KETTŐS TRIGONOMETRIKUS FOURIER-SOROK ÉS WALSH-FOURIER-SOROK ABSZOLÚT KONVERGENCIÁJA

DOKTORI (Ph.D.) ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

VERES ANTAL

TÉMAVEZETŐ:

DR. MÓRICZ FERENC

PROFESSOR EMERITUS

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR

BOLYAI INTÉZET

MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

SZEGED

2011

A disszertáció Bernstein és Zygmund klasszikus eredményeire épül, melyek 2π periódikus függvények Fourier-sorának abszolút konvergenciájára adnak elegendő feltételeket. Nevezetesen, ha az $f(x)$ függvény α-rendű Lipschitz feltételnek tesz eleget $\alpha > 1/2$ esetén, illetve ha korlátos változású és α-rendű Lipschitz feltételnek tesz eleget $\alpha > 0$ esetén, akkor az f függvény Fourier-sora abszolút konvergens (lásd például [19]).

Ezen tételeknek számos általánosítása ismert, például Szász [12], Salem [9] és a legújabbak között említendő, Gogoladze és Meskhia [4] munkáiban. A disszertáció első részében ezen tételeket terjesztjük ki egyváltozós Fourier-sorokról kettős Fourier-sorokra.

A disszertáció második részében kettős Walsh-Fourier-sorok abszolút konvergenciáját vizsgáljuk. Móricz F. [5] egyváltozós Walsh-Fourier-sorok abszolút konvergenciáját vizsgáló eredményei alapján elegendő feltételek adunk a (lokális, illetve globális) diadikus folytonossági modulus és a korlátos s-fluktuáció felhasználásával kettős Walsh-Fourier-sorok abszolút konvergenciájára.

Új eredmények: Kettős Fourier sorok

Egy komplex értékű $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $\mathbb{T}^2 := \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ függvény *Fourier-során* a

$$f(x,y) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m,n) e^{i(mx+ny)}, \quad (x,y) \in \mathbb{T}^2$$

sort értjük, ahol $\hat{f}(m,n)$ jelöli a függvény úgynevezett *Fourier-együtthatóit*, amelyek definíció szerint

$$\hat{f}(m,n) := \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{\mathbb{T}^2} f(x,y) e^{-i(mx+ny)}\, dx\, dy, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Az $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$ függvény *integrál folytonossági modulusának* nevezzük (L^p normában) az

$$\omega(f;\delta_1,\delta_2)_p := \sup\left\{ \left(\frac{1}{4\pi^2} \int\int_{\mathbb{T}^2} |\Delta_{1,1} f; x, y; h_1, h_2)|^p dxdy \right)^{1/p}, \right.$$

$$\left. 0 < h_1 \le \delta_1 \quad \text{and} \quad 0 < h_2 \le \delta_2 \right\}, \ \delta_1, \delta_2 > 0$$

függvényt, ahol

$$\Delta_{1,1}(f;x,y;h_1,h_2) := f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) \tag{1}$$

$$-f(x+h_1,y) + f(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{T}^2 \quad \text{és} \quad h_1, h_2 > 0.$$

Az $f \in C(\mathbb{T}^2)$ függvény *folytonossági modulusa* hasonlóan definiálható:

$$\omega(f;\delta_1,\delta_2) := \sup\{|\Delta_{1,1}(f;x,y;h_1,h_2)| :$$

$$(x,y) \in \mathbb{T}^2, \ 0 < h_1 \le \delta_1 \text{ and } 0 < h_2 \le \delta_2\}, \ \delta_1, \delta_2 > 0$$

Követve Gogoladze és Meskhia [4] definícióját egyszeres sorokra, azt mondjuk, hogy a $\gamma = \{\gamma_{mn} : (m,n) \in \mathbb{N}_+^2\}$ nemnegatív számokból álló kettős sorozat benne van az $\mathfrak{A}_\alpha$ osztályban valamely $\alpha \geq 1$ esetén, ha minden $\mu, \nu \geq 0$ számra igaz, hogy

$$\left(\sum_{m\in D_\mu}\sum_{n\in D_\nu}\gamma_{mn}^\alpha\right)^{1/\alpha} \leq \kappa\, 2^{(\mu+\nu)(1-\alpha)/\alpha}\sum_{m\in D_{\mu-1}}\sum_{n\in D_{\nu-1}}\gamma_{mn}, \tag{2}$$

ahol

$$D_0 := \{1\}, \quad D_\mu := \{2^{\mu-1}+1, 2^{\mu-1}+2, \ldots, 2^\mu\}, \quad \mu \in \mathbb{N}_+. \tag{3}$$

Legyen továbbá

$$D_{-1} := D_0 = \{1\}, \tag{4}$$

és

$$\gamma_{-m,n} = \gamma_{m,-n} = \gamma_{-m,-n} := \gamma_{mn}, \quad (m,n) \in \mathbb{N}_+^2. \tag{5}$$

További részletek megtalálhatók [4] és [13] cikkekben.

1. Tétel. *Legyen $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $1 < p \leq 2$. Ha*

$$\gamma = \{\gamma_{mn}\} \in \mathfrak{A}_{p/(p-rp+r)}, \quad r \in (0,q) \text{ esetén},$$

ahol $1/p + 1/q = 1$, akkor

$$\sum(\gamma; f)_r := \sum_{|m|\geq 1}\sum_{|n|\geq 1}\gamma_{mn}|\hat{f}(m,n)|^r \leq \tag{6}$$

$$\leq \kappa\, C\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-(\mu+\nu)r/q}\,\Gamma_{\mu-1,\nu-1}\,\omega^r\left(f; \frac{\pi}{2^\mu}, \frac{\pi}{2^\nu}\right)_p,$$

ahol κ az $\alpha := p/(p-rp+r)$, értékhez tartozó konstans a (2) alatti egyenlőtlenségben,

$$\Gamma_{\mu\nu} := \sum_{m\in D_\mu}\sum_{n\in D_\nu}\gamma_{mn} \quad \text{minden } \mu, \nu \geq -1 \text{ esetén} \tag{7}$$

a (4) alatti megállapodással és

$$\Gamma_{-1,\nu} := \Gamma_{0\nu},\ \Gamma_{\mu,-1} := \Gamma_{\mu 0}\ \mu, \nu \geq 0 \text{ esetén, és } \Gamma_{-1,-1} := \Gamma_{00} = \{\gamma_{11}\}. \tag{8}$$

1. Következmény. *Az 1. Tétel feltételei mellett*

$$\sum(\gamma; f)_r \leq \kappa\, C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{-r/q}\,\gamma_{mn}\,\omega^r\left(f; \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right)_p. \tag{9}$$

Az $f \in C(\mathbb{T}^2)$ függvény a $\operatorname{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)$ Lipschitz függvényosztályba tartozik valamely $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ esetén, ha

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) = O(\delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}). \tag{10}$$

Érdemes külön figyelmet fordítanunk az 1. Tételre abban a speciális esetben, amikor $f \in \operatorname{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)$ és $\gamma_{mn} \equiv 1$, illetve $\gamma \equiv m^{\beta_1} n^{\beta_2}$ és $r = 1$.

2. Következmény. *Legyen $f \in \operatorname{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)$ valamely $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ esetén és legyen $1 < p \leq 2$ tetszőleges. Ha*

$$\frac{q}{1 + q \min\{\alpha_1, \alpha_2\}} < r < q,$$

akkor

$$\sum_{|m| \geq 1} \sum_{|n| \geq 1} |\hat{f}(m, n)|^r < \infty. \tag{11}$$

3. Következmény. *Legyen $f \in \operatorname{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)$ valamely $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ esetén és legyen $1 < p \leq 2$. Ha $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ teljesítik a*

$$\beta_j < \alpha_j - \frac{1}{p}, \quad j = 1, 2$$

feltételeket, akkor

$$\sum_{|m| \geq 1} \sum_{|m| \geq 1} m^{\beta_1} n^{\beta_2} |\hat{f}(m, n)| < \infty. \tag{12}$$

Megjegyezzük, hogy az 1. Tétel és az 1. Következmény $\lambda_{mn} \equiv 1$, $p = 2$ és $r = 1$ esetben a [7] alatti cikkben, $\lambda_{mn} \equiv 1$, $p = 2$ esetben pedig [14] alatti cikkben részletesen megtalálható. Abban a speciális esetben, amikor $\lambda_{mn} \equiv 1$, $p = 2$ and $r = 1$, a (6) alatti egyenlőtlenség jobb oldalán lévő sor konvergens, ha

$$f \in \operatorname{Lip}(\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{valamely} \quad \alpha_1, \alpha_2 > 1/2 \ \text{ esetén.}$$

Érdemes megemlíteni, hogy az 1. Tétel és az 1. Következmény igaz marad akkor is, ha a folytonossági modulust kicseréljük a simasági modulusra az állításban.

Az $f = f(x, y)$ mindkét változójában 2π periodikus függvényt Vitali értelemben *korlátos s-változásúnak* nevezzük, jelölése: $f \in BV_s(\overline{\mathbb{T}}^2)$, ha

$$V_s(f) = \sup_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |f(x_k, y_l) - f(x_{k-1}, y_l) - \tag{13}$$

$$f(x_k, y_{l-1}) + f(x_{k-1}, y_{l-1})|^s < \infty,$$

ahol a szuprémumot $\overline{\mathbb{T}}^2$ összes lehetséges

$$\mathcal{P}_1 : -\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = \pi \quad \text{és}$$

$$\mathcal{P}_2 : -\pi = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = \pi$$

felosztáson értjük. Az $s = 1$ eset definíciója megtalálható Clarkson és Adams cikkében [3].

Ha az $f \in BV_s(R)$ függvény $f(\cdot, c)$ és $f(a, \cdot)$ marginális függvényei korlátos s-változásúak az $[a, b]$ és $[c, d]$ intervallumokon, akkor az f függvényt Hardy és Krause értelemben vett korlátos s-változásúnak nevezzük, jelölése: $f \in BV_H^s(R)$. (Lásd [3].)

2. Tétel. *Legyen $f \in C(\mathbb{T}^2) \cap BV_s(\overline{\mathbb{T}}^2)$ valamely $s \in (0, 2)$ esetén. Ha*

$$\gamma = \{\gamma_{mn}\} \in \mathfrak{A}_{2/(2-r)}, \quad r \in (0, 2),$$

akkor

$$\sum(\gamma; f)_r := \sum_{|m|\geq 1} \sum_{|n|\geq 1} \gamma_{mn} |\hat{f}(m, n)|^r \leq \tag{14}$$

$$\leq \kappa\, C\, V_s^{r/2}(f) \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-(\mu+\nu)r}\, \Gamma_{\mu-1,\nu-1}\, \omega^{(2-s)r/2} \left(f; \frac{\pi}{2^\mu}, \frac{\pi}{2^\nu}\right),$$

ahol κ az $\alpha := 2/(2 - r)$ értékhez tartozó konstans a (2) alatti egyenlőtlenségben, $V_s(f)$ a (13) alatt definiált totális s-változás, $\Gamma_{\mu\nu}$ pedig a (7) és (8) alatt definiált összeg.

4. Következmény. *A 2. Tétel feltételei mellett*

$$\sum(\gamma; f)_r \leq \kappa\, C\, V_s^{r/2}(f) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{-r}\, \gamma_{mn}\, \omega^{(2-s)r/2} \left(f; \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right). \tag{15}$$

Hasonlóan az 1. Tételhez, itt is érdemes megfogalmazni azt a két speciális esetet a 2. Tétel következményeként, amikor $f \in BV_s(\overline{\mathbb{T}}^2) \cap \mathrm{Lip}(\alpha_1, \alpha_2)$ és $\gamma \equiv 1$, illetve $r = 1$ és $\gamma_{mn} = m^{\beta_1} n^{\beta_2}$, ahol $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

5. Következmény. *Legyen $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1, \alpha_2) \cap BV_s(\overline{\mathbb{T}}^2)$ valamely $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ és $0 < s < 2$ esetén. Ha*

$$r > \frac{1}{1 + (1 - s/2) \min\{\alpha_1, \alpha_2\}},$$

akkor (11) teljesül.

6. Következmény. *Legyen $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1, \alpha_2) \cap BV_s(\overline{\mathbb{T}}^2)$ valamely $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ és $0 < s < 2$ esetén. Ha*

$$\beta_j < (1 - s/2)\alpha_j, \quad j = 1, 2,$$

akkor (12) *teljesül.*

A 2. Tétel és a 4. Következmény $\gamma_{mn} \equiv 1,\ s = 1$ és $r = 1$ esetben [7] alatti cikkben, $\lambda_{mn} \equiv 1,\ s = 1$ esetben pedig [14] alatti cikkben részletesen megtalálható. Abban a speciális esetben, amikor $\gamma_{mn} \equiv 1,\ s = 1$ és $r = 1$, a (15) egyenlőtlenség jobb oldalán lévő sor konvergens, ha

$$\omega\left(f; \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right) = O\left(\left(\log\frac{\pi}{m}\right)^{\beta_1}\left(\log\frac{\pi}{n}\right)^{\beta_2}\right) \quad \text{valamely} \quad \beta_1, \beta_2 > \frac{2}{2-s} \quad \text{esetén.}$$

Később felhasználjuk a következő, Berkson nevéhez fűződő felbontási tételt [1] : az f függvény akkor és csak akkor abszolút folytonos az $R := [a, b] \times [c, d]$ téglalapon (jelölés: $f \in AC(R)$), ha létezik olyan $g \in AC([a, b])$, $h \in AC([c, d])$ és $\phi \in L^1(R)$, hogy

$$f(x, y) = g(x) + h(y) + \int_a^x \int_c^y \phi(u, v)\, du\, dv, \quad x \in [a, b],\ y \in [c, d]. \tag{16}$$

Zygmund tételének több változóra való kiterjésztése a 2. Tétel következményeként adódik a $\gamma_{mn} \equiv 1,\ s = 1$ és $r = 1$ speciális esetben.

3. Tétel. *Ha $f \in AC(\overline{\mathbb{T}}^2)$ és $f_{x,y} \in L^p(\mathbb{T}^2)$ valamely $p > 1$ esetén, akkor*

$$\sum_{|m|\geq 1} \sum_{|n|\geq 1} |\hat{f}(m, n)| \leq C_p V_2^{1/2}(f) \|f_{x,y}\|_{L^p}^{1/2}. \tag{17}$$

Összekombinálva az 1., 2. és 3. Tételeket a megfelelő egyváltozós eredményekkel, könnyen adhatóak elegendő feltételek a

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_{mn} |\hat{f}(m, n)|^r \tag{18}$$

sor konvergenciájára. Ennek bemutatásaként a következő részben ismertetünk néhány következményt abban a speciális esetben, amikor $\gamma_{mn} \equiv 1$ és $r = 1$. Az így kapott feltételek biztosítják az f függvény kettős Fourier-sorának abszolút konvergenciáját.

Megjegyezzük, hogy az ismertetett eredmények többsége kiterjeszthető többváltozós trigonometrikus Fourier-sorokra is (részletekért lásd [6] és [7].)

Új eredmények: kettős Fourier-sorok abszolút konvergenciája

Az (18) alatti sor konvergenciájának vizsgálatához a speciális $\gamma_{mn} \equiv 1$ és $r = 1$ esetben végezzük el a következő felbontást:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m, n)| =$$

$$\sum_{|m|\geq 1} \sum_{|n|\geq 1} |\hat{f}(m, n)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(0, n)| + \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m, 0)| - |\hat{f}(0, 0)|.$$

Az $n = 0$ és $m = 0$ speciális esetben az $\hat{f}(m,n)$ együtthatókra

$$\hat{f}(m,0) = \hat{f}_1(m), \quad \text{ahol} \quad f_1(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x,y)dy, \ x \in \mathbb{T}; \tag{19}$$

és

$$\hat{f}(0,n) = \hat{f}_2(n), \quad \text{ahol} \quad f_2(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x,y)dx, \ y \in \mathbb{T}. \tag{20}$$

Összekombinálva Bernstein és Zygmund egyváltozós Fourier-sorok abszolút konvergenciájáról szóló tételeit (lásd például [2], [15], [17] és [18]) az 1., 2. és 3. Tétellel, megkapjuk a tételek kiterjesztését kettős Fourier-sorok abszolút konvergenciájára.

7. Következmény. *Ha $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1,\alpha_2)$, $f_1 \in \mathrm{Lip}(\alpha_3)$ és $f_2 \in \mathrm{Lip}(\alpha_4)$ valamely $\alpha_j > 1/2$, $j = 1,2,3,4$ esetén; ahol f_1 és f_2 (19) és (20) alatt definiált függvények, akkor az f Fourier-sora abszolút konvergens.*

8. Következmény. *Ha az $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1,\alpha_2) \cap BV_H(\overline{\mathbb{T}}^2)$, $f_1 \in \mathrm{Lip}(\alpha_3) \cap BV(\overline{\mathbb{T}})$ és $f_2 \in \mathrm{Lip}(\alpha_4) \cap BV(\overline{\mathbb{T}})$ valamely $\alpha_j > 0$, $j = 1,2,3,4$ és $0 < s, s_1, s_2 < 2$ esetén, ahol f_1 és f_2 (19) és (20) alatt definiált függvények, akkor az f Fourier-sora abszolút konvergens.*

9. Következmény. *Ha $f \in AC(\overline{\mathbb{T}}^2)$, $f_{x,y} \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $g' \in L^{p_1}(\mathbb{T})$ és $h' \in L^{p_2}(\mathbb{T})$ valamely $p, p_1, p_2 > 1$ esetén, ahol g és h (16) alatt definiált függvények, akkor az f Fourier-sora abszolút konvergens.*

Új eredmények: kettős Walsh-Fourier-sorok

Legyen $f : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}$ függvény Lebesgue integrálható az $\mathbb{I}^2 = [0,1) \times [0,1)$ egységnégyzeten, jelölésekkel: $f \in L^1(\mathbb{I}^2)$. Az f függvény *kettős Walsh-Fourier-során* a

$$f(x,y) \sim \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{f}(m,n) w_m(x) w_n(y) \tag{21}$$

sort értjük, ahol

$$\hat{f}(m,n) := \int_0^1\int_0^1 f(x,y) w_m(x) w_n(y)\, dx\, dy, \quad m,n \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

az f függvény m-edik *Walsh-Fourier-együtthatója* és $w_m(x)$ az m-edik Walsh-függvény.

Jelölje $C_W(\mathbb{I}^2)$ az összes W-folytonos függvény halmazát, ahol az $\mathbb{I}^2$ egységnégyzeten értelmezett diadikus topológiát az

$$I(k,m;l,n) := I(k,m) \times I(l,n) \tag{23}$$

$$= [k2^{-m}, (k+1)2^{-m}) \times [l2^{-n}, (l+1)2^{-n}),$$

$$0 \le k < 2^m,\ 0 \le l < 2^n \quad \text{és} \quad k, l, m, n \in \mathbb{N}$$

diadikus téglalapok generálják. Az $f \in C_W(\mathbb{I}^2)$ függvény (globális) *diadikus folytonossági modulusán* az

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) := \sup\{|\Delta_{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| : (x, y) \in \mathbb{I}^2,$$

$$0 \le h_j < \delta_j, j = 1, 2\}, \quad 0 < \delta_j \le 1$$

függvényt értjük, ahol

$$\Delta_{1,1} f(x, y; h_1, h_2) := f(x \dotplus h_1, y \dotplus h_2) - f(x, y \dotplus h_2) \tag{24}$$

$$- f(x \dotplus h_1, y) + f(x, y).$$

Az $f \in L^p(\mathbb{I})$ függvény *diadikus L^p-folytonossági modulusán*, $1 \le p < \infty$, az

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2)_p := \sup\left\{\left(\int_0^1 \int_0^1 |\Delta_{1,1} f(x, y; h_1, h_2)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p} :\right.$$

$$\left. 0 \le h_j < \delta_j,\ j = 1, 2\right\}$$

függvényt értjük.

Legyen $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, az $f \in C_W(\mathbb{I}^2)$ függvény a $\mathrm{Lip}(\alpha_1, \alpha_2; W)$ *diadikus Lipschitz-osztályba* tartozik, ha

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) \le C\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}, \quad 0 < \delta_1, \delta_2 \le 1,$$

ahol C olyan konstans, ami csak az f függvénytől függ. Hasonlóan, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ és $1 \le p < \infty$ esetén az $f \in L^p(\mathbb{I}^2)$ függvény benne van a $\mathrm{Lip}(\alpha_1, \alpha_2; L^p)$ Lipschitz-osztályban, ha

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2)_p \le C\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}, \quad 0 < \delta_1, \delta_2 \le 1.$$

A diadikus téglalapokra vezessük be a következő jelölést:

$$I(k, m; l, n) := I(k, m) \times I(l, n) =: I \times J,$$

ahol $0 \le k < 2^m$, $0 \le l < 2^n$; $k, l, m, n \in \mathbb{N}$. Ezek után bevezethetjük a *lokális diadikus folytonossági modulusát* az $f \in C_W(\mathbb{I}^2)$ függvénynek:

$$\omega(f; I \times J) := \sup\{|\Delta_{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| : (x, y) \in I \times J,$$

$$0 \le h_1 < |I|,\ 0 \le h_2 < |J|\},$$

ahol $|I| = 2^{-m}$ és $|J| = 2^{-n}$ az I és J intervallumok hossza. Továbbá, az $f \in L^p(\mathbb{I}^2)$, $1 \le p < \infty$ függvény *lokális diadikus L^p-folytonossági modulusán* az

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2)_p := \sup\left\{\left(\frac{1}{|I| \cdot |J|} \int_I \int_J |\Delta_{1,1} f(x, y; h_1, h_2)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p} :\right.$$

$$0 \le h_1 < |I|,\ 0 \le h_2 < |J|\}$$

függvényt értjük.

Végül, az $f : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}$ függvény *korlátos s-fluktuációjú*, $0 < s < \infty$, jelölésekkel: $f \in BF_s(\mathbb{I}^2)$, ha

$$Fl_s(f;\mathbb{I}^2) := \sup_{m\ge 1}\sup_{n\ge 1}\left(\sum_{k=0}^{2^m-1}\sum_{l=0}^{2^n-1}|\omega(f;I(k,m)\times I(l,n))|^s\right)^{1/s} < \infty. \tag{25}$$

4. Tétel. *Legyen $f \in L^p(\mathbb{I}^2)$, $1 < p \le 2$. Ha*

$$\{\gamma_{mn}\} \in \mathfrak{A}_{p/(p-rp+r)}, \quad 0 < r < q, \quad \textit{ahol}\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \tag{26}$$

akkor

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}|\hat{f}(m,n)|^r \tag{27}$$

$$\le 4^{-r}\kappa\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-(\mu+\nu)r/q}\Gamma_{\mu-1,\nu-1}|\omega(f;2^{-\mu},2^{-\nu})_p|^r,$$

ahol κ az $\alpha := p/(p-rp+r)$ értékhez tartozó konstans a (2) *alatti egyenlőtlenségben, $\Gamma_{\mu\nu}$ pedig a* (7) *és* (8) *alatt definiált összeg.*

Érdemes megfogalmazni a 4. Tételt abban a speciális esetben, amikor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1,\alpha_2;W)_p$ és $\gamma_{mn} \equiv 1$, illetve $\gamma_{mn} = m^{\beta_1}n^{\beta_2}$ és $r = 1$.

10. Következmény. *Legyen $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1,\alpha_2;W)_p$, $\alpha_1,\alpha_2 > 0$ és $1 < p \le 2$. Ha*

$$\frac{q}{1+q\min\{\alpha_1,\alpha_2\}} < r < q,$$

akkor

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\hat{f}(m,n)|^r < \infty. \tag{28}$$

11. Következmény. *Legyen $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1,\alpha_2;W)_p$, $\alpha_1,\alpha_2 > 0$ és $1 < p \le 2$. Ha $\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$ teljesítik a*

$$\beta_j < \alpha_j - \frac{1}{p}, \quad j = 1,2$$

feltételeket, akkor

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m^{\beta_1}n^{\beta_2}|\hat{f}(m,n)| < \infty. \tag{29}$$

5. Tétel. *Legyen $f \in L^p(\mathbb{I}^2)$, $1 < p \le 2$. Ha $\{\gamma_{mn} \ge 0\}$ sorozat teljesíti a (26) feltételt, akkor*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{mn} |\hat{f}(m,n)|^r \tag{30}$$

$$\le 4^{-r}\kappa \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-(\mu+\nu)r}\Gamma_{\mu-1,\nu-1}\left(\sum_{k=0}^{2^\mu-1}\sum_{l=0}^{2^\nu-1} |\omega(f; I(k,\mu;l,\nu))_p|^p\right)^{1/p},$$

ahol κ az $\alpha := p/(p - rp + r)$ értékhez tartozó konstans a (2) alatti egyenlőtlenségben, $\Gamma_{\mu\nu}$ pedig a (7) és (8) alatt definiált összeg, $I(k,\mu;l,\nu)$ (23) alakú diadikus téglalap.

6. Tétel. *Legyen $f \in C_W \cap BF_s(\mathbb{I}^2)$, $0 < s < 2$. Ha*

$$\{a_{mn} \ge 0\} \in \mathfrak{A}_{2/(2-r)} \quad 0 < r < 2, \tag{31}$$

akkor

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{mn} |\hat{f}(m,n)|^r \tag{32}$$

$$\le 4^{-r}\kappa |Fl_s(f;\mathbb{I}^2)|^{rs/2} \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-(\mu+\nu)r}\Gamma_{\mu-1,\nu-1}|\omega(f; 2^{-\mu}, 2^{-\nu})|^{(1-s/2)r},$$

ahol κ az $\alpha := 2/(2-r)$ értékhez tartozó konstans a (2) alatti egyenlőtlenségben, $\Gamma_{\mu\nu}$ a (7) és (8) alatt definiált összeg, $Fl_s(f)$ pedig a (25) alatt bevezetett totális s-fluktuáció.

A 4. Tételhez hasonlóan itt is megfogalmazzuk azokat a speciális eseteket, amikor $\gamma_{mn} \equiv 1$, illetve $r = 1$ és $\gamma_{mn} = m^{\beta_1} n^{\beta_2}$.

12. Következmény. *Legyen $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1, \alpha_2; W) \cap BF_s(\mathbb{I}^2)$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ és $0 < s < 2$. Ha*

$$r > \frac{1}{1 + (1 - s/2)\min\{\alpha_1, \alpha_2\}},$$

akkor (28) teljesül.

13. Következmény. *Legyen $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1, \alpha_2; W) \cap BF_s(\mathbb{I}^2)$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ és $0 < s < 2$. Ha $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ teljesítik a*

$$\beta_j < (1 - s/2)\alpha_j, \quad j = 1, 2,$$

feltételt, akkor (29) teljesül.

Összekombinálva a 4. és 6. Tételeket az egyszeres Walsh-Fourier-sorok abszolút konvergenciájára vonatkozó tételekkel (lásd [5]), könnyen adhatóak elegendő feltételek a

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{mn} |\hat{f}(m,n)|^r \tag{33}$$

sor konvergenciájára. Ennek bemutatásaként a következő részben ismertetünk néhány következményt abban a speciális esetben, amikor $\gamma_{mn} \equiv 1$ és $r = 1$. Az így kapott feltételek biztosítják az f függvény kettős Walsh-Fourier-sorának abszolút konvergenciáját.

További részletek olvashatók [8] alatti cikkben.

Új eredmények: kettős Walsh-Fourier sorok abszolút konvergenciája

A (33) alatti sor konvergenciájának vizsgálatához a speciális $\gamma_{mn} \equiv 1$ és $r = 1$ esetben végezzük el a következő felbontást:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(m,n)| =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(m,n)| + \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(0,n)| + \sum_{m=0}^{\infty} |\hat{f}(m,0)| - |\hat{f}(0,0)|.$$

Az $n = 0$ és $m = 0$ speciális esetben az $\hat{f}(m,n)$ együtthatókra

$$\hat{f}(m,0) = \hat{f}_1(m), \quad \text{ahol} \quad f_1(x) := \int_0^1 f(x,y)\,dy, \quad x \in \mathbb{I}; \tag{34}$$

és

$$\hat{f}(0,n) = \hat{f}_2(n), \quad \text{ahol} \quad f_2(y) := \int_0^1 f(x,y)\,dx, \quad y \in \mathbb{I}. \tag{35}$$

Összekombinálva Bernstein és Zygmund egyváltozós Fourier-sorok abszolút konvergenciájáról szóló tételeinek diadikus általánosítását (lásd például [10]) a 4. és 6. Tétellel, megkapjuk a tételek kiterjesztését kettős Walsh-Fourier-sorok abszolút konvergenciájára.

14. Következmény. *Ha az $f : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1, \alpha_2; W)$, $f_1 \in \mathrm{Lip}(\alpha_3; W)$ és $f_2 \in \mathrm{Lip}(\alpha_4; W)$ valamely $\alpha_j > 1/2$, $j = 1,2,3,4$ esetén, ahol f_1 és f_2 (34) és (35) alatt definiált függvények, akkor f Walsh-Fourier-sora abszolút konvergens.*

15. Következmény. *Ha az $f : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha_1, \alpha_2; W) \cap BF_s(\mathbb{I}^2)$, $f_1 \in \mathrm{Lip}(\alpha_3; W) \cap BF_{s_1}(\mathbb{I})$ és $f_2 \in \mathrm{Lip}(\alpha_4; W) \cap BF_{s_2}(\mathbb{I})$ valamely $\alpha_j > 0$, $j = 1,2,3,4$ és $0 < s, s_1, s_2 < 2$ esetén, akkor f Walsh-Fourier-sora abszolút konvergens.*

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Dr. Móricz Ferenc professzornak, témavezetőmnek önzetlen segítségéért, folyamatos támogatásáért és hasznos tanácsaiért, melyekkel jelen értekezés megírását, illetve kutatómunkámat segítette.

Hivatkozások

[1] E. Berkson and T. A. Gillespie, Absolutely continuous functions of two variables and well-bounded operators, *J. London Math. Soc* (2), **30** (1984), 305–321.

[2] S. Bernstein, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, **158** (1914), 1661–1664.

[3] J.A. Clarkson and C.R. Adams, On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 824–854.

[4] L. Gogoladze and R. Meskhia, On the absolute convergence of trigonometric Fourier series, *Proc. Razmadze Math. Inst.*, **141** (2006), 29–40.

[5] F. Móricz, Absolute convergence of Walsh-Fourier series and related results, *Analysis Math.*, **36** (2010), 275–286.

[6] F. Móricz and A. Veres, Absolute convergence of multiple Fourier series, *Acta Math. Hungar.*, **117** (2007), 275–292.

[7] F. Móricz and A. Veres, Absolute convergence of multiple Fourier series revisited, *Analysis Math.*, **34** (2008), 145–162.

[8] F. Móricz and A. Veres, Absolute convergence of double Walsh-Fourier series and related results, *Acta Math. Hungar.* (accepted for publication)

[9] R. Salem, On a theorem of Zygmund, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 23–31.

[10] F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon and J. Pál, *Walsh Series: an Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol and New York, 1990.

[11] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analyis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, 1971.

[12] Szász, Über der Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, *Sitzungsberichte der Akademie München*, 1922, 135–150.

[13] P.L. Ul'yanov, Series with respect to a Haar system with monotone coefficients (in Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **28** (1964), 925–950.

[14] A. Veres, Extensions of the theorems os Szász and Zygmund on the absolute convergence of Fourier series, *Acta Sci. Math.*, **74** (2008), 191–206.

[15] Z. Waraszkiewicz, Remarque sur un théorème de M. Zygmund, *Bull. Internat. Acad. Polonaise*, 1929, 275–279.

[16] N. Wiener, The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, *Massachusetts J. Math.*, **3** (1924), 72–94.

[17] A. Zygmund, Remarque sur la convergence absolue des séries de Fourier, *J. London Math. Soc.* **3**, (1928), 194–195.

[18] A. Zygmund, Some points in the theory of trigonometric and power series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 586–617.

[19] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press (Cambridge, U.K., 1959).

Nyilatkozat

Alulírott, Dr. Móricz Ferenc nyilatkozom arról, hogy az "*Absolute convergence of multiple Fourier series*", "*Absolute convergence of multiple Fourier series revisited*" és az "*Absolute convergence of Walsh-Fourier series and related results*" című cikkek Veres Antallal közös munkáink, melyekben a jelölt saját munkája hozzávetőlegesen 50%.

Szeged, 2011. február 14.

Dr. Móricz Ferenc

Nyilatkozat

Alulírott, Dr. Móricz Ferenc nyilatkozom arról, hogy az "*Absolute convergence of multiple Fourier series*", "*Absolute convergence of multiple Fourier series revisited*" és az "*Absolute convergence of Walsh-Fourier series and related results*" című cikkeket sem eddig, sem ezután nem használom fel doktori fokozat megszarzésére.

Szeged, 2011. február 14.

Dr. Móricz Ferenc