B 1861

Egyetemi doktori disszertáció

FELSZÁLLÓ FAAUTOMATÁK

Virágh János

József Attila Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Szeged, 1980

Bevezetés

Az 1950-es évek közepén született meg a matematika uj ága, az automataelmélet. Létrejöttében nagy szerepet játszott az elektronikus számitógépek gyors fejlődése, a bonyolult hiradástechnikai és egyéb szabályozó-vezérlő rendszerek megjelenése.

Döntő változást hozott az 1960-as évek eleje: az algebra, elsősorban az univerzális algebra módszereinek és eredményeinek automataelméleti alkalmazásaival és kiterjesztéseivel kialakult az automaták algebrai elmélete. A BÜCHI-nek és WRIGHT-nak tulajdonitott alapvető észrevétel, amely mindezt lehetővé tette, a következő: az automata bemenő jelei tekinthetők állapothalmaza fölötti egyváltozós müveleteknek, s igy az automatát egy speciális univerzális algebrával /ti. unoiddal/ azonosithatjuk. Ebben a felfogásban tehát az automata bemenő szavai /unáris/ polinomszimbolumok.

Innen már csak egy lépés a THATCHER és WRIGHT [1965] és DONER [1965]-ben megszületett általánositás, a faautomata, amely tetszőleges tipusu /nemcsak unáris/ polinomszimbolumokat képes feldolgozni. A polinomszimbolumokat cimkézett fákkal is reprezentálhatjuk, innen a faautomata elnevezés.

Az irodalomban kétfajta faautomatát vizsgáltak. Az első, a leszálló faautomata az input fákat a levelektől a gyökér felé haladva dolgozza föl /ld. THATCHER és WRIGHT [1968], MAGIDOR és MORAN [1969]/. Erre a tipusra a véges automaták elméletének klasszikus eredményei szinte hiánytalanul átvi-

József Attila Tudományegyetem Könyvtára SZEGED

hetők. Az általánositást megkönnyitette, hogy ha a végállapot-halmaztól eltekintünk, akkor a leszálló faautomaták univerzális algebráknak tekinthetők, vizsgálatukat igy univerzális algebrai eszközökkel végezhetjük. /Ennek a gondolatnak explicit megfogalmazása megtalálható pl. STEINBY [1977b] -ben.

A másik tipusu, un. felszálló faautomata a gyökértől a levelek felé haladva vizsgálja az input fákat. Ezt a tipust a RABIN [1969] cikk vezette be, tulajdonságait MAGIDOR és MORAN [1969], valamint GÉCSEG és STEINBY [1978] vizsgálta. Az emlitetteken kivül alig ismert más, fölszálló faautomatákra vonatkozó eredmény. Ennek kettős oka van.

(1) A fölszálló faautomaták fölismerő kapacitása erősen korlátozott, még egyes véges erdők sem ismerhetők fel velük.

(2) Nincs olyan kidolgozott /algebrai/ apparátus, amely lehetővé tenné a fölszálló automatákra vonatkozó problémák viszonylag egyszerü, egységes tárgyalását.

A dolgozatban megkisérelјük a felszálló faautomaták olyan egységes elméletének kiépitését, amely egyrészt tartalmazza az ismert eredményeket, másrészt lehetőséget nyujt a véges automaták elméletének általánositásához felszálló faautomatákra.

Az első fejezet a legfontosabb általános jelöléseket és - főleg univerzális algebrai - alapfogalmakat tartalmazza.

A második fejezetben bevezetett speciális relációs strukturák, az un. fölszálló algebrák a (2) probléma megol-

dására szolgálnak. Megmutatjuk, hogy fölszálló algebrákra is igazak az alapvető algebrai eredmények megfelelői.

A harmadik fejezetben a különböző fajtáju faautomaták definicióit és a rájuk vonatkozó, a dolgozatban később felhasznált ismert eredményeket foglaljuk össze. Itt jegyezzük meg, hogy általában az idézett eredmények első forrása szerepel az irodalomjegyzékben, de mindegyikük megtalálható a GÉCSEG és STEINBY [1975], [1979] magyar nyelvü ismertető cikkekben.

A negyedik fejezetben definiált zártsági tulajdonságok a felszálló faautomatáknak azt a jólismert sajátosságát fejezik ki, hogy az input fák független részfái függetlenül dolgozhatók föl, s a kapott eredmények között később sincsen semmilyen kölcsönhatás. Hasonló gondolatokon alapul a MAGIDOR és MORAN [1969] tanulmány 6. fejezete, de az ottani megközelités eltérő, inkább automataelméleti, mig az itt követett tisztán algebrai jellegü, s eredményeink is általánosabbak.

Az ötödik fejezetben a Kleene-féle tétel egy általánositását adjuk meg felszálló faautomatákkal fölismerhető erdőkre. Ezt a tételt, valamint az előző fejezet néhány eredményét tartalmazza a VIRÁGH [1980] cikk.

A hatodik fejezetben a szabad fölszálló automata fogalmának bevezetésével terjesztjük ki a Myhill- és Nerode-féle tételeket.

A hetedik fejezetben megmutatjuk, hogy a felszálló faautomatákkal fölismerhető erdők speciális, un. D-reguláris

fanyelvtanokkal generálhatók. A D-reguláris fanyelvtanokat felhasználva vizsgáljuk a környezetfüggetlen és a reguláris nyelvek kapcsolatát a felszálló faautomatákkal fölismerhető nyelvekkel.

Az utolsó, nyolcadik fejezetben a Gluskov [1963], [1964]-ben bevezetett kompoziciófogalomnak, illetve különböző speciális eseteinek /ld. GÉCSEG és PEÁK [1972], GÉCSEG [1974]/ általánositásával foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a közönséges automaták kompozicióira vonatkozó eredmények nagy része egyszerü eszközökkel átvihető felszálló faautomatákra is.

Köszönetemet fejezem ki Gécseg Ferenc egyetemi tanárnak, aki a felszálló faautomaták elméletének problémáira figyelmem fölhivta, s bátoritásával, hasznos tanácsaival segitett az értekezés megirásában.

1. Alapvető fogalmak, jelölések

A dolgozatban a matematikai logika és a halmazelmélet szokásos jelöléseit használjuk. N_o a természetes számokat, N az $N_o - \{0\}$ halmazt, $\emptyset$ az üres halmazt, $\mathcal{P}(A)$ az A halmaz részhalmazainak halmazát, $|A|$ az A számosságát jelöli. Tetszőleges A,B halmazokra $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall a)(a \in A \Rightarrow a \in B)$ és $A \subset B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (A \subseteq B \ \& \ A \neq B)$. Az $\{a\}$ egy elemü halmaz helyett, ha nem okoz félreértést, egyszerüen a-t irunk. A függvény, leképezés, hozzárendelés, operátor fogalmakat szinonimaként használjuk. Függvényen mindig teljesen definiált függvényt értünk.

Legyen $\varphi : A \to B$ függvény, $A' \subseteq A$ és $B' \subseteq B$. Ekkor

$$\varphi(A') = \{b \mid (\exists a' \in A')(\varphi(a') = b)\},$$

$$\varphi^{-1}(B') = \{a \mid \varphi(a) \in B'\}.$$

φ <u>injektiv</u>, ha $a_1 \neq a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$,

φ <u>szürjektiv</u>, ha $\varphi(A) = B$,

φ <u>bijektiv</u>, ha injektiv és szürjektiv.

Ha $f : A \to B$ leképezés, az f <u>additiv kiterjesztésén</u> azt a /szintén f-fel jelölt/ $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ függvényt értjük, amelyet minden $A' \subseteq A$-ra $f(A') = \{f(a') \mid a' \in A'\}$ definiál.

Tetszőleges A halmazra az <u>A fölötti n dimenziós vektorok</u> A^n-nel jelölt halmazán az $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ alaku rendezett n-esek összességét értjük, ahol $a_j \in A, j = 1,2,\ldots,n$. Vektorok esetén is használjuk a $b \in \underline{a}$ jelölést, ha az $\underline{a}$ vektor komponensei halmazok és $b \in a_i$ valamely $1 \leq i \leq n$-re.

Az $\{A_i | i \in I\}$ halmazrendszer $\prod(A_i | i \in I)$ direkt szorzata az összes olyan $f : I \to \bigcup(A_i | i \in I)$ függvényből áll, amelyre $i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i$ teljesül. Tetszőleges $i \in I$-re a π_i i-edik projekció a $\pi_i(f) = f(i)$-vel definiált $\pi_i : \prod(A_i | i \in I) \to A_i$ leképezést jelenti. Ha $I = \{1,2,\ldots,n\}$, akkor $\prod(A_i | i \in I)$ azonosítható az olyan $\bigcup(A_i | i \in I)$ fölötti n dimenziós vektorok halmazával, amelyek i-dik komponense A_i-ből való bármely $i = 1,2,\ldots,n$-re. Ekkor $\pi_i(f)$ a megfelelő vektor i-dik komponensét jelenti. A továbbiakban a véges direkt szorzatnak ezt a szemléletes fogalmát használjuk és alkalmazzuk rá az $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, illetve $A_i = A$, $i = 1,2,\ldots,n$ esetén az A^n jelölést.

Az $\{A_i | i \in I\}$ halmazrendszer $\coprod(A_i | i \in I)$ direkt összegén az $\bigcup(A_i \times \{i\} | i \in I)$ halmazt értjük.

Legyen A tetszőleges halmaz, n tetszőleges természetes szám.

Az $f : A^n \to \{0,1\}$ leképezést A fölötti n változós relációnak,

az $f : A^n \to \mathcal{P}(A)$ leképezést A fölötti n változós nemdeterminisztikus müveletnek,

az $f : A^n \to A$ leképezést A fölötti n változós müveletnek,

az $f : A \to \mathcal{P}(A^n)$ leképezést A fölötti n változós nemdeterminisztikus fölszálló müveletnek,

az $f : A \to A^n$ leképezést A fölötti n változós fölszálló müveletnek hivjuk.

Azt mondjuk, hogy f A fölötti reláció /nemdeterminisztikus művelet, stb./ ha f A fölötti n változós reláció /n változós nemdeterminisztikus művelet, stb./ valamely $n \in N$-re. Legyenek A és F nem üres halmazok. Az $\mathfrak{A} = \langle A, F^n \rangle$ rendezett párt

relációs strukturának /nemdeterminisztikus univerzális algebrának, univerzális algebrának, nemdeterminisztikus fölszálló algebrának, fölszálló algebrának/ mondjuk, ha $F^{\mathfrak{A}}$ A fölötti relációk /nemdeterminisztikus müveletek, müveletek, nemdeterminisztikus felszálló müveletek, fölszálló müveletek/ halmaza. Minden A fölötti n változós nemdeterminisztikus művelet /művelet, stb./ tekinthető A fölötti n+1 változós f^* relációnak, ha f^*-ot müveletek esetén $f^*(a_o,a_1,a_2,\ldots,a_n) = 1 \Leftrightarrow f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = a_o$-lal, fölszálló müveletek esetén $f^*(a_o,a_1,a_2,\ldots,a_n) = 1 \Leftrightarrow f(a_o) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$-nel definiáljuk. Igy a relációs struktura speciális esetének tekinthető az előbb definiált négyféle algebrafogalom. Ezen belül az algebrák /fölszálló algebrák/ fölfoghatók speciális nemdeterminisztikus algebrákként /nemdeterminisztikus fölszálló algebrákként/. A négy különböző fogalomra azért van szükség, mert ezekre épül a következő fejezetben ismertetett négyféle faautomata-fogalom.

Tipuson olyan $\langle F,\nu\rangle$ rendezett párt értünk, ahol F nem üres halmaz, a müveleti szimbolumok halmaza, ν pedig $F \to N_o$ leképezés. Ha ν ismert, az $\langle F,\nu\rangle$ tipusra csak F említésével hivatkozunk. Az $F_k = \{f \mid \nu(f) = k\}$ jelölést bevezetve F-et $F = \bigcup(F_k \mid k \in N)$ diszjunkt összegként is előállithatjuk. F_k elemeit k változós müveleti szimbolumoknak hivjuk. F tipus rangtipusán az $R(F) = \{k \mid F_k \neq \emptyset\}$ halmazt értjük. F unáris tipus, ha $R(F) = \{1\}$, azaz $F = F_1$.

$\mathfrak{A} = \langle A,F^{\mathfrak{A}}\rangle$ F tipusu nemdeterminisztikus univerzális algebra /F tipusu univerzális algebra, F tipusu nemdeterminisztikus fölszálló algebra, F tipusu fölszálló algebra/ ha

$F^{\mathfrak{A}} = \{f^{\mathfrak{A}} \mid f \in F\}$ és $f^{\mathfrak{A}}$, az f realizáltja A-n, $\nu(f)$ változós A fölötti nemdeterminisztikus művelet /művelet, nemdeterminisztikus fölszálló művelet, fölszálló művelet/. A továbbiakban, ha nem okoz félreértést, $F^{\mathfrak{A}}$ és $f^{\mathfrak{A}}$ jelöléséből elhagyjuk az $\mathfrak{A}$ fölső indexet.

A 6. és 7. fejezetben célszerübb lesz a müveletek zárójel nélküli, lengyel prefix jelölésü irásmódja, erre külön felhivjuk az olvasó figyelmét.

Most a relációs strukturákkal és az univerzális algebrákkal kapcsolatos néhány, a továbbiakban gyakran használt fogalmat idézünk fel a GRÄTZER [1968] könyv alapján.

A ϱ A fölötti bináris reláció kiterjeszthető tetszőleges $n \in N$-re A^n fölötti $\varrho^{(n)}$ bináris relációvá az $\underline{a}\ \varrho^{(n)}\ \underline{b} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall\, 1 \leq i \leq n)\,(a_i \varrho\, b_i)$ definicióval, a továbbiakban $\varrho^{(n)}$ helyett is egyszerüen ϱ-t irunk.

A ϱ A fölötti bináris relációt ekvivalenciának hivjuk, ha ϱ reflexiv, szimmetrikus és tranzitiv. A összes ekvivalenciájának halmazát $\mathcal{E}(A)$ jelöli.

Az $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ relációs struktura parciálisan rendezett halmaz, ha $\leq$ reflexiv, antiszimmetrikus és tranzitiv bináris reláció A fölött.

Az $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ parciálisan rendezett halmaz lánc, ha bármely $a,b \in A$-ra $a \leq b$ vagy $b \leq a$ teljesül.

Legyen $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ parciálisan rendezett halmaz, $A' \subseteq A$, $\mathrm{lub}(A')$ jelölje A' elemeinek / $\leq$ szerinti/ legkisebb felső korlátját, $\mathrm{glb}(A')$ az A' elemeinek legnagyobb alsó korlátját /amennyiben létezik/. $\mathfrak{A}$ háló, ha minden $a,b \in A$-ra létezik $\mathrm{glb}(\{a,b\})$ és $\mathrm{lub}(\{a,b\})$. Bevezetve a $\wedge(a,b) = \mathrm{glb}(\{a,b\})$

és $\vee(a,b) = \mathrm{lub}(\{a,b\})$ müveleteket, az $\mathfrak{A}$ hálót $\mathfrak{A} = \langle A, F^{\mathfrak{A}} \rangle$ $F = F_2 = \{\vee, \wedge\}$ univerzális algebraként is definiálhatjuk. Ismert, hogy a háló két előző definiciója ekvivalens. $\mathfrak{A}$ teljes háló, ha bármely $A' \subseteq A$-ra létezik $\mathrm{lub}(A')$ és $\mathrm{glb}(A')$. Az $a \in A$ elem kompakt, ha $a \leq \mathrm{lub}(A')$-ből következik $a \leq \mathrm{lub}(A'')$ valamely véges $A'' \subseteq A$-re. $\mathfrak{A}$ algebrai háló, ha

(i) $\mathfrak{A}$ teljes háló,

(ii) bármely $a \in A$ $a = \mathrm{lub}(A')$ alakban irható, ahol A' minden eleme kompakt.

$\mathfrak{A} = \langle A, \{\vee,\wedge\} \rangle$ disztributiv háló, ha bármely $a,b,c \in A$-ra $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

A háló fogalma szoros kapcsolatban van az un. lezárási rendszerekkel. Γ A fölötti lezárási rendszer, ha $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(A)$ és bármely $\mathcal{G} \subseteq \Gamma$ -re $\cap \mathcal{G} \in \Gamma$. Igy $\mathcal{G} = \emptyset$-tvéve $\cap \mathcal{G} = A \in \Gamma$ mindig teljesül. A $\Delta : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ leképezés A fölötti lezárási operátor, ha bármely $B,C \subseteq A$-ra

(i) $B \subseteq C \Rightarrow \Delta(B) \subseteq \Delta(C)$,

(ii) $B \subseteq \Delta(B)$,

iii $\Delta(B) = \Delta(\Delta(B))$.

Tetszőleges Γ lezárási rendszerhez egy $\Delta_\Gamma : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ operátort rendelhetünk a $\Delta_\Gamma(B) = \cap\{C \mid C \in \Gamma \ \& \ B \subseteq C\}$ definicióval. Ismert, hogy Δ_Γ lezárási operátor, és $\varphi(\Gamma) = \Delta_\Gamma$ bijekció az A fölötti lezárási rendszerek és lezárási operátorok között. A φ^{-1} inverz leképezést $\varphi^{-1}(\Delta) = \Gamma_\Delta$ definiálja, ahol $\Gamma_\Delta = \{C \mid C = \Delta(C)\}$. Γ_Δ elemeit Δ-zárt halmazoknak nevezzük. A Δ lezárási operátor valódi, ha $\Delta(\emptyset) = \emptyset$, algebrai, ha bármely $B \subseteq A$-ra $\Delta(B) = \bigcup \{\Delta(B') \mid B' \subseteq B$ és B' véges$\}$, topologikus, ha bármely $B,C \subseteq A$-ra $\Delta(A) \cup \Delta(B) =$

$= \Delta(A \cup B)$. A $\mathfrak{L}$ lezárási rendszer valódi /algebrai, topologikus/, ha $\Delta_{\mathfrak{L}}$ valódi /algebrai, topologikus/.

Ismert, hogy ha $\mathfrak{L}$ lezárási rendszer, akkor $\langle \mathfrak{L}, \leq \rangle$ teljes háló,

ha $\mathfrak{L}$ algebrai, akkor $\langle \mathfrak{L}, \leq \rangle$ algebrai háló,

ha $\mathfrak{L}$ topologikus, akkor $\langle \mathfrak{L}, \leq \rangle$ a $\langle \mathcal{P}(A), \leq \rangle$ részhálója.

Az univerzális algebrák közül a továbbiakban az unáris tipusuakra, az un. unoidokra lesz szükségünk. Az unoidok tekinthetők felszálló algebráknak, hiszen egyváltozós müveleteik felszálló müveletekként is felfoghatók. Ezért a következő fejezetben felszálló algebrákra definiált részstruktura, generátorrendszer, homomorfizmus, izomorfizmus, beágyazás, stb. fogalmak speciális esetként tartalmazzák a /felszálló algebráknak tekintett/ unoidok megfelelő definicióit. Könnyen ellenőrizhető, szükség esetén GRÄTZER [1968]-at felhasználva, hogy ezek a definiciók egybeesnek a "hagyományos", az unoidokat egyváltozós müveletekkel rendelkező univerzális algebráknak tekintő megfelelő univerzális algebrai definiciókkal.

Legyen X tetszőleges halmaz. $\mathfrak{X}^* = \langle X^*, \{\cdot, \lambda\} \rangle$ az X által generált szabad monoid, amelyben X^* az X elemeiből képezett összes véges sorozatok halmaza, a $\cdot$ kétváltozós müvelet a konkatenáció, azaz bármely $w_1, w_2 \in X^*$ esetén $w_1 \cdot w_2 = w_1 w_2$, végül a λ 0-változós müvelet az un. üres szó, amelyre tetszőleges $w \in X^*$ esetén $\lambda w = w\lambda = w$. Ismert, hogy $\mathfrak{X}^*$ egységelemes félcsoport a λ egységelemmel.

József Attila Tudományegyetem Könyvtára SZEGED

Ha X véges, akkor tetszőleges $L \subseteq X^*$ halmazt /X fölötti/ nyelvnek nevezünk. Az L nyelv λ-mentes, ha $\lambda \notin L$.

Tetszőleges $L_1, L_2 \subseteq X^*$ nyelvekre értelmezhetők az alábbi müveletek /vö. SALOMAA [1973] /:

(i) $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ és $L_1 - L_2$ a szokásos halmazelméleti müveleteket jelenti,

(ii) $L_1 L_2 = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \& w_2 \in L_2 \}$,

(iii) L_1^* az $)^*$-nak L_1 által generált részmonoidja,

(iv) $L_1 / L_2 = \{ u \mid uv \in L_1$ valamely $v \in L_2$-re$\}$,

(v) $mi(L) = \{ x_{i_k} x_{i_{k-1}} \ldots x_{i_1} \mid x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \in L$ és $x_{i_j} \in X$, $j = 1, \ldots, k \}$.

Legyen $w, z \in X^*$, w a z prefixe, ha $z = wv$ valamely $v \in X^*$-ra, w a z szuffixe, ha $z = uw$ valamely $u \in X^*$-ra.

X fölötti környezetfüggetlen nyelvtanon a $G = \langle V, X, P, s \rangle$ rendszert értjük, ahol

(i) V a nemterminális szimbolumok /X-szel diszjunkt/ véges, nemüres halmaza,

(ii) $s \in V$ a kezdőszimbolum,

(iii) X a terminális szimbolumok halmaza,

(iv) P az átirási szabályok véges halmaza, ahol a szabályok $v \to w$ alakuak, $v \in V$ és $w \in \{ V \cup X \}^*$.

A G által indukált $\Rightarrow_G$ reláció a következő: tetszőleges $w, z \in \{ V \cup X \}^*$ esetén $w \Rightarrow_G z$ akkor és csak akkor teljesül, ha $w = w_1 v w_2$, $z = w_1 y w_2$, és a $v \to y$ szabály P-ben van. Legyen $\Rightarrow_G^*$ a $\Rightarrow_G$ reláció reflexiv-tranzitiv lezártja. A G által generált nyelven az

$$L(G) = \{ w \mid w \in X^* \& s \Rightarrow_G^* w \}$$

nyelvet értjük. Az $L \subseteq X^*$ nyelv <u>környezetfüggetlen</u>, ha környezetfüggetlen nyelvtannal generálható.

<u>Véges automatán</u> olyan $\mathcal{A} = \langle A, X, \delta, a_0, \bar{A} \rangle$ rendszert értünk, amelyre

A véges, nemüres halmaz, az állapotok halmaza,

X véges, nemüres halmaz, a bemenő jelek halmaza,

$\delta : A \times X \to A$ az átmenetfüggvény,

$\bar{A} \subseteq A$ a végállapot-halmaz.

δ kiterjeszthető $A \times X^* \to A$ leképezéssé a

$$\delta(a,\lambda) = a, \quad \delta(a,wx) = \delta(\delta(a,w),x)$$

definicióval, ahol $a \in A$, $w \in X^*$ és $x \in X$ tetszőleges.

Az $\mathcal{A}$ <u>véges automata által fölismert nyelv</u>:

$$L(\mathcal{A}) = \{w \mid w \in X^* \ \& \ \delta(a_0,w) \in \bar{A}\} .$$

Az L nyelv <u>reguláris</u>, ha fölismerhető véges automatával.

Legyen F tetszőleges tipus, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ a továbbiakban rögzitett, megszámlálhatóan végtelen változóhalmaz és $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tetszőleges $n \in N$-re. Az <u>X_n fölötti F tipusu n változós polinomszimbolumok</u> $T_{F,n}$ -nel jelölt halmazán azt a legszükebb halmazt értjük, amelyre

(i) $X_n \cup F_0 \subseteq T_{F,n}$,

(ii) bármely $k \in R(F)$, $f \in F_k$ és $p_1, \ldots, p_k \in T_{F,n}$ esetén $f(p_1, \ldots, p_k) \in T_{F,n}$.

Az <u>X_n által generált</u> $\mathcal{T}_{F,n} = \langle T_{F,n}, F \rangle$ <u>F tipusu szabad algebra</u> müveleteit tetszőleges $k \in R(F)$, $f \in F_k$ és $p_1, \ldots, p_k \in T_{F,n}$ esetén $f^{\mathcal{T}_{T,n}}(p_1, \ldots, p_k) = f(p_1, \ldots, p_k)$ definiálja.

Jelölje T_F az $\bigcup(T_{F,n} \mid n \in N)$ halmazt. A faautomaták elméletében T_F elemeit <u>F-fáknak</u>, a t $T_{F,n}$ polinomszimbolumo-

kat n-változós F-fáknak, $T_{F,n}$ részhalmazait n-változós F-erdőknek nevezik. Ha n és F ismert, az ezekre való hivatkozást elhagyjuk az előző elnevezésekből.

A $p \in T_F$ fa h(p) magasságán azt a $h : T_F \to N_o$ függvényt értjük, amelyre

(i) $h(p) = 0$, ha $p \in X \cup F_o$,

(ii) $h(p) = 1 + \max(h(p_i) \mid i = 1,\ldots,k)$, ha $p = f(p_1,\ldots,p_k)$ valamely $k \in R(F)$, $f \in F_k$, $k > 0$ és $p_1,\ldots,p_k \in T_F$-re.

A definicióból látható, hogy erdőkre vonatkozó állitásokat az N_o szerinti teljes indukciónak megfelelő h(p) szerinti indukcióval is bizonyithatunk.

A $p \in T_F$ fa root(p) gyökerén a következőt értjük:

(i) ha $p \in X \cup F_o$, akkor $root(p) = p$,

(ii) ha $p = f(p_1,\ldots,p_k)$, akkor $root(p) = f$.

A $p \in T_F$ fa részfáinak sub(p) halmaza:

(i) ha $p \in X \cup F_o$, akkor $sub(p) = \{p\}$,

(ii) ha $p = f(p_1,\ldots,p_k)$, akkor $sub(p) = \{p\} \cup \left(\bigcup(sub(p_i) \mid i = 1,\ldots,k)\right)$.

A $p \in T_F$ fa szuperfáinak sup(p) halmaza az összes olyan $t \in T_F$ fát tartalmazza, amelyekhez megadható olyan $k,l \in N$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq l$, $p_1,\ldots,p_k \in T_F$, hogy $p = t(x_{i_1} \leftarrow p_1, x_{i_2} \leftarrow p_2,\ldots,x_{i_k} \leftarrow p_k)$. Itt $t(x_{i_1} \leftarrow p_1,\ldots,x_{i_k} \leftarrow p_k)$ azt a fát jelöli, amelyet ugy kapunk t-ből, hogy x_{i_1} minden előfordulását p_1-gyel,...,x_{i_k} minden előfordulását p_k-val helyettesitjük.

Tetszőleges $T_1, T_2 \subseteq T_{F,n}$ erdőkre a $T_1 \cup T_2$, $T_1 \cap T_2$ és $T_1 - T_2$ erdőket a szokásos halmazelméleti müveletekkel értel-

mezzük. Tetszőleges $i \in N$-re a $T_1 \cdot_{x_i} T_2$ x_i-szorzaton azt az n-változós F-erdőt értjük, amelyet ugy kapunk, hogy minden $t_1 \in T_1$ fában x_i minden előfordulását T_2-höz tartozó fákkal helyettesitjük. /Különböző előfordulásokat lehet különböző fákkal is./ A $T_1^{*x_i}$ x_i-iterált értelmezése

$$T_1^{*x_i} = \bigcup (T^{j,x_i} \mid j \in N_o), \text{ ahol}$$

$$T^{o,x_i} = \{x_i\} \text{ és}$$

$$T^{j+1,x_i} = T^{j,x_i} \cup T_1 \cdot_{x_i} T^{j,x_i} \text{ bármely } j \in N_o\text{-ra.}$$

Legyen F és G két tetszőleges tipus. A $\gamma : F \to G$ leképezést projekciónak hivjuk, ha bármely $f \in F$ és $i \in N_o$-ra $f \in F_i \Rightarrow \gamma(f) \in G_i$. γ kiterjeszthető $T_F \to T_G$ leképezéssé a

$$\gamma(x) = x, \text{ ha } x \in X,$$

$$\gamma(f(p_1,\ldots,p_k)) = \gamma(f)\left(\gamma(p_1),\ldots,\gamma(p_k)\right) \text{ definicióval.}$$

A $T \subseteq T_{F,n}$ erdő projekcióján a $\gamma(T) = \{\gamma(t) \mid t \in T\}$ erdőt értjük. Az $S \subseteq T_{G,n}$ erdő inverz projekciója $\gamma^{-1}(S) = \{t \mid \gamma(t) \in S\}$.

Vezessük be a következő $fr : T_F \to X^*$ leképezést:

(i) ha $p = x_i$, akkor $fr(p) = x_i$,

ii ha $p = f_o$, akkor $fr(p) = \lambda$,

iii ha $p = f(p_1,\ldots,p_k)$, akkor $fr(p) = fr(p_1)\,fr(p_2)\cdots fr(p_k)$.

A fr függvény additiv kiterjesztése tetszőleges $T \subseteq T_F$-re a

$$fr\ T = \{fr(t) \mid t \in T\}.$$

A definicióból látható, hogy ha T n-változós erdő, akkor fr T X_n fölötti nyelv.

2. Felszálló algebrák

Ebben a fejezetben a felszálló algebrák alapvető tulajdonságait vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy természetes módon értelmezhetők rájuk az ismert algebrai konstrukciók. Az univerzális algebrák és a felszálló algebrák között az unoidok alkotják azt a hidat, amelyet fölhasználva az univerzális algebrákra vonatkozó eredmények könnyen átvihetők felszálló algebrákra.

A továbbiakban kizárjuk a 0-változós müveleteket, vagyis az előforduló $\langle F, \nu \rangle$ tipusokról mindig feltesszük, hogy $F_0 = \emptyset$. Erre a későbbiek miatt van szükség, amikor majd a felszálló algebrákra épülő felszálló faautomatákat vizsgáljuk /vö. GÉCSEG-STEINBY [1978]/. Addig is a tárgyalásunkat egyszerüsiti, az eredményeket pedig lényegében nem befolyásolja ez a kikötés. A rövidség kedvéért felszálló algebra helyett legtöbbször algebrát mondunk, mig az univerzális algebrákra ezután is teljes nevükkel hivatkozunk.

Legyen $\varphi : A \to B$ tetszőleges leképezés, $k \in N$. Ekkor φ természetes módon általánositható $\varphi : A^k \to B^k$ leképezéssé a $\varphi(\underline{a}) = \underline{b} \iff (\forall\, 1 \leq i \leq k)\ (\varphi(a_i) = b_i)$ definicióval. A továbbiakban gyakran fölhasználjuk φ -nek ezt a kiterjesztett értelmezését.

Legyen $\mathcal{U}, \mathcal{L}$ két F-algebra, $\varphi : A \to B$ leképezés. φ homomorphizmus, ha bármely $a \in A$-ra és $f \in F$-re $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$. $\mathcal{L}$ az $\mathcal{U}$ homomorf képe, ha φ szürjektiv. φ izomorfizmus, ha φ bijektiv is. Ekkor $\mathcal{U}$ -t és $\mathcal{L}$ -t izomorfoknak mondjuk, jelölése: $\mathcal{U} \cong \mathcal{L}$. Ez a $\cong$ reláció ekvivalencia az összes F-algebra K(F) halmazán. Az injektiv homo-

morfizmusokat beágyazásoknak hivjuk. $\mathfrak{A}$ izomorfan beágyazható $\mathfrak{B}$ -be, ha létezik $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ beágyazás.

A $\varrho \in \mathcal{E}(\mathfrak{A})$ ekvivalenciát $\mathfrak{A}$ kongruenciájának mondjuk, ha bármely $a,b \in A$ és $f \in F$-re $a \varrho b \Rightarrow f(a) \varrho f(b)$. $\mathfrak{A}$ összes kongruenciájának halmazát $\mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ -val jelöljük. Tetszőleges $\mathfrak{A}$ -ra $\iota, \omega \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$, ahol $(\forall a,b \in A)(a \iota b)$ és $(\forall a,b \in A)$ $(a \omega b \Leftrightarrow a = b)$. A ϱ valódi kongruencia, ha $\varrho \neq \iota$ és $\varrho \neq \omega$. Legyen $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$, ϱ_2 a ϱ_1 finomitása, jelben $\varrho_2 \leq \varrho_1$, ha $(\forall a,b \in A)\left(a \varrho_2 b \Rightarrow a \varrho_1 b\right)$. A $\leq$ reláció parciális rendezés $\mathrm{Con}(\mathfrak{A})$-n.

Az $\mathfrak{A} = \langle A, F^{\mathfrak{A}} \rangle$ algebrának $\mathfrak{B} = \langle B, F^{\mathfrak{B}} \rangle$ részalgebrája, ha

(i) $B \subseteq A$,

(ii) $(\forall b \in B)\left(\forall f \in F\right)\left(f^{\mathfrak{B}}(b) = f^{\mathfrak{A}}(b)\right)$,

(iii) $(\forall b \in B)\left(\forall f \in F\right)\left(c \in f^{\mathfrak{B}}(b) \Rightarrow c \in B\right)$.

$\mathfrak{B}$ valódi részalgebra, ha $B \subset A$. Jelölje $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ az $\{\emptyset\} \cup \{B \mid \mathfrak{B}$ részalgebrája $\mathfrak{A}$-nak$\}$ halmazt. Tekintsük a következő $\Gamma : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ leképezést: tetszőleges $G \subseteq A$-ra $\Gamma(G) = \bigcup (G_i \mid i \in N_o)$, ahol

(*) $G_o = G$,

(**) $G_{i+1} = \left\{ g \middle| (\exists a \in G_i)(\exists f \in F)\left(g \in f^{\mathfrak{A}}(a)\right) \right\}$.

1. lemma. (i) Γ valódi topologikus algebrai lezárási operátor A fölött,

(ii) $\mathfrak{L}_\Gamma = \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$.

Bizonyitás. (i)-hez a következőket kell igazolni:

1/ $\Gamma(\emptyset) = \emptyset$

2/ $G \subseteq \Gamma(G)$

3/ $G \subseteq H \Rightarrow \Gamma(G) \subseteq \Gamma(H)$

4/ $\Gamma(G) = \Gamma(\Gamma(G))$

5/ $\Gamma(G \cup H) = \Gamma(G) \cup \Gamma(H)$

6/ $g \in \Gamma(G) \Rightarrow (\exists G' \subseteq G)(G' \text{ véges } \& \ g \in \Gamma(G'))$.

1/ és 2/ triviális, 3/-6/ következik az alábbi állitásokból:

3'/ $G \subseteq H \Rightarrow (\forall i \in N_o)(G_i \subseteq H_i)$

4'/ Ha $H = \Gamma(G)$, akkor $(\forall i \in N_o)(H_i = \Gamma(G))$

5'/ Ha $K = G \cup H$, akkor $(\forall i \in N_o)(K_i = G_i \cup H_i)$

6'/ $(\forall i \in N_o)(g \in G_i \Rightarrow (\exists G_i' \subseteq G_i)(G_i' \text{ véges } \& \ g \in \Gamma(G_i')))$.

Ez a négy állitás hasonlóan bizonyitható i szerinti teljes indukcióval, Γ definiciójából (*) és (**) -ot fölhasználva. Ezért csak 3'/-t részletezzük.

a/ Az $i = 0$ eset triviális, hiszen $G_o = G \subseteq H = H_o$.

b/ Legyen $i \geq 0$, és tegyük fel, hogy i-re teljesül $G_i \subseteq H_i$. Legyen $g \in G_{i+1}$ tetszőleges. Ekkor $(\exists a \in G_i)(\exists f \in F)(g \in f^{\mathfrak{A}}(a))$, de $G_i \subseteq H_i$ miatt $a \in H_i$, és igy (**) alapján $g \in H_{i+1}$. Mivel g tetszőleges volt, innen $G_{i+1} \subseteq H_{i+1}$ adódik.

(ii) bizonyitásához egyrészt elegendő megjegyezni, hogy ha $G \in \mathcal{L}_\Gamma$, akkor $\langle G,F\rangle$-re a részalgebra-definició három feltétele nyilvánvalóan teljesül, ezért $G \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$.

Forditva, ha $G \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$, akkor a definició (iii) pontja miatt bármely $i \in N_o$-ra $G_i = G$, ezért $\Gamma(G) = \bigcup(G_i \mid i \in N_o) = G$, tehát $G \in \mathcal{L}_\Gamma$. □

Ha $\mathcal{L}$ az $\mathfrak{A}$ részalgebrája és $B = \Gamma(G)$, akkor G-t a $\mathcal{L}$ generátorrendszerének, G elemeit generátorelemeknek hivjuk. Az $\mathfrak{A} = \langle A, F^{\mathfrak{A}}\rangle$ algebrának a $G \subseteq A$ által generált részalgebráját a továbbiakban $\langle [G], F\rangle$-fel, vagy néha röviden $[G]$-vel

jelöljük.

2. lemma. G akkor és csak akkor generátorrendszere $\mathfrak{U}$-nak, ha tetszőleges $\mathfrak{L}$ algebrára és $\varphi: \mathfrak{L} \to \mathfrak{U}$ homomorfizmusra $G \subseteq \varphi(C)$-ből $\varphi(C) = A$ következik.

Bizonyitás. Az elegendőség bizonyitásához legyen $\mathfrak{L} = \langle [G], F \rangle$, $\varphi: [G] \to A$ a G identikus leképezése A-ba. Mivel φ homomorfizmus és $G \subseteq \varphi([G]) = [G]$, a feltétel szerint $A = \varphi([G]) = [G]$, tehát G generátorrendszere $\mathfrak{U}$-nak.

A szükségesség igazolásához legyen a $\mathfrak{L} = \langle C, F \rangle$ algebra a $\varphi: \mathfrak{L} \to \mathfrak{U}$ homomorfizmus és $a \in A$ tetszőleges. Mivel G generátorrendszere $\mathfrak{U}$-nak, megadható olyan k természetes szám és

$$(*) \quad (a_0, f_0, i_0), (a_1, f_1, i_1), \ldots, (a_k, f_k, i_k)$$

sorozat, hogy $a_0 \in G$, $a_{j+1} = \pi_{i_j}\left(f_j^{\mathfrak{U}}(a_j)\right)$, $j = 1,2,\ldots,k-1$ és $a_{k+1} = \pi_{i_k}\left(f_k^{\mathfrak{U}}(a_k)\right) = a$. Mivel $G \subseteq \varphi(C)$, $(\exists c_0)(\varphi(c_0) = a_0)$. Tekintsük a $(*)$-nak megfelelő

$$(**) \quad (c_0, f_0, i_0), (c_1, f_1, i_1), \ldots, (c_k, f_k, i_k)$$

sorozatot, ahol $c_{j+1} = \pi_{i_j}\left(f_j^{\mathfrak{L}}(c_j)\right)$, $j = 1,2,\ldots,k$. Mivel φ homomorfizmus, $(*)$ és $(**)$ összevetéséből $j = k$-ra $\varphi(c_{k+1}) = a_{k+1} = a$. De $a \in A$ tetszőleges lévén, ebből $\varphi(C) = A$ adódik. □

Legyen $\langle G, \sigma \rangle$ és $\langle H, \nu \rangle$ két tipus, $G \subseteq H$ és bármely $g \in G$-re $\sigma(g) = \nu(g)$. A $\mathfrak{B} = \langle B, G^{\mathfrak{B}} \rangle$ algebrát az $\mathfrak{U} = \langle A, H^{\mathfrak{U}} \rangle$ F-részalgebrájának mondjuk, ha $A = B$ és bármely $g \in G$, $a \in A$ esetén $g^{\mathfrak{B}}(a) = g^{\mathfrak{U}}(a)$.

Tetszőleges $\langle F, \nu \rangle$ tipushoz rendeljük azt az $\langle F_\sigma, \nu_\sigma \rangle$ unáris tipust, ahol $F_\sigma \subseteq F \times N$ és bármely $f \in F$-re $(f,i) \in F_\sigma \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow i \leq \nu(f)$. A továbbiakban (f,i) helyett röviden f_i-t irunk.

Legyen F tetszőleges tipus, G tetszőleges unáris tipus és $\mu : G \to F_\sigma$ szürjektiv leképezés. Ekkor az $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$ fölszálló algebrához hozzárendelhetjük azt az $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, G \rangle$ unoidot, amelyben bármely $a \in A$-ra és $g \in G$-re, ha $\mu(g) = f_i$, akkor $g^{\mathfrak{A}_\mu}(a) = \pi_i(f^{\mathfrak{A}}(a))$.

Forditva, ha $\lambda : F_\sigma \to G$ szürjektiv leképezés, akkor az $\mathfrak{U} = \langle U, G \rangle$ unoidhoz azt az $\mathfrak{U}_\lambda = \langle U, F \rangle$ algebrát rendelhetjük, amelyben bármely $a \in A$-ra és $f \in F$-re $f^{\mathfrak{U}_\lambda}(a) =$ $= (b_1, \ldots, b_{\nu(f)}) \Leftrightarrow (\forall\, 1 \leq i \leq \nu(f))\ (\lambda(f_i) = g_i \,\&\, g_i^{\mathfrak{U}}(a) = b_i)$. Mindkét hozzárendelés megőrzi a strukturák egy sor alapvető tulajdonságát. A továbbiakban a két legfontosabb speciális esettel foglalkozunk.

Először legyen $G = F_\sigma$ és μ az identikus leképezés. Ekkor érvényes a

3. lemma. (i) Az $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$ $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, F_\sigma \rangle$ hozzárendelés bijekció az F tipusu algebrák és az F_σ tipusu unoidok között.

(ii) ϱ kongruencia $\mathfrak{A}$-n $\Leftrightarrow$ ϱ kongruencia $\mathfrak{A}_\mu$-n.

(iii) $\mathfrak{B}$ részalgebrája $\mathfrak{A}$-nak $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}_\mu$ részunoidja $\mathfrak{A}_\mu$-nek.

(iv) $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ homomorfizmus /izomorfizmus, beágyazás/ $\Leftrightarrow$ $\varphi : \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_\mu$ homomorfizmus /izomorfizmus, beágyazás/.

Bizonyitás. (i) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_\mu$ injektiv: ha $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, két eset lehetséges:

a/ $A \neq B$, ekkor világos, hogy $\mathfrak{A}_\mu \neq \mathfrak{B}_\mu$.

b/ $A = B$, de $(\exists f \in F)\,(\exists a \in A)\,\big(\exists 1 \leq i \leq \nu(f)\big)\big(\pi_i\, f^{\mathfrak{A}}(a) \neq \neq \pi_i\, f^{\mathfrak{B}}(a)\big)$.

Ekkor $f_i^{\mathfrak{A}_\mu}(a) \neq f_i^{\mathfrak{B}_\mu}(a)$ miatt $\mathfrak{A}_\mu \neq \mathfrak{B}_\mu$.

$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_\mu$ szürjektiv: legyen $\mathcal{U} = \langle U, F_\sigma \rangle$ tetszőleges F_σ-unoid. Definiáljuk az $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$ algebrát igy: $A = U$ és

$$(*)\quad (\forall a \in U)(\forall f \in F)\big(f^{\mathfrak{A}}(a) = \big(f_1^{\mathcal{U}}(a), f_2^{\mathcal{U}}(a), \ldots, f_{\nu(f)}^{\mathcal{U}}(a)\big)\big).$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{A}_\mu = \mathcal{U}$ lesz.

(ii) Mivel $\varrho \in \mathcal{E}(A)$, a következő ekvivalenciát kell belátni:

$$(**)\quad (\forall a,b \in A)\Big(\big(\forall f \in F\big)\ \big(a \varrho b \Rightarrow f^{\mathfrak{A}}(a) \varrho f^{\mathfrak{A}}(b)\big) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\forall f_i \in F_\sigma)\,\big(a \varrho b \Rightarrow f_i^{\mathfrak{A}_\mu}(a) \varrho f_i^{\mathfrak{A}_\mu}(b)\big)\Big).$$

$(**)$ rögtön következik az f és f_i müveletek $(*)$-nál fölirt kapcsolatából és a ϱ ekvivalencia vektorokra történő kiterjesztésének korábbi definiciójából.

Az (iii) és (iv) állitások hasonló eszközökkel bizonyithatók, ezért ezeket nem részletezzük. □

Másodszor vizsgáljuk azt az esetet, amikor $|G| \leq |F_\sigma|$ és a rögzitett $\lambda : F_\sigma \to G$ szürjektiv leképezés homogén, azaz

$$(\forall f \in F)\ \big(1 \leq i,j \leq \nu(f)\big)\ \big(\lambda(f_i) = \lambda(f_j)\big).$$

Ekkor az $\mathfrak{A}_\lambda$ F-algebrák a következő tulajdonságuak:

$$(\forall a \in U)(\forall f \in F)(\exists b \in U)\left(f^{\mathcal{U}_\lambda}(a) = (b,b,\ldots,b)\right).$$

Az ilyen tulajdonságu algebrákat nevezzük homogénnek. Érvényes a

4. lemma. (i) Az $\mathcal{U} \to \mathcal{U}_\lambda$ hozzárendelés bijekció az unoidok és a homogén algebrák között.

(ii) ϱ kongruencia $\mathcal{U}$-n $\Leftrightarrow \varrho$ kongruencia $\mathcal{U}_\lambda$-n.

iii $\mathcal{V}$ részunoidja $\mathcal{U}$-nak $\Leftrightarrow \mathcal{V}_\lambda$ részalgebrája $\mathcal{U}_\lambda$-nak.

(iv) $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ homomorfizmus /izomorfizmus, beágyazás/ $\Leftrightarrow \varphi : \mathcal{U}_\lambda \to \mathcal{V}_\lambda$ homomorfizmus /izomorfizmus, beágyazás/.

Bizonyitás. Hasonló az előző lemmáéhoz, ezért elhagyjuk.

Az előző két lemma segitségével szinte minden olyan univerzális algebrai eredmény, amely unoidokra igaz, általánositható algebrákra. Az alábbi állitásokban szereplő R rangtipusokról föltesszük, hogy a 0-t nem tartalmazzák. Erre a korábbi $F_0 = \emptyset$ kikötés miatt van szükség.

5. következmény. Legyen R tetszőleges rangtipus.

(1) Minden R rangtipusu $\mathcal{U} = \langle A,F \rangle$ algebrára $\langle Con(\mathcal{U}), \leq \rangle$ algebrai háló.

(2) Minden R rangtipusu $\mathcal{U} = \langle A,F \rangle$ algebrára $\langle Sub(\mathcal{U}), \leq \rangle$

(i) algebrai háló

(ii) $\langle \mathcal{P}(A), \leq \rangle$ részhálója

(iii) $A, \emptyset \in Sub(\mathcal{U})$.

(3) Tetszőleges A halmazhoz és a (2)-ben fölsorolt (i) - (iii) tulajdonságu $\langle L, \leq \rangle$ hálóhoz megadható olyan $\mathcal{U} = \langle A,F \rangle$ R rangtipusu F-algebra, hogy $\langle Sub(\mathcal{U}), \leq \rangle = \langle L, \leq \rangle$.

(4) Minden monoid izomorf valamely $\mathcal{U}$ R rangtipusu F-algeb-

ra endomorfizmusmonoidjával.

(5) Minden csoport izomorf valamely $\mathfrak{A}$ R rangtipusu F-algebra automorfizmuscsoportjával.

Bizonyitás. Unoidokra jól ismert mind az öt állitás /v.ö. GRÄTZER [1968]/. A 3. lemma szerint $\mathrm{Con}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Con}(\mathfrak{A}_\mu)$ és $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}_\mu)$, igy rögtön adódik (1) és (2). A (3)-(5) bizonyitáshoz vegyünk egy-egy megfelelő tulajdonságu $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ unoidot. Az $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_\lambda$ hozzárendeléssel konstruáljunk meg három, nekik megfelelő R rangtipusu algebrát. A 4. lemma biztositja, hogy ez a három algebra is eleget tesz a megfelelő feltételeknek. □

Tetszőleges A halmazra és $\varrho \in \mathcal{E}(A)$ ekvivalenciára jelölje $a/_\varrho$ a ϱ által indukált osztályozás a-t tartalmazó osztályát, $A/_\varrho = \{a/_\varrho \mid a \in A\}$. A ϱ-hoz hozzárendelhető a $\varphi_\varrho : A \to A/_\varrho$, $\varphi_\varrho(a) = a/_\varrho$ leképezés. Minden $\varphi : A \to B$ leképezés egy $\varrho_\varphi \in \mathcal{E}(A)$ ekvivalenciát indukál az $a \varrho_\varphi b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ definició szerint. Ha $\varrho \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$, az $\mathfrak{A}/_\varrho = \langle A/_\varrho, F\rangle$ faktoralgebrán azt az F-algebrát értjük, amelyre

$$(\forall f \in F)(\forall a \in A)\Big(f^{\mathfrak{A}/_\varrho}(a) = (a_1/_\varrho, a_2/_\varrho, \ldots, a_{\nu(f)}/_\varrho) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^{\mathfrak{A}}(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_{\nu(f)})\Big)$$

teljesül.

6. következmény. (i) Ha $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ szürjektiv homomorfizmus, akkor $\varrho_\varphi \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ és $\mathfrak{A}/_{\varrho_\varphi} \cong \mathfrak{B}$.

(ii) Ha $\varrho \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$, akkor $\varphi_\varrho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_\varrho$ szürjektiv homomorfizmus.

Bizonyitás. Unoidokra ismertek ezek az állitások, ebből a 3. lemma fölhasználásával következik, hogy tetszőle-

Jósef Attila Tudományegyetem Könyvtára SZEGED

ges F tipusu algebrákra is igazak. □

Legyen $\mathcal{L}$ részalgebrája $\mathcal{U}$ -nak, $\varrho \in Con(\mathcal{L})$. A ϱ kongruencia $\mathcal{U}$-ra való ω-kiterjesztésén azt a /minimális/ $\varrho^A \in Con(\mathcal{U})$ kongruenciát értjük, amely B-n ϱ -val, A-B-n ω -val egyezik meg. A $\mathcal{L}$ részalgebra által generált kongruencia: $\varrho(\mathcal{L}) = \bigcap \{ \varrho \mid \varrho \in Con(\mathcal{U}) \ \& \ (\forall a,b \in B)(a \varrho b) \}$. Megjegyezzük, hogy a $\varrho(\mathcal{L})$ kongruencia által indukált osztályozás B-ből és egyelemü osztályokból áll.

Az $\{\mathcal{U}_i \mid i = 1,2,\ldots,n\}$ F-algebrák $\mathcal{U} = \prod(\mathcal{U}_i \mid i = 1,2,\ldots,n)$ direkt szorzatán azt az $\mathcal{U} = \langle A,F \rangle$ algebrát értjük, amelyre $A = \prod(A_i \mid i = 1,2,\ldots,n)$ és minden $\underline{a} \in A$, $f \in F$-re $f^{\mathcal{U}}(\underline{a}) = (\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{\nu(f)})$, ahol

$$\underline{b}_j = \left(\pi_j(f^{\mathcal{U}_1}(a_1)), \pi_j(f^{\mathcal{U}_2}(a_2)), \ldots, \pi_j(f^{\mathcal{U}_n}(a_n))\right), \quad j=1,2,\ldots,\nu(f).$$

A $\prod(\mathcal{U}_i \mid i = 1,2,\ldots,n)$ direkt szorzat $\mathcal{L}$ részalgebráját az $\mathcal{U}_i$ algebrák szubdirekt szorzatának hivjuk, ha $\pi_i(B) = A_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Ekkor a $\mathcal{L} = \prod^*(\mathcal{U}_i \mid i = 1,2,\ldots,n)$ jelölést használjuk. /$\mathcal{L}$-t az $\mathcal{U}_i$-k nem határozzák meg egyértelmüen általában!/

Az $\{\mathcal{U}_i \mid i = 1,2,\ldots,n\}$ F-algebrák $\Sigma = \coprod(\mathcal{U}_i \mid i=1,2,\ldots,n)$ direkt összegén azt a $\Sigma = \langle C,F \rangle$ algebrát értjük, amelyre $C = \coprod(A_i \mid i = 1,2,\ldots,n)$ és minden $(a,i) \in C$, $f \in F$-re $f^{\Sigma}((a,i)) = f^{\mathcal{U}_i}(a)$.

Az $\mathcal{U}$ algebra szubdirekt irreducibilis, ha $\mathcal{U} = \prod^*(\mathcal{U}_i \mid i = 1,2,\ldots,n) \Rightarrow (\exists i)(|A| \leq |A_i|)$. $\mathcal{U}$ egyszerü, ha nincs valódi kongruenciája. Látható, hogy a bevezetett fogalmak hasonlók az univerzális algebrában használtakhoz, sőt unoidokra megegyeznek azokkal. Igy, visszaemlékezve a 3. lem-

mára, könnyü számolással igazolható a következő

7. lemma. (i) $\mathfrak{A} = \Pi(\mathfrak{A}_i \mid i=1,\dots,n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\mu =$
$= \Pi(\mathfrak{A}_{i\mu} \mid i = 1,\dots,n)$,

(ii) $\mathfrak{A} = \Pi^*(\mathfrak{A}_i \mid i = 1,\dots,n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\mu =$
$= \Pi^*(\mathfrak{A}_{i\mu} \mid i = 1,\dots,n)$,

(iii) $\mathfrak{A} = \amalg(\mathfrak{A}_i \mid i = 1,\dots,n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\mu =$
$= \amalg(\mathfrak{A}_{i\mu} \mid i = 1,\dots,n)$,

(iv) $\mathfrak{A}$ szubdirekt irreducibilis /egyszerü/
$\mathfrak{A}_\mu$ szubdirekt irreduciblis /egyszerü/.

8. következmény. (i) Ha $\mathfrak{A}$ egyszerü, akkor szubdirekt irreducibilis.

(ii) $\mathfrak{A}$ szubdirekt irreducibilis $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle \mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ -ben pontosan egy atom van.

(iii) Bármely algebra előállitható szubdirekt irreducibilis algebrák szubdirekt szorzataként.

Bizonyitás. Ezek az állitások igazak univerzális algebrákra, és igy unoidokra is /v.ö. GRÄTZER [1968]/. A 7. lemmából következik, hogy ekkor felszálló algebrákra is igazak.

Tetszőleges F tipusra $\mathcal{E} = \langle \{e\}, F \rangle$ jelölje az izomorfizmus erejéig egyértelmüen meghatározott egy elemü F-algebrát. Ha $\mathfrak{A} \cong \mathcal{E}$, $\mathfrak{A}$ -t egységnek hivjuk. $\mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ és $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ kapcsolatára igaz a következő

9. tétel. A $\varphi : \mathcal{G} \to \varrho(\mathcal{G})$ hozzárendelés $\langle \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \{\cup, \cap\} \rangle$ homomorfizmusa $\langle \mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \{\vee, \wedge\} \rangle$-be. φ akkor és csak akkor beágyazás, ha $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ nem tartalmaz egységet.

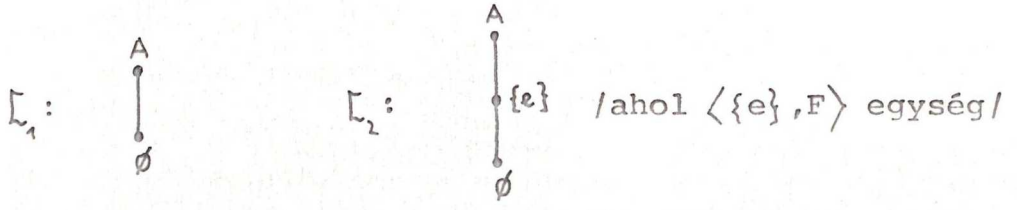
Bizonyitás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\varrho(\mathcal{G})$ nem más,

mint a $\mathcal{L}$ τ kongruenciájának τ^A ω-kiterjesztése $\mathfrak{A}$-ra, hiszen τ^A szerint B bármely két eleme kongruens, és ez a minimális ilyen tulajdonságu kongruencia, hiszen csak B elemei kongruensek τ^A szerint. A $\varrho(\mathcal{L})$ ezen előállitásából azonnal adódnak a

$$\varrho(\mathcal{L}\cap\Sigma)=\varrho(\mathcal{L})\wedge\varrho(\Sigma) \quad \text{és} \quad \varrho(\mathcal{L}\cup\Sigma)=\varrho(\mathcal{L})\vee\varrho(\Sigma)$$

azonosságok, amelyek éppen azt fejezik ki, hogy $\varphi : \mathcal{L} \to \varrho(\mathcal{L})$ homomorfizmus. $\varrho(\mathcal{L})$ fönti jelentéséből következik, hogy $\varrho(\mathcal{L})=\varrho(\Sigma)$ akkor és csak akkor lehetséges, ha $\mathcal{L}=\Sigma$ és mindkettő egység. Ezzel a tétel második állitását is igazoltuk.

10. következmény. Ha $\mathfrak{A}$ egyszerü algebra, akkor $\langle \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ a következő két lánc egyike:



/ahol $\langle \{e\}, F \rangle$ egység/

A megforditás már unoidokra sem igaz. Legyen $\mathfrak{A} = \langle \{a_1,a_2,a_3,a_4\}, \{f\} \rangle$ az $f^{\mathfrak{A}}(a_i) = a_{i+1} \pmod 4$ müvelettel definiált unoid. Ekkor $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A}) = \Sigma_1$, de az $a_i \varrho a_j \Leftrightarrow |i-j| = 2$ által definiált ϱ valódi kongruencia $\mathfrak{A}$-n.

11. lemma. Ha $\mathcal{L}$ az $\mathfrak{A}$ részalgebrája és ϱ a $\langle \mathrm{Con}(\mathcal{L}), \leq \rangle$ háló atomja, akkor a ϱ^A ω-kiterjesztés a $\langle \mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ hálóban is átom lesz.

Bizonyitás. Legyen $\Theta \leq \varrho^A$ és $\Theta \neq \omega$. Mivel A - B elemei $A/\varrho A$-ban egyelemü osztályokat alkotnak, a Θ kongru-

encia /és igy az $A/_\theta$ osztályozás/ csak B-n lehet finomabb ϱ^A-nál. De ha B-n létezne valódi finomitása ϱ^A-nak, ez ellentmondana annak, hogy ϱ minimális kongruencia $\mathcal{L}$-n.

Láttuk, hogy $\mathfrak{A}$ akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha $\langle \mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ -ben pontosan egy atom van, igy az előző lemmából nyerjük:

12. következmény. Az $\mathfrak{A}$ algebra szubdirekt irreducibilis $\Leftrightarrow$ minden részalgebrája szubdirekt irreducibilis.

13. következmény. Ha $\mathfrak{A}$ szubdirekt irreducibilis, akkor $\langle \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ -ben legfeljebb 2

(i) egyszerü részalgebra

(ii) páronként diszjunkt részalgebra

(iii) atom

lehet. Ha bármelyik tulajdonságu részalgebrából 2 van, akkor legalább egyikük egység.

Bizonyitás. (i) következik abból, hogy ha $\mathcal{L}$ egyszerü részalgebra, de nem egység, akkor $\varrho(\mathcal{L})$ a 11. lemma szerint atom lesz.

(ii) szintén abból a megállapitásból adódik, hogy $\mathfrak{A}$ diszjunkt, egységtől különböző részalgebráiból a 11. lemma szerint a $\langle \mathrm{Con}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ különböző atomjai nyerhetők.

(ii) $\Rightarrow$ (iii), hiszen $\langle \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ atomjai szükségképpen diszjunkt részalgebrák. □

Az $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_\mu$ hozzárendelést kihasználva vezetjük be a szabad algebra fogalmát. Legyen Y tetszőleges változóhalmaz, $\langle F, \nu \rangle$ tetszőleges tipus, $F \cap Y = \emptyset$. Az Y által generált szabad F-algebrán azt az /egyetlen, létező/ $\mathfrak{F}_{F,Y}$-nal jelölt F-algebrát értjük, amelynek μ szerinti képe az Y

által generált szabad F_σ-unoid. μ definiciójának megfelelően $\xi_{F,Y} = \langle T_{F_\sigma,Y}, F\rangle$ és tetszőleges $g \in T_{F_\sigma,Y}$, $f \in F$-re $f^{\xi_{F,Y}}(g) = (f_1(g), f_2(g), \ldots, f_{\nu(f)}(g))$.

A következő lemma szerint $\xi_{F,Y}$ valóban rendelkezik a szabad algebrák szokásos tulajdonságaival.

14. lemma. Legyen $\mathfrak{A} = \langle A, F\rangle$ tetszőleges F-algebra és $\varphi : Y \to A$ tetszőleges leképezés. Ekkor φ egyértelműen kiterjeszthető $\xi_{F,Y} \to \mathfrak{A}$ homomorfizmussá.

Bizonyitás. A szabad unoidra igaz a megfelelő állitás /v.ö. GRÄTZER [1968] /. A 3. lemmát fölhasználva ebből következik, hogy $\xi_{F,Y}$-ra is igaz.

Legyen $g,h \in T_{F_\sigma,Y}$. A $g = h$ alaku formális egyenlőségeket azonosságoknak hivjuk. A $g = h$ azonosság teljesül az $\mathfrak{A}$ algebrán, ha tetszőleges $\varphi : \xi_{F,Y} \to \mathfrak{A}$ homomorfizmusra $\varphi(g)$ és $\varphi(h)$ megegyezik. Az $\mathfrak{A}$ algebrán teljesülő azonosságok halmazát $\mathrm{id}(\mathfrak{A})$ -val jelöljük.

F-algebrák tetszőleges K osztályára legyen

$$H(K) = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ homomorf képe valamely } \mathfrak{A} \in K\text{-nak}\}$$

$$S(K) = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ részalgebrája valamely } \mathfrak{A} \in K\text{-nak}\}$$

$$P(K) = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ direkt szorzata az } \{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\} \text{ } K\text{-hoz tartozó algebráknak}\}$$

$$\mathrm{id}(K) = \{p=q \mid p=q \text{ azonosság teljesül minden } \mathfrak{A} \in K\text{-n}\}$$

$$K_\mu = \{\mathfrak{A}_\mu \mid \mathfrak{A} \in K\}.$$

A 3. és a 7. lemmából, valamint az azonosságfogalom definiciójából rögtön következik a

15. lemma. (i) $\mathfrak{A} \in H(K) \iff \mathfrak{A}_\mu \in H(K_\mu)$

(ii) $\mathfrak{A} \in S(K) \iff \mathfrak{A}_\mu \in S(K_\mu)$

(iii) $\mathfrak{A} \in P(K) \iff \mathfrak{A}_\mu \in P(K_\mu)$

(iv) $\mathrm{id}(K) = \mathrm{id}(K_\mu)$.

Tetszőleges Σ azonossághalmazra legyen $K(\Sigma) = \{\mathfrak{A} \mid \mathrm{id}(\mathfrak{A}) \supseteq \Sigma\}$. A K osztály varietás, ha $K = HSP(K)$. K azonosságokkal definiálható, ha létezik olyan Σ azonossághalmaz, hogy $K = K(\Sigma)$. Az $\mathfrak{A} \in K$ algebrát K-szabad algebrának hivjuk a Z szabad generátorrendszerrel, ha

(i) $\mathfrak{A} = [Z]$,

(ii) tetszőleges $\mathfrak{B} \in K$ és $\varphi : Z \to B$ leképezés esetén φ kiterjeszthető $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ homomorfizmussá. Mivel a K-szabad algebra most megadott definiciója unoidok esetén egybeesik a hagyományossal, a 15. lemmából nyerjük, hogy $\mathfrak{A}$ K-szabad algebra $\iff$ $\mathfrak{A}_\mu$ K_μ-szabad unoid. A föntieket fölhasználva a következő tétel adódik a megfelelő univerzális algebrai /és ezért unoidokra is teljesülő/ eredményekből /v.ö. GRÄTZER [1968] /.

16. tétel. (i) Bármely K varietásban léteznek K-szabad algebrák tetszőleges számosságu generátorrendszerrel.

(ii) K varietás $\iff$ K azonosságokkal definiálható.

Az automataelméletben többféle összefüggőség-fogalmat használnak. Most bevezetjük a megfelelő fogalmakat unoidokra és algebrákra, majd megvizsgáljuk kapcsolatukat a $\langle \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ részalgebrahálóval.

Az $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$ unoid

(1) erősen összefüggő, ha

$$(\forall a,b \in A)(\exists p_1, p_2 \in T_{F,1})(p_1(a) = b \;\&\; p_2(b) = a)$$

(2) összefüggő, ha

$$(\forall a,b \in A)(\exists p_1, p_2 \in T_{F,1})(p_1(a) = b \vee p_2(b) = a)$$

(3) fölülről erősen összefüggő, ha

$$(\exists c \in A)(\forall a,b \in A)(\exists p_1,p_2 \in T_{F,1})(p_1(a) = p_2(b) = c)$$

(4) fölülről összefüggő, ha

$$(\forall a,b \in A)(\exists c \in A)(\exists p_1,p_2 \in T_{F,1})(p_1(a) = p_2(b) = c)$$

(5) alulról erősen összefüggő, ha

$$(\exists c \in A)(\forall a,b \in A)(\exists p_1,p_2 \in T_{F,1})(p_1(c) = a \;\&\; p_2(c) = b)$$

(6) alulról összefüggő, ha

$$(\forall a,b \in A)(\exists c \in A)(\exists p_1,p_2 \in T_{F,1})(p_1(c) = a \;\&\; p_2(c) = b).$$

Megjegyzés. (3)-nál erősebb összefüggőség-fogalom a következő

$$(3')\quad (\exists c \in A)(\exists p \in T_{F,1})(\forall a,b \in A)(p(a) = p(b) = c).$$

A megfelelő tulajdonságu, un. irányitható automatákat vizsgálja DANG HUN DAO [1978] és PIRICKÁ [1972].

17. lemma. Az alábbi állitásokban ö.f. az összefüggő szó röviditése:

(1) $\mathfrak{A}$ erősen ö.f. $\Leftrightarrow$ $Sub(\mathfrak{A}) = \{A,\emptyset\}$

(2) $\mathfrak{A}$ ö.f. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ egy elemmel generált részalgebrái láncot alkotnak

(3) $\mathfrak{A}$ fölülről erősen ö.f. $\Leftrightarrow \langle Sub(\mathfrak{A}),\leq\rangle$ -ben pontosan egy atom van

(4) $\mathfrak{A}$ fölülről ö.f. $\Leftrightarrow \langle Sub(\mathfrak{A}),\leq\rangle$ -ben legfeljebb egy atom van

(5) $\mathfrak{A}$ alulról erősen ö.f. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ egy elemmel generált részalgebrái között pontosan egy maximális van

(6) $\mathfrak{A}$ alulról ö.f. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ egy elemmel generált részalgebrái között legfeljebb egy maximális van.

Bizonyitás. Szükségünk lesz a következő három megálla-

pitásra:

(i) $\mathfrak{A}$ bármely részalgebrája előállitható egy elemmel generált részalgebrák egyesitéseként.

(ii) $\langle \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ minden atomja $[c]$ alaku valamely $c \in A$-ra.

(iii) Bármely $G \subseteq A$-ra $[G] = \{b \mid (\exists p \in T_{F,1})(\exists a \in G)(p(a) = b)\}$.

(i) és (ii) következik abból, hogy $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ topologikus lezárási rendszer,

(iii) pedig a $[G]$ szokásos univerzális algebrai jellemzéséből /v.ö. GRÄTZER [1968]/.

Az alábbi bizonyitások első ekvivalenciájánál mindig (iii)-t használjuk.

(1) $\mathfrak{A}$ erősen ö.f. $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)([a] = [b]) \Leftrightarrow \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}) = \{A, \emptyset\}$

A második ekvivalencia (i)-n alapul.

(2) $\mathfrak{A}$ ö.f. $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)([a] \subseteq [b] \vee [b] \subseteq [a]) \Leftrightarrow$ az egy elemmel generált részalgebrák láncot alkotnak.

A második ekvivalencia következik a lánc definiciójából.

(3) $\mathfrak{A}$ fölülről erősen ö.f. $\Leftrightarrow (\exists c \in A)(\forall a,b \in A)([c] \subseteq [a] \cap [b]) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ -ben pontosan egy atom van.

A második lépésből $\Leftarrow$ nyilvánvaló. Az ellenkező implikáció következik abból, hogy $[c]$ nyilvánvalóan atom, és ha $[c_1], [c_2]$ a $\langle \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ két atomja, akkor a bal oldal szerint $[c] \subseteq [c_1] \cap [c_2]$, amiből $[c] = [c_1] = [c_2]$ adódik.

(4) $\mathfrak{A}$ fölülről ö.f. $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)(\exists c)([c] \subseteq [a] \cap [b]) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ -ben legfeljebb egy atom van.

A második ekvivalencia (3)-hoz hasonlóan látható be.

(5) $\mathfrak{A}$ alulról erősen ö.f. $\Leftrightarrow (\exists c \in A)(\forall a,b \in A)([c] \supseteq [a] \cup [b]) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ az egy elemmel generált részalgebrák között pontosan egy maximális van. A második ekvivalenciából $\Leftarrow$ nyilvánvalóan

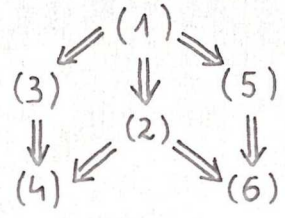
teljesül. Forditva, az rögtön látható, hogy $[c]$ maximális. Ha $[c_1], [c_2]$ két maximális, egy elemmel generált részalgebra, a bal oldalt alkalmazva $[c] \supseteq [c_1] \cup [c_2]$, ahonnan $[c] = [c_1] = [c_2]$.

(6) $\mathfrak{A}$ alulról ö.f. $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)(\exists c \in A)([c] \supseteq [a] \cup [b]) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ az egy elemmel generált részalgebrák között legfeljebb egy maximális van.

A bizonyitás (5)-höz hasonló. □

Az előző lemmából, valamint a bizonyitás elején tett megjegyzésekből következik, hogy az (1)- (6) fogalmak a következő kapcsolatban vannak:



Ha $\mathfrak{A}$ végesen generált, (5) $\Leftrightarrow$ (6), hiszen a véges sok generátorelem által generált véges sok egy elemmel generált részalgebra között létezik maximális. (4) $\Rightarrow$ (3) viszont nem igaz, ellenpélda: $\mathcal{N} = \langle N, \{'\} \rangle$, $n' = n+1$. Ha $\mathfrak{A}$ véges, (3) $\Leftrightarrow$ (4) is teljesül, hiszen ekkor a $\langle Sub(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ véges hálónak léteznek atomjai. Igy a következő egyszerü összefüggések igazak:

18. tétel. Tetszőleges $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$ véges unoidra

(1) $\mathfrak{A}$ erősen ö.f. $\Leftrightarrow Sub(\mathfrak{A}) = \{A, \emptyset\}$,

(2) $\mathfrak{A}$ ö.f. $\Leftrightarrow \langle Sub(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ lánc,

(3) $\mathfrak{A}$ fölülről /erősen/ ö.f. $\Leftrightarrow \langle Sub(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ -ben pontosan egy atom van,

(4) $\mathfrak{A}$ alulról /erősen/ ö.f. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ egy elemmel generálható.

Nevezzük az $\mathfrak{A} = \langle A,F \rangle$ algebrát <u>erősen összefüggőnek</u> /<u>összefüggőnek</u>, stb./, ha az $\mathfrak{A}_\mu = \langle A,F_\delta \rangle$ unoid erősen összefüggő /összefüggő, stb./. A 3. lemma alapján adódik a

<u>19. következmény</u>. Algebrákra is igaz a 17. lemma és a 18. tétel.

3. Különböző tipusu faautomaták definiciói, alapvető eredmények

Ebben a fejezetben a faautomatákra vonatkozó definiciókat és azokat az ismert eredményeket foglaljuk össze, amelyeket a későbbi vizsgálatoknál felhasználunk. Fölhivjuk az olvasó figyelmét, hogy a továbbiakban szereplő $\langle F, \nu \rangle$ tipusokról mindig föltesszük, hogy $F_0 = \emptyset$ és F véges.

Legyen F tetszőleges tipus. Az $\mathcal{A} = \langle \mathcal{U}, \underline{a}, A' \rangle$ rendezett hármast F tipusu n-változós nemdeterminisztikus leszálló faautomatának hivjuk, ahol

(i) $\mathcal{U} = \langle A, F \rangle$ F tipusu nemdeterminisztikus univerzális algebra, /az A halmazt az $\mathcal{A}$ állapothalmazának mondjuk/

(ii) $\underline{a} = (A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}) \in (\mathcal{P}(A))^n$ az $\mathcal{A}$ kezdőállapotvektora

(iii) $A' \subseteq A$ a végállapothalmaz.

Ha $\mathcal{U}$ F tipusu univerzális algebra és az $\underline{a}$ kezdővektor minden komponense egyelemü halmaz, akkor $\mathcal{A}$-t F tipusu n-változós leszálló faautomatának mondjuk.

A $\mathcal{B} = \langle \mathcal{G}, B', \underline{b} \rangle$ rendszert F tipusu n-változós nemdeterminisztikus felszálló faautomatának nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek:

(i) $\mathcal{G} = \langle B, F \rangle$ F tipusu nemdeterminisztikus felszálló algebra, B a $\mathcal{B}$ állapothalmaza

(ii) $B' \subseteq B$ a kezdőállapothalmaz

(iii) $\underline{b} = (B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)}) \in (\mathcal{P}(B))^n$ a végállapotvektor.

Abban a speciális esetben, ha $\mathcal{L}$ F tipusu fölszálló algebra és $B' = \{b'\}$ egyelemü halmaz, $\mathcal{B}$ -t F tipusu n-változós felszálló faautomatának hivjuk.

Az előző elnevezésekből általában elhagyjuk az "F tipusu n-változós" prefixet, ha F és n ismert, és faautomata helyett is röviden automatát mondunk. A föntiekben definiált faautomaták F tipusu n-változós erdőket ismernek föl a következő definicióknak megfelelően.

Az $\mathcal{A}$ nemdeterminisztikus leszálló automata egy $\beta^{\mathcal{A}}: T_{F,n} \to \mathcal{P}(A)$ leképezést indukál az

(i) ha $p = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $\beta^{\mathcal{A}}(p) = A^{(i)}$,

(ii) ha $p = f(p_1,\ldots,p_k)$, akkor $\beta^{\mathcal{A}}(p) =$
$= \bigcup \left(f(b_1,\ldots,b_k) \middle| (\forall 1 \leq j \leq n)\left(b_j \in \beta^{\mathcal{A}}(p_j)\right)\right)$

szabályoknak megfelelően. Az $\mathcal{A}$ által fölismert $T(\mathcal{A})$ erdőt

$$T(\mathcal{A}) = \left\{ p \middle| p \in T_{F,n} \;\&\; \beta^{\mathcal{A}}(p) \cap A' \neq \emptyset \right\}$$

definiálja. Ha $\mathcal{A}$ leszálló automata, akkor $\beta^{\mathcal{A}}(p)$ egyelemü halmaz, ezért

$$T(\mathcal{A}) = \left\{ p \middle| p \in T_{F,n} \;\&\; \beta^{\mathcal{A}}(p) \in A' \right\}$$

adja meg az $\mathcal{A}$ által fölismert erdőt.

Most tekintsünk egy $\mathcal{B}$ nemdeterminisztikus felszálló automatát. Értelmezzük az $\alpha^{\mathcal{B}}: T_{F,n} \to \mathcal{P}(A)$ leképezést a következő módon:

(i) ha $p = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $\alpha^{\mathcal{B}}(p) = B^{(i)}$,

(ii) ha $p = f(p_1,\ldots,p_k)$, akkor

$$\alpha^{\mathcal{B}}(p) = \left\{ a \middle| f(a) \cap \prod \left(\alpha^{\mathcal{B}}(p_i) \middle| i = 1,2,\ldots,k\right) \neq \emptyset \right\}.$$

A $\mathcal{B}$ automatával fölismerhető $T(\mathcal{B})$ erdőt a

$$T(\mathcal{B}) = \left\{ p \middle| p \in T_{F,n} \;\&\; \alpha^{\mathcal{B}}(p) \cap B' \neq \emptyset \right\}$$

egyenlőséggel értelmezzük. Ha $\mathcal{B} = \langle \mathcal{X}, \{b'\}, \underline{b} \rangle$ felszálló automata,

$$T(\mathcal{B}) = \{p \mid p \in T_{F,n} \;\&\; b' \in \alpha^{\mathcal{B}}(p)\}.$$

Az előző definiciókban megengedtük azt is, hogy az automaták állapothalmaza végtelen legyen. Erre az általános esetre csak a 6. fejezetben lesz szükség, ezért ha csak mást nem mondunk, mindig föltesszük, hogy a szereplő automaták végesek, vagyis állapothalmazuk véges.

Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ automaták <u>ekvivalensek</u>, ha $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$. Automaták C_1 és C_2 osztálya ekvivalens, ha bármely $\mathcal{A} \in C_1$-hez létezik vele ekvivalens $\mathcal{B} \in C_2$, és megforditva.

<u>1. tétel</u>. A nemdeterminisztikus leszálló, a leszálló és a nemdeterminisztikus fölszálló automaták osztálya ekvivalens. Ha adott valamelyik osztályból egy automata, effektiven megkonstruálható a másik két osztályhoz tartozó, vele ekvivalens két automata. /ld. MAGIDOR és MORAN [1969], THATCHER és WRIGHT [1968]/.

A továbbiakban $\mathcal{F}_{REC}$-kel jelöljük a leszálló automatákkal fölismerhető erdők osztályát. Fölidézzük az $\mathcal{F}_{REC}$ osztály három ismert jellemzését.

Legyen F tetszőleges tipus. A <u>reguláris F-kifejezések</u> $\mathcal{R}_F$ halmazán a legszükebb olyan halmazt értjük, amelyre

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}_F$,

(ii) ha $p \in T_F$, akkor $p \in \mathcal{R}_F$,

(iii) ha $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{R}_F$, akkor $(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) \in \mathcal{R}_F$,

(iv) ha $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{R}_F$ és $i \in N$, akkor $(\mathcal{H}_1 i \mathcal{H}_2) \in \mathcal{R}_F$,

(v) ha $\mathcal{H} \in \mathcal{R}_F$ és $i \in N$, akkor $(\mathcal{H})^{*i} \in \mathcal{R}_F$.

Ha F ismert, reguláris kifejezést mondunk.

Az x_i változónak a $\mathfrak{A}$ reguláris kifejezésben való valamelyik előfordulását kötöttnek nevezzük, ha $\mathfrak{A}$-nak $(\mathfrak{A}_1 i \mathfrak{A}_2)$ alaku részkifejezésében $\mathfrak{A}_1$-ben szerepel. Ellenkező esetben az adott előfordulást szabadnak mondjuk. Az x_i változó szabad a $\mathfrak{A}$ reguláris kifejezésben, ha van legalább egy szabad előfordulása $\mathfrak{A}$-ban. $\mathfrak{A}$ n-reguláris, ha minden szabad változója X_n-ből való.

A $\mathfrak{A}$ reguláris kifejezés egy $|\mathfrak{A}|$ erdőt határoz meg a következő szabályok szerint:

(i) ha $\mathfrak{A} = \emptyset$, akkor $|\mathfrak{A}| = \emptyset$,

(ii) ha $\mathfrak{A} = p$, akkor $|\mathfrak{A}| = \{p\}$,

(iii) ha $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, akkor $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_1| \cup |\mathfrak{A}_2|$,

(iv) ha $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 i \mathfrak{A}_2$, akkor $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_1| \cdot_{x_i} |\mathfrak{A}_2|$,

(v) ha $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1)^{*i}$, akkor $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_1|^{*x_i}$.

A T erdő n-reguláris, ha $T = |\mathfrak{A}|$ valamely $\mathfrak{A}$ n-reguláris kifejezésre. T reguláris, ha n-reguláris valamely $n \in N$-re. $\mathcal{F}_{REG}$ a reguláris erdők osztályát jelöli.

Érvényes a Kleene-féle tétel következő általánositása:

2. tétel. $\mathcal{F}_{REG} = \mathcal{F}_{REC}$. Pontosabban minden leszálló faautomatához effektiven megadható az általa fölismert erdőt meghatározó reguláris kifejezés, és forditva /ld. MAGIDOR és MORAN [1969]/.

A $T \subseteq T_{F,n}$ erdőhöz tartozó ϱ_T Nerode-kongruencián a következőképpen definiált $T_{F,n}$ fölötti bináris relációt értjük: tetszőleges $q,q' \in T_{F,n}$ fára $q \varrho_T q' \iff$ bármely $k \in N_o$, $p \in T_{F,k}$, $1 \leq i \leq k$ és $p_1,\ldots,p_{i-1},p_{i+1},\ldots,p_k \in T_{F,n}$ esetén

$$p(p_1,\dots,p_{i-1},q,p_{i+1},\dots,p_m) \in T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(p_1,\dots,p_{i-1},q',p_{i+1},\dots,p_m) \in T.$$

A Myhill- és a Nerode-féle tétel általánositása a következő eredmény.

3. tétel. (i) A T erdő reguláris $\Leftrightarrow \varrho_T$ véges indexü kongruencia a $\mathcal{T}_{F,n}$ szabad algebrán.

(ii) A T erdő reguláris $\Leftrightarrow$ T előáll a $\mathcal{T}_{F,n}$ algebra valamely véges indexü ϱ kongruenciája bizonyos osztályainak egyesitéseként.

A bizonyitás megtalálható pl. a BRAINERD [1968] cikkben.

Brainerdtől származik a reguláris fanyelvtan fogalma is, amely a közönséges reguláris nyelvtan általánositása. Az alábbi megfogalmazás az $F_o = \emptyset$ esetben ekvivalens a BRAINERD [1969]-ben szereplő definicióval.

Legyen F tetszőleges tipus. A $\Gamma = \langle Q,F,P,S \rangle$ rendszert, ahol

(i) Q véges, nem üres halmaz, a nemterminális szimbolumok halmaza,

(ii) $S \subseteq Q$ a kezdőszimbolumok halmaza,

(iii) P az a/ vagy b/ alaku átirási szabályok véges halmaza

a/ $q \to x_i$ $(q \in Q,\ x_i \in X_n)$

b/ $q \to f(q_1,\dots,q_k)$ $(f \in F_k,\ q,q_1,\dots,q_k \in Q)$

F tipusu n-változós reguláris fanyelvtannak nevezzük. Ha F és n ismert, /reguláris/ fanyelvtant mondunk. A Γ fanyelvtan

a következő $\Rightarrow_\Gamma$ bináris relációt indukálja a $T_{F,Q \cup X_n}$ halmazon:

t $\Rightarrow_\Gamma$ r akkor és csak akkor, ha r megkapható ugy t-ből, hogy a t-ben szereplő valamely q nemterminális egyik előfordulását valamelyik $q \to w \in P$ szabály jobb oldalával helyettesitjük.

Jelölje $\Rightarrow_\Gamma^*$ a $\Rightarrow_\Gamma$ reláció reflexiv-tranzitiv lezárását. A Γ <u>fanyelvtan által generált erdőn</u> a

$$T(\Gamma) = \{p \mid p \in T_{F,n} \& (\exists s \in S)(s \Rightarrow_\Gamma^* p)\}$$

erdőt értjük. Jelölje $\mathcal{F}_{GEN}$ a reguláris fanyelvtanokkal generálható erdők osztályát.

<u>4. tétel</u>. $\mathcal{F}_{REG} = \mathcal{F}_{GEN}$ /ld. BRAINERD [1969]/.

Végül a felszálló automatákkal fölismerhető erdők $\mathcal{F}_A$ osztályára vonatkozó eredményeket foglaljuk össze.

<u>5. tétel</u>. $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}_{REG}$ /ld. MAGIDOR és MORAN [1969]/.

Most a második fejezetben bevezetett algebrai fogalmakat általánositjuk felszálló automatákra, felhasználva a GÉCSEG és STEINBY [1978] cikket. Tőlük eltérően végtelen automatákat is megengedünk. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez nem befolyásolja az idézett eredményeket.

Legyenek $\mathcal{A} = \langle \mathcal{U}, a', \underline{a} \rangle$ és $\mathcal{B} = \langle \mathcal{L}, b', \underline{b} \rangle$ F tipusu n-változós felszálló automaták. A $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ <u>homomorfizmus</u> /<u>izomorfizmus</u>, <u>beágyazás</u>/ olyan $\varphi : A \to B$ leképezést jelent, amelyre

(i) $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{L}$ homomorfizmus /izomorfizmus, beágyazás/

(ii) $\varphi(a') = b'$

(iii) $\varphi(A^{(i)}) = B^{(i)}$ és $\varphi^{-1}(B^{(i)}) = A^{(i)}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

$\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ homomorf képe, ha $\varphi : A \to B$ szürjektiv. Ha φ izomorfizmus, az algebrákhoz hasonlóan $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ -t irunk.

Ha $\varrho \in \mathcal{E}(A)$, $C \subseteq A$ és $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$, akkor a $C/\varrho = \{c/\varrho \mid c \in C\}$ és $\underline{a}/\varrho = (a_1/\varrho,\ldots,a_n/\varrho)$ jelölést használjuk. A $\varrho \in \mathcal{E}(A)$ reláció kongruencia $\mathcal{A}$ -n, ha

(i) ϱ kongruencia $\mathcal{M}$ -n,

(ii) $(\forall a \in A)(\forall 1 \leq i \leq n)(a \in A^{(i)} \Rightarrow a/\varrho \subseteq A^{(i)})$.

A ϱ kongruencia szerinti $\mathcal{A}/\varrho$ faktorautomatán $\mathcal{A}/\varrho = \langle \mathcal{M}/\varrho, a'/\varrho, \underline{a}/\varrho \rangle$-t értjük.

A következő eredmények a GÉCSEG és STEINBY [1978] 1. és 2. tételének megfelelői.

6. tétel. (i) Ha ϱ kongruencia $\mathcal{A}$ -n, akkor $\mathcal{A}/\varrho$ az $\mathcal{A}$ homomorf képe.

(ii) Ha $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ szürjektiv homomorfizmus, akkor ϱ_φ kongruencia $\mathcal{A}$ -n és $\mathcal{A}/\varrho_\varphi \cong \mathcal{B}$.

7. tétel. Ha $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ homomorf képe, akkor $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$.

Tetszőleges $\mathcal{A}$ nemdeterminisztikus felszálló automatára legyen

$$T(\mathcal{A},a) = \{p \mid p \in T_{F,n} \,\&\, a \in \alpha^{\mathcal{A}}(p)\}.$$

Az $a \in A$ 0-állapot, ha $T(\mathcal{A},a) = \emptyset$. $\mathcal{A}$ normalizált, ha

$$(\forall a \in A)(\forall f \in F)\left((a_1,\ldots,a_{\nu(f)}) \in f^{\mathcal{M}}(a) \,\&\, (\exists 1 \leq i \leq \nu(f))\right.$$
$$\left.(a_i \text{ 0-állapot}) \Rightarrow (\forall 1 \leq j \leq \nu(f))(a_j \text{ 0-állapot})\right).$$

A következő tétel a GÉCSEG és STEINBY [1978] 3. tételének általánositása, a bizonyitás analóg az eredetivel.

József Attila Tudományegyetem Könyvtára SZEGED

8. tétel. Tetszőleges $\mathcal{A}$ /nemdeterminisztikus/ felszálló automatához megadható vele ekvivalens normalizált /nemdeterminisztikus/ felszálló automata.

Az $\mathcal{A} = \langle \mathcal{U}, a', \underline{a} \rangle$ felszálló automatát összefüggőnek nevezzük, ha kezdőállapota generálja, azaz $\mathcal{U} = \langle [a'], F \rangle$. Ez az összefüggőség-fogalom ekvivalens az emlitett cikkben megadottal, igy érvényes az ott bizonyitott 5. lemma alábbi megfelelője.

9. tétel. Tetszőleges $\mathcal{A}$ felszálló automatához megadható vele ekvivalens összefüggő, normalizált felszálló automata.

4. Zárt erdők

Az $F \to F_\sigma$ hozzárendelést fölhasználva tetszőleges $p \in T_{F,n}$ fát egyértelmüen "dekomponálhatunk" $\{g_1,\ldots,g_k\}$, $g_i \in T_{F_\sigma,n}$, $i = 1,\ldots,k$ polinomszimbolumokra, <u>ágakra</u>. Erdőkre kiterjesztve ezt az ágakra való dekomponálást, azt tapasztaljuk, hogy az eredményül kapott ághalmazból nem állapitható meg egyértelmüen, hogy melyik erdőből indultunk ki. Például a $T_1 = \{f(x_1,x_2), f(x_2,x_1)\}$ és a $T_2 = T_1 \cup \{f(x_1,x_1), f(x_2,x_2)\}$ erdők dekomponálása ugyanazon $\{f_1(x_1), f_1(x_2), f_2(x_1), f_2(x_2)\}$ ághalmazt adja.

A föntiek formalizálására vezetjük be a következő leképezéseket. Bármely $i \in N$-re legyen $\sigma_i : \mathcal{P}(T_F) \to \mathcal{P}(T_{F_\sigma})$ az a leképezés, amelyre

$$\text{(i)} \quad \sigma_i(x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } i = k \\ \emptyset & \text{különben,} \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \sigma_i(f(p_1,\ldots,p_k)) = \bigcup \left(f_j(g_{i_j}) \,\middle|\, g_{i_j} \in \sigma_i(p_j),\ j=1,\ldots,k \right)$$

bármely $k \in N$, $f \in F_k$ és $p_1,\ldots,p_k \in T_F$ esetén,

és

$$\text{(iii)} \quad \sigma_i(T) = \left\{ \sigma_i(t) \,\middle|\, t \in T \right\}$$

tetszőleges $T \subseteq T_F$-re.

Végül tetszőleges $n \in N$ és $T \subseteq T_{F,n}$-re legyen

$$\sigma^{(n)}(T) = \bigcup \left(\sigma_i(T) \,\middle|\, i = 1,\ldots,n \right).$$

A továbbiakban, ha ez nem okoz félreértést, elhagyjuk az (n) fölső indexet. Lengyel prefix /postfix/ irásmódot használva a $\sigma(t)$-hez tartozó ágakat tekinthetjük az $(F_\sigma \cup X_n)^*$

szabad félcsoport olyan speciális elemeinek is, amelyek csak az elejükön /végükön/ tartalmaznak egyetlen $x_j \in X_n$ szimbolumot.

1. lemma. δ monoton, a reguláris müveletekkel fölcserélhető függvény, azaz

(i) $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow \delta(T_1) \subseteq \delta(T_2)$,

(ii) $\delta(T_1 \cup T_2) = \delta(T_1) \cup \delta(T_2)$,

(iii) $\delta(T_1 \cdot_{x_i} T_2) = \delta(T_1) \cdot_{x_i} \delta(T_2)$

és

(iv) $\delta\left(T^{*x_i}\right) = \left(\delta(T)\right)^{*x_i}$.

Bizonyitás. (i) és (ii) nyilvánvaló. (iii) bizonyitásához vizsgáljuk először a $\delta(T_1 \cdot_{x_i} T_2) \supseteq \delta(T_1) \cdot_{x_i} \delta(T_2)$ tartalmazást. Ha $g \in \delta(T_1) \cdot_{x_i} \delta(T_2)$, akkor a következő két eset lehetséges:

(1) $g \in \delta_j(T_1)$ és $j \neq i$. Ebből rögtön következik $g \in \delta_j(T_1 \cdot_{x_i} T_2)$, igy $g \in \delta(T_1 \cdot_{x_i} T_2)$ is.

(2) $g = g_1 \cdot_{x_i} g_2$, ahol $g_1 \in \delta_i(t_1)$ valamely $t_1 \in T_1$-re és $g_2 \in \delta_j(t_2)$ valamely $t_2 \in T_2$-re. Igy $g \in \delta_j(t_3)$ a $t_3 = t_1 \cdot_{x_i} t_2 \in T_1 \cdot_{x_i} T_2$ fára, azaz $g \in \delta_j(T_1 \cdot_{x_i} T_2)$ ismét teljesül.

A $\delta(T_1 \cdot_{x_i} T_2) \subseteq \delta(T_1) \cdot_{x_i} \delta(T_2)$ forditott tartalmazás hasonlóan látható be.

A (iv) állitás (i) és (iii) alapján T^{*x_i} induktiv definicióját fölhasználva teljes indukcióval igazolható.

Megjegyzés. Az 1. lemmából látható, hogy T regularitásából következik T regularitása. A forditott állitás nem igaz, ellenpéldának vegyük a $T_{F,n}$ összes balanszirozott fájából álló T_B erdőt.

Jelölje δ^{-1} a δ inverzét, és legyen $\Delta = \delta^{-1}.\delta$, azaz

$\Delta(T) = \{t \mid \delta(t) \subseteq \delta(T)\}$ bármely $T \subseteq T_{F,n}$-re.

2. lemma. Δ $T_{F,n}$ fölötti valódi algebrai lezárási operátor.

Bizonyitás. A definicióból azonnal adódik, hogy Δ lezárási operátor és $\Delta(\emptyset) = \emptyset$. Δ algebrai, mivel a p véges fa ágainak $\delta(p)$ halmaza is véges, és ezért a $\delta(p)$ águalmaz véges sok fából összegyüjthető.

Jelölje a Δ-zárt erdők osztályát $\mathcal{F}_C$. /A továbbiakban Δ-zárt helyett röviden zárt erdőkről beszélünk./ Az algebrai lezárási operátorok tulajdonságaiból /ld. GRÄTZER [1968]/ azonnal adódik az alábbi

3. következmény. (i) $\mathcal{F}_C$ algebrai háló a $T_1 \wedge T_2 = T_1 \cap T_2$ és $T_1 \vee T_2 = \Delta(T_1 \cup T_2)$ müveletekre nézve.

(ii) $\mathcal{F}_C$ zárt irányitott részhalmazainak közönséges egyesitésére.

(iii) Bármely zárt erdő megkapható véges zárt erdőkből álló lánc szupréumaként.

4. lemma. Ha F nem unáris tipus, akkor $\mathcal{F}_C$ és $\mathcal{F}_{REG}$ összehasonlithatatlan.

Bizonyitás. Az általánosság megszoritása nélkül föltehető, hogy $F_2 \neq \emptyset$ és $f \in F_2$. Legyen

$T_1 = \{f(x_1, f(x_1, x_1)), f(f(x_1, x_1), x_1)\}$,

$T_2 = T_3 \cap T_4$, ahol

$T_3 = T(\Gamma)$ a

$\Gamma = \langle \{S,R\}, \{f\}, \{S \to f(R,S), R \to x_1, S \to x_1\}, \{S\} \rangle$ fanyelvtanra,

és

$T_4 = \{p \mid lg(fr(p))$ prim$\}$.

$T_1 \in \mathcal{F}_{REG}$ nyilvánvaló. $T_1 \notin \mathcal{F}_C$, mivel $f(x_1,x_1) \notin T_1$, viszont $f(x_1,x_1) \in \Delta(T_1)$. Másrészt $T_2 \in \mathcal{F}_C$ /mivel a T_3 és T_4 zárt erdők metszete, v.ö. 6. lemma/, de a reguláris erdők pumpáló lemmájával /ld. GÉCSEG és STEINBY [1975] / megmutatható, hogy $T_2 \in \mathcal{F}_{REG}$ ellentmondáshoz vezet.

Definiáljuk $\mathcal{P}(T_{F,n})$-en a következő ϱ bináris relációt bármely T_1,T_2-re

$$T_1 \varrho T_2 \iff \delta(T_1) = \delta(T_2).$$

Látható, hogy ϱ ekvivalenciareláció, és a hozzá tartozó osztályozás minden osztálya pontosan egy zárt erdőt tartalmaz. Ez a zárt erdő osztályának maximális eleme /a halmazelméleti tartalmazásra, mint parciális rendezésre nézve/. Könnyen belátható, hogy az $S = \{L \mid \lambda \in L \ \& \ L \in X_1^* \ \& \ L$ nem reguláris$\}$ halmaz kontinuum számosságu. Legyen $F = F_2 = \{f\}$ és $T = \{f(x_1,x_2)\}^{*x_2} \cdot_{x_2} \{x_1\}$. Nyilvánvaló, hogy bármely $\bar{T} \subseteq T$ zárt erdő. Mivel az a $\varphi : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(T)$ leképezés, amelyet tetszőleges $L \in S$-re

$$\varphi(L) = \{t \mid t \in T \ \& \ fr(t) \in L\}$$

definiál, injektiv, valamint T számossága természetesen kontinuum, a következőt nyerjük:

5. következmény. $\mathcal{F}_C$ kontinuum számosságu halmaz.

Az előző következmény miatt a zárt erdők fölismerésére /generálására/ nem létezhet a véges faautomatákhoz /reguláris fanyelvtanokhoz/ hasonló effektiv eszköz.

6. lemma. (i) Az $\mathcal{F}_C$ osztály zárt a metszetre és az inverz projekcióra.

(ii) $\mathfrak{F}_C$ nem zárt az egyesitésre, a komplementerképzésre, az x_i-szorzatra, az x_i-iteráltra és a projekcióra /pontosabban $\mathfrak{F}_C$ nem zárt a projekcióra $\Leftrightarrow$ az F tipusban van legalább két azonos aritásu müvelet/.

Bizonyitás. Lássuk először a két pozitiv eredményt! Ha T_1 és T_2 zárt erdő, a metszetük zártságához elegendő a $\Delta(T_1 \cap T_2) \subseteq T_1 \cap T_2$ tartalmazást igazolni, a másik irányu tartalmazás adódik abból, hogy Δ lezárási operátor. Legyen $p \in \Delta(T_1 \cap T_2)$ tetszőleges. Ekkor van olyan $\bar{T} \subseteq T_1 \cap T_2$, hogy $\delta(p) \subseteq \delta(\bar{T})$. Ezért $\delta(p) \subseteq \delta(T_i)$, $i = 1,2$ is igaz, és T_i zártsága miatt $p \in T_1 \cap T_2$.

Ha $\gamma : F \to G$ projekció, $\bar{\gamma} : F_\delta \to G_\delta$ a γ-nak megfelelő "ágprojekció" /azaz $\bar{\gamma}(f_i) = g_i \Leftrightarrow \gamma(f) = g$ bármely $f \in F$ és $i = 1,2,\ldots,\nu(f)$ esetén/, akkor a fák magassága szerinti teljes indukcióval belátható, hogy γ^{-1} fölcserélhető δ-val és δ^{-1}-gyel, pontosabban bármely $T \subseteq T_{G,n}$-re és $S \subseteq T_{G_\delta,n}$-re

$$\delta(\gamma^{-1}(T)) = \bar{\gamma}^{-1}(\delta(T))$$

és

$$\delta^{-1}(\bar{\gamma}^{-1}(S)) = \gamma^{-1}(\delta^{-1}(S)).$$

Ezért ha $T \subseteq T_{G,n}$ zárt erdő, akkor

$$\Delta(\gamma^{-1}(T)) = \delta^{-1}.\delta(\gamma^{-1}(T)) = \gamma^{-1}(\Delta(T)) = \gamma^{-1}(T),$$

tehát az inverz projekció valóban megőrzi a zártságot.

A negativ eredmények bizonyitásánál föltehető, hogy $F_2 \neq \emptyset$ és $f,g \in F_2$. Tekintsük a következő zárt erdőket:

$$T_1 = \{f(x_1,f(x_1,x_1))\}, \quad T_2 = \{f(f(x_1,x_1),x_1)\},$$

$T_3 = \{f(x_1,x_2), f(x_1,f(x_1,x_2))\}$, $T_4 = \{f(f(x_1,x_1),x_1)\}$,

$T_5 = T(\Gamma)$, $\Gamma = \langle\{S,A,B\},\{f\},\{S\to f(B,A), A\to f(A,B), A\to x_2, B\to x_1\},\{S\}\rangle$,

$T_6 = \{f(f(x_1,x_1),x_1), g(x_1,g(x_1,x_1))\}$.

Egyesités: $T_1 \cup T_2 \notin \mathcal{F}_C$ /láttuk a 4. lemmánál/.

Komplementer: A deMorgan-azonosságokból, valamint a metszetre és az egyesitésre kapott eredményből következik.

x_i-szorzat: $T_3 \cdot_{x_2} T_4 \notin \mathcal{F}_C$.

x_i-iterált: $T_5^{*x_2} \notin \mathcal{F}_C$. Ez abból adódik, hogy az iterálthoz tartozó minden fa pontosan egy x_2-t tartalmaz, mig a $\Delta(T_5^{*x_2})$-ben levő fák több x_2-t is tartalmazhatnak.

Projekció: a $\gamma(g) = \gamma(f) = f$ projekciót véve $\gamma(T_6) = T_1 \cup T_2 \notin \mathcal{F}_C$.

Most a zárt erdőknek egy másik szemléletes jellemzését adjuk. Lényege, hogy a T zárt erdő az összes olyan fából áll, amely megkapható T-hez tartozó, közös szuperfával rendelkező fákból ugy, hogy a közös szuperfát a megfelelő pozicióknál az egyes fákból szabadon választott részfákkal egészitjük ki.

Tetszőleges $T \subseteq T_{F,n}$ erdőből kiindulva képezzük a következő T_i erdőket minden $i \in N_o$-ra:

(i) $T_o = T$,

(ii) $T_{i+1} = \{t \mid (\exists k,l \in N)(\exists t_1,\dots,t_k \in T_i)(\exists s \in T_{F,n+l})$
$((\forall 1\le j\le k)(\exists t_1^{(j)}, t_2^{(j)},\dots,t_l^{(j)} \in T_{F,n})$
$(t_j = s(x_{n+1}\leftarrow t_1^{(j)},\dots,x_{n+l}\leftarrow t_l^{(j)}))\ \&$
$t = s(x_{n+1}\leftarrow q_1,\dots,x_{n+l}\leftarrow q_l)\ \&\ (\forall 1\le m\le l)(\exists 1\le r\le k)(q_m = t_m^{(r)}))\}$.

Jozsef Attila Tudományegyetem Könyvtára SZEGED

Legyen $\Sigma(T) = \cup(T_i \mid i \in N_o)$.

Egyszerü számolással adódik, hogy $\Sigma : \mathcal{P}(T_{F,n}) \to \mathcal{P}(T_{F,n})$ valódi lezárási operátor, sőt Σ algebrai is, hiszen bármely $t \in \Sigma(T)$ fát véges sok T-hez tartozó fából véges sok (ii) szerinti helyettesitéssel előállithatunk.

7. tétel. A Δ-zárt és a Σ-zárt erdők megegyeznek.

Bizonyitás. Azt az erősebb állitást bizonyitjuk, hogy tetszőleges $T \subseteq T_{F,n}$ és $t \in T_{F,n}$ esetén

$$(*) \qquad t \in \Delta(T) \iff t \in \Sigma(T).$$

(*)-ot két lépésben igazoljuk.

1/ Először bebizonyitjuk a

$$(**) \qquad t \in \Delta(T) \Rightarrow t \in \Sigma(T)$$

implikációt. Mivel Δ és Σ algebrai lezárási operátor, elegendő az összes véges T erdőre belátni (**)-ot.

Fölhasználjuk a következő állitást:

$$(***) \quad t \in \Delta(T) \;\&\; |T| > 1 \Rightarrow \left(\exists t_1, t_2 \in T_{F,n}\right)\left(t_1 \in \Delta(T - \{t_2\}) \;\&\; t \in \Delta(t_1, t_2)\right).$$

Legyen $T = \{p_1, \ldots, p_k\}$, válasszunk ki T-ből egy tetszőleges p_j fát, vizsgáljuk sorra a t fa ágait és végezzük a következőket:

(i) ha a $g \in \delta(t)$ ág nincs benne $\delta(p_j)$-ben, akkor g maradjon változatlan,

(ii) ha a $g \in \delta(t)$ ág előfordul $\delta(p_j)$-ben, akkor keressünk $\delta(t)$-ben olyan h ágat, amelynek maximális közös prefixe van g-vel azon ágak közül, amelyek nincsenek $\delta(p_j)$-ben. Ha $g = wf_{i_1} z_1$, $h = wf_{i_2} z_2$

alaku ($w \in F_\sigma^*$, $f_{i_1}, f_{i_2} \in F_\sigma$, $z_1, z_2 \in F_\sigma^* X_n$), és $h \in \sigma(p_1)$ ($1 \neq j$!), akkor hagyjuk el g-t és helyette vegyük fel $\sigma(p_1)$-ből az összes wf_{i_1} prefixü ágat.

Ha nem találunk az (ii)-ben leirt tulajdonságu h-t, akkor $t=p_j$, igy a $t_2 = p_j$-t és tetszőleges $t_1 \in \Delta(T-\{p_j\})$-t választva teljesül (***).

Különben legyen t_1 a t-ből az előző algoritmussal kapott fa, $t_2 = p_j$. Ebben az esetben $t_1 \in \Delta(T-\{t_2\})$, hiszen t_1 nem tartalmazhat $\sigma(t_2)$-höz tartozó ágakat (ii) miatt, és $t \in \Delta(t_1, t_2)$ is rögtön adódik, hiszen t_1-ben az (ii) szerint fölvett uj ágakat az eredeti ágakra visszacserélve visszakapjuk t-t.

Ezek után (**)-ot T szerinti teljes indukcióval igazolhatjuk.

a/ Ha $|T| = 1,2$ (**) közvetlenül belátható.

b/ Legyen $|T| > 2$ és tegyük fel, hogy bármely $\bar{T}$-ra igaz (**), ha $|\bar{T}| < |T|$. A (***) állitásból és az indukciós feltevésből következik, hogy

$$(\exists t_1, t_2)\,(t_1 \in \Sigma(T-\{t_2\}) \;\&\; t \in \Sigma(t_1, t_2)).$$

Kihasználva, hogy Σ lezárási operátor

$$t \in \Sigma(t_1, t_2) \subseteq \Sigma(\Sigma(T-t_2) \cup t_2) \subseteq \Sigma(\Sigma(T)) = \Sigma(T)$$

tehát T-re is igaz (**).

2/ A $t \in \Sigma(T) \Rightarrow t \in \Delta(T)$ implikációhoz elegendő belátni, hogy tetszőleges $i \in N_o$-ra

$$(****) \qquad t \in T_i \Rightarrow t \in \Delta(T).$$

Ezt i szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

a/ Ha i = 0, triviális az állitás, mivel $t \in T_o = T \subseteq \Delta(T)$.

b/ Legyen $i > 0$ és tegyük fel, hogy i-1-re igaz (***). Ha $t \in T_i$, akkor van olyan $t_1,\ldots,t_k \in T_{i-1}$, hogy t megkapható $t_1,\ldots,t_k$-ból a Σ definiciójában szereplő (ii) alatti helyettesitésekkel. Mivel egyrészt $t_1,\ldots,t_k \in \Delta(T)$ az indukcós föltevés szerint, másrészt $\delta(t) \subseteq \delta(t_1,\ldots,t_k)$, $t \in \Delta(T)$ valóban teljesül.

5. A zárt és a reguláris erdők kapcsolata

A Kleene-tétel általánositása

Általánositsuk a hatványautomata-konstrukciót felszálló automatákra! Legyen $\mathcal{A} = \langle \mathfrak{A}, A', \underline{a} \rangle$ nemdeterminisztikus felszálló automata. Az $\mathcal{A}$-hoz rendelt $\mathcal{PA} = \langle \mathcal{P}\mathfrak{A}, A', \underline{b} \rangle$ felszálló hatványhalmaz-automatát a következő módon értelmezzük:

a $\mathcal{P}\mathfrak{A} = \langle P(A), F \rangle$ felszálló algebra müveleteit tetszőleges $C \subseteq A$, $k \in N$ és $f \in F_k$-ra

$$f^{\mathcal{P}\mathfrak{A}}(C) = \prod_{i=1}^{k} \left(\bigcup \left(\pi_i(f^{\mathfrak{A}}(c)) \,\middle|\, c \in C \right) \right)$$

definiálja, és

$$\underline{b} = \left(B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)} \right),$$

$$B^{(i)} = \left\{ D \,\middle|\, D \subseteq A \,\&\, D \cap A^{(i)} \neq \emptyset \right\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A közönséges véges automatáktól eltérően csak a következő állitás igaz.

1. lemma. Ha $\mathcal{A}$ normalizált nemdeterminisztikus felszálló automata, akkor $T(\mathcal{PA}) = \Delta(T(\mathcal{A}))$.

Bizonyitás. Először a $T(\mathcal{PA}) \subseteq \Delta(T(\mathcal{A}))$ tartalmazást igazoljuk. Legyen t a $T(\mathcal{PA})$-hoz tartozó tetszőleges fa és g a t tetszőleges ága, azaz $g \in \sigma_j(t)$ valamely $1 \leq j \leq n$-re. $T(\mathcal{PA})$ definiciójából következik, hogy g csucsaihoz a következő tulajdonságu $a_0, a_1, \ldots, a_v$ állapotsorozat rendelhető:

(i) $a_k \in A$ $(0 \leq k \leq v)$, $a_0 \in A'$ és $a_v \in A^{(j)}$,

(ii) $a_{i+1} \in \pi_k(f^{\mathfrak{A}}(a_i))$, ha a_i az f_k-val cimkézett csucs-

hoz rendelt állapot ($0 \leq i \leq v-1$).

Mivel $\mathcal{A}$ normalizált, g kiegészithető valamely $\bar{t} \in T(\mathcal{A})$ fává. Igy $g \in \delta_j(\bar{t}) \subseteq \delta_j(T(\mathcal{A}))$. Mivel g a t tetszőleges ága volt, ebből $t \in \Delta(T(\mathcal{A}))$ következik.

A forditott tartalmazás hasonló okoskodással látható be.

Megjegyzés. A következő ellenpélda mutatja, hogy csak normalizált automatákra érvényes az előző lemma. Legyen $n = 1$, $\mathcal{A} = \langle \mathcal{U}, A', \underline{a} \rangle$, $F = F_2 = \{f\}$, $A = \{a_o, d\}$, $f(a_o) = \{(a_o,d),(d,a_o)\}$, $f(d) = \{(d,d)\}$, $A' = A^{(1)} = \{a_o\}$. Ekkor $f(x_1,x_1) \in T(P\mathcal{A})$, de $f(x_1,x_1) \notin \Delta(T(\mathcal{A}))$, mivel $T(\mathcal{A}) = \emptyset$.

Ha a hatványautomata-konstrukciót egy $\mathcal{A}$ normalizált fölszálló automatára alkalmazzuk, $\mathcal{A}$ -val ekvivalens automatát kapunk. Igy, fölhasználva az 1. lemmát, adódik a

2. következmény. A T reguláris erdő akkor és csak akkor ismerhető föl felszálló automatával, ha zárt. Másképpen: $\mathcal{T}_{REG} \cap \mathcal{T}_C = \mathcal{T}_A$.

3. következmény. Tetszőleges T reguláris erdőről eldönthető, hogy fölismerhető-e fölszálló automatával.

Bizonyitás. Legyen $T = T(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ nemdeterminisztikus fölszálló automatára. A 3.8.tétel alapján feltehető, hogy normalizált. A 2. következmény szerint T akkor és csak akkor fölismerhető, ha $T(\mathcal{A}) = T(P\mathcal{A})$. A 3.1. tétel szerint effektiven konstruálható $\mathcal{A}$-val, illetve $P\mathcal{A}$ -val ekvivalens determinisztikus leszálló automata. Innen már adódik a bizonyitandó állitás, hiszen a leszálló automaták ekvivalenciája eldönthető /ld. THATCHER és WRIGHT [1968]/ .

4. lemma. (i) A fölismerhető erdők $\mathcal{T}_A$ osztálya zárt a

metszetre és az inverz projekcióra.

(ii) $\mathcal{F}_A$ nem zárt az egyesitésre, komplementerképzésre, x_i-szorzatra, x_i-iterációra és projekcióra.

Bizonyitás. Ismert, hogy $\mathcal{F}_{REG}$ zárt a fölsorolt müveletekre /ld. THATCHER és WRIGHT [1968]/. Az $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_{REG} \cap \mathcal{F}_C$ egyenlőségből és az $\mathcal{F}_C$ osztályra a 4.6. lemmában bizonyitott zártsági tulajdonságokból adódik az (i) eredmény. A negativ állitások is rögtön következnek a 4.6. lemma bizonyitásában fölsorolt ellenpéldákból, hiszen azok nemcsak zárt, hanem /regulárisak lévén/ fölismerhető erdők is.

Még erősebb negativ eredményt tartalmaz az

5. lemma. $\mathcal{F}_A$ nem zárt a reguláris müveletek egyetlen polinomjára sem, kivéve a csak $\cup$-t tartalmazó egyváltozós polinomokat.

Bizonyitás. Legyen p az $\cup, \cdot_{x_i}, *_{x_i}$ $(i \in N)$ müveletekből fölépülő tetszőleges polinom, $I_p = \{ i \mid \cdot_{x_i}$ vagy $*_{x_i} \}$ előfordul p-ben .

(1) Legyen először $I_p = \emptyset$.

a/ Ha p egyváltozós, akkor $\mathcal{F}_A$ zárt p-re, mivel bármely $T \subseteq T_{F,n}$-re $p(T) = T$.

b/ Ha p k-változós, $k > 1$, akkor legyen $T_1 = \{f(x_1, f(x_1, x_1))\}$, $T_2 = \ldots = T_k = \{f(f(x_1, x_1), x_1)\}$. $T_1, T_2 \in \mathcal{F}_A$, de $p(T_1, \ldots, T_k) \notin \mathcal{F}_A$ /v.ö. 4.6. lemma/.

(2) Legyen $I_p \neq \emptyset$, $i \in I_p$, $j \notin I_p$ és $\max(I_p \cup \{j\}) = n$. Ilyen j és n létezik, mivel I_p véges. Tekintsük a következő n-változós fölszálló automatát:

$$\mathcal{A} = \langle M, a_o, \underline{a} \rangle, \quad A = \{ a_o, a_1, a_2, a_3, a_4, d \}, \quad F = F_2 = \{ f \},$$

$$f(a_o) = (a_1,a_2) \qquad f(a_3) = (d,d)$$
$$f(a_1) = (d,d) \qquad f(a_4) = (a_3,a_4)$$
$$f(a_2) = (a_3,a_4) \qquad f(d) = (d,d)$$

és $$A^{(k)} = \begin{cases} \emptyset, \text{ ha } k \neq i \,\&\, k \neq j \\ \{a_1,a_4\}, \text{ ha } k = i \\ \{a_2,a_3\}, \text{ ha } k = j. \end{cases} \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

Az $\mathcal{A}$ által fölismert erdő, $T = T(\mathcal{A}) = \{f(x_1,x_j)\}\cdot_{x_j}\{f(x_j,x_i)\}^{*x_i}$. $T\cdot_{x_i} T$ nem lehet zárt, hiszen minden $t \in T\cdot_{x_i} T$ fa határa tartalmaz két x_i szimbolum között legalább egy x_j-t, viszont $\Delta(T\cdot_{x_i} T)$-ben vannak szomszédos x_i-ket tartalmazó határu fák is. Hasonló okból a $(T)^{*x_i}$ és a $p(T,\ldots,T)$ erdő sem lehet zárt. □

Ezek a negativ eredmények, valamint a 2. következmény uj, D-reguláris müveletek bevezetését sugallják a következő módon. Tetszőleges $T_1,T_2 \subseteq T_{F,n}$-re legyen

(i) Δ-egyesités, $\textcircled{\cup}$: $T_1 \textcircled{\cup} T_2 = \Delta(T_1 \cup T_2)$

(ii) Δ-x_i-szorzat, $\odot_{x_i}$: $T_1 \odot_{x_i} T_2 = \Delta(T_1\cdot_{x_i} T_2)$

és (iii) Δ-x_i-iterált, $\circledast_{x_i}$: $(T_1)^{\circledast x_i} = \Delta\left((T_1)^{*x_i}\right)$.

6. lemma. A D-reguláris müveletek megőrzik a regularitást és a felszálló automatákkal való fölismerhetőséget.

Bizonyitás. Következik a reguláris erdők Kleene-tételéből /3.2. tétel/ és a 2. következményből.

7. lemma. Érvényesek a következő azonosságok

(i) $T_1 \textcircled{\cup} T_2 = \Delta(T_1) \textcircled{\cup} \Delta(T_2)$,

(ii) $T_1 \odot_{x_i} T_2 = \Delta(T_1) \odot_{x_i} \Delta(T_2)$,

(iii) $T_1^{\circledast x_i} = (\Delta(T_1))^{\circledast x_i}$.

Bizonyitás. Az előző azonosságok következnek az alábbiakból, ha δ^{-1}-et alkalmazzuk mindkét oldalukra.

$$(*)\quad \delta(T_1 \cup T_2) = \delta\left(\Delta(T_1) \cup \Delta(T_2)\right),$$

$$(**)\quad \delta(T_1 \cdot_{x_i} T_2) = \delta\left(\Delta(T_1) \cdot_{x_i} \Delta(T_2)\right),$$

$$(***)\quad \delta(T_1^{*x_i}) = \delta\left((\Delta(T))^{*x_i}\right).$$

A 4.1. lemmában bizonyitottuk, hogy δ fölcserélhető a reguláris müveletekkel. Könnyen belátható az is, hogy tetszőleges T erdőre $\delta(\Delta(T)) = \delta(T)$. Ebből a két megállapitásból már következik $(*) - (***)$. □

Vezessük be a $\mathfrak{K}$ reguláris kifejezés $\|\mathfrak{K}\|$ D-reguláris interpretációját:

(i) ha $\mathfrak{K} = \emptyset$, akkor $\|\mathfrak{K}\|$ az üres erdő,

(ii) ha $\mathfrak{K} = p\,(p \in T_F)$, akkor $\|\mathfrak{K}\| = \{p\}$,

(iii) ha $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2)$, akkor $\|\mathfrak{K}\| = \|\mathfrak{K}_1\| \cup \|\mathfrak{K}_2\|$,

(iv) ha $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}_1 i \mathfrak{K}_2)$, akkor $\|\mathfrak{K}\| = \|\mathfrak{K}_1\| \odot_{x_i} \|\mathfrak{K}_2\|$,

(v) ha $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}_1)^{*i}$, akkor $\|\mathfrak{K}\| = \left(\|\mathfrak{K}_1\|\right)^{\circledast x_i}$.

T D-reguláris erdő, ha $T = \|\mathfrak{K}\|$ valamely $\mathfrak{K}$ reguláris kifejezésre.

8. lemma. Tetszőleges $\mathfrak{K}$ reguláris kifejezésre $\|\mathfrak{K}\| = \Delta(|\mathfrak{K}|)$ teljesül.

Bizonyitás. Végezzünk a $\mathfrak{K}$-ban előforduló müveleti jelek számaszerinti teljes indukciót!

a/ Ha $\mathfrak{K}$ nem tartalmaz müveleti jelet, $\mathfrak{K} = \emptyset$ vagy $\mathfrak{K} = p$ lehet, ekkor triviálisan teljesül az állitás.

b/ Tegyük fel, hogy a $\mathfrak{K}$-nál kevesebb müveleti jelet tartalmazó reguláris kifejezésekre igaz az állitás.

Legyen először $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2)$, ekkor

$$\|\mathfrak{K}\| = \|\mathfrak{K}_1\| \textcircled{\cup} \|\mathfrak{K}_2\| = \Delta(\|\mathfrak{K}_1\| \cup \|\mathfrak{K}_2\|) =$$

$$= \Delta(\Delta(|\mathfrak{K}_1|) \cup \Delta(|\mathfrak{K}_2|)) = \Delta(|\mathfrak{K}_1| \cup |\mathfrak{K}_2|) = \Delta(|\mathfrak{K}|) .$$

A harmadik egyenlőségnél az indukciós feltevést, a negyediknél a 7. lemmát használtuk.

$\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}_1 i \mathfrak{K}_2)$-re és $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}_1)^{*i}$-re hasonlóan bizonyitható az állitás. □

Az előző eredményekből már egyszerüen levezethető a felszálló automatákkal fölismerhető erdők Kleene-tétele:

9. tétel. A D-reguláris és a felszálló automatával fölismerhető erdők megegyeznek, és ez a kapcsolat mindkét irányban effektiv.

Bizonyitás. Legyen először $\mathcal{A}$ felszálló automata, $T = T(\mathcal{A})$. A 3.1. és 3.2. tétel szerint effektiven megadható olyan $\mathcal{B}$ leszálló automata és $\mathfrak{K}$ reguláris kifejezés, hogy $T = T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B}) = |\mathfrak{K}|$. Mivel a T fölismerhető erdő zárt, a 8. lemma alkalmazásával ebből $T = \Delta(T) = \Delta(|\mathfrak{K}|) = \|\mathfrak{K}\|$ adódik.

Forditva tegyük fel, hogy $T = \|\mathfrak{K}\|$ a $\mathfrak{K}$ reguláris kifejezésre. Ismét a 3.1. és 3.2. tételt alkalmazva effektiven megadható a $|\mathfrak{K}|$-t fölismerő C nemdeterminisztikus felszálló automata. A 3.8. tétel alapján föltehető, hogy C normalizált. Megkonstruálva a $\mathcal{P}C$ hatványautomatát az 1. lemma szerint

$$T(\mathcal{P}C) = \Delta(T(C)) = \Delta(|\mathfrak{K}|) = \|\mathfrak{K}\| .$$

/Az utolsó egyenlőség a 8. lemma alkalmazásával adódik./ □

SZEGED

Megjegyzés. A bizonyitás mindkét részében erősen kihasználtuk a reguláris erdők Kleene-tételét /3.2. tétel/. Lehetett volna ettől függetlenül bizonyitani, de akkor a bizonyitás jóval hosszabb lenne.

A zártság fogalmát a $\mathcal{T}_{F,n}$ szabad algebra kongruenciáira kiterjesztve könnyen jellemezhetők azok a kongruenciák, amelyek tetszőleges osztályainak egyesitése fölismerhető erdőt ad. A $\mathcal{T}_{F,n}$ fölötti ϱ kongruenciát nevezzük D-kongruenciának, ha tetszőleges olyan $T \subseteq T_{F,n}$ erdőre, amely előáll a ϱ szerinti osztályozás bizonyos osztályainak egyesitéseként, teljesül

$$(\forall t \in T_{F,n})\left(t \in \Delta(T) \Rightarrow (\exists \bar{t} \in T_{F,n})(\bar{t} \in T \,\&\, t \,\varrho\, \bar{t})\right).$$

10. tétel. A ϱ véges indexü kongruencia tetszőleges osztályainak egyesitése akkor és csak akkor ismerhető fel felszálló automatával, ha ϱ D-kongruencia.

Bizonyitás. Ez a tétel az $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_{REG} \cap \mathcal{F}_C$ egyenlőséget felhasználó átfogalmazása a reguláris erdők Nerode-tételének /3.3. tétel/. □

6. A Myhill- és a Nerode-tétel általánositása felszálló automatákra

Az előző fejezetet záró 5.10. tételnek két szépséghibája van:

(1) a $\tau_{F,n}$ "leszálló" algebra kongruenciáival reprezentálja a fölszálló automatákkal fölismerhető erdőket,

(2) nem reprezentálható minden felszálló automatával fölismerhető erdő D-kongruenciával, mivel az $\mathcal{F}_A$ osztály nem zárt a komplementer-képzésre.

A következő eredmények ezt a két hiányosságot küszöbölik ki. Vizsgálataink a szabad fölszálló automata fogalmán alapulnak, tárgyalásmódunk a BRAINERD [1968]-hoz hasonló.

Ebben a fejezetben a polinomokat zárójel nélküli lengyel prefix jelöléssel irjuk, és uj leképezéseket vezetünk be az előző két fejezetben használt δ_i-k helyett.

Tetszőleges $i,n \in N$ és $T \subseteq T_{F,n}$-re legyen

$$\gamma_i(T) = mi(\delta_i(T)/\{x_i\}) \quad \text{és} \quad \gamma^{(n)}(T) = \bigcup(\gamma_i(T) \mid i = 1,\ldots,n).$$

Itt is elhagyjuk később az (n) felső indexet.

Ha az egyetlen y szimbolummal generált $\xi_{F,y}$ szabad felszálló algebrát tekintjük /ez felel meg az egy kezdőállapotu felszálló automatáknak/, az y generátorelemet a λ üres szóval azonositva $\xi_{F,\lambda}$ tartóhalmaza azonositható a $\gamma(T_{F,n})$ ághalmazzal.

A $T \subseteq T_{F,n}$ erdőhöz tartozó szabad felszálló automatán a $\mathcal{G}_T = \langle \xi_{F,\lambda}, \lambda, \underline{g} \rangle$ végtelen felszálló automatát értjük, ahol

$\xi_{F,\lambda}$ a λ által generált szabad felszálló algebra,
$\underline{\gamma} = (\gamma_1(T),\ldots,\gamma_n(T))$.

1. lemma. Tetszőleges $T \subseteq T_{F,n}$ erdőre $T(\mathcal{G}_T) = \Delta(T)$.

Bizonyitás. $t \in T(\mathcal{G}_T) \Leftrightarrow (\forall 1 \leq i \leq n)(\gamma_i(t) \subseteq \gamma_i(T)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall 1 \leq i \leq n)(\delta_i(t) \subseteq \delta_i(T)) \Leftrightarrow \delta(t) \subseteq \delta(T) \Leftrightarrow t \in \Delta(T)$. □

2. következmény. A szabad automatával fölismerhető erdők osztálya éppen $\mathcal{F}_c$.

3. következmény. A T zárt erdőt fölismerő bármely normalizált összefüggő $\mathcal{A} = \langle \mathcal{U}, a', \underline{a} \rangle$ felszálló automata a $\mathcal{G}_T$ szabad automata homomorf képe.

Bizonyitás. Világos, hogy $\mathcal{G}_T$ összefüggő és normalizált. Mivel az $\mathcal{A}$ automata összefüggő, a 2.2. lemma miatt az $\mathcal{U}$ algebra a $\xi_{F,\lambda}$ szabad fölszálló algebra homomorf képe a $\varphi : \lambda \to a_o$ homomorfizmus mellett. Az $\mathcal{A}$ automata normalizáltsága azt jelenti, hogy bármely $1 \leq i \leq n$-re és $g \in T_{F_\delta,n}$-re igaz a

$$g \in \gamma_i(T) \Leftrightarrow \varphi(g) \in A^{(i)}$$

ekvivalencia, ezért $\varphi(\gamma_i(T)) = A^{(i)}$ és $\varphi^{-1}(A^{(i)}) = \gamma_i(T)$. Ebből már következik, hogy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{G}_T$ homomorf képe.

$\gamma_i(T)$ tekinthető F_δ fölötti közönséges nyelvnek. Jelölje ϱ_i a $\gamma_i(T) \subseteq F_\delta^*$ /közönséges/ Nerode-kongruenciáját. A T erdőhöz tartozó Nerode-kongruencián az F_δ^*-on értelmezett

$$\varrho_T = \bigcap (\varrho_i \mid i = 1,2,\ldots,n)$$

relációt értjük.

4. lemma. (i) ϱ_T kongruencia a $\mathcal{G}_T$ szabad automatán,

(ii) $\mathcal{G}_T$ bármelyik kongruenciája finomitása ϱ_T-nek.

Bizonyitás. (i) Ismert, hogy a ϱ_i Nerode-kongruenciák kongruenciák lesznek a $\mathcal{T}_{F_\delta,\lambda}$ szabad unoidon. Ezért ϱ_T is kongruencia $\mathcal{T}_{F_\delta,\lambda}$-n, de akkor a 2.3. lemma szerint a $\xi_{F,\lambda}$ szabad fölszálló algebrán is kongruencia. Mivel ϱ_T bármelyik ϱ_i-nek finomitása, tetszőleges $1 \leq i \leq n$-re $\gamma_i(T)$ előállitható bizonyos ϱ_T-osztályok egyesitéseként. Ezért ϱ_T kongruencia a $\mathcal{G}_T$ automatán is.

(ii) Következik abból, hogy ϱ_T a legdurvább olyan kongruencia, amely finomitása bármely ϱ_i-nek $(1 \leq i \leq n)$, s igy a legdurvább olyan kongruencia, amelynek osztályaival a végállapot-vektor $\gamma_i(T)$ komponensei bármely $1 \leq i \leq n$-re előállithatók. □

5. tétel. Legyen T fölismerhető erdő. A T-t fölismerő összefüggő normalizált felszálló automaták között létezik izomorfizmus erejéig egyértelmüben meghatározott minimális állapotszámu automata és ez izomorf $\mathcal{G}_T/\varrho_T$ -vel.

Bizonyitás. A 3. következmény szerint ha $T = T(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ összefüggő és normalizált, akkor $\mathcal{A}$ a $\mathcal{G}_T$ homomorf képe, ezért $\mathcal{A} \cong \mathcal{G}_T/\varrho$ valamely ϱ $\mathcal{G}_T$ fölötti kongruenciára /v.ö. 3.6. tétel/. Mivel a 4. lemma miatt $\varrho \leq \varrho_T$, $|A| \geq |G_{F,\lambda}/\varrho_T|$. Egyenlőség csak a $\varrho = \varrho_T$ esetben lehetséges, tehát $\mathcal{G}_T/\varrho_T$ valóban az egyetlen minimális automata.

A 3. fejezet végén idézett eredményekből következik, hogy ha $\mathcal{A}$ nem összefüggő vagy nem normalizált, akkor is igaz $|A| \geq |G_{F,\lambda}/\varrho_T|$. Az 5. tétel a GÉCSEG és STEINBY [1978]-ban bizonyitott eredménynél gyengébb, mivel ezen az uton nem kaptunk algoritmust $\mathcal{G}_T/\varrho_T$ meghatározására.

A minimális automatával kapcsolatos a következő prob-

léma is. Az előző fejezetben vizsgált hatványautomata-konstrukcióra visszaemlékezve fölvethető az a kérdés, hogy ha a $T \in \mathcal{T}_A$ erdő n állapotu nemdeterminisztikus fölszálló automatával ismerhető fel, nem létezik-e olyan 2^n-nél kisebb K(n) korlát, hogy T mindig fölismerhető K(n)-nél kevesebb állapotu felszálló automatával. A válasz a következő

6. tétel. Ha F nem unáris tipus, akkor bármely $n \in N$-re létezik olyan n állapotu $\mathbf{C}_n$ nemdeterminisztikus felszálló automata, hogy a vele ekvivalens minimális állapotszámu összefüggő normalizált felszálló automatának 2^n állapota van.

Bizonyitás. A MOORE [1971] cikkben megtalálható a tétel bizonyitása unáris F-re, ha $|F| \geq 2$. Moore megkonstruálja n állapotu közönséges nemdeterminisztikus automaták olyan $\{\mathcal{B}_n \mid n \in N\}$ sorozatát, amelyekkel ekvivalens minimális determinisztikus automatáknak 2^n állapota van.

Ezt fölhasználva könnyen bizonyitható a tétel nem unáris F-re is. Legyen $\mathbf{C}_n$ tetszőleges olyan nemdeterminisztikus felszálló automata, amelyre $\mathbf{C}_{n\mu}$ tartalmaz $\mathcal{B}_n$-nel izomorf F-részautomatát, és $T(\mathbf{C}_n) \in \mathcal{T}_A$. Ekkor a $\mathbf{C}_n$-nel ekvivalens minimális felszálló automata állapotszáma 2^n. /Kevesebb nem lehet, mert akkor $\mathbf{C}_{n\mu}$ $\mathcal{B}_n$-nel izomorf F-részautomatájához is meg tudnánk adni vele ekvivalens, 2^n-nél kevesebb állapotu automatát./ □

A következő állitás a Myhill- és a Nerode-féle tétel általánositása.

7. tétel. Tetszőleges T zárt erdőre ekvivalensek a következő állitások:

(i) T véges felszálló automatával felismerhető,

(ii) ϱ_T véges indexü kongruencia a $\xi_{F,\lambda}$ szabad felszálló algebrán,

(iii) a $\xi_{F,\lambda}$ algebrán megadható olyan ϱ véges indexü kongruencia, hogy bármelyik $\gamma_i(T)$ $(1 \leq i \leq n)$ előállitható ϱ-osztályok egyesitéseként.

Bizonyitás. (i) $\Rightarrow$ (ii): Ha T véges fölszálló automatával fölismerhető, akkor az 5. tétel alapján a T-t fölismerő minimális állapotszámu $\mathcal{G}_T/\varrho_T$ automata véges, ezért ϱ_T véges indexü.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\varrho = \varrho_T$ teljesiti az (iii) feltételeket.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Az (iii) tulajdonságu ϱ reláció kongruencia a $\mathcal{G}_T$ szabad automatán is. A $\mathcal{G}_T/\varrho$ véges faktorautomata a 3.7. tétel szerint T-t ismeri föl. □

7. A felszálló automaták, a reguláris fanyelvtanok és a környezetfüggetlen nyelvek kapcsolata

A 3.4. tétel szerint a reguláris fanyelvtanokkal generálható erdők megegyeznek a leszálló automatákkal fölismerhető erdőkkel. Most olyan speciális fanyelvtanokat definiálunk, amelyek hasonló kapcsolatban állnak a fölszálló automatákkal fölismerhető erdőkkel.

A $\Gamma = \langle Q,F,P,S \rangle$ reguláris fanyelvtant D-regulárisnak hivjuk, ha

(i) $S = \{s\}$ egyelemü halmaz,

ii Bármely $(q,f) \in Q \times F$-hez pontosan egy olyan szabály van P-ben, amelynek bal oldala q és jobb oldala f-fel kezdődik.

1. tétel. A T erdő akkor és csak akkor generálható D-reguláris fanyelvtannal, ha fölismerhető fölszálló automatával.

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy $T = T(\mathcal{A})$ valamely $\mathcal{A} = \langle \mathfrak{M},a',\underline{a} \rangle$ F tipusu n-változós felszálló automatára. Konstruáljuk meg a következő $\Gamma = \langle Q,F,P,S \rangle$ F-tipusu n-változós reguláris fanyelvtant. Legyen $Q = A$, $s = a'$ és P az

(1) $a \to f(a_1,\ldots,a_k) \in P \iff f^{\mathfrak{M}}(a) = (a_1,\ldots,a_k)$,

(2) $a \to x_i \in P \iff a \in A^{(i)} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

összefüggésekkel adott. A müveletek determinisztikusságából következik, hogy Γ D-reguláris fanyelvtan. A $T(\Gamma) = T(\mathcal{A})$ egyenlőséghez elegendő a következő ekvivalenciát belátni

tetszőleges $p \in T_{F,n}$ és $a \in A$-ra:

$$(*) \qquad a \in \alpha^{\mathcal{A}}(p) \Leftrightarrow a \Rightarrow_{\Gamma}^{*} p.$$

Ezt az állitást p magassága szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

Ha $p = x_i$, $\alpha^{\mathcal{A}}(p) = A^{(i)}$, igy (2) miatt teljesül (*).

Legyen $p = f\,p_1,\ldots,p_k$ és a A tetszőleges. Tegyük fel, hogy a p-nél kisebb magasságu fákra igaz (*). Ekkor

$$a \in \alpha^{\mathcal{A}}(p) \Leftrightarrow f^{\mathfrak{M}}(a) \cap \prod\left(\alpha^{\mathcal{A}}(p_i) \mid i = 1,\ldots,k\right) \neq \phi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{\mathfrak{M}}(a) = (a_1,\ldots,a_k) \,\&\, (\forall\, 1 \leq i \leq k)\left(a \in \alpha^{\mathcal{A}}(p_i)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \to f(a_1,\ldots,a_k) \in P \,\&\, (\forall\, 1 \leq i \leq k)\left(a_i \Rightarrow_{\Gamma}^{*} p_i\right) \Leftrightarrow a \Rightarrow_{\Gamma}^{*} p.$$

Az utolsó előtti lépésben az indukciós feltevést és az $f^{\mathfrak{M}}(a) = (a_1,\ldots,a_k) \Leftrightarrow a \to f(a_1,\ldots,a_k) \in P$ ekvivalenciát használtuk.

Forditva, tegyük fel, hogy $T = T(\Gamma)$ a $\Gamma = \langle Q,F,P,S \rangle$ F tipusu n-változós D-reguláris fanyelvtanra. Konstruáljuk meg az $\mathcal{A} = \langle \mathfrak{M}, a', \underline{a} \rangle$ automatát, ahol $\mathfrak{M} = \langle A,F \rangle$, $A = Q$, $a' = s$ és

$$(3)\quad f^{\mathfrak{M}}(a) = (a_1,\ldots,a_k) \Leftrightarrow a \to f(a_1,\ldots,a_k) \in P$$

$$(4)\quad a \in A^{(i)} \Leftrightarrow a \to x_i \in P \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

(3)-(4)-et és a D-reguláris fanyelvtan definicióját összevetve látható, hogy $\mathcal{A}$ felszálló automata lesz. Alkalmazzuk $\mathcal{A}$-ra a bizonyitás első részében leirt konstrukciót. Mivel (1) $\Leftrightarrow$ (3) és (2) $\Leftrightarrow$ (4), visszakapjuk az eredeti Γ fanyelvtant. Az első részben bizonyitott állitás szerint tehát $T(\mathcal{A}) = T(\Gamma)$.

A faautomaták felhasználhatók nyelvek felismerésére. Az $\mathcal{A}$ n-változós automata által fölismert nyelven az

$$L(\mathcal{A}) = \mathrm{fr}\ T(\mathcal{A}) \subseteq X_n^*$$

nyelvet értjük.

Régóta ismert eredmény, hogy a leszálló automaták pontosan a környezetfüggetlen nyelveket ismerik föl, sőt egyetlen kétváltozós és egyetlen 0-változós művelet is elegendő az összes környezetfüggetlen nyelv fölismeréséhez /ld. THATCHER [1967], MAGIDOR és MORAN [1969]/. Az általunk definiált felszálló automaták az $F_o = \emptyset$ kikötés miatt csak λ-mentes nyelveket tudnak felismerni, rájuk a következő eredmény igaz:

2. tétel. (i) Legyen F tetszőleges tipus, $n \in N$. Ha $\mathcal{A}$ F tipusu n-változós felszálló automata, akkor $L(\mathcal{A}) \subseteq X_n^*$ λ-mentes környezetfüggetlen nyelv.

(ii) Tetszőleges $L \subseteq X_n^*$ λ-mentes környezetfüggetlen nyelvhez megadható olyan $F = F_2$ tipus és F tipusu n-változós $\mathcal{A}$ felszálló automata, hogy $L = L(\mathcal{A})$.

Bizonyitás. Mivel $\mathfrak{F}_A \subset \mathfrak{F}_{REG}$, a tétel első állitása következik a leszálló automatákra vonatkozó emlitett eredményből. Itt az 1. tételen alapuló egyszerü bizonyitását ismertetjük. A $T(\mathcal{A})$ erdő az 1. tétel szerint generálható valamely $\Gamma = \langle Q,F,P,s\rangle$ F tipusu n-változós reguláris fanyelvtannal. Konstruáljuk meg azt a $G = \langle Q,X_n,\bar{P},s\rangle$ környezetfüggetlen nyelvtant, amelyben

(5) $q \to r_1 \ldots r_k \in \bar{P} \Leftrightarrow q \to f(r_1,\ldots,r_k) \in P$,

(6) $q \to x_i \in \bar{P} \Leftrightarrow q \to x_i \in P$,

és $\bar{P}$ az (5), (6) által meghatározott szabályokból áll. L(G) λ-mentes, mivel P nem tartalmaz $q \to \lambda$ szabályt. Tetszőleges

$t \in T_{F,QUX_n}$-re a levezetés hossza szerinti teljes indukcióval igazolható az

$$s \Rightarrow_r^* t \iff s \Rightarrow_G^* fr(t)$$

ekvivalencia. Ebből $L(\mathcal{A}) = fr\,T(\Gamma) = L(G)$ következik, tehát $L(\mathcal{A})$ valóban környezetfüggetlen nyelv.

A második állitás bizonyitásánál föltehető, hogy L a $G = \langle Q, X_n, P, s\rangle$ Chomsky-normálformáju nyelvtannal adott, azaz P szabályai

(7) $q \to r_1 r_2$

és (8) $q \to x_i$

alakuak /ld. SALOMAA [1973] /. Sorszámozzuk meg P (7) alaku szabályait, legyen k darab ilyen szabály. Definiáljuk a $\Gamma = \langle \bar{Q}, F, \bar{P}, s\rangle$ F tipusu n-változós reguláris fanyelvtant, amelyben $\bar{Q} = Q \cup \{d\}$, $F = F_2 = \{f_1, \ldots, f_k\}$ és $\bar{P}$ a következő szabályokat tartalmazza:

(9) $q \to f_i(r_1, r_2) \in \bar{P} \Leftrightarrow$ P i-dik szabálya (7) alaku és $q \to r_1 r_2$,

(10) $q \to f_i(d,d) \in \bar{P} \Leftrightarrow$ P i-dik szabálya (7) alaku és nem q-val keződik,

(11) $d \to f_i(d,d) \in \bar{P}$ $\quad (i = 1,2,\ldots,k)$,

(12) $q \to x_i \in \bar{P} \Leftrightarrow q \to x_i \in P$.

Az igy megadott Γ-ra a tétel első állitásának bizonyitásában leirt konstrukciót alkalmazva olyan G_1 nyelvtant kapunk, amely ekvivalens az eredeti G-vel, hiszen a $\Gamma \Rightarrow G_1$ konstrukciónál a Γ (10) és (11) szerint képezett szabályaiból származó G_1-hez tartozó szabályok "haszontalanok", fölhasználásukkal nem vezethető le egyetlen $w \in X_n^*$ terminális szó sem. (9) - (12) -ből az is következik, hogy Γ D-reguláris fanyelv-

tan. Igy az 1. tétel és mostani tételünk már bebizonyitott első része szerint valamely $\mathcal{A}$ F tipusu n-változós felszálló automatára érvényes az

$$L(\mathcal{A}) = frT(\mathcal{A}) = frT(\Gamma) = L(G_1) = L(G) = L \text{ egyenlőség.} \square$$

Már az előző tétel bizonyitásából sejthető az alábbi negativ eredmény.

3. tétel. Legyen $F = F_2 = \{f\}$ és $n \geq 2$. Ekkor létezik olyan $L \subseteq X_n^*$ λ-mentes környezetfüggetlen nyelv, amely nem ismerhető föl F tipusu n-változós felszálló automatával.

Bizonyitás. Korábban láttuk, hogy a $T = \{f(x_1,x_2), f(x_2,x_1)\}$ erdő nem ismerhető fel fölszálló automatával, ebből adódóan $L = \{x_1x_2, x_2x_1\}$ sem ismerhető föl a tételben megadott tulajdonságu felszálló automatával. $\square$

Megjegyzés. A bizonyitásban fölhasznált L nyelv reguláris, ezért az előző tétel a λ-mentes reguláris nyelvekre is igaz.

Valószinüleg igaz az az erősebb állitás is, hogy tetszőleges $F = F_2$ tipushoz megadható olyan L λ-mentes környezetfüggetlen /reguláris/ nyelv, amely nem ismerhető fel F tipusu felszálló automatával.

Az $n \geq 2$ feltétel szükségességét mutatja a következő pozitiv eredmény.

4. tétel. Legyen $F = F_2 = \{f\}$ és $n = 1$. Ekkor az F tipusu egyváltozós felszálló automaták pontosan az X_1 fölötti λ-mentes reguláris nyelveket ismerik föl.

Bizonyitás. Mivel minden $L \subseteq X_1^*$ környezetfüggetlen nyelv reguláris /ld. SALOMAA [1973]/, a 2. tételből követ-

kezik az egyik irányu állitás.

Forditva, legyen az $L \subseteq X_1^*$ tetszőleges λ-mentes reguláris nyelv a $G = \langle Q, X_n, P, s \rangle$ nyelvtannal adott, ahol P szabályai

(i) $q \to x_1 r$

és (ii) $q \to x_1$

alakuak, $q,r \in Q$, valamint $q \to x_1 r \in P \;\&\; q \to x_1 s \in P \Rightarrow r = s$. Ilyen G megadható, ld. SALOMAA [1973]. Konstruáljuk meg a következő $\Gamma = \langle \bar{Q}, F, \bar{P}, s \rangle$ fanyelvtant. $\bar{Q} = Q \cup \{v,d\}$, $\bar{P} = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, ahol

$$P_1 = \{ q \to f(v,r) \mid q \to x_1 r \in P \},$$

$$P_2 = \{ q \to x_1 \mid q \to x_1 \in P \},$$

és $$P_3 = \{ v \to f(d,d),\ d \to f(d,d),\ v \to x_1 \}.$$

A $frT(\Gamma) = L(G)$ egyenlőség az előző tételekhez hasonlóan bizonyitható. A G-re kiszabott feltételekből következik, hogy Γ D-reguláris. Az 1. tétel szerint létezik olyan $\mathcal{A}$ F tipusu egyváltozós felszálló automata, amelyre

$$L(\mathcal{A}) = frT(\Gamma) = L(G) = L$$

teljesül. □

Tetszőleges F tipusra és $L \subseteq X_n^*$-ra legyen $fr^{-1} L = \{ t \mid t \in T_{F,n} \;\&\; fr(t) \in L \}$. A leszálló automatákkal ellentétben /ld. GÉCSEG és STEINBY [1979] / az alábbi negativ eredményt kapjuk.

5. tétel. A fr^{-1} függvény nem őrzi meg a fölismerhetőséget. Pontosabban tetszőleges nem unáris F tipushoz és $n \in N$-hez megadható olyan $L \subseteq X_n^*$ λ-mentes reguláris nyelv, amelyre $fr^{-1} L$ nem ismerhető fel fölszálló automatával.

Bizonyitás. Elegendő az n = 1 esetet vizsgálni. Az általánosság megszoritása nélkül föltehető $F_2 \neq \emptyset$ és

$f \in F_2$. Legyen $L = \{x_1x_1\}^+$. Ekkor $t_1 = f(x_1,x_1)$ és $t_2 = f(f(x_1,x_1),f(x_1,x_1))$ fr^{-1} L -ben van, de $t_3 = f(x_1,f(x_1,x_1)) \notin fr^{-1}$ L , azaz fr^{-1} L nem Δ-zárt, és igy nem ismerhető fel fölszálló automatával. □

8. Felszálló automaták kompozíciói

Ebben a fejezetben a GLUSKOV [1963], [1964]-ben bevezetett általános kompozíció fogalmát terjesztjük ki felszálló automatákra. Vizsgáljuk a GÉCSEG és PEÁK [1972], valamint GÉCSEG [1974] speciális kompozícióinak megfelelőit is. A fejezet eredményei közönséges automatákra nagyrészt ismertek. Elsődleges célunk az volt, hogy bemutassuk azokat a módszereket, amelyekkel ezek az eredmények meglepően egyszerü módon általánosithatók felszálló automatákra. Leszálló automatákra történő általánositások találhatók például a MAGIDOR és MORAN [1969], RICCI [1973], STEINBY [1977a] munkákban.

A közönséges automaták kompozícióinál megszokott módon az automaták kezdőállapotát és végállapot-vektorát figyelmen kivül hagyjuk, tehát valójában felszálló algebrák kompozícióit tekintjük. Ezért a továbbiakban automaták helyett algebrákról beszélünk, és az ennek megfelelő jelöléseket használjuk /ld. 2. fejezet/.

Legyen R tetszőleges, de erre a fejezetre rögzitett véges rangtipus. Minden, a továbbiakban előforduló $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$ algebráról föltesszük, hogy A és F véges halmaz, valamint $R(F) = R$. /Ha $R = \{1\}$, akkor a -véges unoidoknak tekintett - közönséges automatákra vonatkozó megfelelő fogalmakat és eredményeket kapjuk./

Jelölje $K(R)$ az összes R rangtipusu véges algebra osztályát. Legyen $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \in K(R)$ és $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, F^{(i)} \rangle$

$(i = 1,2,\ldots,k)$, F tetszőleges tipus, $R(F) = R$, továbbá $\Psi: A_1 \times \ldots \times A_k \times F \to F^{(1)} \times \ldots \times F^{(k)}$ aritástartó leképezés, azaz bármely $a_i \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$, $j \in N$, $f \in F_j$-re

$$\Psi(a_1,\ldots,a_k,f) \in F_j^{(1)} \times \ldots \times F_j^{(k)}.$$

Konstruáljuk meg az $\mathfrak{U} = \langle A,F \rangle$ algebrát, amelyre $A = \prod(A_i \mid i = 1,\ldots,k)$ és bármely $\underline{a} \in A$, $f \in F$, $\nu(f) = j$-re $f^{\mathfrak{U}}(\underline{a}) = (\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_j)$, ahol $\Psi(\underline{a},f) = (f^{(1)},\ldots,f^{(k)})$, $f^{(m)}(a_m) = (b_{m1},\ldots,b_{mj})$ $(m = 1,2,\ldots,k)$, végül

$$\underline{b}_i = (b_{1i},b_{2i},\ldots,b_{ki}) \quad (i = 1,2,\ldots,j).$$

Ezt az $\mathfrak{U}$ algebrát az $\mathfrak{U}_1,\ldots,\mathfrak{U}_k$ algebrák <u>Ψ visszacsatolási függvénnyel</u> képezett <u>általános szorzatának</u> nevezzük, és $\mathfrak{U} = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_i[F,\Psi]$ -vel jelöljük.

Ha bevezetjük a $\Psi_i = \pi_i \circ \Psi$ függvényeket, akkor $\Psi = (\Psi_1,\ldots,\Psi_k)$ irható, ahol

$$\Psi_i : A_1 \times \ldots \times A_k \times F \to F^{(i)} \quad (i = 1,\ldots,k).$$

A Ψ visszacsatolási függvényre tett különböző kikötésekkel definiálhatjuk az általános szorzat speciális eseteit.

Legyen $i \in N_o$. Az $\mathfrak{U} = \prod_{j=1}^{k} \mathfrak{U}_j[F,\Psi]$ szorzatot <u>α_i-szorzatnak</u> nevezzük, ha bármely $m \geq j + i$, $j = 1,2,\ldots,k$ esetén Ψ_j nem függ $\mathfrak{U}_m$ -től.

Ha Ψ nem függ egyetlen $\mathfrak{U}_m$-től sem, tehát $\Psi: F \to F^{(1)} \times \ldots \times F^{(k)}$ leképezés, akkor $\mathfrak{U} = \prod_{j=1}^{k} \mathfrak{U}_j[F,\Psi]$ <u>kvázidirekt-szorzat</u>.

Végül, ha még $F = F^{(j)}$ $(j = 1,\ldots,k)$ is teljesül,

és $\Psi(f) = (f,\ldots,f)$ bármely $f \in F$-re, akkor a 2. fejezetben bevezetett direkt szorzat fogalmát kapjuk.

Nevezzük az általános szorzatot G-szorzatnak, a kvázidirekt-szorzatot Q-szorzatnak, a direkt szorzatot D-szorzatnak. A továbbiakban a Θ, Θ_1, Θ_2 jelek a G,D,Q, α_i $(i \in N_o)$ bármelyikét jelenthetik.

Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{A} = \langle B,F \rangle$ algebra <u>izomorfan</u> /<u>homomorfan</u>/ <u>beágyazható</u> az $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i[F,\Psi]$ Θ-szorzatba, ha megadható olyan $\mathcal{L} \in \mathrm{Sub}(\mathcal{U})$ és $\varphi : C \to B$ leképezés, hogy φ izomorfizmus /szürjektiv homomorfizmus/. Ekkor $\mathcal{U}$-t a $\mathcal{A}$ <u>izomorf</u> /<u>homomorf</u>/ <u>Θ-dekompoziciójának</u> is mondjuk. Az izomorf /homomorf/ Θ-dekompozició <u>valódi</u>, ha $|A_i| < |B|$ $(i = 1,\ldots,k)$. $\mathcal{A}$ <u>izomorfan</u> /<u>homomorfan</u>/ <u>Θ-irreducibilis</u>, ha nincs valódi izomorf /homomorf/ Θ-dekompoziciója. Az $M \subseteq K(R)$ halmaz $I_\Theta(M)$ $(H_\Theta(M))$ <u>izomorf</u> /homomorf/ <u>Θ-lezárásán</u> az összes olyan $\mathcal{A}$ algebra halmazát értjük, amelynek létezik M elemeiből képezett izomorf /homomorf/ dekompoziciója. M <u>izomorfan</u> /<u>homomorfan</u>/ <u>Θ-teljes</u>, ha $I_\Theta(M) = K(R)$ $(H_\Theta(M) = K(R))$. M <u>minimális</u> izomorfan /homomorfan/ Θ-teljes, ha tetszőleges $\mathcal{U} \in M$-re $\bar{M} = M - \{\mathcal{U}\}$ már nem izomorfan /homomorfan/ Θ-teljes.

Azt mondjuk, hogy a <u>Θ_1-szorzat izomorfan /homomorfan/ általánosabb a Θ_2-szorzatnál</u>, ha bármely $M \subseteq K(R)$ esetén $I_{\Theta_1}(M) \supseteq I_{\Theta_2}(M)$ $(H_{\Theta_1}(M) \supseteq H_{\Theta_2}(M))$ és létezik olyan $\bar{M} \subseteq K(R)$, hogy $I_{\Theta_1}(\bar{M}) \supset I_{\Theta_2}(\bar{M})$ $(H_{\Theta_1}(\bar{M}) \supset H_{\Theta_2}(\bar{M}))$.

Világos, hogy ha az M rendszer izomorfan Θ-teljes, akkor homomorfan is Θ-teljes. A megforditás egyetlen Θ-ra sem igaz. Legyen Θ tetszőleges, akkor érvényes az

1. tétel. Létezik olyan homomorfan Θ-teljes rendszer, amely nem izomorfan Θ-teljes.

Bizonyitás. Legyen M tetszőleges izomorfan Θ-teljes rendszer. Ekkor az $\mathcal{E} = \langle \{e\}, F \rangle$ egység is $I_\Theta(M)$-ben van, azaz létezik olyan $k \in N$, $\mathfrak{U}_i \in M$ $(i = 1,\dots,k)$ és $\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_i[F,\Psi]$ Θ-szorzat, hogy $\mathcal{E} \cong \mathfrak{U} \in \mathrm{Sub}\left(\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_i[F,\Psi]\right)$. A Ψ visszacsatolási függvény definiciója szerint az M elemeiből képezett Θ-szorzatnak csak akkor lehet egyelemü részalgebrája, ha van olyan $\mathfrak{U}_m = \langle A_m, G^{(m)} \rangle \in M$, hogy

$$(*)\quad (\forall r \in R)\left(\exists g \in G_r^{(m)}\right)\left(\exists a \in A_m\right)\left(g(a) = (a,a,\dots,a)\right).$$

Képezzük az $\bar{M} = \left\{ \bar{\mathfrak{U}}_j \,\middle|\, \mathfrak{U}_j \in M \right\}$ rendszert, ahol

1/ ha $\mathfrak{U}_j$-re nem teljesül $(*)$, akkor $\bar{\mathfrak{U}}_j = \mathfrak{U}_j$.

2/ Ha $\mathfrak{U}_j$-re teljesül $(*)$, akkor $\bar{\mathfrak{U}}_j = \langle \bar{A}_j, G^{(j)} \rangle$, $\bar{A}_j = A_j \cup B_j$,

$$B_j = \left\{ a^* \,\middle|\, (\exists r \in R)(\exists g \in G)\left(g^{\mathfrak{U}_j}(a) = (a,a,\dots,a)\right) \right\},$$

és bármely $g \in G^{(j)}$, $a \in A_j$, $a^* \in B_j$-re

$$g^{\bar{\mathfrak{U}}_j}(a) = g^{\mathfrak{U}_j}(a), \quad \text{ha} \quad g^{\mathfrak{U}_j}(a) \neq (a,a,\dots,a),$$

$$g^{\bar{\mathfrak{U}}_j}(a) = (a^*,a^*,\dots,a^*), \quad \text{ha} \quad g^{\mathfrak{U}_j}(a) = (a,a,\dots,a),$$

végül $g^{\bar{\mathfrak{U}}_j}(a^*) = g^{\mathfrak{U}_j}(a)$.

Mivel $\bar{M}$ egyetlen algebráján sem teljesül $(*)$, $\bar{M}$ nem lehet izomorfan Θ-teljes.

Megmutatjuk, hogy $\bar{M}$ homomorfan Θ-teljes. Legyen $\mathfrak{L} = \langle C, H \rangle$ tetszőleges algebra, $\prod_{m=1}^{n} \mathfrak{U}_m[H,\xi]$ a $\mathfrak{L}$ izomorf Θ-dekompoziciója a $\mathfrak{D} \in \mathrm{Sub}\left(\prod_{m=1}^{n} \mathfrak{U}_m[H,\xi]\right)$ részalgebra és a $\varphi : \mathfrak{D} \to \mathfrak{L}$ izomorfizmus segitségével.

Képezzük $\bar{M}$ elemeiből a $\prod_{m=1}^{n} \bar{\mathfrak{A}}_m[H,\bar{\xi}]$ szorzatot, ahol bármely $\underline{a} \in \prod_{m=1}^{n} \bar{A}_m$ és $h \in H$ esetén

$$\bar{\xi}(\underline{a},h) = \xi(\hat{\underline{a}},h) \text{ és}$$

$$\hat{\underline{a}} = \begin{cases} \underline{a}, \text{ ha } \underline{a} \in \prod_{m=1}^{n} A_m, \\ \text{az az } \hat{\underline{a}} \in \prod_{m=1}^{n} A_m \text{ vektor, amelyet ugy} \\ \text{kapunk, hogy } \underline{a} \text{ minden } a_i^* \text{ alaku kompo-} \\ \text{nense helyett } a_i\text{-t irunk.} \end{cases}$$

Az $\bar{\mathfrak{A}}_j$ algebrák definiciójából adódik, hogy $\bar{\mathfrak{D}} = \langle \bar{D}, H \rangle \left(\bar{D} = \{\underline{d} \mid \hat{\underline{d}} \in D\}\right)$ a $\prod_{m=1}^{n} \bar{\mathfrak{A}}_j[H,\bar{\xi}]$ szorzat részalgebrája és a $\bar{\varphi}(\underline{d}) = \varphi(\hat{\underline{d}})$ leképezés $\bar{\varphi} : \bar{\mathfrak{D}} \to \mathfrak{L}$ szürjektiv homomorfizmus lesz. □

A következő tétel bizonyitásában szükségünk lesz az $\{\mathfrak{A}_i = \langle A_i, F^{(i)} \rangle \mid i = 1,\dots,k\}$ algebrák F-direkt összegének fogalmára. Ezen az $\mathfrak{A} = \langle A,F \rangle$ algebrát értjük, amelyben $A = \coprod(A_i \mid i = 1,\dots,k) \cup \{*\}$, $\langle F,\nu \rangle$ az $\langle F^{(i)}, \nu_i \rangle$ tipusok direkt összege, azaz $F = \coprod(F^{(i)} \mid i = 1,\dots,k)$ és bármely $(f,j) \in F$-re $\nu(f,j) = \nu_j(f)$. A müveleteket a következőképpen értelmezzük: tetszőleges $(a,m) \in A$ és $(f,j) \in F$ esetén

$$(f,j)^{\mathfrak{A}}(a,m) = \big((a_1,m),\dots (a_n,m)\big), \text{ ha } j = m \text{ és}$$

$$f^{\mathfrak{A}_j}(a) = (a_1,\dots,a_n),$$

$$(f,j)^{\mathfrak{A}}(a,m) = (*,*,\dots,*), \text{ ha } j \neq m$$

valamint $$(f,j)^{\mathfrak{A}}(*) = (*,*,\dots,*).$$

2. tétel. Ha nem létezik véges homomorfan Θ-teljes rendszer, akkor van olyan M homomorfan Θ-teljes rendszer, amely nem tartalmaz minimális homomorfan Θ-teljes részrendszert.

Bizonyitás. Legyen $M = \{\mathfrak{A}_i \mid i \in N\}$ algebrák olyan

rendszere, amely nem tartalmaz izomorf algebrákat, de tetszőleges $\mathcal{L}$ algebrához létezik olyan j index, hogy $\mathcal{L} \cong \mathcal{U}_j$. Ilyen megszámlálhatóan végtelen M halmaz létezik, mivel rögzitett R rangtipusu véges algebrákat tekintünk. M nyilvánvalóan homomorfan /sőt izomorfan/ Θ-teljes. Képezzük az $\bar{M} = \{\bar{\mathcal{U}}_i \mid i \in N\}$ rendszert, ahol tetszőleges $i \in N$-re $\bar{\mathcal{U}}_i$ az $\{\mathcal{U}_j \mid j = 1,\dots,i\}$ rendszer F-direkt összege. $\bar{M}$ is izomorfan Θ-teljes, hiszen az $\bar{\mathcal{U}}_i$ F-direkt összeg bármelyik tényezője izomorf $\bar{\mathcal{U}}_i$ egy részalgebrájával. Legyen $\bar{\bar{M}} = \{\mathcal{U}_{i_j} \mid j \in N, i_j \in N\}$ az $\bar{M}$ tetszőleges izomorfan Θ-teljes részrendszere. Megmutatjuk, hogy $\bar{\bar{M}}$ nem minimális. Legyen $\mathcal{U}_{i_{j_0}} \in \bar{\bar{M}}$ tetszőleges, tekintsük az $M^* = \bar{\bar{M}} - \{\mathcal{U}_{i_{j_0}}\}$ rendszert. $\bar{\bar{M}}$ teljességéből következően $\bar{\bar{M}}$ és igy M^* is végtelen. Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges algebra, és tegyük fel, hogy $\mathcal{L} \cong \mathcal{U}_j \in M$. Mivel M^* végtelen, létezik olyan $i_{j_1} > \max(j, i_{j_0})$, hogy $\bar{\mathcal{U}}_{i_{j_1}} \in M^*$. A "részalgebrája" reláció tranzitivitása miatt $\mathcal{L} \cong \bar{\mathcal{L}} \in \mathrm{Sub}(\mathcal{U}_{i_{j_1}})$ vagyis M^* is izomorfan Θ-teljes. □

Megjegyzés. A bizonyitásból látszik, hogy a 2. tétel /amely egyébként a DÖMÖSI [1976] 2. tételének általánositása/ izomorfan Θ-teljes rendszerekre is igaz.

Azt mondjuk, hogy az M rendszer az erdőkre vonatkozóan Θ-teljes, ha tetszőleges $T \in \mathfrak{T}_A$ erdő fölismerhető M-ből vett automaták valamely $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i[F,\Psi]$ szorzatához tartozó $\mathcal{A} = \langle \mathcal{U}, a', \underline{a} \rangle$ normalizált felszálló automatával.

3. tétel. M akkor és csak akkor homomorfan Θ-teljes, ha az erdőkre vonatkozóan Θ-teljes.

Bizonyitás. Legyen először M homomorfan Θ-teljes

rendszer, $T = T(\mathcal{B})$ tetszőleges fölismerhető erdő, ahol $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}, b', \underline{b} \rangle$ a $\mathcal{A} = \langle B, F \rangle$ algebrához tartozó összefüggő, normalizált felszálló automata. /Ilyen $\mathcal{B}$ létezik, ld. 3.9. tétel./ Mivel M teljes, megadható $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i[F, \Psi]$ Θ-szorzat, $\Sigma \in \mathrm{Sub}(\mathcal{U})$ és $\varphi : \Sigma \to \mathcal{A}$ szürjektiv homomorfizmus. $\mathcal{B}$ összefüggősége azt jelenti, hogy $\mathcal{A} = \langle B, F \rangle = \langle [b'], F \rangle$. Ezért létezik olyan $c' \in \varphi^{-1}(b')$, hogy $\mathcal{A}$ a $\bar{\Sigma} = \langle [c'], F \rangle \in \mathrm{Sub}(\mathcal{U})$ részalgebra homomorf lépe. A $C = \langle \bar{\Sigma}, c', \underline{c} \rangle$, $c^{(i)} = \varphi^{-1}(B^{(i)}) \cap [c']$ $(i = 1, \ldots, n)$ automatának homomorf képe $\mathcal{B}$, igy a 3.7. tétel szerint $T(C) = T(\mathcal{B})$. Abból, hogy $\mathcal{B}$ a C homomorf képe és $\mathcal{B}$ normalizált, következik, hogy C is normalizált.

Forditva, legyen M az erdőkre vonatkozóan Θ-teljes, $\mathcal{U} = \langle A, F \rangle$ tetszőleges algebra. Konstruáljuk meg azt a $\mathcal{A} = \langle B, G \rangle$ algebrát, ahol $B = A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $G_i = F_i$, ha $i \neq 2$ és $G_2 = F_2 \cup \{h\}$ /föltehetjük, hogy $2 \in R$/. Tetszőleges $g \in G$-re és $a_j \in A$-ra

$$g^{\mathcal{A}}(a_j) = \begin{cases} g^{\mathcal{U}}(a_j), & \text{ha } g \neq h \\ (a_{j+1 \bmod(k)}, a_{j+1 \bmod(k)}), & \text{ha } g = h. \end{cases}$$

A $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A}, a_1, \underline{a} \rangle$, $\underline{a} = A^{(1)} = \{a_1\}$ egyváltozós G tipusu felszálló automata összefüggő és normalizált. Valóban, $\mathcal{A} = \langle [a_1], G \rangle$ és bármely $a_j \in B$-re $T(\mathcal{B}, a_j) \neq \emptyset$. $\mathcal{B}$ minimális állapotszámu a $T = T(\mathcal{B})$ erdőt fölismerő felszálló automaták között. Ez abból látható, hogy a $\bar{T} = \{x_1, h(x_1, x_1), h(h(x_1, x_1), h(x_1, x_1)), \ldots\}$ erdő $T(\mathcal{B})$-hez tartozó fáinak fölismeréséhez legalább k állapot kell, hogy a leveleknek a gyökértől mért távolságát mod(k) számolni

tudjuk. Kihasználva M erdőkre vonatkozó teljességét, létezik olyan $\mathfrak{L} = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_i[G,\xi]$ Θ-szorzat M-ből, hogy alkalmas c' és $\underline{c} = C^{(1)}$ választással a $C = \langle \mathfrak{L}, c', \underline{c} \rangle$ normalizált felszálló automata $T(\mathfrak{B})$-t ismeri föl. Föltehető az is, hogy C összefüggő, ha nem az, helyette a $\bar{C} = \langle \bar{\mathfrak{L}}, c', \underline{c}^* \rangle$ összefüggő normalizált automata vehető, ahol

$$\bar{\mathfrak{L}} = \langle [c'], G \rangle, \quad \underline{c}^* = \left(C^{(1)} \cap [c'] \right).$$

A 6.4. lemmából és 6.5. tételből adódóan a $\mathfrak{B}$ minimális automata a C automata homomorf képe. Ezért $\mathfrak{Z}$ a $\bar{\mathfrak{L}} = \langle [c'], G \rangle \in$ $\in \mathrm{Sub}(\mathfrak{L})$ részalgebra homomorf képe, vagyis $\mathfrak{Z} \in H_\Theta(M)$. Mivel $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{Z}$ F-részalgebrája, innen már könnyen adódik $\mathfrak{U} \in H_\Theta(M)$, ha azt a $\hat{\mathfrak{L}} = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_i[F, \hat{\xi}]$ Θ-szorzatot vesszük, amelyben a $\hat{\xi} : A_1 \times A_2 \ldots \times A_k \times F \to F^{(1)} \times \ldots \times F^{(k)}$ visszacsatolási függvény a ξ megszoritása $A_1 \times \ldots \times A_k \times F$-re, azaz bármely $\underline{a} \in \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_i$, $f \in F$-re $\hat{\xi}(\underline{a}, f) = \xi(\underline{a}, f)$. A $\hat{\mathfrak{L}}$ szorzat $\hat{\bar{\mathfrak{L}}} = \langle [c'], F \rangle$ részalgebrájának homomorf képe $\mathfrak{U}$. □

Megjegyzés. Valószinü, hogy a tételhez szükséges az erdő-teljesség definiciójában a normalizáltság feltételezése, bár ezt nem sikerült bebizonyitanunk. A GÉCSEG és HORVÁTH [1976] cikk leszálló faautomatákra tartalmaz hasonló erdő-teljességi kritériumot.

A 2.3. és 2.4. lemmához hasonló alapvető szerepe van a következő két lemmának, mivel segitségükkel kapcsolatot tudunk teremteni a felszálló algebrák kompoziciói és a közönséges automaták, azaz unoidok kompoziciói között.

A továbbiakban $K(1)$ az összes véges unoid osztályát, M_μ az $\{ \mathfrak{U}_\mu \mid \mathfrak{U} \in M \}$ halmazt jelöli.

4. lemma. Tetszőleges $M \subseteq K(R)$ rendszerre, $\mathfrak{U} \in K(R)$ algebrára és Θ-szorzatra igaz

(i) $\mathfrak{U} \in I_\Theta(M) \Rightarrow \mathfrak{U}_\mu \in I_\Theta(M_\mu)$,

(ii) $\mathfrak{U} \in H_\Theta(M) \Rightarrow \mathfrak{U}_\mu \in H_\Theta(M_\mu)$.

Bizonyitás. Legyen $\mathfrak{U} = \langle A,F \rangle$ izomorf az M elemeiből képezett $\mathfrak{L} = \prod_{i=1}^{j} \mathfrak{L}_i[F,\Psi]$ Θ-szorzat $\mathfrak{Z}$ részalgebrájával. Képezzük az M_μ rendszer $\mathfrak{L}_{i\mu}$ algebráiból $(i = 1,\dots,j)$ a $\prod_{i=1}^{j} \mathfrak{L}_{i\mu}[F_\delta,\bar{\Psi}]$ Θ-szorzatot, amelyben tetszőleges $\underline{c} \in \prod_{i=1}^{j} C_i$ és $f \in F$-re, valamint $1 \le k \le \nu(f)$-re

$$(*) \quad \bar{\Psi}(\underline{c},f_k) = \left(g_k^{(1)},\dots,g_k^{(j)}\right) \Leftrightarrow \Psi(\underline{c},f) = \left(g^{(1)},\dots,g^{(j)}\right).$$

$(*)$ alapján nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{L}_\mu = \left(\prod_{i=1}^{j} \mathfrak{L}_i[F,\Psi]\right)_\mu =$ $= \prod_{i=1}^{j} \mathfrak{L}_{i\mu}[F_\delta,\bar{\Psi}]$. A 2.3. lemma állitásaiból következik, hogy $\mathfrak{Z}_\mu \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{U}_\mu)$ és $\mathfrak{U}_\mu \cong \mathfrak{Z}_\mu$.

Ha $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{Z}$ részalgebra homomorf képe, akkor szintén a 2.3. lemmával adódik, hogy $\mathfrak{U}_\mu$ a $\mathfrak{Z}_\mu$ homomorf képe.

Legyen R tetszőleges rangtipus, $j \in R$. Az $\mathfrak{U} = \langle A,F \rangle$ R rangtipusu homogén algebrát j-homogénnek hivjuk, ha bármely $k \neq j$, $f \in F_k$ és $a \in A$-ra teljesül $f(a) = (a,a,\dots,a)$.

A 2. fejezet $\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}_\lambda$ hozzárendeléséhez hasonló kapcsolatot definiálunk $K(1)$ és az R rangtipusu j-homogén algebrák között. Legyen $\mathfrak{U} = \langle A,G \rangle$ tetszőleges unoid, a hozzá tartozó $\mathfrak{U}_{\lambda_j} = \langle A,F^{\lambda_j} \rangle$ R rangtipusu j-homogén algebrát a következő módon kapjuk:

$$F^{\lambda_j} = \bigcup\left(F_i^{\lambda_j} \mid i \in R\right), \quad F_j^{\lambda_j} = \left\{\bar{g} \mid g \in G\right\} \text{ és } \left|F_i^{\lambda_j}\right| = 1, \text{ ha } i \neq j.$$

A müveletek realizálása bármely $f \in F^{\lambda_j}$ és $a \in A$ esetén:

$$f(a) = \begin{cases} (a,a,\ldots,a), \text{ ha } f \notin F_j, \\ (b,b,\ldots,b), \text{ ha } f = \bar{g} \in F_j \text{ és } g(a) = b. \end{cases}$$

Jelöljük az R rangtipusu j-homogén algebrák osztályát J(R)-rel.

5. lemma. (i) Az $\mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\lambda_j}$ hozzárendelés bijekció K(1) és J(R) között,

(ii) $\mathcal{L} \in \mathrm{Sub}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \mathcal{L}_{\lambda_j} \in \mathrm{Sub}(\mathcal{U}_{\lambda_j})$,

(iii) $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{L}$ izomorfizmus /homomorfizmus, beágyazás/ $\Leftrightarrow \varphi : \mathcal{U}_{\lambda_j} \to \mathcal{L}_{\lambda_j}$ izomorfizmus /homomorfizmus, beágyazás/,

(iv) J(R) zárt a H,S,P,I_Θ,H_Θ operátorokra.

Bizonyitás. A 2. fejezet lemmáihoz hasonló egyszerü számitásokkal igazolható. □

6. lemma. Tetszőleges $M \subseteq K(1)$ rendszerre, $\mathcal{U} \in K(1)$ unoidra és Θ-szorzatra igaz

(i) $\mathcal{U} \in I_\Theta(M) \Leftrightarrow \mathcal{U}_{\lambda_j} \in I_\Theta(M_{\lambda_j})$,

ii $\mathcal{U} \in H_\Theta(M) \Leftrightarrow \mathcal{U}_{\lambda_j} \in H_\Theta(M_{\lambda_j})$.

Bizonyitás. Az $\mathcal{U} = \langle A,F \rangle$ unoid legyen izomorf az M elemeiből képezett $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i[F,\Psi]$ Θ-szorzat $\mathcal{L}$ részunoidjával. Képezzük az M_{λ_j} rendszer $\mathcal{L}_{i_{\lambda_j}}$ algebráiból a $\prod_{i=1}^{m} \mathcal{L}_{i_{\lambda_j}} [F^{\lambda_j}, \bar{\Psi}]$ Θ-szorzatot, ahol tetszőleges $\underline{c} \in \prod_{i=1}^{m} C_i$ és $f \in F^{\lambda_j}$ mellett

(1) ha $f \notin F_j^{\lambda_j}$, akkor $\bar{\Psi}(\underline{c},f) = (f^{(1)},\ldots,f^{(m)})$, és $f^{(k)}$ a $\mathcal{L}_{k_{\lambda_j}}$ egyetlen $\nu(f)$ aritásu müvelete $k = 1,\ldots,m$-re,

(2) ha $f = \bar{g} \in F_j^{\lambda_j}$, $\bar{\Psi}(\underline{c},\bar{g}) = \left(\bar{g}^{(1)},\ldots,\bar{g}^{(m)}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Psi(\underline{c},g) = \left(g^{(1)},\ldots,g^{(m)}\right) .$$

A $\prod_{i=1}^{m} \Sigma_{i\lambda_j}\left[F^{\lambda_j},\bar{\Psi}\right]$ szorzat ilyen választása mellett az 5. lemmából $\mathcal{U}_{\lambda_j} \cong \mathcal{L}_{\lambda_j} \in \mathrm{Sub}\left(\prod_{i=1}^{m} \Sigma_{i\lambda_j}\left[F^{\lambda_j},\bar{\Psi}\right]\right)$. Az előző konstrukció (1) és (2) szerinti megforditásával adódik az

$$\mathcal{U}_{\lambda_j} \in I_\Theta(M_{\lambda_j}) \Rightarrow \mathcal{U} \in I_\Theta(M) \text{ implikáció.}$$

A homomorf lezárásokra vonatkozó állitás bizonyitása hasonlóan történhet. □

7. következmény. (i) Ha K(1)-nek nincsen véges izomorfan /homomorfan/ Θ-teljes M részhalmaza, akkor K(R)-nek sem lehet véges izomorfan /homomorfan/ Θ-teljes $\bar{M}$ részhalmaza egyetlen R rangtipusra sem.

(ii) Ha $\Theta \neq G$, akkor nincsen véges izomorfan Θ-teljes rendszer egyetlen R rangtipusra sem.

iii Ha $\Theta = D,Q,\alpha_o$ akkor nincsen véges homomorfan Θ-teljes rendszer egyetlen R rangtipusra sem.

Bizonyitás. (i) nyilvánvalóan következik a 4. lemmából.

(ii) közönséges automatákra, igy unoidokra is, igaz /ld. IMREH [1978] , ebből (i) felhasználásával következik tetszőleges R rangtipusra.

(iii) közönséges automatákra igaz /ld. GÉCSEG és PEÁK [1972], ezért (i) miatt tet-

szőleges R-re is igaz.□

8. következmény. Legyen Θ_1 és Θ_2 két tetszőleges szorzat. Tetszőleges R rangtipusu algebrákra vonatkozóan Θ_1 akkor és csak akkor általánosabb izomorfan /homomorfan/ Θ_2-nél, ha unoidokra vonatkozóan általánosabb izomorfan /homomorfan/ Θ_2-nél.

Bizonyitás. Egyik irányban világos.
Forditva, tegyük fel, hogy Θ_1 izomorfan általánosabb Θ_2-nél az unoidokra vonatkozóan és $M \subseteq K(1)$-re $I_{\Theta_1}(M) \supset I_{\Theta_2}(M)$. Legyen R tetszőleges rangtipus, $j \in R$. A 6. lemma szerint $I_{\Theta_1}(M_{\lambda_j}) \supset I_{\Theta_2}(M_{\lambda_j})$, tehát Θ_1 az R rangtipusra vonatkozóan is általánosabb izomorfan Θ_2-nél.

A homomorf általánosságra vonatkozó állitás ugyanigy bizonyitható.

Vezessük be a "Θ_2 izomorfan /homomorfan/ általánosabb Θ_1-nél" állitás röviditésére a $\Theta_1 <_{iz} \Theta_2$ $(\Theta_1 <_{hom} \Theta_2)$ jelölést.

9. következmény. Legyen R tetszőleges rangtipus, ekkor

(i) $D <_{iz} Q <_{iz} \alpha_o <_{iz} \cdots <_{iz} \alpha_i <_{iz} \cdots <_{iz} \alpha_{i+j} <_{iz} \cdots <_{iz} G$,

(ii) $D <_{hom} Q <_{hom} \alpha_o <_{hom} \alpha_1 <_{hom} \alpha_2$.

Bizonyitás. (i) közönséges automatákra ismert /v.ö. IMREH [1978]/, ebből a 8. következmény szerint tetszőleges R rangtipusra adódik.

(ii) unoidokra igaz /ld. GÉCSEG [1974]/,

ezért szintén a 8. következmény miatt bármely R-re is teljesül.□

Tetszőleges Θ-szorzatra vezessük be K(R)-en a következő relációkat:

(i) $\mathcal{U} \leq_\Theta \mathcal{L}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ izomorfan beágyazható $\mathcal{L}$ valamely egytényezős Θ-szorzatába.

(ii) $\mathcal{U}\ \varepsilon_\Theta \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{U} \leq_\Theta \mathcal{L}$ és $\mathcal{L} \leq_\Theta \mathcal{U}$.

10. lemma. (i) $\leq_\Theta$ reflexiv és tranzitiv reláció K(R)-en,

(ii) ε_Θ végtelen indexü ekvivalencia K(R)-en,

(iii) ha $\Theta \neq D$, akkor tetszőleges $n \in N$-hez megadható n elemü algebrák olyan véges M_n rendszere, hogy bármely $\mathcal{U}$ n elemü algebra ε_Θ-ekvivalens valamely $\mathcal{L} \in M_n$-nel,

(iv) ha $\Theta = D$ és F rögzitett tipus, akkor tetszőleges $n \in N$-hez megadható n elemü F tipusu algebrák olyan véges $\bar{M}_n$ rendszere, hogy bármely $\mathcal{U}$ n elemü F tipusu algebra ε_D-ekvivalens valamely $\bar{M}_n$-sal.

Bizonyitás. (i) nyilvánvaló, (ii) következik (i)-ből és az $\mathcal{U}\ \varepsilon_\Theta \mathcal{L} \Rightarrow |A| = |B|$ implikációból. (iii)-(iv) abból a megállapitásból adódik, hogy tetszőleges $r \in R$-re az $f : N \to N^r$ leképezések száma véges, ezért csak véges sok olyan n elemü algebra van, amelyek "lényegesen" különböznek, azaz nemcsak tartóhalmazuk és müveleteik jelölése tér el.

11. lemma. Legyen $M_1, M_2 \subseteq K(R)$, $M_1 = \{\mathcal{U}_i \mid i \in I\}$,

$M_2 = \{\mathcal{G}_i \mid i \in I\}$ és bármely $i \in I$-re $\mathcal{U}_i \; \varepsilon_\Theta \; \mathcal{G}_i$. Ekkor $I_\Theta(M_1) = I_\Theta(M_2)$ és $H_\Theta(M_1) = H_\Theta(M_2)$.

Bizonyitás. Legyen $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i[F,\Psi]$ tetszőleges, M_1 elemeiből képezett Θ-szorzat. Tegyük fel, hogy $\mathcal{U}_i = \langle A_i, F^{(i)} \rangle$ a $\mathcal{G}_i = \langle B_i, G^{(i)} \rangle \in M_2$ algebra egytényezős $\Sigma_i = \mathcal{G}_i[F^{(i)}, \Psi_i]$ Θ-szorzatával izomorf a φ_i izomorfizmus mellett. Képezzük azt a $\mathcal{G} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{G}_i[F,\Psi]$ szorzatot, amelyben tetszőleges $\underline{b} = (b_1,\ldots,b_k) \in \prod_{i=1}^{k} B_k$, $f \in F$ esetén $\overline{\Psi}(\underline{b},f) = \Psi(\varphi(\underline{b}),f)$. /$\varphi(\underline{b})$ a $(\varphi_1(b_1),\ldots,\varphi_k(b_k))$ vektort jelenti./ A $\overline{\Psi}$ visszacsatolási függvény definiciójából látható, hogy $\mathcal{G}$ is Θ-szorzat lesz, továbbá a $\varphi : \underline{b} \to \varphi(\underline{b})$ leképezés $\mathcal{G}$ izomorfizmusa $\mathcal{U}$-ra. Ebből $I_\Theta(M_1) \subseteq I_\Theta(M_2)$ és $H_\Theta(M_1) \subseteq H_\Theta(M_2)$ következik.

M_1 és M_2 szerepének fölcserélésével ugyanugy igazolható a két forditott irányu tartalmazás. □

12. lemma. Legyen $\mathcal{U} = \langle A,F \rangle \in K(R)$ és $M = \{\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_k\} \subseteq K(R)$ tetszőleges. Ha $\mathcal{U} \in I_\Theta(M)$, akkor $\mathcal{U}$ izomorfan beágyazható valamely M elemeiből képezett legfeljebb K tényezős Θ-szorzatba is, ahol $K = k \cdot b^{|A|}$, $b = \max(|B_i| \mid i = 1,\ldots,k)$.

Bizonyitás. Ez a lemma az IMREH [1978] cikk 6. tételében igazolt állitás megfelelője, a bizonyitás megegyezik az ottanival. □

13. következmény. (i) Tetszőleges Θ-ra, $\mathcal{U} \in K(R)$-re és véges $M \subseteq K(R)$-re eldönthető, hogy $\mathcal{U}$ beágyazható-e izomorfan M-hez tartozó automaták Θ-szorzatába.

(ii) Tetszőleges Θ-ra és $\mathcal{U} \in K(R)$-re

eldönthető, hogy $\mathfrak{U}$ izomorfan Θ-irreducibilis-e.

Bizonyitás. (i) Az előző lemma szerint az eldönthetőség adódik M elemeiből alkotott véges sok, legfeljebb K tényezős Θ-szorzat vizsgálatából. Egy-egy ilyen szorzatra természetesen véges sok lépésben eldönthető az izomorf beágyazhatóság.

(ii) A 10. lemmából következik, hogy az $\bigcup \left(\mathfrak{A}/\varepsilon_\Theta \mid \mathfrak{A} \in K(R) \,\&\, |B| < |A| \right)$ halmaz véges. ε_Θ definiciójából és a 10. lemma bizonyitásának (iii) - (iv) részéből kapjuk, hogy effektiven megadható az egyes osztályok reprezentánsaiból álló M véges halmaz. A 11. lemma alapján $\mathfrak{U}$ izomorfan Θ-irreducibilis $\iff \mathfrak{U} \in I_\Theta(M)$. Az utóbbi relációról (i)-ben beláttuk, hogy eldönthető. □

Ezután rátérünk az egyes Θ-szorzatok vizsgálatára. Először néhány direkt szorzatokra vonatkozó eredményt bizonyitunk, ezért a továbbiakban a rögzitett F tipushoz tartozó algebrákat tekintünk, összességüket K(F)-fel jelöljük.

14. tétel. Az $M \subseteq K(F)$ rendszer akkor és csak akkor izomorfan D-teljes, ha bármely $\mathfrak{U}$ szubdirekt irreducibilis algebrához létezik olyan $\mathfrak{A} \in M$, hogy $\mathfrak{U} \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$.

Bizonyitás. Az elegendőség következik az univerzális algebrákra jól ismert $(\forall 1 \leq i \leq n)(\mathfrak{U}_i \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A}_i)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{U}_i \in \mathrm{Sub}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i \right)$ állitásból, amely a 2.7. lemma segitségével bizonyitható felszálló algebrákra, valamint a 2.8. következmény (iii) pontjában bizonyitott szubdirekt

felbontási tételből.

A szükségesség igazolásához legyen $\mathcal{U} = \langle A,F \rangle$ tetszőleges szubdirekt irreducibilis algebra, $\mathcal{U} \cong \mathcal{L} = \langle B,F \rangle$, $\mathcal{L} \in \mathrm{Sub}\left(\prod_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\right)$, $\mathcal{L}_i \in M$, $i = 1,2,\ldots,k$. Univerzális algebrákra - és igy a 2.3, 2.7. lemma miatt felszálló algebrákra is - igaz a következő eredmény /ld. GRÄTZER [1968]/. Ha $\mathcal{L} \in \mathrm{Sub}\left(\prod_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\right)$, akkor bármely $1 \leq i \leq k$-ra

(i) $\bar{\mathcal{L}}_i = \langle \pi_i(B),F \rangle$ a $\mathcal{L}_i$ részalgebrája,

(ii) $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{k}{}^{*} \bar{\mathcal{L}}_i$ és a $\varphi(\underline{b}) = \pi_i(\underline{b})$ leképezés $\mathcal{L}$ homomorfizmusa $\bar{\mathcal{L}}_i$-ra.

Mivel ekkor $\mathcal{U}$ is a $\bar{\mathcal{L}}_i$-ok szubdirekt szorzata, $\mathcal{U}$ szubdirekt irreducibilitása miatt van olyan $1 \leq j \leq k$ index, hogy $|\pi_i(B)| \geq |A| = |B|$, ebből viszont az adódik, hogy $\mathcal{U} \cong \bar{\mathcal{L}}_i \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}_i)$. □

15. tétel. Legyen $\mathcal{U} \in K(F)$ tetszőleges. $\mathcal{U}$ akkor és csak akkor izomorfan D-irreducibilis, ha szubdirekt irreducibilis.

Bizonyitás. Az izomorf D-irreducibilitásból nyilvánvalóan következik a szubdirekt irreducibilitás. Forditva, ha $\mathcal{U}$ szubdirekt irreducibilis, akkor az előző tétel szükségességének bizonyitásából látható, hogy $\mathcal{U}$ D-irreducibilis. □

A továbbiakban a $H_D(M)$ homomorf D-lezárásokat vizsgáljuk.

16. lemma. Tetszőleges $\mathcal{U} \in K(F)$ és $M \subseteq K(F)$ esetén

$$(*) \qquad \mathcal{U} \in H_D(M) \iff \mathcal{U} \in HSP(M).$$

Bizonyitás. Közönséges automatákra, igy unoidokra is igaz (*) , ld. GÉCSEG [1973] . Tetszőleges F tipus visszavezethető erre az esetre az

$$(*\dot{*}) \quad \mathfrak{U} \in \mathrm{HSP}(M) \iff \mathfrak{U}_\mu \in \mathrm{HSP}(M_\mu) \quad \text{és}$$

$$(* * *) \quad \mathfrak{U} \in \mathrm{H_D}(M) \iff \mathfrak{U}_\mu \in \mathrm{H_D}(M_\mu)$$

ekvivalenciákkal, amelyek a 2.15, illetve 2.3. lemmákból következnek. □

17. következmény. Legyen $\mathfrak{U} \in K(F)$ tetszőleges algebra és $M \subseteq K(F)$ tetszőleges véges rendszer. Ekkor

(i) $\mathfrak{U} \in \mathrm{H_D}(M)$,

ii $\mathfrak{U}$ homomorf D-irreducibilitása

eldönthető.

Bizonyitás. (i) következik az előző lemma (*) -(* *) ekvivalenciáiból és abból, hogy $\mathfrak{U}_\mu \in \mathrm{HSP}(M_\mu)$ eldönthető, ld. GÉCSEG és SZÉKELY [1973].

(ii) Legyen $M \subseteq K(F)$ olyan halmaz, amely nem tartalmaz izomorf algebrákat, de bármely $|A|$ -nál kevesebb állapotu $\mathcal{A} = \langle B,F \rangle$ algebra izomorf valamely $\mathfrak{U} \in M$-mel. Világos, hogy effektiven megadható ilyen véges M halmaz. A 11. lemma szerint

$\mathfrak{U}$ homomorfan D-irreducibilis $\iff \mathfrak{U} \in \mathrm{H_D}(M)$.

Az utóbbi reláció az (i)-ben bizonyitott állitás segitségével eldönthető.

Áttérünk a kvázidirekt-szorzat vizsgálatára, ezért ujra megengedünk tetszőleges, R rangtipusu algebrákat.

18. lemma. Legyen $\mathfrak{U} = \langle A,F \rangle \in K(R)$ és

$\{\mathfrak{U}_i \mid i = 1,\dots,k\} \subseteq K(R)$ tetszőleges. $\mathfrak{U}$ akkor és csak akkor egyezik meg valamely $\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_i[F,\Psi]$ kvázidirekt-szorzattal, ha bármely $1 \leq i \leq k$-ra megadható olyan egytényezős $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{U}_i[F,\Psi_i]$ kvázidirekt-szorzat, hogy $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{L}_i$-k direkt szorzata, azaz $\mathfrak{U} = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{L}_i$.

Bizonyitás. Legyen tetszőleges $f \in F$-re és $i=1,2,\dots,k$-ra $\Psi_i(f) = \pi_i(\Psi(f))$. Ekkor a $\Psi(f) = \left(\Psi_1(f),\dots,\Psi_k(f)\right)$ azonosságból adódik mindkét irányban a lemma állitása. □

Mivel az előző lemma $\mathfrak{U}_i$ és $\mathfrak{L}_i$ algebráinak tartóhalmaza megegyezik, igaz az alábbi

19. következmény. Tetszőleges $\mathfrak{U}$ algebra akkor és csak akkor izomorfan /homomorfan/ Q-irreducibilis, ha izomorfan /homomorfan/ D-irreducibilis.

Ebből a 17. következményhez hasonló eldönthetőségi eredményeket kaphatunk.

20. következmény. Legyen $\mathfrak{U} = \langle A,F\rangle \in K(R)$ tetszőleges algebra és $M \subseteq K(R)$ tetszőleges véges rendszer. Ekkor

(i) $\mathfrak{U} \in H_Q(M)$,

(ii) $\mathfrak{U}$ homomorf Q-irreducibilitása

eldönthető.

Bizonyitás. (i) Jelölje $\bar{M}$ az M elemeiből képezhető összes egytényezős kvázidirekt-szorzat halmazát. A 10. lemma és a 13. következmény bizonyitásához hasonlóan belátható, hogy effektiven megadható olyan véges $M^* \subset K(R)$, hogy bármely $\mathfrak{L} \in \bar{M}$-hoz létezik $\mathfrak{L}$-vel Q-ekvivalens $\mathfrak{L} \in M^*$ és forditva. A 18. és a 11. lemma szerint

$$\mathfrak{U} \in H_Q(M) \Leftrightarrow \mathfrak{U} \in H_D(\bar{M}) \Leftrightarrow \mathfrak{U} \in H_D(M^*).$$

A legutolsó reláció a 17. következmény (i) része szerint eldönthető.

A második állitás bizonyitása hasonlóan vezethető vissza a 17. következmény megfelelő eredményére. □

21. lemma. Tetszőleges $\mathcal{U} = \langle A,F\rangle$-hez megadható olyan $\mathcal{L} = \langle B,G\rangle$ egyszerü algebra, hogy $\mathcal{U} \leq_Q \mathcal{L}$.

Bizonyitás. Legyen $A = \{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$, $p > k$ tetszőleges prim és $B = A \cup \{a_{k+1},\ldots,a_p\}$ diszjunkt összeg. Feltehető, hogy $2 \in R$, ekkor legyen $G_2 = F_2 \cup \{h\}$, h uj müveleti jel, és $G_i = F_i$, ha $i \neq 2$. Tetszőleges $b \in B$ és $g \in G$-re legyen

$$g^{\mathcal{L}}(b) = \begin{cases} g^{\mathcal{U}}(b), & \text{ha } g \in F \text{ és } b \in A, \\ (b,b,\ldots,b), & \text{ha } g \in F \text{ és } b \notin A, \\ (a_{j+1 \bmod(p)}, a_{j+1 \bmod(p)}), & \text{ha } g = h \text{ és } b = a_j . \end{cases}$$

A 2.3. lemma miatt $\mathcal{L}$ egyszerü algebra, mivel a $\mathcal{L}_\mu = \langle B,G_\delta\rangle$ unoidnak a $\langle B,h_1\rangle$ primkör egyszerü részunoidja /v.ö. GÉCSEG [1974] /. Legyen $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{L}[F,\Psi]$, ahol bármely $f \in F$-re és $b \in B$-re $\Psi(b,f) = f$. Nyilvánvaló, hogy $\bar{\mathcal{U}}$ kvázidirekt-szorzat és $\mathcal{U} \in \mathrm{Sub}(\bar{\mathcal{U}})$. □

22. következmény. Az egyszerü algebrák izomorfan Q-teljes rendszert alkotnak.

23. tétel. Tetszőleges $M \subseteq K(R)$ rendszer akkor és csak akkor izomorfan Q-teljes, ha bármely $\mathcal{U}$ egyszerü algebrához létezik olyan $\mathcal{L} \in M$, amelyre $\mathcal{U} \leq_Q \mathcal{L}$ teljesül.

Bizonyitás. Az elegendőség következik a $\leq_Q$ reláció tranzitivitásából és a 22. következményből.

A szükségesség bizonyitásához legyen $\mathcal{U} = \langle A,F\rangle$ tetszőleges egyszerü algebra és $\mathcal{U} \cong \bar{\mathcal{L}}$, $\bar{\mathcal{L}} \in \mathrm{Sub}\left(\prod_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i[F,\Psi]\right)$,

$\mathcal{A}_i \in M$, $i = 1,\ldots,k$. Jelöljön $\varphi : \mathfrak{A} \to \bar{\mathcal{A}}$ egy alkalmas izomorfizmust. Definiáljuk $\mathfrak{A}$-n a következő ϱ_i relációkat. Bármely $a,b \in A$ és $0 \leq i \leq k$ esetén

$$a \,\varrho_i b \Leftrightarrow (\forall 1 \leq j \leq i)\left(\pi_j(\varphi(a)) = \pi_j(\varphi(b))\right).$$

A definicióból következik, hogy bármelyik ϱ_i ekvivalencia és

$$\iota = \varrho_0 \geq \varrho_1 \geq \ldots \geq \varrho_k = \omega.$$

Mivel kvázidirekt-szorzatról van szó, ϱ_i kongruencia is, hiszen $\varphi(a)$ és $\varphi(b)$ j-dik komponensének egyenlőségéből következik az $f(\varphi(a))$ és $f(\varphi(b))$ megfelelő vektoraiban a j-dik komponensek egyenlősége. De $\mathfrak{A}$-nak nem lehet valódi kongruenciája, ezért van olyan $1 \leq m \leq k$, hogy $i<m \Rightarrow \varrho_i = \iota$ és $i \geq m$ $\varrho_i = \omega$.

Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathfrak{A} \leq_Q \mathcal{G}_m$. Ehhez vegyük azt a $\mathcal{L} = \langle B_m, F\rangle = \mathcal{A}_m[F,\xi]$ egytényezős kvázidirekt szorzatot, amelyben bármely $f \in F$-re $\xi(f) = \pi_m(\psi(f))$. Legyen $\eta : A \to B_m$ az a leképezés, amelyet tetszőleges $a \in A$-ra $\eta(a) = \pi_m(\varphi(a))$ definiál. Az η hozzárendelés $\mathfrak{A}$ izomorf beágyazása $\mathcal{L}$-be. η injektivitása következik abból, hogy $\varrho_{m-1} = \iota$ és $\varrho_m = \omega$ miatt bármely $a,b \in A$-ra $a \neq b \Rightarrow \pi_m(\varphi(a)) \neq \pi_m(\varphi(b))$. η homomorfizmus volta a φ izomorfizmust felhasználó egyszerü számolással igazolható. □

24. következmény. Nem létezik minimális izomorfan Q-teljes rendszer.

Bizonyitás. Legyen $M \subseteq K(R)$ tetszőleges izomorfan Q-teljes rendszer és $\mathfrak{A} \in M$ tetszőleges algebra. Megmutat-

juk, hogy $M_1 = M - \{\mathfrak{U}\}$ is izomorfan Q-teljes, azaz bármely $\mathfrak{L}$ egyszerű algebrához létezik olyan $\Gamma \in M_1$, hogy $\mathfrak{L} \leq_Q \Gamma$. Mivel M izomorfan Q-teljes, az előző tétel szerint létezik olyan $\bar{\Gamma} \in M$, hogy $\mathfrak{L} \leq_Q \bar{\Gamma}$. Két esetet különböztetünk meg.

(1) Ha $\bar{\Gamma} \neq \mathfrak{U}$, akkor legyen $\Gamma = \bar{\Gamma}$.

(2) Legyen $\bar{\Gamma} = \mathfrak{U}$. A 21. lemma szerint megadható olyan egyszerű algebra, hogy $\mathfrak{U} \leq_Q \mathfrak{D}$ és $|A| < |D|$. Mivel M izomorfan Q-teljes, van olyan $\bar{\bar{\Gamma}} \in M$, hogy $\mathfrak{D} \leq_Q \bar{\bar{\Gamma}}$. A $\leq_Q$ reláció tranzitivitása miatt $\mathfrak{L} \leq_Q \bar{\bar{\Gamma}}$, tehát $\Gamma = \bar{\bar{\Gamma}}$ választható, hiszen $\bar{\bar{\Gamma}} \neq \mathfrak{U}$ az $|A| < |D|$ föltétel miatt. □

Mivel bármely egytényezős α_o-szorzat kvázidirekt-szorzat, nem meglepő, hogy α_o-szorzatokra is a most bizonyitottakhoz hasonló eredmények igazak.

25. tétel. Tetszőleges $M \subseteq K(R)$ rendszer akkor és csak akkor izomorfan α_o-teljes, ha bármely $\mathfrak{U}$ egyszerű algebrához létezik olyan $\mathfrak{L} \in M$, hogy $\mathfrak{U} \leq_{\alpha_o} \mathfrak{L}$ teljesül.

Bizonyitás. A tétel előtti megjegyzés miatt $\mathfrak{U} \leq_{\alpha_o} \mathfrak{L} \Leftrightarrow \mathfrak{U} \leq_Q \mathfrak{L}$, igy a feltétel elegendősége következik a 23. tételből.

A szükségesség a 23. tétel bizonyitásával azonos módon igazolható. Az ott definiált ϱ_i relációk α_o-szorzat esetén is kongruenciák lesznek, és a $\Gamma = \langle B_m, F \rangle = \mathfrak{L}_m[F, \xi]$, bármely $f \in F$-re $\xi(f) = \pi_m(\Psi(b_1, \ldots, b_k, f))$ -fel definiált egytényezős α_o-szorzatba ugyancsak az $\eta(a) = \pi_m(\varphi(a))$ izomorfizmussal ágyazható be $\mathfrak{U}$. □

26. következmény. (i) Tetszőleges $M \subseteq K(R)$ akkor és csak akkor izomorfan Q-teljes, ha izomorfan α_o-teljes.

(ii) Az egyszerű algebrák izomorfan

α_o-teljes rendszert alkotnak.

(iii) Nem létezik minimális izomorfan α_o-teljes rendszer.

27. tétel. Az $\mathfrak{U} = \langle A,F \rangle$ algebra akkor és csak akkor izomorfan α_o-irreducibilis, ha egyszerü.

Bizonyitás. Ha $\mathfrak{U}$ nem izomorfan α_o-irreducibilis, akkor beágyazható egy olyan $\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{Z}_i[F,\Psi]$ α_o-szorzatba is, amelyre $|B_i| < |A|$ teljesül $(i = 1,\ldots,k)$. Tekintsük a 23. és 25. tétel bizonyitásának ϱ_i kongruenciáit. Ha ezek között nincs valódi kongruencia, akkor megadható olyan $1 \leq j \leq k$, hogy $\tau = \varrho_o = \varrho_1 = \ldots = \varrho_{j-1}$ és $\omega = \varrho_j = \varrho_{j+1} = \ldots = \varrho_k$. A ϱ_i-k definiciója szerint ez azt jelenti, hogy A injektiven leképezhető B_j-be, ami ellentmond $|B_j| < |A|$-nak.

Forditva, legyen ϱ az $\mathfrak{U}$ algebra olyan valódi kongruenciája, amely szerinti A/ϱ osztályozásnak j osztálya van, és legyen $k = \max(|a/\varrho| \mid a \in A)$. Legyen $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{U}/\varrho = \langle A/\varrho, F \rangle$, $\mathfrak{Z}_2 = \langle B_2, G \rangle$, ahol B_2 tetszőleges k elemü halmaz, $G = \bigcup(G_i \mid i \in R)$ és $G_i = A/\varrho \times F_i$. Vegyünk egy olyan $\varphi : A \to A/\varrho \times B_2$ injektiv leképezést, amelyre tetszőleges $a \in A$ esetén igaz $\pi_1(\varphi(a)) = a/\varrho$. Ilyen φ nyilvánvalóan létezik a ϱ választása miatt. φ-t fölhasználva definiáljuk a $\mathfrak{Z}_2$ algebra müveleteit a következő módon: tetszőleges $b \in B_2$ és $g = (a/\varrho, f) \in G$ esetén legyen

$$(*)\quad (a/\varrho, f)^{\mathfrak{Z}_2}(b) = \begin{cases} (c_1,\ldots,c_{\nu(f)}), \text{ ahol } c_i = \pi_2(\pi_i(\varphi(f^{\mathfrak{U}}(a)))), \\ i = 1,\ldots,\nu(f), \text{ ha } b \in \pi_2(\varphi(A)), \\ \text{tetszőleges } (b_1,\ldots,b_{\nu(f)}) \in B^{\nu(f)} \text{ különben.} \end{cases}$$

Képezzük a $\mathfrak{L} = \prod_{i=1}^{2} \mathfrak{Z}_i[F,\Psi]$ α_o-szorzatot a $\Psi(a/\varrho, b, f) = (f, (a/\varrho, f))$ visszacsatolási függvénnyel tetszőleges

$a/\varrho \in A/\varrho$, $b \in B_2$ és $f \in F$-re. $\mathfrak{U}$ izomorfan beágyazható a φ leképezéssel Σ-be. Mivel φ injektiv volt, csak azt kell belátni, hogy φ homomorfizmus. Ez következik $\mathfrak{Z}_2$ müveleteinek (*) definiciójából és $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{U}/\varrho$-ból. Σ valódi izomorf α_o-dekompoziciója $\mathfrak{U}$-nak, mivel $|A/\varrho| < |A|$ és $|B_2| = k < |A|$. □

Az általános szorzat izomorf teljességére a következő kritérium adható.

28. tétel. Legyen $M \subseteq K(R)$ tetszőleges. M akkor és csak akkor izomorfan G-teljes, ha van olyan $\mathfrak{U} \in M$, $\mathfrak{U} = \langle A,F \rangle$, $a_1,a_2 \in A$, hogy bármely $r \in R$, $a \in \{a_1,a_2\}$ és $\underline{a} \in \{a_1,a_2\}^r$-hez megadható olyan $f \in F_r$, amelyre $f^{\mathfrak{U}}(a) = \underline{a}$.

Bizonyitás. Először tegyük fel, hogy M izomorfan G-teljes. Legyen $\mathfrak{Z} = \langle B,F \rangle$ az az algebra, amelyre $B = \{b_1,b_2\}$ és tetszőleges $r \in R$, $b \in B$ és $\underline{b} \in \{b_1,b_2\}^r$ esetén megadható $f^{\mathfrak{Z}}(b) = \underline{b}$-t teljesitő $f \in F_r$. Mivel M izomorfan G-teljes, $\mathfrak{Z} \cong \overline{\mathfrak{U}}$, ahol $\overline{\mathfrak{U}}$ egy alkalmas $\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_i[F,\Psi]$, M elemeiből alkotott általános szorzat részalgebrája. Legyen $\varphi : \mathfrak{Z} \to \overline{\mathfrak{U}}$ izomorfizmus, $\varphi(b_1) = (a'_1,\ldots,a'_k)$ és $\varphi(b_2) = (a''_1,\ldots,a''_k)$. Ekkor van olyan $1 \leq j \leq k$, hogy $a'_j \neq a''_j$. Megmutatjuk, hogy az $\mathfrak{U}_j$ algebra eleget tesz a tétel feltételeinek. Legyen $r \in R$, $a \in \{a'_j,a''_j\}$, $\underline{a} \in \{a'_j,a''_j\}^r$ tetszőleges. Mivel $\mathfrak{Z}$ teljesiti a tétel feltételeit, megadható olyan $f \in F_r$, $b \in B$ és $\underline{b} \in B^r$, hogy $f^{\mathfrak{Z}}(b) = \underline{b}$ és $\pi_j(\varphi(b)) = a$, $(\pi_j(\varphi(b_1)),\ldots,\pi_j(\varphi(b_r))) = \underline{a}$. Ebből látható, hogy az $f = \pi_j(\Psi(\varphi(b),f)) \in F_r^j$ müveletre valóban igaz $f^{\mathfrak{U}_j}(a) = \underline{a}$.

Forditva, tegyük fel, hogy az $\mathfrak{U} = \langle A,F \rangle$ algebra a_1,a_2

elemei eleget tesznek a tétel feltételeinek. Legyen $\mathcal{A} \in K(R)$, $\mathcal{A} = \langle B, G \rangle$ tetszőleges. Legyen $\varphi : B \to \{a_1, a_2\}^k$ injektiv leképezés valamely alkalmasan választott $k \in N$-re. Konstruáljuk meg azt a $\mathcal{K} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i[G, \Psi]$ G-szorzatot, amelyben $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}$ $(1 \leq i \leq k)$ és tetszőleges $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in A^k$, $r \in R$ és $g \in G_r$ esetén $\Psi(\underline{c}, g) = \left(f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}\right)$, ahol bármely $1 \leq i \leq k$-ra

$$f^{(i)} = \begin{cases} \text{tetszőleges } f \in F_r, \text{ ha } \underline{c} \notin \varphi(B), \\ \text{az az } f \in F_r, \text{ amelyre } f^{\mathcal{U}}(c_i) = (c_i^1, \ldots, c_i^r), \text{ ha} \\ \underline{c} = \varphi(b),\ g^{\mathcal{A}}(b) = (b_1, \ldots, b_r),\ \varphi(b_j) = (c_1^j, \ldots, c_k^j), \\ \qquad j = 1, \ldots, r. \end{cases}$$

Ψ definíciójából adódik, hogy a φ leképezés $\mathcal{A}$ izomorf beágyazása $\mathcal{K}$-be. □

Az általános szorzat izomorf teljességére vonatkozó hasonló kritérium található a STEINBY [1977a] cikkben leszálló automatákra. Bár nem sikerült az M rendszer homomorf G-teljességére szükséges és elegendő feltételt találnunk, az előző tételből annyi adódik, hogy létezik véges homomorfan G-teljes rendszer.

Irodalomjegyzék

BRAINERD, W.S. [1968], The minimalization of tree automata. Information and Control 13 (1968), 484-491.

BRAINERD, W.S. [1969], Tree generating regular systems. Information and Control 14 (1969), 217-231.

DONER, J.E. [1965], Decidability of weak second order theory of two successors. Abstract 65T-468, Notices Amer. Math. Soc. 12 (1965), 819.

DÖMÖSI, P. [1976], On minimal R-complete systems of finite automata. Acta Cybernetica 3 (1976), 37-41.

GÉCSEG, F. [1973], Model theoretical methods in the theory of automata. Proc. of the Symposi m on Mathematical Foundations of Computer Science (1973), 57-63.

GÉCSEG, F. [1974], Composition of automata. Automata, Languages and Programming 2nd Colloquium, Lecture Notes in Computer Science 14 (1974), 351-363.

GÉCSEG, F. és HORVÁTH, GY. [1976], On representation of trees and context-free languages by tree automata. Found. Control Engrg. 1 (1976) 161-168.

GÉCSEG, F. és PEÁK, I. [1972], Algebraic Theory of Automata, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

GÉCSEG, F. és STEINBY, M. [1975], A faautomaták algebrai elmélete. I. Matematikai Lapok 26 (1975), 169-207.

GÉCSEG, F. és STEINBY, M. [1978], Minimal ascending tree automata. Acta Cybernetica 4 (1978), 37-44.

GÉCSEG, F. és STEINBY, M. [1979], A faautomaták algebrai elmélete II. Matematikai Lapok 27 (1976-1979), 283-336.

GÉCSEG, F. és SZÉKELY, S. [1973], On equational classes of unoids. Azta Sci. Math. 34 (1973), 99-101.

GLUSKOV, V.M. [1963], Az automaták absztrakt elmélete /I/. III. Oszt. Közl. 13 (1963), 287-309.

GLUSKOV, V.M. [1964], Az automaták absztrakt elmélete /II/. III. Oszt. Közl. 14 (1964), 71-110.

GRÄTZER, G. [1968], Universal algebra, Van Nostrand, Princeton (1968).

IMREH, B. [1978], On α_i-products of automata. Acta Cybernetica 3 (1978), 301-307.

MAGIDOR, M. és MORAN, G. [1969], Finite automata over finite trees. Tech. Report 30, Hebrew University, Dept. Math., Jerusalem (1969).

MOORE, F.R. [1971], On the bounds for state-set in the proofs of equivalence between deterministic, nondeterministic, and two-way finite automata. IEEE Transactions on Computers 20 (1971), 1211-1214.

RABIN, M.O. [1969], Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. Trans. AMS 141 (1969) 1-35.

RICCI, G. [1973], Cascades of tree-automata and computations in universal algebras. Math. Syst. Theory 7 (1973), 201-218.

SALOMAA, A. [1973], Formal languages. Academic Press (1973).

STEINBY, M. [1977a], On the structure and realization of tree automata. Second Coll. sur les Arbres en Algebre et en Programmation, Lille (1977).

STEINBY, M. [1977b], On algebras as tree automata. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 17. Contributions to Universal Algebra, North-Holland, Amsterdam (1977).

THATCHER, J.W. [1967], Characterizing derivation trees of context-free grammars through a generalization of finite automata theory. J. Comp. Syst. Sci. 1 (1967), 317-322.

THATCHER, J.W. és WRIGHT, J.B. [1965], Generalized finite automata. Abstract 65T-469, Notices AMS 12 (1965), 820.

THATCHER, J.W. és WRIGHT, J.B. [1968], Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second-order logic. Math. Syst. Theory 2 (1968), 57-81.

VIRÁGH, J. [1980], Deterministic ascending tree automata I. Acta Cybernetica, megjelenés alatt.