 = a = 0 \vee a.}$$

Akkor a $\{\wedge, \vee, x_0, x_1, \dots, c_0, c_1, \dots\}$ halmaz teljes.

Bizonyítás: Az V műveletre vonatkozó feltételből következik, hogy ha egy tetszőlegesen zárójelezett $a_1 v \dots v a_k$ alakú kifejezés minden tagja 0 esetleg az a_i kivételével, akkor a kifejezés értéke a_i /függetlenül a zárójelezés módjától/. Ezért ilyenkor a rövid $\bigvee_{i=1}^k a_i$ jelölést használhatjuk.

Ezt figyelembe véve észrevevesszük, hogy bármely f k -változós H -n értelmezett műveletre és tetszőleges elemekre érvényes:

$$f(x_1, \dots, x_k) = \bigvee_{(a_1, \dots, a_k) \in H^k} \left(\left(C_{f(a_1, \dots, a_k)}(x_1) \wedge \chi_{a_1}(x_1) \wedge \chi_{a_2}(x_2) \right) \wedge \dots \wedge \chi_{a_k}(x_k) \right).$$

Valóban a V jel mögött álló minden "tag" 0 , esetleg annak

a tagnak a kivételével, amelyben $a_1 = x_1, \dots, a_k = x_k$,

az utóbbi tag pedig $\left(\dots \left(C_{f(x_1, \dots, x_k)}(x_1) \wedge \chi_{a_1}(x_1) \right) \wedge \dots \wedge \chi_{a_k}(x_k) \right)$

Felhasználjuk a következő nevezetes tételt is:

Slupecki tétele [7] : A legalább három elemű halmazon értelmezett függvények $\mathcal{U}$ halmaza teljes, ha tartalmazza az összes egyváltozós függvényeket, valamint egy lényeges függvényt.

Felhasználva azt a jól ismert tényt, hogy tetszőleges elemű halmaz összes egyváltozós függvényei előállíthatók összetett függvényként e halmaz transzpozícióiból és egyetlen olyan függvényből, amelynek értékkészlete $n-1$ elemű, továbbá az összes transzpozíció ugyancsak előállítható a $(0,1), (0,2), \dots, (n-1,0)$ transzpozíciókból, nyerjük Slupecki tételének a következő alakját:



A legalább három elemű H halmazon értelmezett függvények halmaza teljes, ha tartalmazza a $h(x)$, $f_i(x)$, $(i=1, 2, \dots, n-1)$ és $f(x_1, \dots, x_n)$ függvényeket, ahol:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x=0, \\ x, & \text{ha } x \neq 0, \end{cases}$$

$$f_i(x) = \begin{cases} i, & \text{ha } x=0, \\ 0, & \text{ha } x=i, \\ x & \text{különben} \end{cases}$$

és $f(x_1, \dots, x_n)$ lényeges függvény.

Pixley nevéhez fűződik a következő t függvény, az un. ternáris diszkriminátor vizsgálata:

$$t(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq y, \\ z, & \text{ha } x = y \end{cases}$$

bármely véges halmazon. Werner [5] bebizonyította, hogy ez a függvény funkcionálisan teljes.

Fried és Pixley [2] vizsgálták az un. duális diszkriminátort, amelynek jele d , definíciója:

$$d(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x \neq y, \\ x & \text{különben.} \end{cases}$$

Bebizonyították, hogy a duális diszkriminátor szintén funkcionálisan teljes bármely legalább három elemű halmazon.

Mindkét diszkriminátor-függvény mintafüggvény.

A két diszkriminátor-függvényre vonatkozó eredményt általánosítja Csákány [1] tétele, amely szerint legalább három elemű véges halmazon bármely mintafüggvény teljes. A $\wp$ -mintafüggvények funkcionális teljességének a vizsgálatát szintén Csákány vetette fel 1978-ban a csehszlovák algebrai nyári iskolán tartott előadásában. Ebben a dolgozatban a $\wp$ -mintafüggvények funkcionális teljességét vizsgáljuk azokban az esetekben, amikor $\wp$: részhalmaz, ekvivalencia, permutáció, lineáris rendezés, rendezés, a ffin reláció. Egyes esetekben sikerült általános megállapításokat bizonyítanunk, más esetekre vonatkozóan példákat és ellenpéldákat adunk meg. Többek között Werner, valamint Fried és Pixley említett eredményeit permutációkra és lineáris rendezésekre is átvisszük. Eredményeink egy részét közlésre benyújtottuk a "Finite Algebra and Many-valued Logic" című cikkgyűjteménybe [4].

Mielőtt eredményeink ismertetésére rátérnénk, megemlítjük, hogy a funkcionális teljesség kérdése végtelen halmazokon értelmezett függvényekre számossági megfontolások miatt érdektelen. Másrészt a $\{0,1\}$ két elemű halmazon értelmezett függvényekre a függvényteljesség kérdése teljesen megoldott. Post egy tétele szerint $\mathcal{U}$ akkor és csak akkor függvényteljes, ha tartalmaz nem monoton függvényt és mod 2 nem lineáris függvényt. Mindezek miatt a továbbiakban mindig feltesszük, hogy az alaphalmaz, amelyen függvényeinket értelmezzük véges és legalább három elemű.

III. EGYVÁLTOZÓS RELÁCIÓK

A H halmazon értelmezett egyváltozós relációk a H halmaz részhalmazai. Ha ρ ilyen részhalmaz, két sorozat ρ mintája akkor egyezik meg, ha ugyanannyiadik elemeik tartoznak a ρ részhalmazhoz.

Ha ρ részhalmaz reláció, akkor a ρ -mintafüggvények tisztelik a ρ relációt. Valóban, ha $a_1, a_2, \dots, a_n \in \rho$, akkor $\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^n \} \subseteq \rho$. Felvetődik a kérdés, hogy adott ρ -ra a ρ -mintafüggvények halmaza teljes-e, ha ez így lenne, akkor minden függvény tisztelné ρ -t, de ez nem igaz.

Tétel: Legyen adott a H halmazon tetszőleges részhalmaz reláció. Akkor egyetlen ρ -mintafüggvény sem függvényt teljes.

Bizonyítás: a./ Ha a ρ részhalmaz üres vagy maga a H halmaz, akkor a ρ -mintafüggvények definíciójából következik, hogy azok mind projekciók. A projekciókból és konstansokból nem állítható elő az összes függvény.

b./ Ha a ρ nem a H halmaz, de van legalább két különböző eleme: a és b , míg $c \notin \rho$, akkor egy $f(x)$ ρ -mintafüggvényből és a projekciókból nem tudunk olyan $F(x)$ függvényt előállítani, amelyre $F(b)=a$, $F(a)=c$ vagy b . Ez $F(x)$ -nek $f(x)$ -re vonatkozó mélysége szerinti teljes indukcióval adódik.

c. / Ha ρ egyetlen eleme a , míg b és c ρ -n kívüli különböző elemek, akkor egy $f(x)$ ρ -minta függvényből és a projekciókból nem tudunk olyan $F(x)$ függvényt előállítani, amelyre $F(b)=a$, $F(c)=c$ vagy b .

Ezt is $F(x)$ $f(x)$ -re vonatkozó mélysége szerinti teljes indukcióval kapjuk.

IV. KÉTVÁLTOZÓS RELÁCIÓK

1. ρ ekvivalenciareláció

Tétel: Legyen ρ olyan ekvivalenciareláció a halmazon, amely nem egyenlőség-reláció. Akkor egyetlen ρ -mintafüggvény sem függvényteljes.

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy ρ nem a teljes reláció. A konstansok és az identikus függvény tisztelik a ρ relációt, mivel az ekvivalenciareláció.

Másrészt a ρ -mintafüggvények tisztelik ρ -t, ha az ekvivalenciareláció, ugyanis: $a_1 \rho b_1, a_2 \rho b_2, \dots$

$\dots, a_n \rho b_n$ esetén $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \rho f(b_1, b_2, \dots, b_n)$ érvényes, hiszen felhasználva az ekvivalencia tulajdonságait, kapjuk:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \rho f(b_1, a_2, \dots, a_n) \rho f(b_1, b_2, \dots, a_n) \rho f(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

A ρ -t tisztelő függvényekből képzett összetett függvények szintén tisztelik ρ -t. Tehát ρ -mintafüggvényből, a konstansokból és az identikus függvényből a ρ -t nem tisztelő függvények nem állnak elő.

Ha ρ teljes reláció, akkor a ρ -mintafüggvények projekciók lesznek. A projekciókból, a konstansokból és az identikus függvényből szintén nem rakható össze az összes függvény.

2. A ρ reláció: permutáció

Ha a ρ reláció az identikus permutáció, akkor a

ρ -mintafüggvények közönséges mintafüggvények, és így függvényteljesek. Mielőtt a nem identikus ρ permutációkra vonatkozó ρ -mintafüggvények funkcionális teljességét vizsgálnánk, nézzük meg, milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a ρ -mintafüggvények.

Tétel: Ha f ρ -mintafüggvény, akkor f tiszteli a ρ permutációt.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $a_1 \rho b_1, a_2 \rho b_2, \dots, a_n \rho b_n$. Azt kell belátni, hogy:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \rho f(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Elég kimutatni, hogy $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ és $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ azonos mintájuk ρ -ra nézve.

Ugyanis, ha $a_i \rho a_k$ igaz és $a_i \rho b_i$ is, akkor $a_k = b_i$, de

$a_k \rho b_k$ -ből következik $b_i \rho b_k$. Fordítva, ha $b_i \rho b_k$ igaz, akkor $a_i \rho a_k$ is igaz.

Ezzel a bizonyítás kész.

Igy a ρ -mintafüggvényekből csak a ρ -t tisztelő függvények állíthatók elő. Tehát a ρ -mintafüggvények halmaza nem teljes.

Tétel: Ha g egy tetszőleges kvázitriviális ρ -t tisztelő függvény, akkor ez a függvény ρ -mintafüggvény.

Bizonyítás: Ha g tiszteli ρ -t, akkor $a_1 \rho b_1, a_2 \rho b_2, \dots, a_n \rho b_n$ esetén $g(a_1, a_2, \dots, a_n) \rho g(b_1, b_2, \dots, b_n)$ is teljesül. Sőt az is igaz, hogy $a_1 \rho b_1, a_2 \rho b_2, \dots, a_n \rho b_n$ esetén $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ és $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ azonos mintájuk ρ -ra nézve. Mivel g kvázitriviális, így $g(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i$

-ből következik $q(b_1, b_2, \dots, b_n) = b_i$; ezzel a bizonyítás kész.

Igy kimondhatjuk a következő tételt:

Tétel: Egy q kvázitriviális függvény akkor és csak akkor tiszteli ρ -t, ha q ρ -mintafüggvény.

Másrészt a diszkriminátor függvények funkcionális teljessége nem kivételes jelenség. Ezt mutatja a következő példa:

Legyen a $H = \{0, 1, \dots, n-1\}$ halmaznak ρ tetszőleges permutációja. Állítjuk, hogy a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} x_4, & \text{ha } x_1 \rho x_2 \text{ igaz, de } x_2 \rho x_3 \text{ nem,} \\ x_5, & \text{ha } x_2 \rho x_3 \text{ igaz, de } x_1 \rho x_2 \text{ nem,} \\ x_2 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény funkcionálisan teljes a H halmazon.

A bizonyításhoz Slupecki tételét figyelembe véve elég belátni, hogy tartalmazza az összes egyváltozós függvényt és egy lényeges függvényt, amely felveszi az összes H -beli értéket.

Ha ρ nem identikus permutáció, akkor a keresett lényeges függvény maga az f .

Most előállítjuk a Slupecki-tétel alkalmazásához szükséges egyváltozós h és f_i függvényeket.

$$h(x) = f(l_0, x, s_1, 1, 1),$$

ahol $l_0 \rho 0$ és $1 \rho s_1$ érvényes. Ha $1 \leq i \leq n-1$, akkor

$f_i(x) = f(l_0, x, s_i, i, 0)$, ahol $i \rho s_i$ érvényes. Ezzel a bizonyítás kész.

Áttérünk a funkcionális teljesség vizsgálatára. A következő tétel a ternáris diszkriminátor funkcionális teljességét kimutató tétel általánosítása. A tételünkben szereplő függvénynek a ternáris diszkriminátor az a speciális esete, amelyben a ρ identikus permutáció.

Tétel: Legyen ρ tetszőleges permutáció a $H = \{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazon. Akkor az

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x\rho y. \\ x & \text{különben} \end{cases}$$

függvény függvényteljes a H halmazon.

Bizonyítás: A kifejtési tételt használjuk fel.

Legyenek Λ és V kétváltozós függvények a H halmazon, amelyeket a következőképpen definiálunk:

$$x\Lambda y = f(y, s_1, x),$$

ahol s_1 olyan elem, amelyre $1\rho s_1$ érvényes.

Most $a\Lambda 1 = a$ és $a\Lambda 0 = 0$ teljesül minden $a \in H$ esetén.

$$\text{Továbbá: } xVy = f(x, s_0, y),$$

ahol $0\rho s_0$ teljesül.

Igy $a\vee 0 = a = 0\vee a$ érvényes minden $a \in H$ -ra. Minden $a \in H$ -

-ra definiálnunk kell a χ_a karakterisztikus függvényt.

Ha $a \neq 0$, akkor

$$\chi_a(x) = f(f(\dots f(f(f(\dots f(f(f(x, s_1, 0), s_2, 0), s_3, 0), \dots, s_{a-1}, 0), s_{a+1}, 0), \dots, s_{n-1}, 0), s_a, 1),$$

ha pedig $a = 0$, akkor

$$\chi_a(x) = f(f(f(f(\dots f(f(x, s_2, 1), s_3, 1), \dots, s_{n-1}, 1), s_0, 2), s_1, 0), s_2, 1),$$

ahol $0\rho s_0, 1\rho s_1, 2\rho s_2, \dots, n-1\rho s_{n-1}$ érvényes.

Ezzel a bizonyítás kész.



A következő tétel a duális diszkriminátorra vonatkozó Fried-Pixley tétel általánosítása.

Tétel: Legyen ρ tetszőleges permutáció a $H = \{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazon. Az

$$S(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x\rho y, \\ z & \text{különben} \end{cases}$$

függvény funkcionálisan teljes H -n.

Bizonyítás: Ismét a kifejtési tételt használjuk fel. Definiáljuk a szükséges kétváltozós műveleteket.

$$x \wedge y = S(y, \delta_0, x),$$

ahol $0\rho\delta_0$ érvényes.

Ekkor $a \wedge 1 = a$, $a \wedge 0 = 0$ minden $a \in H$ -ra teljesül.

$$x \vee y = S(x, \delta_1, S(x, \delta_2, S(x, \delta_3, S(x, \delta_4, \dots, S(x, \delta_{n-1}, y) \dots)))$$

ahol $1\rho\delta_1$, $2\rho\delta_2$, $\dots$, $n-1\rho\delta_{n-1}$ teljesül.

Ekkor $a \vee 0 = a = 0 \vee a$ minden $a \in H$ -ra.

Definiáljuk a χ_a függvényeket. Ha $a \neq 0$, akkor

$$\chi_a(x) = S(S(x, \delta_a, 0), \delta_0, 1),$$

ahol $a\rho\delta_a$ teljesül, ha pedig $a=0$, akkor

$$\chi_a(x) = S(S(S(S(x, \delta_0, 1), \delta_1, 2), \delta_2, 0), \delta_0, 1).$$

Ezzel a bizonyítás kész.

Megjegyzés: Nem igaz, hogy minden ρ -minta-függvény függvényt teljes, ha ρ nem identikus permutáció.

Ezt a következő példa mutatja. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } x\rho y, \\ y & \text{különben} \end{cases} \quad \text{a } H = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

halmazon, és

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor f -ből, a projekciókból és a konstansokból olyan $F(x)$ nem állítható elő, amelyre teljesül $F(2)=0, F(1)=1, F(0)=2$.

Tehát az $f(x,y)$ függvény nem függvényteljes. A bizonyítás mélység szerinti teljes indukcióval történhet. Ha felírjuk az f -re vonatkozó egy mélységű függvényeket, akkor látjuk, hogy azokra az $F(x)$ -re kívánt feltételek nem teljesülnek. Ha $F(x)$ n mélységű, akkor $F(2)=0$ csak akkor teljesül, ha az $F(x)$ -ben a külső függvényre $f(2)=0$, de akkor $f(1)=0$ és $f(0)=0$. Így $F(2)=F(1)=F(0)=0$.

Tehát az állításunk be van bizonyítva.

A duális diszkriminátor megfelelőjének funkcionális teljessége sem kivételes jelenség. Valóban nem nehéz példát konstruálni további funkcionálisan teljes ρ -mintafüggvényre, ahol ρ lineáris rendezés.

Ilyen pl.:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_2 \rho x_3 \rho x_4 \text{ teljesül, de } x_1 \rho x_2 \text{ nem,} \\ x_2, & \text{ha } x_1 \rho x_3 \rho x_4 \text{ teljesül, és } x_1 \rho x_2 \text{ is,} \\ x_3, & \text{ha } x_1 \rho x_2 \rho x_4 \text{ teljesül, és } x_3 \rho x_4 \text{ is,} \\ x_4 & \text{különben.} \end{cases} \quad \text{de } x_1 \rho x_3 \text{ nem,}$$

A funkcionális teljesség igazolásához Slupecki tételét fogjuk felhasználni. $[f]$ tartalmaz lényeges függvényt, amely az alaphalmazon összes értéket felveszi, ugyanis f maga is lényeges függvény. Másrészt f -ből felépíthetők a további függvények.

$$h(x) = f(1, x, x, x),$$

$$f_i(x) = f(x, i, 0, x),$$

ahol $1 \leq i \leq n-1$.

3. ρ rendezés

A reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációt rendezésnek nevezzük. Ha a rendezés olyan, hogy minden elem minden elemmel összehasonlítható, akkor lineáris rendezésnek nevezzük.

A $H = \{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazon legyen ρ lineáris rendezés. Akkor ellentétben azzal az esettel, amikor ρ permutáció, nem minden ρ -mintafüggvény tiszteli ρ -t. Például az

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_1 \rho x_2 \rho x_3, \\ x_4 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény nem tiszteli ρ -t, ha ρ a közönséges $\leq$ reláció a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazon.

Ugyanis:

$$1 \leq 2,$$

$$1 \leq 1,$$

$$2 \leq 2,$$

$$0 \leq 0,$$

de $f(1, 1, 2, 0) \neq f(2, 1, 2, 0)$.

Most megmutatjuk, hogy az a függvény, amely a duális diszkriminátorból úgy keletkezik, hogy definíciójában az egyenlőséget lineáris rendezéssel helyettesítjük, szintén függvényteljes.

Tétel: Legyen adott a H halmazon az

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq y, \\ z & \text{különben} \end{cases}$$

függvény. Akkor az $f(x, y, z)$ függvény függvényt-
jes a H halmazon.

Bizonyítás: A kifejtési tételt használjuk fel. Le-
gyenek $\wedge$ és $\vee$ kétváltozós függvények a H halmazon, amelye-
ket a következőképpen definiálunk: $x \wedge y = f(0, y, x)$,
akkor teljesül $a \wedge 1 = a$ és $a \wedge 0 = 0$ minden $a \in H$. Továbbá
 $x \vee y = f(x, y, y)$, ekkor teljesül $0 \vee a = a = a \vee 0$ minden $a \in H$ esetén.
Ha $a \neq 0$, akkor

$$\chi_a(x) = f(0, f(f(f(a^{-1}, x, a), a, 0), f(x, a, 0), f(a, x, 0)), 1).$$

Ha $a = 0$, akkor

$$\chi_a(x) = f(1, f(0, f(0, x, 1), 2), 0).$$

A bizonyítás kész.

Most példát mutatunk arra, hogy a duális diszkri-
minátor megfelelője alkalmas nem lineárisan rendezett hal-
mazon is függvénytelsesnek bizonyul. Vizsgáljuk meg azt az
esetet, ha az alaphalmazon van két olyan elem, amely nem
összehasonlítható.

Legyen adott az $A = \{0, e, \varepsilon, 2, 3, \dots, n-2\}$ halmaz,
ahol e és ε nem összehasonlíthatók, $0 < e, \varepsilon < 2$, a számmal je-
lölt elemekre pedig a közönséges rendezés érvényes.

Akkor állítjuk, hogy az

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq y, \\ z & \text{különben} \end{cases}$$

függvény az A halmazon függvénytelses, ha $5 \leq |A| < \infty$.

A bizonyításhoz szintén a kifejtési tételt használ-
juk fel. Az A halmazon definiálnunk kell a $\wedge$ és $\vee$ kétváltozós

műveleteket. Legyen

$$x \wedge y = f(0, y, x),$$

akkor teljesül $a \wedge 0 = 0$ és $a \wedge e = a$, ha $a \in A$;

továbbá

$$x \vee y = f(x, y, y),$$

akkor teljesül $0 \vee a = a = a \vee 0$, ha $a \in A$.

Minden $a \in A$ -ra definiálnunk kell a χ_a karakterisztikus függvényt. Ha $a = 0$, akkor:

$$\chi_a(x) = f(e, f(0, f(0, x, e), 2), 0).$$

Ha $a = e$, akkor

$$\chi_a(x) = f(f(e, x, 0), f(f(0, x, e), e, 2), 0).$$

Ha $a = \varepsilon$, akkor

$$\chi_a(x) = f(0, f(f(\varepsilon, x, 0), f(f(f(e, x, 0), e, \varepsilon), \varepsilon, 2), 0), e).$$

Ha $a = 2$, akkor felhasználva $\chi_e(x)$ -et, amelyet már kifejeztünk, adódik:

$$\chi_a(x) = f(0, f(f(2, x, 0), f(f(f(f(\varepsilon, x, 0), \chi_e(x), \varepsilon), \varepsilon, 2), 2, 3), 0), e).$$

Ha $a \neq 0, a \neq e, a \neq \varepsilon, a \neq 2$ de $a \in A$, akkor:

$$\chi_a(x) = f(0, f(f(f(a-1, x, a), a, 0), f(x, a, 0), f(a, x, 0)), e).$$

Ezzel a bizonyítás kész.

IV. TÖBBVÁLTOZÓS RELÁCIÓK

1. ρ affin reláció

Legyen a $H = \{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazon egy +Abel-csoport-művelet /pl.: a mod n összeadás/ értelmezve. Defináljuk H -n a ρ relációt a következőképpen:

$$\rho(x_1, x_2, x_3, x_4) \iff x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

Az ilyen relációt affin relációnak nevezzük.

Tétel: Ha ρ affin reláció, $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pedig egy négyváltozós mintafüggvény a H halmazon, amely a következő alakú:

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_i, & \text{ha } \rho(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_k & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $i \neq k$, $0 \leq i, k \leq n-1$, akkor p függvényteljes.

Bizonyítás: A bizonyítást először az $i=1$, $k=2$ meg az $i=1$, $k=3$ esetre végezzük el.

a. / $i=1$, $k=2$. A kifejtési tételt használjuk fel. Defináljuk a H halmazon a $\wedge$ és $\vee$ kétváltozós műveleteket a következőképpen:

$$x \wedge y = p(x, y, x, 1), \quad x \vee y = p(x, y, x, 0).$$

Ekkor $a \wedge 1 = a$, $a \wedge 0 = 0$, $a \vee 0 = a = 0 \vee a$ teljesül minden $a \in H$ -ra. Már csak a karakterisztikus függvények definiálása van hátra, amelyeket a következőképpen adunk meg. Ha $a \neq 0$, akkor

$$\chi_a(x) = p(p(a, 0, 0, x), 1, 1, 0).$$

Ha $a=0$, akkor

$$\chi_a(x) = p(1, 0, 1, x).$$

b. $i=1, k=3$. Ebben az esetben a keresett műveletek a következőképpen állnak elő:

$$x \wedge y = p(x, 1, y, x), \quad x \vee y = p(x, 0, y, x).$$

Ekkor $a \wedge 1 = a$, $a \wedge 0 = 0$, $a \vee 0 = a = o \vee a$ teljesül minden $a \in H$ -ra.

Ha $a \neq 0$, akkor

$$\chi_a(x) = p(p(a, 0, 0, x), 1, 1, 0).$$

Ha $a=0$, akkor

$$\chi_a(x) = p(1, x, 0, 1).$$

Ezzel a speciális esetek bizonyítása kész.

Tetszőleges $i+k$ esetén $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$ megkapható az előző két esetből a változók megfelelő permutálásával, így $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$ is függvényteljes.

Megmutatjuk, hogy a diszkriminátor függvények affin relációkra vonatkozó megfelelői is függvényteljesek.

Tétel: AH halmazon az

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } p(x_2, x_3, x_4, x_5), \\ x_2, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény függvényteljes.

Bizonyítás: Ismét a kifejtési tételt használjuk.

Legyen

$$x \wedge y = f(x, y, 1, 1, 1),$$

akkor $a \wedge 1 = a$ és $a \wedge 0 = 0$ minden $a \in H$ -ra teljesül.

$$x \vee y = f(x, y, 0, 0, 0),$$

akkor $o \vee a = a = a \vee o$ minden $a \in H$ -ra teljesül.

A karakterisztikus függvények definíciója:

$$\chi_a(x) = f(1, 0, a, 0, x)$$

minden $a \in H$ -ra. Ezzel a bizonyítás kész.

Tétel: A H halmazon a

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} x_2, & \text{ha } p(x_2, x_3, x_4, x_5), \\ x_1, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény függvényteljes.

Bizonyítás: A kifejtési tételt alkalmazzuk.

Legyen

$$x \wedge y = g(x, y, 0, 0, 0),$$

akkor $a \wedge 1 = a$ és $a \wedge 0 = 0$ teljesül minden $a \in H$ -ra.

Legyen

$$x \vee y = g(y, x, 0, x, y),$$

akkor $a \vee 0 = a = 0 \vee a$ minden $a \in H$ -ra.

Az egyváltozós függvények definiálása:

$$\chi_a(x) = g(0, 1, x, 1, a)$$

minden a -ra. Ezzel a bizonyítás kész.

I R O D A L O M

- [1] B. Csákány: Homogeneous algebras are functionally complete, Algebra Universalis, közlésre elfogadva.
- [2] E. Fried. A.F. Pixley: The dual discriminator function in universal algebra, Acta Sci. Math. 41/1979./
- [3] L. Rédei - T. Szele: Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe, I Acta Math., 291-320, 79. kötete /1947./
- [4] E. Vármonostory: Relational pattern functions, közlés alatt a "Finite Algebra and Many-valued Logic" című cikkgyűjteményben, amely a Coll. Math. Soc. János Bolyai sorozat 28. kötete.
- [5] H. Werner: Diskriminator - Algebras, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
- [6] R. Wille: Allgemeine Algebra - zwischen Grundlagen - forschung und Anwendbarkeit /Preprint/.
- [7] A.B.Кузнецов: Алгебра логики и её обобщения - а "Математика в СССР за 40 лет" с. kötetben /1959; 102-115./



Köszönetet mondok DR. CSÁKÁNY BÉLA tan-
székvezető egyetemi tanárnak a dolgozatom meg-
írásában nyújtott sok segítségéért, hasznos ta-
nácsaiért.