# A VALÓSZINÜSÉG FOGALMÁRÓL

EGYETEMI DOKTORI DISSZERTÁCIÓ

Készitette:

HEGYI FERENC

SZEGED

1981

T A R T A L O M

Vitathatatlan, hogy az emberek tulnyomó többsége a könnyü és közérthető filozófiát a szabatossal és elvonttal szemben mindig előnyben fogja részesiteni, és sokan azt fogják hangoztatni, hogy az előbbi nemcsak kellemesebb, hanem hasznosabb is, mint az utóbbi.

David Hume

Minden tudományos vizsgálatra áll, hogy csak élesre köszörült logikával, kristálytiszta érveléssel, óvatosan, lépésről-lépésre haladva és minden lépést ellenőrizve lehet az igazságot megközeliteni, de ez sehol sem annyira fontos, mint éppen a véletlen jelenségek vizsgálatánál.

Rényi Alfréd

# B E V E Z E T É S

## 1.

Elemzéseink többsége a matematika alapjai ( foundations of mathematics ) vagy másképpen a metamatematika tárgykörébe tartozik. A matematika alapjai nem matematikai diszciplina, sem módszere, sem tárgya alapján nem sorolható a matematikához. Kétségtelenül nem filozófia abban az értelemben, hogy nem a valóság három nagy területének -- vagyis az élettelen- és élő természetnek, a társadalomnak valamint a gondolkodásnak -- közös törvényeit, illetve e törvények összefüggéseit vizsgálja, de ilyen értelemben a hagyományosan filozófiai disciplinának tartott etika sem az.

A hazai filozófusok számottevő része a szaktudományok megalapozásának kérdéseit, módszertani problémáit nem tekinti filozófiai jellegünek. Ennek okait nem feladatunk feltárni, csupán megemlitjük, hogy a számos ok közül a filozófiai hagyomány erejére, a lukácsi hagyaték ( részben ) téves értelmezésére[1] valamint arra a tényre hivatkozhatunk, hogy az emlitett -- szokásosan határterületeinek nevezett -- vizsgálódások az eddigi tapasztalatok szerint tág teret adtak a dilettantizmusnak, általában meglehetősen alacsony szinten állnak. A matematika alapjaira vonatkozó fejlett nyugati -- elsősorban angolszász -- vizsgálódásoktól messze el vagyunk maradva, hazánkban e tudományág multja és jelene egyaránt szegényes.

A matematika alapjainak méltó helyre juttatásáért sokat tett Kalmár László, aki a matematika alapjait először vezette be az egyetemi oktatásba Magyarországon.[2] Rényi Alfréd is sokat tett a matematika elvi kérdéseinek tisztázásáért. Meg kell még emlitenünk Ruzsa Imre és Farkas Miklós professzorokat, akik -- bár nem ez a fő kutatási területük -- mégis szép eredményeket értek el e diszciplina müvelésében.

2.

Vizsgálódásaink természetéből adódik, hogy elkerülhetetlenül állást kell foglalnunk néhány alapvető filozófiai kérdésben. A tanulmányozott kérdések konzekvens, az eklekticizmus elkerülésére törekvő megválaszolása feltételezi a szubjektum-objektum viszony helyes értelmezését. Mi e kérdésben a filozófia alapkérdésének engelsi megválaszolására[3] és az arra épülő marxista tükröződéselméletre[4] támaszkodunk. Ez az a végső bázis, melyen gondolatmenetünk nyugszik.[5]

3.

A "valószinüség" kategóriáját a tudományokban széles körben használják. Fontos szerepe van a fizikában, a müszaki tudományokban és a matematikában. Alkalmazása és értelmezése a kutatók általános filozófiai álláspontja szerint más és más lehet. Sok bonyodalmat okozó kategóriáról van szó, melynek elemzése közvetlenül összefügg a XX. század nagy tudományos-technikai vivmányainak értékelésével. Alapvető fontosságu a müszaki- és természettudományok jelentős részének kifejtésében.

A valószinüségről szólva, egész sor sulyos és csak részben megválaszolt kérdéssel kerülünk szembe. Dolgozatunkban érintjük ezeknek a kérdéseknek egy részét, és megpróbálunk a tudomány jelenlegi állásának megfelelő marxista válaszokat adni.

A "valószinüség" terminus jelentése megegyezik az angol "probability", a francia "probabilité", a német "Wahrscheinlichkeit" és az orosz "verojatnoszty" kifejezésekkel. Az angol és a francia alak a latin "probabilitas" (valószinüség, hihetőség) szóból származik, a másik kettő ennek forditása. Meg kell különböztetnünk a szóköznapi és tudományos használatát.

4.

A "valószinüség" kategória köznapi használatát két példán keresztül világitjuk meg.

Valószinü, hogy holnap esni fog.[6] (1)

Hasonlitsuk össze (1) -et a következő mondatokkal:

Lehetséges, hogy holnap esni fog. (2)

Holnap esni fog. (3)

Használjuk föl a szimbolikus logika eszközeit az (1) - (3) mondatok vizsgálatára! (3) egy kétargumentumu atomi predikátum. 'xEt' jelölje az "x helyen t időpontban esni fog" nyitott mondatot.[7]

(2) egyszerüen (3) egy modális változata, formalizálva: M.xEt ('M' a lehetőség modális operátora.) Jól látható, hogy (1) is (3) valamilyen modalitása. A "valószinü" modalitást P-vel jelölve, (1) logikai alakja: P.xEt[8]

A kérdés mármost az, hogy a "valószinü" milyen természetü modalitás. A hétköznapi szóhasználat szerint, ha (1)-et állitjuk, akkor (2)-t is igaznak tartjuk. Viszont ha (2)-t állitjuk, nem biztos, hogy (1)-et is gondoljuk. A "valószinü" tehát a köznapi szóhasználatban a "lehetséges"-nél kicsivel erősebb modalitás.

Fellelhető a köznapi beszédben is a következő fordulat: "5o % a valószinüsége, ..." A ... helyén többnyire a "megpróbálom" vagy "miért ne próbálnám meg" stb. áll. Mit takar ez a kifejezés? Először is, mindenképpen megalapozatlan. Ugyanis egy eseménynek numerikus valószinüséget tulajdonitani csak alapos logikai, matematikai és filozófiai megfontolások alapján lehet. A köznapi szóhasználat során ilyesmiről nem beszélhetünk. Másodszor, gyakran tévedést takar. Sokan ugy gondolják, hogy ha egy A esemény bekövetkezte mellett ugyanannyi érv szól, mint ellene, akkor az A esemény bekövetkeztére 5o %-os mértékben számithatunk. Tudásunk szimmetriája azonban nem szükségszerüen jelenti a valóság szimmetriáját is. Itt az indifferencia elv egy primitiv alkalmazásával találkozunk, melynek korlátaival és értékelésével a későbbiekben részletesen foglalkozunk.

5.

A mai tudományos valószinüségfogalmak hosszu történelmi változás, differenciálódás eredményeként jöttek létre. A "valószinüség" kategóriát már az ókorban használták. A püthagoreusoknál és a szkeptikusoknál ugyanugy előfordult, mint Platonnál és Arisztotelésznél. Nincs adatunk arra, hogy megkisérelték volna a valószinüséget matematikailag kifejezni, de azt tudjuk -- elsősorban Platon és Arisztotelesz fennmaradt munkáiból -, hogy a püthagoreusok és Platon a valószinüséget objektiv számviszonyként értelmezték. Kupcov forrás megjelölése nélkül közli, hogy a görögök a gyakorlati tevékenységükben támaszkodtak a véletlen tömegjelenségek ismeretére. A hajószerencsétlenségeket hosszabb időn át tanulmányozva megállapitották, hogy az egyes hajóutakon a szerencsétlenségek száma állandó. Ennek a ténynek gyakorlati jelentőségét felismerték és használták biztositások megkötésénél.

A valószinüségek gyakorlati kiszámitására azonban csak a reneszánsz idején került sor, a szerencsejátékok kapcsán. Néhány kiváló matematikus már az ujkorban felismerte, hogy itt nem egyszerüen a játékok elméletéről van szó; a kockázatvállalás természetes közege, a különböző lehetőségek bekövetkezésének eltérő várhatósága és tulajdonképpen az egész kor légköre inspirálta az ilyen irányu kutatásokat. A valószinüségszámitás első kutatói közül L. Paciuolo, N.Tartaglia, G.Cardano és G.Galilei nevét emlitjük meg. E XVI. századi gondolkodók több eredménye hibás, de - különösen Cardanonál és Galileinél - nagyon szépek az eredmények. A XVII. század a valószinüségszámitás klasszikus fénykora. Talán B.Pascal, P.Fermat és J. Bernoulli azok, akikre mindenképpen hivatkoznunk kell. A valószinüségszámitás XVII. századi fejlődése P.S.Laplace eredményeiben csucsosodnak ki. A XVIII. század nem hozott minőségileg uj gondolatokat, bár több fontos eredményt értek el. A XIX. század legjelentősebb novuma a valószinüségelmélet terén a statisztikus mechanika megjelenése. A XX. század elején a matematika általános megalapozásának idején vetődött fel az igény a valószinüség matematikai elméletének uj alapokra helyezése iránt. E feladat megvalósitása a XX. század matematikájának egyik legértékesebb produktuma.

A valószinüség matematikai megragadására irányuló törekvések mindig együttjártak a valószinüség fogalmának filozófiai elemzésével és interpretálásával. Azok az értelmezési differenciák, melyekről a későbbiekben szó lesz, már a valószinüségelméletek fejlődésének korábbi szakaszaiban is fellelhetők. Az előzőekben durván áttekintett fejlődés lényegében a valószinüség objektivisztikus értelmezésének kibontakozása.

A valószinüség másik, u.n. logisztikus felfogásának az első nagy képviselője G.W. Leibniz, Leibniz után a XIX. században J.Boole-t, A.de Morgant, B.Bolzanot, C.S.Peircet és J.van Kriest kell megemlitenünk. A XX. század elején J.M.Keynes dolgozza ki komparativ valószinüségi logikáját, amely az egyik leghiresebb ilyen jellegü logikai rendszer. A valószinüségi logika XX. századi nagyjai: von Wright, J.Hintikka és R.Carnap. Carnap nevéhez füződik egy kvantitativ valószinüségi logika megalapozása.

A valószinüség e két fontosabb megközelitésében a legutóbbi időkig ott bujkált egy harmadik szemléletmód, a valószinüség szubjektivisztikus értelmezése. Csirái már a szkeptikusoknál megtalálhatók. Laplace és Keynes valószinüség-felfogásában egyaránt vannak szubjektivisztikus elemek. A valószinüség szubjektivisztikus elmélete csak a XX. században válik teljesen külön a logisztikus és objektivisztikus teóriáktól. A szubjektiv valószinüség elméletének nagy "klasszikusa" B.de Finetti trieszti professzor. További kiemelkedő képviselői: L.J.Savage, P.Suppes, E.Borel, F.P.Ramsey és B.O. Koopman. A fentebb emlitett R. Carnap is foglalkozik a szubjektiv valószinüség kérdéseivel. A kifejtés során látni fogjuk, hogy elméleteik filozófiai szempontból elég zavarosak és kevés eredményt tudnak felmutatni.

Ma a valószinüség elméletével foglalkozó szerzők döntő többsége egyetért abban, hogy a valószinüség fogalma pluralisztikusan értelmezendő. Ezen azt értik, hogy egyetlen valószinüség-fogalom sem rendelkezik olyan sajátosságokkal, ami alapján kijelenthetnénk, hogy az az "igazi" valószinüség, a többi pedig ennek vagy része, vagy pedig eleve értéktelen, tévedésen alapul. Megjegyezzük, hogy a tudomány történetében találunk példákat ilyen monopolizáló törekvésekre. Erről a megfelelő helyen részletesen irunk.

A valószinüség-értelmezéseket tárgyuk megragadásának módszere alapján két csoportra oszthatjuk fel. Az egyikbe a matematikai jellegü valószinüség-értelmezések tartoznak. Matematikai jellegünek nevezünk egy valószinüség-értelmezést, ha az matematikai eszközökkel elvileg adekvát módon megragadhatónak tartja tárgyát, a valószinüséget. Nem matematikai jellegü egy valószinüség-értelmezés, ha az adott valószinüség-fogalmat matematikai eszközökkel csak részben vagy egyáltalán nem leirhatónak tekintik. Ezt a tipust nevezhetjük filozófiai valószinüség-fogalomnak is.

Elsősorban a valószinüség matematikai jellegü értelmezéseivel foglalkozunk. Ezt az indokolja, hogy a valószinüségelmélet természettudományos és müszaki alkalmazásai teljes egészében a matematikai valószinüség-fogalmakra épülnek, továbbá bizonyos szempontból (ld. 5. rész) a valószinüség matematikai fogalma általánosabb a valószinüség filozófiai fogalmánál.

A valószinüség terminus szakirodalomban fellelhető matematikai jellegü értelmezéseit - mint láttuk a történelmi áttekintésben - durván három csoportba sorolhatjuk.

(i) a valószinüség objektivisztikus felfogása

(ii) a valószinüség logisztikus felfogása

(iii) a valószinüség szubjektivisztikus felfogása.

Már most felhivjuk rá a figyelmet, hogy itt nincs szó osztályozásról. Az egyes csoportok között átfedések (és más természetü kapcsolatok) is vannak.

Szokatlanul sokat foglalkozunk a valószinüség logikai és szubjektivisztikus felfogásával. Ezt az indokolja, hogy mig a valószinüség objektivisztikus felfogását meglehetősen sok, könnyen elérhető könyv és cikk tárgyalja, a másik két fő megközelités magyar nyelven alig hozzáférhető. Aránytalanul hosszunak tünhet a 3. rész 3. fejezete, azonban az ott kifejtett gondolatok nélkül nem tudnánk bemutatni se a szubjektiv, se a logikai valószinüség értelmezésének fő kérdéseit.

A dolgozat öt részből áll, az első három rész a valószinüségértelmezések előbb felsorolt három tipusát elemzi. A 4. részben a szubjektiv valószinüségelméletek filozófiai alapjaival foglalkozunk. E probléma mélyebb elemzését az indokolja, hogy itt a marxista kutatók számára szokatlan és többnyire alig ismert fejtegetésekkel találkozunk. Az 5. részben a valószinüség filozófiai és matematikai értelmezésének viszonyát vizsgáljuk.

Igyekeztünk eredeti forrásokra hivatkozni, helyenként azonban szekunder irodalomra is támaszkodtunk. Az irodalmi hivatkozásokat "$[n_1, n_2]$" alakban adtuk meg. $n_1$ és $n_2$ természetes számok; $n_1$ a könyv, folyóirat irodalomjegyzékbeli sorszámát, $n_2$ az idézett kiadás megfelelő oldalszámát jelöli. Helyenként - ahol csak a mü egészére hivatkozunk - $n_2$ elmarad. Ha az első szám után "/R" jelzés következik, ahol R római szám, akkor többkötetes müről van szó, és az R szám az idézett kötet sorszáma.

A dolgozatban a matematika - ezen belül elsősorban a halmazelmélet - és a logika jelöléseit használjuk. A matematikai jelölések a matematikában jártas olvasó számára érthetőek. A logikai jelölések a magyar szakirodalomban még nem teljesen egységesek; mi a Ruzsa Imre által egységes elfogadásra javasolt jelöléseket használjuk. [42]

A bevezetés megirásában fölhasznált főbb müvek: [2], [36], [42], [26], [35].

# JEGYZETEK A BEVEZETÉSHEZ

1. Lukács helyenként jelentkező nyilt matematika birálatára (vagy éppen matematika ellenességére) gondolunk. Ld.: Lukács Gy.: A társadalmi lét ontológiájáról III. (Prolegomena)

2. Ez nem egyszerüen a matematikai logika és a halmazelmélet alapos oktatását jelenti, ahogyan azt ma sokan elképzelik. Kalmár egy elvi kérdésekre kiterjedő, átfogó oktatási programot kivánt megvalósitani, amely kiterjedt valamennyi általa tanitott tárgyra, igy az analizisre és a számitástudományra is.

3. Engels: Ludwig Feuerbach és a klasszikus német filozófia vége. 263-264. o. In: Marx és Engels Müvei 21. Budapest 197o.

4. A tükröződési elméletről ld.: Katona P.: A tükröződési elmélet és a tudat aktivitása. Budapest 1978. Különös tekintettel 54-61. o.

5. Elemző munkánk során az idézett filozófiai tételek nem axiómaként álltak előttünk. Analizisünk eredménye azonban azt mutatta, hogy a valószinüséggel kapcsolatos kérdéseket a marxista ismeretelmélet klasszikus tételei nélkül nem tudjuk kielégitően megválaszolni.

6. A köznapi beszédben inkább a "valószinü", mint a "valószinüség" szó fordul elő. A valószinüség terminus csak akkor szerepel, ha a valószinüség mérhetőségét explicite vagy implicite feltételezzük. Pl.: "Sürü ködben nagy valószinüséggel késnek a vonatok." Itt implicite feltételezzük,

hogy a valószinüség valamilyen skáláján mozoghat, ahol van értelme nagyról és kicsiről beszélni. A másik tipus: "5o % a valószinüsége, hogy lekésem a buszt." Itt a valószinüség mérhetősége explicite feltételezett.

7. Látszólag (3) logikai alakját pontatlanul adtuk meg. Valójában azonban egy (3) tipusu kijelentés mindig feltételezi, hogy a kontextus alapján tudjuk, milyen tájegységre vonatkozik a kijelentés. Az eső soha nem csak ugy általában, hanem valahol és valamikor esik.

8. A 7. jegyzetnek megfelelően, P.xEt nem (1) logikai alakját irja le, hanem egy (1) -nél pontosabb állitás formalizálása.

# 1. A valószinüség fogalmának objektivisztikus értelmezései

## 1.1. Bevezetés

Elemzésünket két definició megadásával kezdjük.

Akkor mondjuk, hogy a valószinüség fogalmát objektiven értelmezik, ha a valószinüséget az objektiv valóság valamilyen összefüggéseként, törvényeként fogják fel.

A valószinüség egy matematikai elméletét akkor tekintjük objektivisztikusnak, ha az előbb definiált értelemben kiépitésekor a valószinüséget objektivként kezeli, és annak gondolati tükörképeként fogható fel a valószinüség matematikai fogalma, vagy forditva, a valószinüség matematikai fogalmát objektiv valószinüségként interpretálhatjuk.

Tekintettel arra, hogy a valószinüség objektvisztikus értelmezését eddig kielégitő módon egyedül a relativ gyakoriság egy számérték körüli ingadozása esetén sikerült megadni (ld. később), igy a valószinüség objektivisztikus értelmezését gyakran szokás a valószinüség gyakorisági - vagy statisztikus felfogásának is nevezi. A valószinüség gyakorisági felfogásán néha a később tárgyalandó Venn - Mises - Reichenbach-féle valószinüség-értelmezést értik. Ha nagyon szigoruak akarnánk lenni, akkor csupán a Kolmogorov-féle valószinüségelmélettel foglalkozhatnánk az adott cim alatt. Ugy véljük azonban, hogy Kolmogorov elméletének egyenes előzményeit célszerü ebben a részben tárgyalni. Ennek persze olyan kellemetlen következményei lesznek, hogy a Bernoulli-Laplace-féle klasszikus valószinüség-felfogást az 1. és a 3. részben is elővesszük, egyszer mint objektivisztikus, egyszer mint szubjektivisztikus értelmezést. Ebben nem látunk ellentmondást, hiszen a valószinüség e klasszikus koncepciójában ténylegesen keverednek az objektiv és szubjektiv elemek.

## 1.2. A valószinüség objektivisztikus értelmezésének kibontakozásáról

### 1.2.1. A Bernoulli-Laplace-féle klasszikus valószinüség-felfogás

J.Bernoulli (1654-17o5) előtt már szép eredményeket értek el a valószinüség értelmezésében és a különböző valószinüségszámitási feladatok megoldásában. Mi mégis vele kezdjük ismertetésünket, aminek a terjedelmi korlátokon kivül az az oka, hogy Bernoulli volt az első olyan matematikus, aki felismerte, hogy a valószinüségszámitás módszereinek horderejе messze tulnő a szerencsejátékok körén. Fő müve az "Ars coniectandi". Ebben szabatosan bebizonyitja a nagy számok törvényét. A véletlen fogalmát materialista módon tárgyalja. Az "Ars coniectandi" vonatkozó részét magyarul ld.: [4o,676]

P.S.Laplace (1749-1827) a XVIII. századi valószinüségszámitás legkiemelkedőbb alakja. Laplace (és Bernoulli is!) a valószinüség u.n. "klasszikus" felfogásából indul ki. Ez azt jelenti, hogy a valószinüséget a kedvező esetek és a lehetséges esetek számának hányadosaként értelmezi, feltéve, hogy az egyes esetek azonos lehetőségüek. Részben ez az oka annak, hogy a valószinüség klasszikus koncepcióját a

Bernoulli-Laplace névvel jelölik. Ezen tulmenően azonban jelentős tény, hogy Laplace felismeri a relativ gyakoriság stabilitásának jelentőségét és összekapcsolja a valószinüség fogalmát a relativ gyakorisággal. [4o, 677] Felfogása nem egyoldalu; a valószinüséget egyszer olyan számként jellemzi, ami körül ingadozik a gyakoriság, máskor várakozásunk mértékeként értelmezi. A két szempont véleményünk szerint nem ellentmondó. Egyetértünk Carnap azon (3.3-ban idézett) megállapitásával, mely szerint ha ismerjük egy esemény statisztikus valószinüségét, akkor annak bekövetkeztében a valószinüségnek megfelelő fokban bizhatunk. Laplace a valószinüséget mindig jövőbeli eseményekre vonatkoztatta. Az alkalmazások többségében tényleg jövőbeli események valószinüségét határozzuk meg.

### 1.2.2. A statisztikus mechanika hatása a valószinüség értelmezésére

A valószinüségszámitás fejlődése Laplace után megtorpant. Ennek okát egyrészt abban láthatjuk, hogy a valószinüségszámitást filozófiai jellegü tévedések miatt hibásan alkalmazták ([4o,679]), másrészt abban, hogy a valószinüség klasszikus definicióját még nem tudták ujabb definicióval pótolni.

A valószinüség problémája J.L.Maxwell és L.Boltzmann fizikai eredményeivel került ismét az érdeklődés középpontjába. Maxwell és Boltzmann felismerték, hogy a molekulák és az atomok világának vizsgálatában a valószinüség nélkülözhetetlen eszköz. Mindketten csak a tömegeseményekkel kapcsolatban alkalmazták a valószinüséget. A fizikai világ jelenségeit objektivnek tartották, az azt leiró matematikai apparátust pedig az objektiv törvények tudati képeként értelmezték. Boltzmann szerint "A molekulák mozgására vonatkozó egyenletek csak közelitő képletek, amelyek azokat a középértékeket adják meg, amelyek igen nagy számu részecske együttes hatására a valószinüségszámitás törvényei szerint kialakulnak." (Idézi: [4o,681])

Nincs arra utaló adatunk, mely kizárná, hogy Maxwell és Boltzmann elfogadták volna a valószinüség egyedi eseményekre vonatkoztatását. Fodor Judit szerint ugy tünik ([15,7]), hogy elhatárolták magukat a valószinüség szubjektivizálásától, egyedül a gyakoriságon alapuló valószinüséget hajlandók elismerni. Ez mindenesetre elhatárolást jelent a valószinüség addig szokásos megközelitésének egyik vitatható elemétől. Eszerint ugyanis az egyes események egyenlő valószinüsége csupán várakozásunkon alapult. Pontosabban az elegendő okok hiányának elvét fogadták el, mely Bernoullitól Keynesig sok helyütt megtalálható. Az elv alkalmazásának egy egyszerü példája: Amennyiben egy dobókocka alakja szabályos és anyaga homogén, nincs okunk feltételezni, hogy egyik oldalára nagyobb valószinüséggel esik, mint a másikra. [2o,11] Ezzel szemben a gyakorisági felfogás részben előrelépést jelent, az azonban nem igaz, hogy a valószinüség semmit nem mond az adott eseménykategóriába tartozó egyes eseményekről. Egy hosszu kockadobássorozat csak azért mutathatja az 1,...,6 számok közel azonos gyakoriságát, mert minden egyes dobás esetében volt lehetőség akármelyik érték bekövetkezésére. A valószinüséget kizárólag sokaságok tulajdonságaként értelmezi

R.Mises is, aki először kisérli meg a valószinüségszámitást axiomatikus alapokra fektetni.

1.2.3. <u>R.v.Mises a valószinüségről</u>

Mises élesen birálta a valószinüségszámitás klasszikus felfogását. Szerinte a klasszikus valószinüségszámitás hibás logikai kört (circulus vitiosus) használ fel. A valószinüség definiálása során felhasznált "azonos lehetőségü" kifejezés nem érthető másképpen, mint "azonos valószinüségü". Néhány egyszerü esetben Mises szerint is lehet világos értelmet tulajdonitani az "azonos lehetőség"nek. Ilyen esetek például a kockadobás és a pénzfeldobás. Ha meg akarjuk határozni, mennyi a valószinüsége 6-os dobásának dobókockával, ugy járunk el, hogy egy konkrét kockával hosszu kisérletsorozatot végzünk, és meghatározzuk a 6-os relativ gyakoriságát. Mármost, ha egy az előzőhöz teljesen hasonló kockával van dolgunk, nincs okunk feltenni, hogy az más valószinüséget szolgáltatna.[1]
Megjegyezzük, hogy Jordán Károly birálja Misest az indifferencia elv irányában tett engedményéért. "A nehézség abban rejlik, hogy honnan tudhatjuk, hogy a kérdéses kocka olyan, mint az, amellyel a dobásokat végeztük? Ismét akkor fogjuk a két kockát egyenlőnek tekinteni, ha semmi okot sem ismerünk, amelynek folytán azokat különbözőeknek kellene tekinteni" - irja egyik könyvében. [2o,21]
Szerintünk az indifferencia elv valóban alkalmazható <u>egyszerü</u> esetekben. Ha pl. tudjuk, hogy egy dobókocka alakja szabályos, anyaga homogén és nem csalunk a dobássorozat végrehajtásakor, akkor nincs okunk kételkedni abban, hogy az egyes értékek dobásának valószinüsége $\frac{1}{6}$. Itt éppenséggel nem tudáshiányra

hivatkozunk, hanem arra a tudásunkra, hogy az azonos alaku és tömegeloszlásu testek mechanikai hatásokkal szemben azonosan viselkednek.
Ilyen esetben ezt a valószinüséget becsült valószinüségnek tekinthetjük. Más, bonyolultabb esetben Mises szerint aligha lehet az azonos lehetőséget értelmezni. A társadalmi és fizikai jelenségek körében vagy akár az időjárás előrejelzésben az azonos valószinüség nem értelmezhető. A klasszikus felfogás e kritikájának talaján született meg a valószinüség gyakorisági interpretációja.

Mises a valószinüség értelmezéséhez uj fogalmat vezet be, a kollektivum fogalmát. [34,13] A kollektivum lényegében halmaz, amelynek elemeit olyan határtalanul ismétlődő észlelések képezik, amelyek különböző eredményekhez vezethetnek. Szerinte valószinüségről csak akkor lehet beszélni, ha szigoruan meghatározott és pontosan körülhatárolt kollektivum van jelen. E kollektivum elemei tömeg- vagy ismétlődő jelenségek. [34,33] Magát a valószinüséget a kisérlet végtelen sokszori elvégzésekor a relativ gyakoriság határértékeként adódó számként értelmezi. Már Jordán K. rámutat ([2o,2o]), hogy a kisérlet végtelen sokszori elvégzésére való hivatkozás téves. Ha el is tekintünk attól, hogy egy kisérlet végtelen sokszori megismétlése lehetetlen, a kollektivum homogenitását nem lehet biztositani, s igy a relativ gyakoriság nem konvergál, hanem ingadozik. Valóban erről van szó, hiszen a valószinüségszámitás Kolmogorov-féle elméletéből tudjuk, hogy egy valószinüségi kisérlet teljesen független ismétlései során az esemény relativ gyakorisága <u>sztochasztikusan</u> konvergál az esemény valószinüségéhez. (Bernoulli tétele, ld. pl.

[48,3o9]) A sztochasztikus konvergenciánál erősebb konvergencia - 1-valószinüséggel való konvergencia - már csak speciális feltételek mellett teljesül. (Ld. Kolmogorov első tézise. [48,316]) Azonban se a sztochasztikus, se az 1-valószinüséggel való konvergenciából nem következik a közönséges konvergencia. Erre utal Pólya Gy. Jordán által [2o,2o]-ban idézett megállapitása, mely szerint Mises hallgatólagosan feltételezi egy a Bernoulli tételnél erősebb tétel létezését.

Hogyan értékelhetjük Misesnek a valószinüségelmélet területén elért eredményeit?

Mises a valószinüség gyakorisági felfogásáról 192o-tól publikál, idézett könyve 1928-ban jelent meg először. Ebben összefoglalását adja valószinüségelméleti és statisztikai kutatásainak. Ténykedése tehát zömmel a 2o-as évekre esett. Feltétlen érdeme, hogy felhivta a matematikusok figyelmét a valószinüség klasszikus definiciójának nem kielégitő voltára. A valószinüségnek egy végtelen sorozat határértékeként történő definiálása kétségtelenül nagyon sok logikai és gyakorlati nehézséget okoz. Egyetértünk azonban Carnappal ([6,69]) abban, hogy nem értelmetlen Mises definiciója. E definició alapján több értelmesen interpretálható tételt lehet levezetni.

Misesen kivül meg kell emlitenünk H.Reichenbach és J.Venn munkásságát. A valószinüséget mindketten Miseshez hasonlóan értelmezték, amiértis a nyugati szakirodalomban gyakran Venn-Mises-Reichenbach-féle megközelitésnek nevezik a valószinüségnek a relativ gyakoriság határértékeként történő értelmezését. Számottevő nézeteltérés a valószinüség értelmezése körül Mises és Reichenbach között csupán az egyedi események valószinüségével kapcsolatban merült föl. Mises szerint az egyedi eseményeknek nem tulajdonitható valószinüség. Reichenbach azonban kimutatja, hogy Mises olyan eseményt is egyedi eseménynek tekint, amelyik a valóságban nem az, ugyanis kimutathatóan valamely eseményosztályhoz tartozik. Az egyedi és nem egyedi események problematikája sok nehézséget okoz a valószinüség elméletében. Gyakran vizsgálják azt a fentebb már érintett kérdést, hogy tulajdonitható-e valószinüség egyedi eseményeknek. A kérdés jogos, de ha pl. a valószinüség Mises-féle értelmezésével kapcsolatban tesszük fel, akkor értelmetlen.[2] Ugyanis Mises egy kollektivum (másképpen eseményosztály) meglétét tételezi föl. Tehát a figyelembe vett események eleve egy eseményosztály elemei, nem egyediségükben, hanem éppen mint az adott kollektivum elemeit vizsgáljuk őket.

Az "egyedi esemény" fogalma absztrakció eredménye, ugyanugy, mint a "tömegesemény" fogalma. Minden esemény egyedi is és általános is. Általános abban az értelemben, hogy több eseményosztályhoz is tartozhat. Az események egyedisége nyilván nem vizsgálható olyan eszközökkel, amiket eleve az eseményekben meglévő közös vonások alapján meghatározott eseményosztályok analizálására hoztak létre.

Reichenbach tehát annyival lép tovább Misesnél, hogy felismeri bizonyos eseményekről, hogy azok nem abszolut egyediek, hanem olyan eseményosztályhoz tartoznak, mely lehetővé teszi valószinüségszámitási eszközökkel történő vizsgálatát.

Ma már tudjuk, hogy a valószinüség Venn-Mises-Reichenbach-féle megközelitése nem tekinthető sikeresnek, egyre inkább történelmi érdekességgé válik a valószinüség Kolmogorov-féle elmélete mellett, bár még jelenleg is van néhány hive a valószinüség ilyen értelmezésének. [27,4] Mises relativ sikertelenségét a multban gyakran pozitivisztikus filozófiai felfogás direkt következményeként értékelték. Igaz, hogy Mises közvetlen kapcsolatban állt a Bécsi Körrel és a Reichenbach vezette Empirikus Filozófiai Társasággal, igy az erős pozitivista attitüd aligha vonható kétségbe. Nem értünk egyet viszont azzal, hogy Kolmogorov egyszerüen világnézeti és tudományos fölénye miatt tudta megoldani azt a feladatot, ami Misesnek nem sikerült.

Végezetül megemlitjük, hogy Mises a valószinüséget monisztikusan fogta föl. Szerinte egyedül a gyakoriság révén lehet a valószinüséget értelmezni.

## 1.3. A valószinüség Kolmogorov-féle elmélete

### 1.3.1. A Kolmogorov-féle valószinüségelmélet kialakulásának körülményei

A valószinüség elméletének két legnagyobb vivmánya kétségtelenül a valószinüség mérték- és halmazelméleti megalapozása és a sztochasztikus folyamatok elméletének megteremtése volt. Mindkét eredmény elsődlegesen A.N.Kolmogorov (19o3- ) nevéhez füződik. Alapvető munkája "Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" cimmel 1933-ban Berlinben jelent meg. E könyvben a valószinüség-

számitásnak egy halmaz- és mértékelméleten alapuló axiomatikus tárgyalását adja. Ez a tény nem utolsósorban azért jelentős, mert igy a valószinüségszámitást bekapcsolja a matematika "vérkeringésébe", felhasználhatóvá váltak a valós függvénytan és a funkcionál-analizis eredményei. (Persze, a valószinüségszámitás azelőtt is jelentős matematikai diszciplina volt, még akkor is, ha a matematikusok egy része nem tekintette a matematika többi fejezetével azonos értékünek.) Rényi emliti, hogy századunk 2o-as éveinek végén a valószinüségszámitás halmazelméleti megalapozása "napirenden volt", számos matematikus tett lépéseket ebben az irányban. Itt elsősorban Haussdorff, Rademacher, Steinhaus, Kac, Lomnitzky és Jordán nevét kell megemlitenünk. [4o,686]
Az 1.2-ben kifejtett értelemben Mises is hozzájárult az uj elmélet kialakulásához. Látni fogjuk, hogy a Kolmogorov-féle elmélet két döntő gondolaton nyugszik. Az egyik a Boole-algebra valószinüségszámitás terén történő alkalmazása, a másik a relativ gyakoriság és a valószinüség közötti összefüggés helyes értelmezése. Az előbbi Glivenko ötlete, az utóbbi egy dialektikus materialista világnézet talaján és Mises sikertelenségének tanulságaként adódhatott. [4o,13]

Kolmogorov nevéhez füződik a sztochasztikus folyamat fogalmának megalkotása is. Rényi [4o]-ben megjegyzi, hogy a sztochasztikus folyamatok elméletének alapgondolatai heurisztikus formában már L.Bochelier francia matematikus munkáiban is fellelhetőek, egzakt és kifejtésre alkalmas megalapozását azonban Kolmogorov adja meg "Über analitische Methoden in der Wehrscheinlichkeitsrechnung" c. munkájában.

1.3.2. A Boole-algebrák és a valószinüségszámitás közötti kapcsolat, mint a valószinüség Kolmogorov-féle elméletének egyik pillére

Mielőtt rátérnénk a valószinüség Kolmogorov-féle elméletének (a továbbiakban röviden: Kolmogorov elmélete) ismertetésére, megjegyezzük, hogy terjedelmi okokból nem tudjuk az elmélet egészét bemutatni, még annak alapjait is csak korlátozottan. Amennyire lehetséges, megpróbáljuk elkerülni a mérték- és halmazelméletbe való belebonyolódást, ez azonban a dolog lényegénél fogva teljesen nem sikerülhet. Ismerkedjünk meg ezután a valószinüségszámitás alapfogalmaival.

Valószinüségi kisérlet alatt olyan kisérletet értünk, mely azonos körülmények között akárhányszor megismétlődhet, és az egyes kisérleteknek több kimenetele lehetséges. Általában hangsulyozzák, hogy véletlen eseményeket veszünk figyelembe, és a véletlent szubjektivisztikusan értelmezik. (Ld: [4o,12], [48,1o5], [25,11].) Kisérlet alatt a matematikában nemcsak a szokásosan értelmezett kisérletet értik, hanem egy jelenség megfigyelését is kisérletnek tekintik. Legyenek A,B,C,... egy kisérlet végrehajtása során fellépő lehetséges kimenetelek. Ezeket eseményeknek nevezzük. Vezessük be a lehetetlen esemény fogalmát. Ezen azt az eseményt értjük, mely soha nem következik be. Jelöljük O-val a lehetetlen eseményt. Ennek bevezetésére a kisérletek matematikai leirása végett van szükségünk. Hasonló célból vezessük be a <u>biztos esemény</u> fogalmát. A biztos eseményt I-vel jelöljük. I akkor és csak akkor következik be, ha A,B,C,... közül legalább egy bekövetkezik. Azaz, minden egyes kisérlet végrehajtása során bekövetkezik. Definiáljunk müveleteket az eseményeken. A és B események összege alatt értjük azt az A+B-vel jelölt eseményt, mely akkor és csak akkor következik be, ha A és B közül az egyik bekövetkezik. A és B események szorzata alatt értjük azt az AB-vel jelölt eseményt, mely akkor és csak akkor következik be, ha A is és B is bekövetkezik. Egy A esemény komplementumán értjük azt az $\bar{A}$ eseményt, mely akkor és csak akkor következik be, ha az A nem következik be. Egyszerüen megmutatható, hogy az események itt értelmezett algebrájára teljesülnek a következő összefüggések:

$$
\begin{array}{rclrcl}
AA & = & A & A + A & = & A \\
AB & = & BA & A + B & = & B + A \\
A(BC) & = & (AB)C & A + (B+C) & = & (A+B) + C \\
A(B+C) & = & AB + AC & A + BC & = & (A+B)(A+C) \\
A\bar{A} & = & 0 & A + A & = & I \\
AI & = & A & A + 0 & = & A \\
A0 & = & 0 & A + I & = & I
\end{array}
\qquad 1.3.\ (1)
$$

Nézzük meg, hogyan jellemezhető logikailag az eseményalgebra bevezetése! Az esemény fogalmát a matematikában csak absztrakt fogalomként tudjuk tárgyalni. Ezért elvonatkoztathatunk az események konkrét tartalmától, csupán az események egymással való kapcsolatai, viszonyai maradnak meg. Ezek a viszonyok <u>logikai természetüek.</u> Ezt ugy láthatjuk be, hogy minden eseményhez hozzárendelünk egy állitást, ti. azt az állitást, mely a szóbanforgó esemény bekövetkeztét állitja. Az események közti kapcsolatoknak, összefüggéseknek ily módon állitások közötti logikai kapcsolatok felelnek meg. Könnyen észrevehető, hogy az események algebrája és az állitások elemi logikájának kalkulusa izomorf. A szemléletesség kedvéért a megfelelést táblázatba foglaljuk, bár az eseményeken értelmezett müveletek sajátosságai miatt az izomorfia teljesen világos.

| | Eseményalgebra | Állitáskalkulus |
|---|---|---|
| paraméterek: | A,B,C,... | p,q,r,.... |
| müveletek: | • | & |
| | + | V |
| | - | ~ |
| konstansok: | I | i |
| | O | h |

Ezt a közös algebrai strukturát szokás Boole-féle algebrának nevezni.

Egyetértünk Rényi Alfréddel abban, hogy a valószinüségszámitás halmazelméleti megalapozásához vezető uton a legjelentősebb, mondhatnánk kulcsfontosságu lépést V.I. Glivenko tette meg, amikor felhivta a figyelmet a Boole-algebra és a halmaztestek közötti egyik (önmagában egyszerü) összefüggésre. [4o,13] Ezt az összefüggést a következő, M.H.Stone-tól származó tétel állitja: Minden eseményalgebrához megadható egy vele izomorf halmaztest. (Bizonyitását ld. pl. [4o,654-657]) Ezt a tételt általános alakjában csak 1936-ban bizonyitotta be Stone. Véges eseményalgebrákra azonban majdnem nyilvánvaló, hiszen ha egy H halmaz részhalmazainak T összessége tartalmazza H-t és T halmaztest (azaz a halmazelméleti unió-, metszet- és különbségképzés müveletekre zárt), akkor T Boole-algebrát alkot. Glivenko elsősorban erre a véges esetre gondolhatott, bár feltehető, hogy sejtette a tétel érvényességét megszámlálhatóan sok eseményből álló eseményalgebrára is.

Annak alátámasztására, hogy a valószinüségelmélet halmazelméleti megalapozása mennyire nem egyszerüen egyéni produkció volt, megjegyezzük, hogy a Stone-tétel bizonyitásához szükséges halmaezelméleti segédtételek bizonyitása azoknak a már emlitett matematikusoknak a nevéhez füződik, akik keresték az utat a valószinüségszámitás halmazelméleti alapokra helyezése felé. (Hausdorff és Birkhoff idevágó eredményeit ld. pl. [40,657]) Ezután már érthető, hogy a valószinüség Kolmogorov-féle elmélete miért reprezentálja az eseményalgebra elemeit egy halmaztest halmazaival.

Kolmogorov első két posztulátuma a következő:

1. Feltesszük, hogy adva van egy nem üres $\Omega$ halmaz; elemeit elemi eseményeknek nevezzük, $\Omega$ neve pedig eseménytér.

2. Feltesszük, hogy adva van $\Omega$ részhalmazainak valamely $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebrája; az $\mathcal{A}$-beli halmazokat eseményeknek nevezzük.

Az 1. posztulátum az előzőeken tul nem igényel kommentárt. A 2. azonban némi gondot okoz. Ugyanis $\sigma$-algebra szerepel benne, és nem halmaztest! Heurisztikusan fogalmazva, a $\sigma$-algebra "finomabb" struktura, mint a halmaztest. Ugyanis X halmaz részhalmazainak $\mathcal{A}$ osztályát akkor nevezzük $\sigma$-algebrának, ha egyrészt $X \in \mathcal{A}$, másrészt minden $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{A}$ és $(A-B) \cup (B-A) \in \mathcal{A}$ teljesül, továbbá $A_i$ $(i=1,2,\ldots)$ esetén $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ teljesül. Az azonban már nem igaz, hogy minden eseményalgebrához megadható egy vele izomorf $\sigma$-algebra.

### 1.3.3. A valószinüség bevezetésének módja Kolmogorov elméletében

Az események algebrája pusztán az események közötti összefüggések kvalitativ leirása. Az előző pont végén ismertetett 1. és 2. feltevések az események egy bizonyos szintü matematikai leirhatóságát tételezik fel. A valószinüségszámitás azonban a valószinüség fogalmának bevezetésével kezdődik. Legyen A valamely valószinüségi kisérlet eredménye. Ismételjük meg a kisérletet n-szer egymástól teljesen függetlenül. (Ezen azt értjük, hogy az egyes ismétlések kimeneteleit nem befolyásolják a többi ismétlések kimenetelei.) Az A esemény bekövetkezéseinek a számát jelöljük $\kappa_n(A)$-val; $\kappa_n(A)$-t az A esemény <u>gyakoriságának</u> nevezzük, $\frac{\kappa_n(A)}{n}$ pedig A <u>relativ gyakorisága.</u> Minden esetben $0 \leq \kappa_n(A) \leq n$, és $0 \leq \frac{\kappa_n(A)}{n} \leq 1$ teljesül. $\kappa_n(A)$ és $\frac{\kappa_n(A)}{n}$ értéke A-tól és n-től is függ, továbbá $\kappa_n(A)$ és $\frac{\kappa_n(A)}{n}$ értéke más és más n-szeres független ismétlést véve más és más lehet. Gyakran azonban azt tapasztaljuk, hogy n növekedésével a $\frac{\kappa_n(A)}{n}$ bizonyos stabilitást mutat. Feltételezzük, hogy ez a stabilitás egy egyértelmüen meghatározott $P(A)$ szám körüli ingadozásként fogható fel. (Itt a feltevés az <u>egyértelmü</u> meghatározottságra vonatkozik. A gondot az okozza, hogy ha egy számsorozat "ingadozik" pl. 0,166 körül, akkor az 0,1661 körül is "ingadozik". $P(A)$ unicitása tehát hipotetikus. Erről ld. pl: [39,23])

Egy esemény statisztikus valószinüségének a megismerése azért fontos, mert ismeretéből következtethetünk az illető esemény jövőbeni bekövetkezésének a gyakoriságára.

Ha a körülmények változnak, akkor az események valószinüsége is változhat. Ha a tapasztalat azt mutatja, hogy nincs olyan érték, amely körül az esemény relativ gyakorisága stabilitást mutat, akkor az illető eseménynek nem tulajdonithatunk valószinüséget. (Legalábbis statisztikus értelemben.)

A valószinüségnek az előbbiekben adott fogalma természetesen nem egzakt matematikai fogalom. A valószinüségszámitásban a valószinüség egzakt matematikai fogalmát ugy adjuk meg, hogy az az előbb ismertetett statisztikus valószinüség tulajdonságait tükrözze.

Legyen $\Omega$ valamely valószinüségi kisérlet elemi eseményeinek a halmaza, és $\mathcal{A}$ az események $\sigma$-algebrája. Tegyük fel, hogy minden $A (\in \mathcal{A})$ eseménynek van valószinüsége, a statisztikus értelmben. Ekkor a $P : A \to P(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ leképezés $\mathcal{A}$-t leképezi a valós számok halmazába, tehát egy $\mathcal{A}$-n értelmezett halmazfüggvény.

Bármely $A$ eseményre minden esetben $\frac{\kappa_n(A)}{n} \geq 0$. Ha most $P(A)$ az az érték, amely körül $\frac{\kappa_n(A)}{n}$ stabilitást mutat, akkor $P(A)$ negativ nem lehet. Tehát minden $A$ eseményre $P(A) \geq 0$, azaz $P(A)$ $\mathcal{A}$-n nem-negativ halmazfüggvény. Minden esetben $\frac{\kappa_n(\Omega)}{n} = 1$. Mivel $P(\Omega)$ az az érték, amely körül $\frac{\kappa_n(\Omega)}{n}$ stabilitást mutat, ezért $P(\Omega)$ 1-től különböző nem lehet, tehát $P(\Omega) = 1$.

Legyenek A és B egymást kizáró események. (A és B egymást kizáró események, ha $A \cdot B = 0$) Ekkor $A \cup B$ is esemény, és minden esetben $\kappa_n(A \cup B) = \kappa_n(A) + \kappa_n(B)$, igy minden esetben $\frac{\kappa_n(A \cup B)}{n} = \frac{\kappa_n(A)}{n} + \frac{\kappa_n(B)}{n}$. Mivel $P(A \cup B)$, $P(A)$, ill. $P(B)$ az az érték, amely körül $\frac{\kappa_n(A \cup B)}{n}$, $\frac{\kappa_n(A)}{n}$, ill. $\frac{\kappa_n(B)}{n}$ stabilitást mutat, ezért a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ egyenlőségnek teljesülnie kell. Tehát bármely két egymást kizáró A és B eseményre $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, azaz P $\mathcal{A}$-n additiv.

Megjegyezzük, hogy P additivitásánál többet szokás megkövetelni, ti. P $\sigma$-additivitását.

P $\sigma$-additiv $\mathcal{A}$-n, ha minden olyan $A_n (n=1,2,\dots)$ halmazsorozatra, melyek páronként idegenek, teljesül a

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

összefüggés.

A Kolmogorov-féle elmélet harmadik feltevése a következő:

3. Adva van egy P valószinüségi mérték $\mathcal{A}$-n. $A \in \mathcal{A}$ esetén $P(A)$-t az A esemény valószinüségének nevezzük.

A 3. feltétel és az előbb elmondottak kapcsolatának megvilágitásához csupán a mérték és a valószinüségi mérték definicióját kell megadni. Akkor mondjuk, hogy $\mu$ halmazfüggvény <u>mérték</u> a $\mathcal{C}$ halmazosztályon, ha $\mu$ $\mathcal{C}$-n $\sigma$-additiv és nem negativ.

($\mu$ $\sigma$-additiv a $\mathcal{C}$ halmazosztályon, ha valahányszor $E_1, E_2, \dots$ olyan $\mathcal{C}$-beli diszjunkt halmazok, amelyekre $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{C}$ teljesül, mindannyiszor $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.)

Legyen X nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ X részhalmazainak $\sigma$-algebrája, P mérték $\mathcal{A}$-n. P <u>valószinüségi mérték,</u> ha $P(X) = 1$. [48,62]

Foglaljuk össze, hogy a 3. feltétel megadása előtt milyen követelményeket támasztottunk P-vel szemben. P olyan halmazfüggvény, amely $\Omega$ bizonyos részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszerén értelmezett. Bármely $A \in \mathcal{A}$ -ra $P(A) \geq 0$ és $P(\Omega) = 1$. ($\Omega \in \mathcal{A}$, mert $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra; ld. 2. feltétel.) Megköveteltük továbbá, hogy P $\sigma$-additiv $\mathcal{A}$-n. De éppen az ilyen tulajdonságu halmazfüggvényeket nevezzük valószinüségi mértéknek. Ennek alapján érthető Kolmogorov elméletének harmadik feltevése.

A továbbiakban rámutatunk a valószinüség Kolmogorov-féle elméletének néhány filozófiai és módszertani szempontjából jelentős sajátosságára. Mindenekelőtt azt jegyezzük meg, hogy a Kolmogorov-féle elméletben csak a valószinüség tulajdonságait posztuláljuk, nem magát a valószinüséget. Ez azonban a matematikában teljesen szokásos eljárás, hiszen pl. a geometriában is csak a pont, az egyenes és a sik tulajdonságait foglalják axiómákba. Ennek ellenére a valószinüségelmélet kiépitése során olyan eredményekhez jutunk, melyek lehetővé teszik események valószinüségének meghatározását. Maga az elmélet egyébként nyilván nem tud többet, mint hogy események valószinüségének ismeretében következtethetünk további, az illető eseményekből összetett események valószinüségére. Bizonyos kiinduló események valószinüségének meghatározása tehát kisérleti feladat.

Továbbá, a valószinüségszámitás alkalmazása mindig a vizsgálni kivánt kisérletsorozat matematikai modelljének megalkotásával kezdődik. E modell megalkotása egy valószinüségi mező megkonstruálását jelenti. Ezután eredményeink matematikai uton adódnak és igy matematikai szempontból helyesek. Az, hogy az ily módon adódó eredmény megfelel-e a valóságnak, attól függ, hogy helyes volt-e a modellünk. Az elméleti uton kapott eredmények valóságnak megfelelő volta viszont végső soron megint csak a gyakorlattal ellenőrizhető.

### 1.3.4. A valószinüségelmélet megalapozását érintő egyéb összefüggések

A Kolmogorov-féle elmélet lényeges sajátossága, hogy nemcsak kiinduló feltevéseiben (axiómáiban), hanem felépitése során is ugy jár el, hogy maximálisan tekintettel van a tükrözni kivánt valóságterület sajátosságaira. Egy matematikai elméleten belül az elméletnek a valósághoz való hozzáigazitására - a matematika sajátosságai miatt - elég szükek a lehetőségek, és nem is lehetséges máshol, mint az egyes bevezetésre kerülő fogalmak definiálásakor.
Három példán mutatjuk be ennek az elvnek az alkalmazását a valószinüségszámitás kiépitésében. A példának felhozandó definiciók rendre a feltételes valószinüség, az események függetlensége és a várható érték meghatározásai.

Legyen A és B egy valószinüségi kisérlet két eseménye. Ismételjük meg a kisérletet n-szer egymástól teljesen függetlenül. A $\frac{\kappa_n(A \cap B)}{B}$ hányadost az A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes relativ gyakoriságának nevezzük. (Csak $\kappa_n(B)>0$ esetén van értelme.) Sokszor tapasztaljuk, hogy n növekedésével ez a relativ gyakoriság egy szám körül stabilitást mutat. Ezt a $P(A|B)$ értéket szokás a gyakorlatban az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószinüségének nevezni. Ennek a $P(A|B)$ értéknek a jelentése a következő: Többszöri teljesen független ismétlésnél, véve csak azokat az eseteket, amelyekben B bekövetkezett, az ilyen eseteknek kb. $P(A|B)$ -edrészében fog A is bekövetkezni. A feltételes valószinüségnek az a statisztikus fogalma nem egzakt matematikai fogalom. Nézzük meg, hogyan feleltethetünk meg neki egy matematikai fogalmat. Hasonlóan járunk el, mint a valószinüség bevezetésénél.

Jelölje $P(A\cap B)$ ill. $P(B)$ az $A\cap B$ ill. a B esemény statisztikus értelemben vett valószinüségét. Tegyük fel, hogy $P(B)>0$. Ekkor a statisztikus értelemben vett valószinüség és a relativ gyakoriság közötti kapcsolat szerint n növekedésével $\frac{\varkappa_n(A\cap B)}{n}$ $P(A\cap B)$ körül, $\frac{\varkappa_n(B)}{n}$ pedig P B körül stabilitást mutat, igy a

$$\frac{\varkappa_n(A\cap B)}{\varkappa_n(B)}=\frac{\frac{\varkappa_n(A\cap B)}{n}}{\frac{\varkappa_n(B)}{n}}$$

hányados a $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ érték körül fog stabilitást mutatni. Mint láttuk, n növekedésével a $\frac{\varkappa_n(A\cap B)}{B}$ a $P(A|B)$ érték körül mutat stabilitást. Igy a statisztikus értelemben vett feltételes valószinüségre a

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

egyenlőségnek teljesülnie kell. Ennek alapján érthető a következő definició.

Legyen A és B valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószinüségi mező két eseménye, $P(B)>0$. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó <u>feltételes valószinüségén</u> értjük a

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

értéket. [48,119]

Térjünk rá most az események függetlenségének kérdésére.

Legyenek A és B valamely valószinüségi kisérlet eredményei. A gyakorlati életben az A és a B eseményeket függetlennek tekintjük, ha az egyik bekövetkezése, vagy be nem következése nem befolyásolja a másik bekövetkezésének vagy be nem következésének eredeti szabályszerüségét. Tehát, ha n-szeres teljesen független ismétlést veszünk, akkor n növelésével a $\frac{k_n(A\cap B)}{k_n(B)}$ és a $\frac{k_n(A)}{n}$ hányadosok ugyanazon érték körül mutatnak stabilitást.

Ezért elég nagy n-re $\frac{k_n(A\cap B)}{n}$ és $\frac{k_n(A)}{n} \cdot \frac{k_n(B)}{n}$ gyakorlatilag egyenlőknek vehetők. A relativ gyakoriság és a statisztikus valószinüség összefüggése alapján a statisztikus értelemben vett P valószinüségekre a $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ egyenlőség teljesül.

E meggondolás alapján megfogalmazható az események függetlenségének matematikai definiciója.

Egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószinüségi mező A és B eseményeit függetleneknek nevezzük, ha $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$. [48,122]

A várható érték értelmezése előtt definiálnunk kell a valószinüségi változó fogalmát.

A gyakorlatban előforduló kisérletek tulnyomó részében a kisérlet eredményével, az elemi eseménnyel, egyuttal egy vagy több numerikus érték is adódik. Ennek a ténynek az elméleti leirására bevezetjük a valószinüségi változó fogalmát. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószinüségi mező. Valószinüségi változónak nevezünk egy olyan $\xi(\omega)$ függvényt, amely, kivéve esetleg egy 0 valószinüségü eseményt, $\Omega$-n értelmezve van, valós értékü és mérhető. ($\xi$ mérhetőségének szokásos definicióját bonyolultsága miatt nem adjuk meg. Annyit azért megjegyzünk, hogy $\xi$ mérhetősége ekvivalens azzal, hogy minden valós x számra $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$, azaz az $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ nivóhalmaz esemény. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószinüségi mezőn értelmezett valószinüségi változó <u>várható értékén</u> az $M(\xi) = \int_{R_1} x \, dF(x)$

Stieltjes-integrált értjük (ha létezik), ahol $F(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) < x\})$ (A Stieltjes-integrál értelmezését közérthető formában [38]-ban /124.o./, részletesen [48]-ban /69-77. o./találhatjuk meg.)

Természetes módon merül fel a kérdés: Mi az alapja ennek a szép definiciónak? E definició természetes általánositások eredményének fogható fel. Az általánositás menetének bemutatásában [38]-ra támaszkodunk. A valószinüségszámitás egy ősi témájából, a szerencsejátékokból indulunk ki. Tekintsünk egy szerencsejátékot, melyet két egyén játszik. Az 1. játékos a játék kimenetelétől függően r különböző összeget nyerhet, legyen ezek $x_1, x_2, \ldots, x_r$ Ezek között negativ számok is lehetnek, amelyek veszteséget jelentenek. Az előbbi nyereségek rendre $P_1, P_2, \ldots, P_r$ valószinüségekkel fordulnak elő. Ha n számu egymástól független játékot játszanak, akkor az 1. játékos által nyert összeg

$k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_rx_r$, ahol $k_i$ az $x_i$ összeg nyerésének gyakorisága. Ha n eléggé nagy, akkor

$$\frac{k_1}{n} \approx P_1, \ \frac{k_2}{n} \approx P_2, \ \ldots \ , \ \frac{k_r}{n} \approx P_r$$

Az 1. játékos által nyert összeg egy játékra eső része:

$$\frac{\sum_{i=1}^{r} k_i x_i}{n} = \sum_{i=1}^{r} x_i \frac{k_i}{n} \approx \sum_{i=1}^{r} x_i P_i$$

Tehát, ha n elég nagy, akkor az 1.játékos átlagos nyereménye $\sum_{i=1}^{r} x_i P_i$. (Ezt az összeget szokás a nyereség várható értékének is nevezni.)

Ennek alapján érthető, hogy ha $\xi$ egy diszkrét valószinüségi változó ( azaz, $\Omega$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen), és $\xi$ lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, melyeket rendre $P_1, P_2, \ldots$ valószinüségekkel vesz föl, akkor $\xi$ várható értékét ($M(\xi)$ -t) a $\sum_i x_i P_i$ összeggel definiáljuk. $M(\xi)$ csak akkor létezik, ha a $\sum_i x_i P_i$ sor abszolut konvergens. ( E kikötés szükségességéről ld. [38,125]) A Stieltjes-integrál definicióját felhasználva egyszerüen megmutatható, hogy a várható érték korábban megadott definiciója diszkrét $\xi$-re ugyanazt az eredményt adja, mint a most adott definiciónk. Az integrállal megadott definició tehát természetes általánositása a várható érték egy egyszerübb fogalmának.

Az eddigiekben 1.3.3.-ban és 1.3.4.-ben kimutattuk, hogy a valószinüség Kolmogorov-féle elmélete felfogható bizonyos törvényszerüségekkel rendelkező tömegjelenségek elméleti leirásaként. Magát a kész axiomatizált valószinüségelméletet tekintve nyilvánvaló viszont, hogy annak elvileg más interpretációja is lehetséges. Megjegyezzük, hogy jelenleg nem ismeretes a Kolmogorov-féle valószinüségelmélet egészének az ismertetettől eltérő jellegü, elfogadható interpretációja.

A Kolmogorov-féle valószinüségszámitás kiépitésének elvi kérdéseit természetesen nem meritettük ki; csak az adott keretben tárgyalható fontosabb összefüggések bemutatása volt a célunk.

## 1.4. Kolmogorov elméletének filozófiai alapjairól

Az előző fejezetben ismertetett gondolatok nyitva hagyják azt a kérdést, hogy milyen feltételek mellett alkalmazható a valószinüségszámitás Kolmogorov-féle elmélete. Az eddigiek alapján azt a választ adhatnánk, hogy egy esemény relativ gyakoriságának a stabilitása jogosit föl bennünket a valószinüségszámitás alkalmazására. Ez természetesen igaz. A kérdés azonban az, hogy mindig el kell-e végeznünk egy hosszu kisérletsorozatot ahhoz, hogy az adott kisérlet valamely lehetséges kimenetelének valószinüségéről beszélhessünk? Szerencsére nem. A valószinüségszámitás alkalmazhatóságához csupán azt kell föltételezni, hogy a vizsgált események <u>tömegjelenségek</u> és <u>véletlenek</u> legyenek. Tömegjelenségen a valószinüségelméletben azonos feltételek mellett sokszor megismételhető kisérletet értenek. Szokás még azt is mondani, hogy az elvben korlátlanul megismételhető kisérleteket nevezzük tömegjelenségnek. A véletlen alatt itt egyszerüen kontingenciát, tehát több lehetőség fennállását értjük. Hogy a kontingenciának mi a forrása, az a valószinüségszámitás szempontjából érdektelen.

Valószinüségszámitási eszközökhöz nyulhatunk, ha a körülmények bizonyos figyelembe vett K komplexuma nem határozza meg egyértelmüen egy eseményosztályba tartozó esemény kimenetelét. Ebben az esetben lehetséges, hogy nem ismerjük az összes okot és egyéb determináló tényezőt, de az is lehet, hogy ismerjük, csak tul bonyolult lenne figyelembe venni valamennyit. [4o,7], [48,1], [38,11] Akkoris alkalmazhatunk valószinüségszámitási eszközöket, ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy $t_1$ időpontban valamely eseményosztályba tartozó események kimenetele még nem determinálódott egyértelmüen, de $t_1$-ben szükségünk lenne bizonyos információkra az adott események $t_2$ időpontbeli kimeneteléről. (A valószinüségszámitás alkalmazhatósági feltételét ilyen szellemben közeliti meg Fodor Judit. [15]) Ez azonban az alkalmazhatóságnak csak elegendő, de nem szükséges feltétele. Az 5. részben ezt a problémát részletesen vizsgáljuk.

A következő kérdésünk az lehet, hogy beszélhetünk-e valószinüségről akkor, ha a kisérletet csak néhányszor (vagy csupán egyszer) tudtuk elvégezni? Véleményünk szerint igen. Rényi idevágó példája: Ha egy kockát megvizsgálunk és szabályosnak találjuk, akkor van értelme arról beszélni, hogy egy dobásból 6-ost dobunk, még akkor is, ha a kockát a dobás után eltüzeljük. [4o,42] A lényeg ugyanis az, hogy a kocka dobása egy ismert tulajdonságu eseményosztályba tartozik.

Még egy fontos (a 3. részben még visszatérő) kérdést érintünk. Lehet-e egyedi eseménynek valószinüsége? Egyedi esemény például egy lóverseny kimenetele vagy egy hajótörés bekövetkezése. Tulajdonitható-e ezeknek valószinüség? Véleményünk szerint igen, ez azonban mindig hipotetikus. Egyetértünk Rényi azon megállapitásával, mely szerint "egy esemény bekövetkezésének lehetőségeire vonatkozó szubjektiv itéletet tekinthetjük az esemény objektiv valószinüségének megállapitására irányuló törekvés eredményének, ha azonban nem ezzel az igénnyel lép fel és az ennek az igénynek megfelelő tudományos követelményeknek nem felel meg, ugy a valószinüségszámitáshoz és a tudományhoz semmi köze nincs és nem is lehet." [41,73] E hipotetikus valószinüségek nagyon fontosak lehetnek. [39]-ben egy szép példát találunk erre. A hajóbiztositó társaságok számára döntő kérdés, hogy a hajótörés valószinüségét jól becsüljék meg. Ha a becslés rossz, tönkremegy a társaság. A becslések "átlagban" helyes megtételét csak a gyakorlat - adott esetben a társaság mérlege - mutathatja meg. [39,65-66] Az egyedi eseményeknek tehát lehet valószinüséget tulajdonitani, bár annak pontos értékét nem ismerhetjük.

## 2. A valószinüségi logikák valószinüség-értelmezései

### 2.1. A valószinüségi logika kialakulásáról és fejlődéséről

K.Popper irja, hogy az induktiv logika 24oo év óta, a valószinüségi logika pedig 4oo év óta terv. Állitásával egyetérthetünk, még akkor is, ha szép törekvések ismertek az induktiv logika és a valószinüségi logika megalkotására.

Az induktiv- és valószinüségi logika mibenlétének megvilágitásához F.Bacon, J.S.Mill és G.W.Leibniz néhány gondolatával kell megismerkednünk.

Az indukció klasszikus álláspontját Bacon (1561-1626) fejtette ki Novum Organum c. müvében. Bacon a kisérleti tudományokat kivánja megalapozni. Célja maximálisan illeszkedik korának szükségleteihez. A XVII. század elején Angliában élénk kapitalizálódás folyik, természetes igény a tudományok megalapozása. A kisérleti tudományok módszere Bacon szerint az indukció. Valamennyi általános alapelv megállapitásánál az indukció módszerére kell támaszkodnunk. A kérdés az, milyen legyen ez az indukció? "Az egyszerü felsoroláson alapuló indukció ... gyermeteg dolog, önkényesen dönt, az első ellenkező értelmü példa halálos veszedelembe sodorja, többnyire a kelleténél kevesebbre és a csak éppen kéznél levő adatokra támaszkodik. A tudományok felfedezésére és tudományos bizonyitására alkalmas indukciónak azonban a kellő rostálás és kizárás alapján kell a természetet elemeznie, és csak akkor dönthet igenlő értelemben, ha a megfelelő számu tagadó példát áttekintette." [3,2o6] Bacon nem ad pontos, részletes végrehajtási utasitást az induktiv általánositás végrehajtására, de egy ilyen szabályrendszer (a tulajdonképpeni induktiv logika) létrehozását feltétlen szükségesnek tartja. Olyannyira, hogy szerinte a tudományok ujjáépitésében "...a legfőbb reménység forrása ez az <u>indukció.</u>" (U.o.) Az első alapos kisérlet az induktiv általánositás szabályainak kidolgozására J.S.Mill (18o6-1873) angol logikus nevéhez füződik. System of Logic (1841) c. müvében fogalmazta meg e módszer kánonjait.

<u>1. kánon.</u> A megegyezés módszere: "Ha a megvizsgálandó jelenség két vagy több esetben egyetlen egy közös körülmény fordul elő, ez a körülmény, a melyben egyedül egyezik meg minden eset, az adott jelenség oka (vagy okozata)." [33/II, 93]

<u>2. kánon.</u> <u>A különbözés módszere:</u> "Ha a megvizsgálandó jelenség előfordultának, meg elő nem fordultának valamely esete, egynek kivételével, minden körülményben megegyezik, ez az egy csak az előbbiben fordulván elő: az a körülmény, amelyben egyedül különbözik a két eset, a jelenség okozata, vagy oka, vagy az ok nélkülözhetetlen része." [33/II,98]

<u>3. kánon.</u> <u>A megegyezés és a különbözés kombinált módszere:</u> "Ha a jelenség előfordultának két vagy több esete csak egyetlen körülményben egyezik meg; mig elő nem fordultának két vagy több esete semmi egyébben sem egyezik meg, csak e körülmény hiányzásában: az a körülmény, amelyben a két eset-sor egyedül különbözik, a jelenség okozata, vagy oka, vagy okának nélkülözhetetlen része." [33/II,1o6]

4. kánon. A maradék módszere: "Vond le valamely jelenségnek azt a részét, a melyről, előbbi indukciók nyomán tudod, hogy bizonyos megelőzők okozata, s a jelenség maradéka a többi megelőző okozata." (Uo.1o8.o.)

5. kánon. "A mely jelenség valamilyen módon változik, valahányszor egy másik jelenség bizonyos módon változik, vagy oka, vagy okozata e jelenségnek, vagy az okozatiság valamely ténye által összeköttetésben van vele." [33/II,114] (A kánonok korszerü megfogalmazásban megtalálhatók: [43/III, 67-68.])

Az induktiv logika kritikája itt nem célunk. Csupán arra a fogyatékosságára mutatunk rá, melynek nyilvánvalósága elvezet a valószinüségi logikához. Bacon - és Bacon nyomán Mill - feltételezi, hogy az induktiv következtetés szabályai ugyanugy szükségszerüek, mint a deduktiv következtetések. Leibniz szerint azonban az induktiv logika valószinüségi jellegü. Bacon az induktiv logikát mint a törvények feltárásának és bizonyitásának logikáját kezeli. Ezzel szemben Leibniz az induktiv logika alapvető feladatának olyan logikai eljárások kidolgozását tartja, melyek a hipotézisek tényekkel való alátámasztásának a fokát mérik. [9,273] E hipotézisek Leibniz megfontolásaiban elsősorban oksági kapcsolat fennállására vonatkoznak, de megenged más jellegü hipotéziseket is.

Bacon-nal és Descartes-tal szemben, akik módszertani megfontolásaikban az általában vett, absztrakt tudományos ismeretet differenciálatlanul tekintik, Leibniz elhatárolja a tudományos igazságok két tipusát. Megkülönbözteti az ész- és a tényigazságokat. Az észigazságok a logikai ellentmondástalanság és a dedukció elvén, a tényigazságok az elegendő megalapozás és az indukció elvén alapulnak. [9,24o] Az induktiv következtetések konkluziója valószinüségi jellegü, mert önmagából a tapasztalatból szükségszerü igazságként nem lehet levezetni az általános törvényt. Másképpen fogalmazva: megfigyelt jelenségekből hipotetikus törvényekre csak bizonyos valószinüséggel lehet következtetni. [9,273] Mi lehet a hipotézisként szereplő állitások elfogadásának alapja? Leibniz szerint a nagyobb mértékü megalapozottság a döntő. Ha tehát adott egy hipotézis, akkor aszerint tartjuk meg vagy vetjük el, hogy a hipotézist kifejező állitás vagy annak tagadása a nagyobb mértékben megalapozott. Arra nézve, hogy ez a "megalapozás" objektiv vagy szubjektiv természetü legyen-e, a következő utalást találhatjuk: A jelenségek közötti olyan kapcsolat, mely rajtunk kivülálló ismert dolgokra vonatkozik, ahhoz hasonlóan vizsgálható racionális eszközökkel, ahogyan az optikai jelenségeket magyarázzák a geometriában. [3o,57] A megfogalmazás arra enged következtetni, hogy Leibniz eléggé objektivisztikusan fogta fel a valószinüségi logika kérdését, amennyiben a valószinüségi logikát a tényleges viszonyok leirásának eszközeként értelmezi. Nem vetődik fel nála az a probléma, hogy az indukció eredményeként kapott hipotézisek tudásunk hiányossága miatt valószinüek, s igy az induktiv valószinüség ismeretelméleti jellegü, bevezetése önmagában tudásunk korlátozott voltára mutat. Nos, Leibniz ezt az eléggé szembetünő kérdést elkerüli. Ennek okát egy - meglehetősen sulyos - tévedésében véljük megtalálni

Idézzük L.Couturat idevágó sorait, melyben Leibniz valószinüségi logikájának gondolatait foglalja össze. "...csak meg kell határozni (az infinitézimálszámitás segitségével, ha lehet ) a maximális valószinüségü kombinációt, hogy biztosan tudjuk, melyik valósul meg." [9,239] Mivel Leibniz a valószinüségi logikát elvileg megvalósithatónak itélte, igy a valószinüségi logika nem hogy a megismerés "fogyatékosságát" mutatná, de olyan eszköz, mely révén az előrelátás vágya is teljesülhet. További részletezés itt indokolatlan, mégis annyit megjegyzünk, hogy a valóságban lényegesen bonyolultabb a helyzet. Fontosnak tartjuk kiemelni, hogy a valószinüségi logika Leibniz szerint a logika része, melynek létrehozható a saját szimbolizmusa és speciális algoritmusai. [9,249] Leibniz gondolatai vitathatatlanul érdekesek és jelentősek. Mégis a maga korában csekély visszhangra talált. Ezt a tényt két dolog magyarázhatja. Tul általános volt a gondolat; kidolgozását sem Leibniz, sem más kortársa nem tudta megkezdeni. Másrészt, gondolatai ellenkeztek az éppen uralkodó tudományos-módszertani törekvésekkel, melyeket az abszolut biztos, szükségszerüen igaz tudás megszerzési lehetőségeinek vizsgálata jellemzett. [3o,53]

Mint fentebb emlitettük, az indukció Millnél univerzális módszer, amin azt értjük, hogy mind a felfedezés, mind az igazolás eszköze. A felfedezés és az igazolás folyamata - tehát a történeti és a logikai - Millnél még differenciálatlanul jelentkezik. A történeti és logikai különbségének felismerését éppen az indukciónak univerzális módszerré deklarálása akadályozta. Mégis azt kell mondanunk, hogy Millnél és kortársánál, Whewellnél az indukció elsősorban a felfedezés eszköze. Ez - mint látni fogjuk - szöges ellentétben áll a későbbi induktivizmussal, a Bécsi Kör (elsősorban Carnap) felfogásával, aholis az indukció csak az igazolás eszköze. A Bécsi Kör képviselői természetesen már megkülönböztetik a "logikai és időbeli prioritást". (Schlick, [1,264])[3] Megjegyezzük, hogy az előbb emlitett Whewellt gyakran antiinduktivistának nevezik. Helyesebb lenne azonban azt mondani, hogy az indukciót Milltől eltérően értelmezi. Hires müvét, a "Novum Organum Renovatum"-ot a baconi indukciós módszertan továbbfejlesztésének tekinti. Akármilyen érdekesek is Whewell indukcióra vonatkozó megfontolásai, nem foglalkozhatunk vele részletesen, mivel közvetlenül nem tekinthető a valószinüségszámitás egyik ága előkészitőjének sem. Csupán annyit jegyzünk meg, hogy Whewell szerint a tudományos tételek nem egyszerüen empirikus adatok puszta általánositásai. A tudományos törvények tartalmaznak olyan elemeket, u.n. fundamentális ideákat,[4] melyek lehetővé teszik az induktiv általánositást, maguk a fundamentális ideák azonban levezethetetlenek a megfigyelésből.

Az idő során létrejött valószinüségi logikai rendszereket két csoportba oszthatjuk. Az egyikbe az u.n. komparativ, a másikba a kvantitativ valószinüségi logikák tartoznak. 2.2-ben vázlatosan ismertetjük az egyik leghiresebb (klasszikusnak számitó) komparativ valószinüségi logikát, mely J.M.Keynes, a hires közgazdász nevéhez fűződik. 2.3-ban a Carnap-féle kvantitativ valószinüségi logika "standard" formáját tekintjük át. A carnapi valószinüségelmélet azonban nem szükithető le pusztán a 2.3-

ban ismertetendő formájára, időskori felfogása ennél szinesebb és bonyolultabb is, közvetlenül kapcsolódik a valószinüség egyéb (szubjektivisztikus, objektivisztikus) értelmezéseihez. (Ld. 3.2 )

## 2.2. Keynes komparativ valószinüségi logikája

Mint emlitettük, Leibniz a 2.1-ben vázolt valószinüségi logikát csak tervezte, de nem valósitotta meg. A logikával foglalkozó szerzők általában egyetértenek abban, hogy Keynes alkotta meg azt a logikát, melyet Leibniz tervezett. [47,241] Persze tévedés lenne azt hinni, hogy a valószinüségi logika kérdése csak Leibniznél majd utána Keynesnél izolált pontokként merült fel. Vizsgálatainkban a tudomány fejlődésének azt a vonalát ragadtuk ki, mely egyenesen vezetett a mai eredményekhez. A tudomány utjai azonban jóval bonyolultabbak. Megemlitjük, hogy John Locke, Leibniz kortársa "Értekezés az emberi értelemről" ([31]) cimü hires müvében külön fejezetben tárgyalja a valószinüséget. Több nagyon jelentős megállapitása ellenére azt kell mondanunk, hogy átsiklott a valószinüség problematikája felett, feltehetőleg nem látta egy matematikai jellegü megközelités lehetőségét. Szerinte a valószinüség tudásunk hiányának pótlására szolgál. [31 / II,272] A valószinüséget egy olyan modalitástipusként tárgyalja, melynek különböző fokozatai vannak. [31/II, 272-273] Az idézett fejezet 5. §-ában érdekes leirását találjuk a valószinüségen alapuló hétköznapi döntéseknek, amely azonban nem tekinthető a komparativ valószinüségi logika alapvetésének. Hume közlése szerint Leibniz birálta Locke fenti müvét azért, mert tulságosan szükszavu a valószinüség tárgyalásánál, pedig "életünk és viselkedésünk teljességgel az evidenciának ezektől az alacsonyabb fokaitól függ". [18,599]

Keynes valószinüségi logikáját "A treatise on probability" c. müvében ([23]) fejti ki. Ez a mü minden korábbinál teljesebb kifejtése a valószinüségi logikának. 1921-ben Londonban adták ki. Már a XIX. században is történtek figyelemreméltó próbálkozások a valószinüség logikai megközelitésére. Mindenekelőtt Boole, de Morgan, Bolzano, Peirce és Kries munkásságára kell gondolnunk. Leibniz mellett elsősorban J.S.Mill hatása jelentős a Keynes-i valószinüségi logika kialakulásában. Tulajdonképpen azt mondhatjuk, hogy a milli eliminációs indukciós módszert egyesiti a leibnizi gondolatokkal. Keynes teljesen egyetért Leibniz-cel abban, hogy az eliminációs indukció eredményeként nyert általánositások akkor sem lehetnek abszolut biztosak, ha a megadott eljárásokat helyesen alkalmazzuk. Hársing megjegyzi ([47,241]), hogy az indukció a valószinüséggel Jevonsnál kapcsolódik össze teljsen.

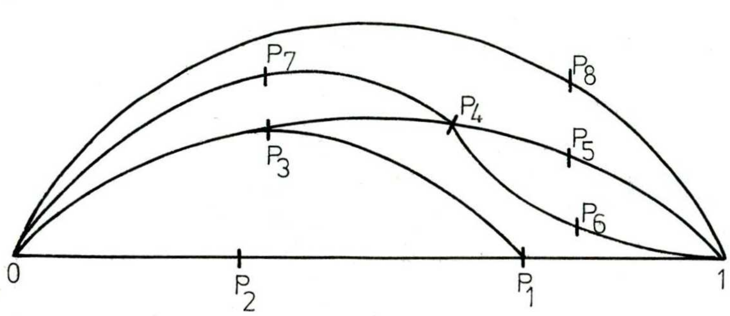
Keynes valószinüségfelfogását a következőkben foglalhatjuk össze:

(i) Nem definiálja a valószinüség fogalmát. Szerinte semmiféle meghatározást nem lehet formalizálni, csak intuició révén tudhatjuk meg, hogy mi a valószinüség, ugyanis a valószinüség a racionális hit foka. Minden kijelentés vagy igaz, vagy hamis, de a kijelentésekről alkotott ismereteink a körülményeinktől függnek. Ezért Keynest többször bírálták, szubjektivizmussal, pszichologizmussal, vádolták. (Ld. erről [47,243-244], [6,71-72])

(ii) Keynes nem ismeri el a valószinüséget, mint a nem ismeretelméleti értelemben vett objektiv jelenségek jellemzőjét. [23,5]

(iii) Valószinüségelméleti felfogása jellegzetesen monisztikus, egyedül a logikai valószinüséget ismeri el. Keynesnek a komparativ valószinüségi logikához vezető alapgondolata a következő: "Ugy gondolom, ... hogy vannak olyan valószinüségpárok, amelyeket nem lehet nagyságrendileg összehasonlitani; bizonyos valószinüségekről azonban mondhatjuk, hogy az egyik nagyobb, a másik kisebb, bár nem lehetséges a különbséget mérni közöttük és hogy speciális esetben ... van értelme a nagyság számszerü összehasonlitásának." [23,34] Pontosabban, a biztosság és a lehetetlenség minden valószinüséggel összehasonlitható. A biztosságot 1-gyel, a lehetetlenséget 0-val jelöljük. Keynes feltételezi, hogy ha $P_i$ valamilyen valószinüség $(i=1,2,\dots)$ akkor $0 \leq P_i \leq 1$. Ha $i \neq j$, akkor $P_i$ és $P_j$ nem minden esetben hasonlithatók össze egymással. E feltételezés tulajdonképpen azt jelenti, hogy az állitások összessége parciálisan rendezett.

Ezt a hipotézist szokásosan a következőképpen szemléltethetjük:




1.ábra

Az ábra 0 és 1 pontját több vonallal lehet összekötni. E vonalak minden pontjának egy valószinüségérték felel meg. Csak azokat a valószinüségeket lehet összehasonlitani, melyek egy adott vonalon helyzekednek el. A valószinüségek numerikus értékelése akkor lehetséges, ha a valószinüségek a 0 és 1 pontokat összekötő szakaszon helyezkednek el. Ennek megfelelően, az ábra jelöléseit felhasználva a következő rendezések állnak elő: $P_7 \leq P_4 \leq P_6$, $P_3 \leq P_4 \leq P_5$, $P_3 \leq P_1$. Ha i, j $\leq$ 8 természetes számok és az i,j számok nem elemei egyszerre a $\{7,4,6\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,1\}$ halmazok valamelyikének, akkor $P_i$ nem összehasonlitható $P_j$-vel. $(i \neq j)$

Hársing rámutat ([47,247]), hogy Keynes világosan látta azt a tudományelméleti ellentmondást, mely szerint a fogalmak egzaktságának növelése általában szükiti terjedelmüket. A logika eredeti szélességének megőrzése végett áldozza fel Keynes valamennyi valószinüség kvantitativ jellemzésének lehetőségét. Ugyanakkor nem vette észre, hogy az a speciális eset, amikor a számszerü jellemzés lehetséges, más, általánosabb (statisztikus jellegü) interpretációt is lehetővé tesz. Ezért monisztikus felfogása kétségtelenül téves. Keynesnél a valószinüség két állitás közötti sajátos logikai viszony. A logikai valószinüséget 'a/h' szimbólummal jelöli, melyet igy olvasunk: <u>a</u> konkluzió (vagy hipotézis) valószinüsége <u>h</u> premissza (evidencia) alapján. A konkluzió - premissza szóhasználat <u>a</u> és <u>h</u> logikai viszonyát emeli ki, mig a hipotézis - evidencia terminusok inkább <u>a</u> és <u>h</u> metodológiai funkcióját emelik ki.

(Részletesebben ld. [47,249]) A hipotézisek valószinüségeinek összehasonlitása közvetlenül vagy közvetetten történhet. A közvetlen összehasonlitás a következő valószinüségek között lehetséges: $x/h$ és $y/h$ ill. $x/h_1\&h$ és $x/h$. Az összehasonlitás eredményeként egyenlőséget vagy nagyságbeli sorrendet állapitunk meg. Keynes szerint két hipotézisnek ugyanazon evidencia melletti valószinüségét akkor tekinthetjük azonosnak, ha nincs alapunk arra, hogy az egyik hipotézist a másikkal szemben előnyben részesitsük. Ez az eset akkor áll elő, ha az evidencia mindkét hipotézist azonos mértékben támasztja alá. Ez az elv - melyet a hiányzó alap vagy az indifferencia elvének szokás nevezni - egyidős a valószinüségszámitás kialakulásával és mint látni fogjuk, egy enyhébb formája még Carnapnál is megtalálható. Az indifferencia elv alkalmazásának jogosságát sokan megkérdőjelezik. Az indifferencia elv árnyalt értékelését megtalálhatjuk [47,25o-252]-ben, ismertetésére nem térünk ki. Az $x/h_1\&h$ és $x/h$ valószinüségek között is lehet egyenlőség. Ekkor $h_1$ irreleváns x-hez h evidencia alapján.
Az, hogy egy valószinüség mikor nagyobb a másiknál, direkt összehasonlitás alapján csak akkor dönthető el, ha a $b/h$ és $a/h$ ill. $a/h\&h'$ és $a/h$ valószinüségpárokról van szó.
A direkt összehasonlitás kérdését nem részletezzük tovább.
Amennyiben direkt összehasonlitás nem lehetséges, indirekt eszközökhöz, a valószinüségi következtetések elméletéhez kell nyulni.
Keynes valószinüségi logikájában 11 definiciót és 3 axiómát találunk. E rendszer legfőbb érdeme, hogy az első jelentős axiómatikus valószinüségelmélet. Axiomatikája a mai érte-

lemben nem teljesen preciz, a rendszer szintaktikája és szemantikus interpretációja nem különül el teljesen, bár ez az, ami a legkevesebb gondot okozza Keynes elméletében. Az emlitett definiciók és axiómák a következők:

D.1. Ha a és h kijelentések között fennáll a P valószinüségi viszony, akkor a/h = P. (Ez a definició csak a valószinüség szimbólikus kifejezési módját irja le.)

D.2. Ha P a biztosságot jelenti, akkor P = 1.

D.3. Ha P a lehetetlenséget jelenti, akkor P = 0.

D.4. Ha P nem biztos valószinüséget jelent, akkor $P < 1$.

D.5. Ha P olyan valószinüséget jelöl, amely nem lehetetlenség, akkor $P > 0$.

D.6. Ha a/h=0, akkor az a & h konjunkció ellentmondó.

D.7. Ha b/a h 1 és a/b&h=1, akkor a ≡ b/h = 1.

D.8. a & b/h + a&~b/h = a/h

D.9. a & b/h = a/b &h • b/h = b/a &h • a/h

D.1o. Ha $a_1/a_2$&h = $a_1$/h és $a_2/a_1$&h = $a_2$/h, akkor $a_1$/h és $a_2$/h függetlenek.

D.11. Ha $a_1/a_2$&h = $a_1$/h, akkor $a_2$ irreleváns $a_1$/h-ra nézve.

A.1. Feltéve, hogy a és h kijelentések vagy kijelentések konjunkciói vagy kijelentések diszjunkciói és nem önellentmondók, akkor a mint következmény és h mint premissza között egy és csak egy P valószinüségi reláció áll fenn.

A.2. Ha a ≡ b/h = 1, és x egy kijelentés, akkor x/a&h = x/b&h

A.3. A klasszikus kétértékü logika átalakitási szabályainak valószinüsége egyenlő 1-gyel.

E definiciókból és axiómákból levezethetők azok a tételek, amelyek a deduktiv és valószinüségi következtetések alapját alkotják.

Keynesnek az indukcióra vonatkozó elméletével nem foglalkozunk, mivel az <u>közvetlenül</u> nem kapcsolatos a valószinüség fogalmával.

Keynes jelentősen hatott a valószinüségi logika néhány későbbi müvelőjének munkásságára. Ezek közül különösen jelentős és jól kimutatható gondolatainak továbbfejlesztése Jeffreys, Pólya és Carnap valószinüségi logikáiban. Carnap szerint Keynes jelentősége elsősorban abban áll, hogy letisztult formában fogalmazza meg a valószinüség logikai értelmezését. Keynes Treatise-ét ([23]) 1921-ben adták ki, feltehetőleg 192o-ban irta. A valószinüség statisztikus értelmezésének ujabb eredményeit még nem ismerte, hiszen Mises első publikációi nagyjából egyidőben jelentek meg a Treatise-zel. H. Jeffreys angol geofizikus, akinek Theory of Probability c. könyve 1939-ben jelent meg, már ismerte Mises és Reichenbach eredményeit, de azokat teljesen hibásnak tartotta. A korábban ismert és gyakorisági alapon tárgyalt valószinüségi problémák sorát kisérelte meg tisztázni Winch-csel közösen létrehozott kvantitativ valószinüségi logikájában. Fejtegetései azonban még a szimpatizáló kritikus[5] szerint is hibásak, tételeit az axiómákból hibásan vezeti le. [6,74-75] Pólya Keynes logikáját a plauzibilis következtetések vizsgálatának irányában fejleszti tovább. [47,259] Carnap átveszi Keynesnek azt a gondolatát, hogy a valószinüségi logika határesetként tartalmazza a deduktiv logikát. A deduktiv logika a teljes logikai tartalmazást vizsgálja, a valószinüségi logika viszont a részleges logikai tartalmazást tanulmányozza. Carnap ezt a gondolatot szem előtt tartva alkotja meg valószinüségi logikáját.

## 2.3. Carnap kvantitativ valószinüségi logikája

Carnap valószinüségi logikája nem tekinthető egy izolált logikai-filozófiai törekvés eredményének. Valószinüségi logikája szerves része a Bécsi Kör tudományfilozófiájának. A Bécsi Kör szerepét a valószinüségre vonatkozó vélemények változásaiban a 4. részben tárgyaljuk. Egyelőre csak annyit, hogy Carnap valószinüségi logikája a Bécsi Kör tudományelméletének megfelelni kivánó valószinüségelmélet. Carnap valószinüségfogalomra vonatkozó nézeteit tárgyalva három megközelitési módot különböztethetünk meg. Ez nem azt jelenti, hogy Carnap idevágó nézetei között ellentmondás lehetne kimutatni vagy később megtagadta volna korábbi nézeteit. Inkább azt mondhatjuk, hogy fejlődés mutatható ki a valószinüséggel kapcsolatos nézeteiben, most azonban nem erre gondolunk. A valószinüségi logikának a Logical Foundations of Probability (195o.) c. klasszikus munkában kifejtett formáját Carnap soha nem vetette el, bár később ugy találta, hogy müve nem tudta a kitüzött célt megvalósitani. Az általa kidolgozott valószinüségszámitási kalkulust önmagában elfogadhatónak tartotta, és ez - amennyiben szemantikai megfontolásoktól függetlenül vizsgáljuk a kérdést - jogos is. Sokat változott viszont Carnap felfogása a valószinüség-fogalom értelmezésével és kalkulusának alátámasztásával kapcsolatban. Ezt a tényt részben annak természetes következtének tarthatjuk, hogy a szóban forgó valószinüségi logika fogyatékosságai létrehozója előtt sem maradtak rejtve, és igy természetes módon törekedett egy elfogadható heurisztikus - szemantikus alátámasztást adni elméletének.

Ebben a fejezetben Carnap valószinüségi logikájának vázlatát ismertetjük olyan interpretációval, amely elsősorban a már emlitett, az irodalomjegyzékben [5] alatt található könyvében szerepel. Ez az emlitett három - időben egymást követő - megközelitési módból a második. Későbbi álláspontját 3.2-ben ismertetjük, ott tisztázásra kerülő okok miatt. Carnap korai álláspontját (harmincas évek) 4.3-ban vázoljuk, Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy akkor még nem bizott egy kvantitativ valószinüségi logika létrehozásának lehetőségében.

Carnap az 5o-es években két valószinüség-fogalmat különböztet meg. [5,29-37] Az egyik a logikai valószinüség-fogalom, melynek jele $vszg_1$. Ez nem más, mint a konfirmáció foka, azaz H hipotézis valószinüsége E evidencia alapján. Carnap [5]-beli jelölésével c(H,E)=r, ha E evidencia alapján r mértékben bizhatok H igazságában. [5,164] A $vszg_1$ még két másik nézőpontból is tárgyalható, mint korrekt fogadási arány és mint a relativ gyakoriság becslése. (Ld.u.o.) Most ezen utóbbi két kérdéssel nem foglalkozunk részletesen, gondolatmenetünk egészét nem befolyásolja. Csupán annyit jegyzünk meg, hogy ezek a nézőpontok az előző speciális eseteiként foghatók fel. A statisztikai valószinüség fogalmát Carnap $vszg_2$-vel jelöli. A $vszg_2$ a relativ gyakoriságra épülő valószinüségi mérték. Carnap szerint mindkét valószinüség-fogalom tulajdonképpen kétargumentumu függvény, és a feltételes valószinüség az alapvető fogalom. Ez a megállapitás nem védhető; a feltételes és nem feltételes valószinüségek kölcsönösen visszavezethetők egymásra.

A kérdés: van-e kimutatható eltérés a $vszg_1$ és $vszg_2$ között? Ahhoz, hogy erre válaszolni tudjunk, meg kell vizsgálnunk a $vszg_1$ bevezetésének módját. Vázlatunkban [5]-r és Ruzsa Imre [43/III]-ban található ismertetésére támaszkodunk.

Tekintsünk egy c(A,B) kétváltozós függvényt, mely állitáspárokhoz hozzárendeli a [0,1] intervallum pontjait. Egy állitáspárhoz pontosan egy olyan r számot rendel hozzá, melyre $0 \leq r \leq 1$ teljesül. E függvény logikai értelmezése a következő lehet: B állitás A állitást r mértékben támasztja alá, ha c(A,B) = r. c(A,B) szokásos elnevezései: "A hipotézisnek B evidenciára vonatkozó konfirmáltsági foka"; "A valószinüsége B alapján" stb. Feltesszük, hogy B nem önellentmondó. A c(A,B) = 0 eset értelmezése: A ellentmond B-nek. A c(A,B) = 1 eset értelmezése: A logikai következménye B-nek. A fő probléma nyilván az, hogyan határozhatjuk meg c(A,B) függvényt ugy, hogy eleget tegyen a leirt logikai interpretációnak. Carnap öt követelményt (un. szimmetriafeltételeket) fogalmaz meg, melyek együttesen egyértelmüvé teszik a c(A,B) függvényt. Nézzük meg e követelményeket. Mindenekelőtt formalizáljuk az állitásokat. Egyszerüsitő feltételként kikötjük, hogy csak az elsőrendü predikátumlogika egy töredékén belül mozoghatunk.
N individuumparamétert ($a_1$, $a_2$,... $a_N$-t) és $\pi$ egytagu predikátumparamétert ($F_1$, $F_2$,...,$F_\pi$) engedélyezünk.
Tekintsük az elsőrendü predikátumlogika nyelvének ezen

paraméterekre épülő töredékét, a $\Phi(P)$ formulaosztályt.
$\Phi(P)$ tehát azon formulák osztálya, melyek a $P=\{a_1,\dots,a_N, F_1,\dots,F_\pi\}$ paraméterosztályból felépithetők.
Az elsőrendü predikátumlogika itt figyelembe vett töredékét $L(N,\pi)$-vel jelöljük. Nem engedjük meg $L(N,\pi)$ összes lehetséges interpretációját, csupán azokat vesszük figyelembe, melyekben U minden elemének van neve. (U a tárgyalási univerzum elemeinek összességét jelöli.) Két megengedett interpretáció tehát csak a pred-paraméterek interpretálásában különbözik egymástól.
Minden megengedett interpretáció egy állapotleirást definiál. Ez - kissé leegyszerüsitve -- annyit jelent, hogy megadja az egyes pred-paramétereknek megfelelő predikátumok terjedelmét U-ban. Mivel U N elemü és kölcsönösen egyértelmüen leképezhető az in-paraméterekre, ezért - figyelembe véve, hogy $\pi$ db predikátumunk van - $N\pi$ tagu konjunkcióval jellemezhetünk egy megengedett interpretációt. Az összes állapotleirások száma $2^{N\pi}$.
Legyen pl. $N=3$, $\pi=2$. Ekkor egy lehetséges állapotleirás: $F_1u_1 \,\&\, {\sim}F_2u_2 \,\&\, {\sim}F_1u_2 \,\&\, F_2u_2 \,\&\, {\sim}F_1u_3 \,\&\, {\sim}F_2u_3$. Tulajdonképpen arról van szó, hogy rendre megadjuk, U elemei beletartoznak-e az F predikátumok terjedelmeibe, vagy sem. Nyilvánvaló, hogy az állapotleirások és a megengedett interpretációk kölcsönösen egyértelmüen meghatározzák egymást.
Igy az állapotleirások mindegyike pontosan egy interpretációban igaz. Figyelembe véve, hogy az $L(N,\pi)$ nyelv minden kielégithető zárt formulája ekvivalens azon állapotleirások alternációival, melyekben igaz, ezért az állapotleirások <u>elemi eseményeknek</u> tekinthetők. Az $L(N,\pi)$ nyelv

minden zárt formuláját <u>események</u> leirásának tekinthetjük, ha megállapodunk abban, hogy a logikailag ekvivalens formulák azonos események leirásai. Jelöljük K-val az állapotleirások halmazát, L-lel K összes részének halmazát. (Kikötéseink miatt L létezik.) L elemeit formulákként kezelhetjük, ha az $\{A_1,\ldots,A_k\}$ $(\in L)$ halmazt az $A_1 \vee \ldots \vee A_k$ formulával (vagy egy azzal ekvivalens formulával) helyettesitjük. Vezessünk be L-re egy p valószinüségi mértéket, azzal a feltétellel, hogy ha A egy állapotleirás, akkor $p(A)>0$ teljesüljön. A c konfirmációfüggvényt a következőképpen definiáljuk:

$$c(A,B) = p(A|B) = \frac{p(A\&B)}{p(B)},$$

ahol p(B) nem lehet 0. Mivel p nem egyértelmüen meghatározott, igy további feltevések szükségesek. Legyen f az U univerzumot önmagára kölcsönösen egyértelmüen leképező függvény. A pedig $L(N,\pi)$ egy formulája. Jelöljük f(A)-val azt a formulát, melyet A-ból ugy kapunk, hogy u helyére f(u)-t irunk. $(u \in U)$ Azt mondjuk, hogy A állapotleirás izomorf B állapotleirással, ha létezik a leirt tulajdonságu f függvény ugy, hogy f(A)=B. Most már minden rendelkezésünkre áll az első szimmetriafeltétel megfogalmazásához.

<u>1. szimmetriafeltétel:</u> Ha A és B izomorf állapotleirások, akkor $p(A) = p(B)$

Legyen Mx az $L(N,\pi)$ nyelv tetszőleges egyváltozós nyilt mondata. Megmutatható, hogy Mx előáll a következő alakban (feltéve, hogy Mx terjedelme nem üres):

$$Mx \equiv R_1x \vee \ldots \vee R_wx$$

ahol $R_ix = G_{1i}x \,\&\, G_{2i}x \,\&\ldots\&\, G_{\pi i}x \quad (i = 1,2,\ldots,w)$

és $G_{ji} = F_j$ vagy $G_{ji} = {\sim}F_j$. Ha Mx terjedelme logikailag üres, akkor w értéke definició szerint legyen egyenlő 0-val. A w számot Mx logikai szélességének nevezzük. Vezessük be a $\mu = 2^\pi$ jelölést. A $\frac{w}{\mu}$ hányadost Mx <u>relativ logikai szélességének nevezzük.</u> A $G_1x \& G_2x \& \ldots \& G_\pi x$ alaku predikátumokat (ahol $G_i = F_i$ vagy $G_i = {\sim}F_i$ /$i=1,2,\ldots,\pi$/) <u>Q-predikátumoknak</u> nevezzük.

Legyen az $\alpha = \{u_1,\ldots,u_n\}$ halmaz része az U univerzumnak. $(1 \le n \le N)$ Adott interpretáció esetén az $\alpha$-beli individuumok egy és csak egy Q-predikátum terjedelmébe tartoznak. Tekintsük az

$$R_1u_1 \,\&\ldots\&\, R_nu_n \qquad 2.3.(1)$$

formulát, amelyben - adott interpretáció esetén - $R_i$ az a Q-predikátum, melynek terjedelmébe $u_i$ esik. $(i=1,\ldots,n)$ Az adott interpretációban a 2.3.(1) formula nyilván igaz. A 2.3.(1) formulát az $\alpha$ halmaz Q-predikátumokra vonatkozó <u>egyedi eloszlásának</u> nevezzük. Jelöljük $n_i$-vel $\alpha$ azon elemeinek számát, melyek $Q_i$ $(i=1,\ldots,\mu)$ terjedelmébe esnek. Akkor $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$. Az $n_i$ számokat a 2.3.(1) egyedi eloszlás <u>statisztikai számainak</u> nevezzük. Az $\alpha$ halmaz két egyedi eloszlása izomorf, ha statisztikai számaik rendre megegyeznek. Egyszerü kombinatorikai megfontolásból adódik, hogy egy adott eloszlással izomorf eloszlások száma:

$$d = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\mu!} \qquad 2.3.(2)$$

Az $\alpha$ halmaz valamely egyedi eloszlásával izomorf egyedi eloszlásainak alternációját $\alpha$ egy <u>statisztikus eloszlásának</u> hivjuk. Egy statisztikus eloszlás alakja tehát

$$A^* = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_d$$

ahol a tagok mindegyike 2.3(1) alaku egyedi eloszlás, a statisztikai számok pedig mindegyikben rendre azonosak. A tagok száma 2.3.(2) alapján határozható meg.

Az L $(N, \pi)$ nyelv bármely formulája kifejezhető az eredeti pred-paraméterek $(F_1, \ldots F_\pi)$ helyett a Q-predikátumok segitségével. Ezért feltehetjük, hogy predikátumaink Q-predikátumokból épülnek fel. Ennek alapján kimondható a <u>2. szimmetriafeltétel:</u> Ha a B mondat ugy keletkezik A-ból, hogy benne valamely Q-predikátumot egy másik Q-predikátummal helyettesitünk, akkor $p(A) = p(B)$

Jelölje $A_Q$ az $\alpha(\subseteq U)$ halmaz egy statisztikus eloszlását a Q-predikátumokra nézve. Legyen Mx tetszőleges, Q-predikátumok alternációjaként előállitott predikátum. Helyettesitsük $A_Q$-ban $Q_i$-t M-mel, ill. $\sim$M-mel, aszerint, hogy $Q_i$ előfordul ill. nem fordul elő M-ben $(i=1,2,\ldots)$, és jelöljük a kapott mondatot $A_M$-mel. $\alpha$ fenti statisztikai eloszlását Mx szerint éppen $A_M$ fejezi ki. A <u>3. szimmetriafeltétel</u> megköveteli, hogy $c(Mu, A_M) = c(Mu, A_Q)$ teljesüljön, ha $u \notin \alpha$.

Azaz: Annak konfirmáltsági foka szempontjából, hogy az $\alpha$ minta tapasztalata alapján egy a mintában nem szereplő u individuum rendelkezik-e az M tulajdonsággal, közömbös, hogy a minta eloszlását az M, $\sim$M dichotómia szerint, vagy pedig a Q-predikátumok létesitette részletes felosztás szerint vesszük. Jelöljük röviden $A_{Q_i}$-t $A_i$-vel.

4. szimmetriafeltétel

$$\frac{s_i}{s} \leq c\left(Q_i u\ ,\ A_i\right) \leq \frac{1}{\mu} \qquad 2.3\ (3)$$

ahol s $\alpha$ elemeinek száma, $s_i$ pedig $\alpha$ azon elemeinek száma, melyek $Q_i$ tulajdonságuak.

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$c\left(Q_i\ u,\ A_i\right) = \frac{s_i + \frac{\lambda}{\mu}}{s + } \qquad \left(i=1,\dots,\mu\ ;\lambda \geq 0\right)\ 2.3.\ (4)$$

esetén 2.3. (3) teljesül.

5. szimmetriafeltétel: (4)-ben $\lambda$ csak $\mu$-től függ. Nyilvánvaló, hogy $\lambda$-nak, mint $\mu$ függvényének megadásával a c függvény már egyértelmüen meghatározott.

Ezek után már tudjuk pontositani a $vszg_1$-re és $vszg_2$-re vonatkozó állitásokat. Carnap szerint a $vszg_1$ analitikus, a $vszg_2$ empirikus. A "c (H,E) = r" kijelentés analitikus, mert a nyelv és a c függvény megadása után e kijelentés igazságértéke nem függ a tapasztalattól. A "P (A) = s" kijelentés empirikus (P itt a statisztikus ingadozáson alapuló valószinüségi mértéket jelöli), mert az A esemény relativ gyakorisága alapján állitjuk. Ha a gyakoriság változik, akkor módositunk a valószinüségi állitáson. Ez a megkülönböztetés nyilván helytelen, hiszen ha a $vszg_1$ fogalmát használjuk, inadekvátság miatt a c függvény megváltoztatására kényszerülhetünk. Az sem jelent lényeges eltérést, hogy a $vszg_1$ állitások valószinüségére vonatkozik, a $vszg_2$ pedig események valószinüségére. Ugyanis az állitások osztályának egy része izomorf az események osztályával, mivel minden eseményhez létezik olyan állitás, mely akkor és csak akkor igaz, ha az esemény bekövetkezik. A $vszg_1$ és a $vszg_2$ között tehát ha van is különbség, az nem olyan természetü, ahogyan Carnap vélte. Egészen egyszerüen (pusztán matematikai szempontból) a Carnap-féle valószinüségi logika a Kolmogorov-féle valószinüségszámitás speciális esete. A Kolmogorov-féle elméletből ugy kaphatjuk meg a Carnap-féle strukturát, hogy elemi eseményeknek az adott nyelvre vonatkozó állapotleirásokat választjuk, és a valószinüségi mérték eleget tesz az ismertetett 1-5 szimmetriafeltételeknek. Ez az előzőek alapján világos. Esetleg arra gondolhatnánk, hogy a speciális szimmetriafeltételek hordozzák a $vszg_1$ fogalmának logikai természetét. Ha ez igaz lenne, akkor elmondhatnánk, hogy találtunk lényegi differenciát $vszg_1$ és $vszg_2$ között. A valóság azonban az, hogy - bár a szimmetriafeltevések némelyike mellett többé-kevésbé nyomós logikai természetü érveket hozhatnak fel (ld. később az első szimmetriafeltétel speciális esetére vonatkozó fejtegetést)- általánosságban nem támaszthatók alá. Csak empirikus tapasztalatok alapján dönthetünk arról, hogy feltételezésük megengedhető-e. (Ld. erről [43/III,87] (1) lábjegyzetét.)

Hogyan vélekedik ekkor (a 6o-as évek elejéig) Carnap a valószinüség fogalmak koherenciájáról? Több helyen is kifejti a fogalmak explikációjára vonatkozó elméletét. (Pl. [5,163] és [7,12-17] .) A fogalmak három csoportját különbözteti meg: (i) A <u>klasszifikatórikus</u> fogalmak a dolgokat két vagy több osztályba sorolják. (ii) A <u>komparativ</u> fogalmak lehetővé teszik, hogy a dolgot meghatározott tulajdonságaik vagy viszonyaik alapján összehasonlitsuk és pl. a nagyobb, kisebb, egyenlő

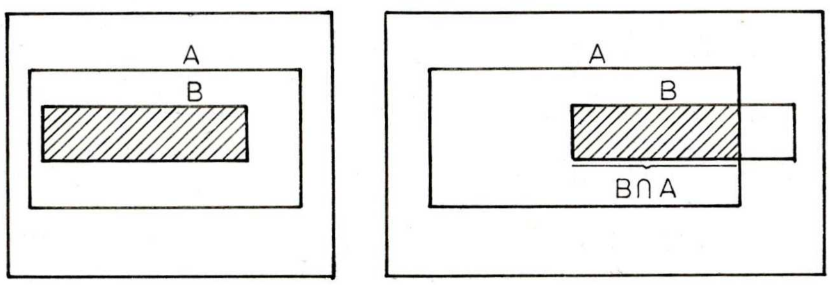
relációk segitségével rangsoroljuk. (Tulajdonképpen kétváltozós reláció-fogalmak.) (iii) A kvantitativ (metrikus) fogalmak a metrikusan mérhető, számszerüen jellemezhető fogalmak.
Carnap szerint minden fogalom átmegy e három stációból álló "fejlődési" folyamaton. Ez a gondolat általában nyilván nem igaz. Egyetértünk Hársing Lászlóval, aki a "J.M. Keynes valószinüségi logikája" c. tanulmányában birálja az explikáció elméletet. [47,246] A konfirmáció fogalma is ilyen fejlődésen esett át, irja Carnap. Erről a következőket olvashatjuk: (i) A konfirmáció klasszifikatórikus koncepciója: A H hipotézist alátámasztja az E evidencia.
(ii) A konfirmáció komparativ koncepciója: H-t az E legalább ugy alátámasztja, mint H'-t az E'.
(iii) A konfirmáció kvantitativ koncepciója: H-t az E r mértékben támasztja alá. 5,163

Kétségtelen, hogy a valószinüségi logika fejlődését ténylegesen ez a folyamat jellemzi, még akkor is, ha mind a mai napig nem született igazán jó kifejtése se (ii)-re, se (iii)-re. Nem tartozik vizsgálatunk tárgyához, de megjegyezzük, hogy ennek feltehetően mélyebb, a tudomány funkcionálásának módjában rejlő okai vannak, és nem pusztán az apparátus tökéletlenségében vagy a rossz megközelitésben kell keresnünk a hibát. Ennyiben feltehetőleg helyes irányu Popper később érintendő indukció-kritikája.

A valószinüségi logikák kiépitésére vonatkozó klasszikusnak nevezhető elképzelések - szükségszerüen hiányos és leegyszerüsitett - ismertetése után nézzünk meg röviden néhány, a valószinüségi logikákkal kapcsolatos elvi kérdést.

1. Milyen értelemben tekinthetjük a valószinüségi logikákat a hagyományos deduktiv logikák általánositásának? 2.2 végén emlitettük, hogy Keynes és Carnap a deduktiv logikát az induktiv logika speciális eseteként értelmezi. Carnap a maga valószinüségi logikáját sokáig induktiv logikának tartotta.

Carnap a következőképpen szemlélteti a két logika viszonyát. [5,297]




'B implikálja A -t' azt jelenti, hogy B terjedelme teljes egészében benne van A terjedelmében.

'c A,B = $\frac{3}{4}$' azt jelenti, hogy B terjedelmének háromnegyed része van benne A terjedelmében.

2. ábra

(Az ábra jelöléseit és a feliratokat a lényeget nem érintő mértékben megváltoztattuk.)

2. Mennyiben logikai természetü a valószinüségi logika szemantikus elmélete? Annyiban, amennyiben a terjedelmek közötti viszonyok, melyeket ezzel az elmélettel vizsgálnak, nem függnek az állitások konkrét tartalmától. Egy állitás terjedelmét tisztán szemantikus szabályokkal határozzuk

meg, és ha ezek a szabályok adottak, akkor a terjedelmek közötti viszonyt a gyakorlatra történő bármiféle hivatkozás nélkül lehet vizsgálni. Egy logikai összefüggés a tartalomtól függetlenül helyes lehet. E tény értelmezése filozófiai álláspontoktól függően különbözhet. Szokásos marxista igényü magyarázata: A logikai helyesség természete az objektiv valóság sajátosságain alapul, ez utóbbi törvényszerüségei tükröződnek vissza a logikában. Polgári gondolkodók gyakran hivatkoznak a priori sajátosságokra vagy a konvencionalizmusra. Mivel a logikai jelleg specifikumának filozófiai vizsgálata nem célunk, a további diszkussziótól eltekintünk.

3. A valószinüségi logikák axiomatikus rendszerei megengednek-e az eddigiektől eltérő jellegü interpretációkat? A válasz természetesen igenlő. A legnagyobb gondot az jelenti, hogy éppen ezeknek a logikáknak az alapfogalma, a valószinüség értelmezhető sokféleképpen. Az ismert logikai értelmezéstől eltérően gyakran a kijelentések bizonyosságába vetett racionális hit mértékeként interpretálják a valószinüségi logika kalkulusban szereplő valószinüségfogalmat. A valószinüségi logikát érő kritikai megjegyzések egy nagy csoportja elsősorban az ilyen tipusu valószinüség-interpretációk ellen irányul. [47,243]
Ez a probléma átvezet bennünket a valószinüség szubjektivisztikus értelmezéséhez. A szubjektivisztikus valószinüség-felfogások főbb gondolatainak ismertetése során visszatérünk ehhez a kérdéshez.

4. Induktiv logika-e Carnap valószinüségi logikája? Még mielőtt érdemi választ adnánk erre a kérdésre, megjegyezzük, hogy Carnap logikájának általunk vázolt része tulságosan szegény. Gondot okozhat az, hogy csak egytagu predikátumokat enged meg, de méginkább az, hogy az univerzum véges. Megjegyezzük, hogy mindkét korlátozás ejthető; többargumentumu predikátumok és megszámlálhatóan végtelen univerzum esetén is fel lehet épiteni egy a leirthoz hasonló valószinüségi logikát. A megszámlálhatóan végtelen univerzumra épitett valószinüségi logikának egyik - mint látni fogjuk, az indukció szempontjából alapvető - sajátossága, hogy ha a c függvényt a $\lambda=\mu$ feltevéssel választjuk, akkor az u.n. univerzális előrejelzés konfirmáltsági foka 0. (Az univerzális előrejelzés azt jelenti, hogy a c(A,B) függvényben az A hipotézis egy univerzális állitás/pl. $\forall x\,(Cx \supset Dx)$ alaku/, a B evidencia pedig az az állitás, hogy $Cu \supset Du$ igaz egy megvizsgált minta minden egyes u elemére.) Ez éppen annyit jelent, hogy Carnap elméletében az univerzális hipotézisek nem értékelhetők, megbizhatóságuk növekedéséről az elmélet alapján semmit sem tudunk mondani.

A Carnap-féle valószinüségi logika tehát <u>nem</u> induktiv logika.

5. Ha nem induktiv logika, van-e valami praktikus haszna? Véleményünk szerint a c függvény értékének meghatározása adott A hipotézis és B evidencia alapján, segitségünkre lehet döntéshozásban. Ha ugyanis X személy tudja, hogy t időpontban c(A,B)=r, és B igaz, ugy - ha más információja nincs - akkor cselekszik racionálisan, ha A igazságára r mértékben számit. Ez a következtetés igy formalizálható:

$$\{c(A,B)=r, \quad B\} \vdash p(A)=r$$

Egyszerüen kimutatható, hogy ez a séma hibás. Csak $p(B)=1$ esetén lenne matematikailag szabatos. $p(B)=1$ azonban Carnap elméletében csak akkor teljesül, ha B logikai igazság. Ekkor azonban a konkluzió nem ad induktiv ismeretet. Mégis, annak ellenére, hogy a séma hibás, szöveges megfogalmazása utmutatást adhat döntéshez, bár egymagában nem elegendő a döntés megalapozásához, figyelembe kell venni más összefüggéseket is.

6. Egyáltalán lehetséges-e induktiv logika?

Ezt a kérdést jelentősége miatt a következő fejezetben vizsgáljuk.

## 2.4. Lehetséges-e induktiv logika?

> ...az indukció elve felesleges és szükségképpen logikai következetlenségekre vezet.
>
> K. Popper

A fejezet cimében szereplő kérdés a tudományelmélet egyik nagy problémája, melyre kielégitő válasz ma sem ismert. Egy későbbi könyvében ([6]) Carnap is elismeri, hogy univerzális induktiv logika nem létezik. "Az elméleti fogalmak uj rendszerének (és segitségükkel az elméletek) létrehozásakor nem lehet egyszerüen olyan mechanikus eljárást követni, amely rögzitett szabályokra támaszkodik." - irja [6,77] Később a következőket olvashatjuk: "Elismerem, hogy nem lehet létrehozni olyan induktiv gépet, mely uj elméleteket alkot. Mégis azt hiszem, hogy lényegesen szerényebb céllal lehet induktiv gépet épiteni. Ha adott valamilyen <u>e</u> megfigyelés és <u>h</u> hipotézis (mondjuk, előrejelzés vagy méginkább törvény formájában) akkor meggyőződésem, hogy sok esetben pusztán mechanikus eljárással meg lehet határozni a logikai valószinüséget, azaz <u>h</u> alátámasztásának fokát <u>e</u> alapján." [6,78]

Az induktiv logika legátfogóbb birálata K.Popper nevéhez füződik. Popper kritikája nem csupán az indukció Carnap féle felfogása ellen irányul, hanem az indukció <u>elve</u> ellen. Az indukció elve Popper szerint "olyan állitás lenne, melynek segitségével az induktiv következtetéseket logikailag elfogadható formába önthetnénk." [37,4]

A történeti és a logikai megkülönböztetése a tudományos tételek elemzésében látszólag már a Bécsi Kör tagjainál teljes. Popper szerint azonban az indukció hivei összekeverik a megismerés pszichológiáját és logikáját, aminek a megismerés pszichológiája és logikája egyaránt kárát látja. Az induktiv logika a megismerés logikája nem lehet, mert "minden felfedezésben található egy 'irracionális elem' vagy egy <u>bergsoni</u> értelemben vett 'kreativ intuició'". [37,7]

Popper ugy látja, hogy az indukció elve kisérlet az u.n. demarkációs probléma megoldására. A demarkációs probléma lényege a következő kérdés megválaszolása: Hogyan lehet különbséget tenni egyrészt az empirikus tudományok, másrészt a matematika és a logika, valamint a metafizikai rendszerek között? Popper rámutat, hogy Kanttól kezdve ez az ismeretelmélet központi problémája. [37,9] A Bécsi Kör tagjai - többkevesebb eltéréssel - a következőképpen képzelték el a demarkációs probléma megoldását:

Tudományosnak csak olyan állitásokat fogadtak el, melyek verifikálhatók, azaz tapasztalati állitásokra redukálhatók. E tapasztalati állitásokat hol protokoll mondatoknak, hol észlelési itéleteknek nevezték. Carnapék szerint a tapasztalati állitásoktól a tudományos állitások felé vezető ut az indukció. Az indukció végrehajtásának módját azonban a Bécsi Kör gondolkodói nem tudták megmutatni. A tudományos állitásokat éppugy nem sikerült visszavezetniük tapasztalati állitásokra, mint ahogy a metafizikai állitásokat. Ezt a helyzetet Popper igy irja le: "Eképpen ahelyett, hogy a metafizikát kiirtaná az empirikus tudományokból, a pozitivizmus oda vezet, hogy a metafizika betör a tudomány birodalmába." [37,11-12] Tehát, az induktivista demarkációs kritérium nemcsak kidolgozatlansága miatt nem tölti be funkcióját, hanem elvileg nem is lehet demarkációs kritérium. Popper egészen más demarkációs kritériumot javasol, amely véleményünk szerint önmagában szintén nem helytálló. Hely hiányában nem részletezzük Popper elméletét, a lényeges gondolatokat azonban röviden ismertetjük.

Popper szerint a tudományok fejlődésében nem az empirikus anyaggyüjtés, hanem a hipotézisek felállitása jelenti a kezdőpontot. Induktiv általánositás nincs. A hipotézisekből deduktiv uton vezetünk le olyan következtetéseket, melyek kisérletileg ellenőrizhetők. A kisérleti ellenőrzés eredményének függvényében vetjük el vagy erősitjük meg a hipotézist. Nos, amennyiben a tudomány tényleg igy funkcionál, akkor az induktiv logikának nincs helye a tudományok rendszerében.

Poppernél a demarkációs kritérium a falszifikálhatóság. "Javaslatom szerint az empirikus módszert az jellemzi, hogy minden elképzelhető módon falszifikációnak teszi ki az ellenőrizendő rendszert." [37,16] További részletezés az indukció lehetőségének vizsgálata szempontjából szükségtelen. Noha szerintünk a tudomány nem ugy funkcionál, ahogyan Popper elképzeli, kritikáját mégis sulyosnak és nagyjából találónak érezzük.

## 3. A valószinüség szubjektivisztikus elméletéről

Az "objektiv" és a "szubjektiv" szavak olyan filozófiai terminusok, amelyek használata ellentmondásos, következetlen és véget nem érő viták örökségével terhes.

K. Popper

### 3.1. Bevezető megjegyzések. A statisztikus és logikai valószinüség elégtelensége melletti érvek

A hazai tudományfilozófiai és részben - főleg a régebbi - matematikai szakirodalom szinte teljes egészében egyetért abban, hogy a valószinüség fogalmának bármiféle szubjektivisztikus megalapozására vagy értelmezésére való törekvés csupán tudománytörténeti szempontból jelentős, a valószinüségszámitás Kolmogorov-féle megalapozása kimutatta minden másfajta megközelités téves voltát. Valóban, a valószinüség elméletének fejlődését tekintve a különböző jellegü próbálkozások összemosódnak. Ugy tünhet, hogy az egész fejlődés kisebb-nagyobb zsákutcába tévedés után, feltartóztathatatlanul vezetett a csucshoz: a Kolmogorov nevével fémjelzett, nagyszerü matematikai diszciplinához, illetve a hozzá evidens módon kapcsolódó filozófiai jellegü interpretációhoz.

Lehetséges-e a valószinüség fogalmának olyan szubjektivisztikus értelmezése, amely egy marxista tudományelmélet talaján elfogadható? Erre a kérdésre nem tudunk kielégitő választ adni, vizsgálódásunk eredménye nem ad elég szilárd alapot e sulyos probléma megoldására. Annyi azonban rögtön világos, hogy ha lehetséges is, az nem állitható alternativaként a valószinüség objektivisztikus elmélete mellé. Nézzük meg röviden, hogyan vélekedik a szakirodalom a vázolt problémáról. Ha a hazai irodalmat nézzük, az egyébként is sajnálatosan szükös választékban a régebbieket - mint már emlitettük - a szubjektiv valószinüség fogalmának elvetése jellemzi, az ujabbak explicite nem foglalkoznak vele. Felvetődik azonban a valószinüségfogalom pluralisztikus jellegének gondolata. [47,244-245], [38,2o],[39,7o-72] A Szovjetunióban elég sokan foglalkoznak a valószinüség elméletének elvi kérdéseivel. Az egyik legismertebb és legalaposabb monográfia ([35]) elutasitja a valószinüség szubjektiv fogalmát; álláspontja általánosan elfogadottnak tekinthető. A nyugati irodalom meglehetősen sokszinü. Ennek oka elsősorban az, hogy az induktiv logika és egyáltalában a valószinüség problémája az 195o-es évektől a tudományfilozófia érdeklődésének fókuszába került. Hogy ennek a ténynek mi a pontos háttere, azzal most nem foglalkozunk. Az adott tárgyon belüli publikációk száma hihetetlenül nagy. A témával foglalkozó kutatók között olyan jelentős tudósok találhatók, mint I.Lakatos, A.Robinson, P.Suppes, J.Hintikka és még tovább folytathatnánk. Felfogásukat mindenképpen sokrétüség jellemzi. Ennek ellenére gondolataik összefüggése jól kimutatható; hivatkozásaik példamutatóan gyakoriak és pontosak. Adott terjedelemben álláspontjaik csak durva egyszerüsitésekkel mutathatók be.

A valószinüség Kolmogorov-féle matematikai elméletét mint matematikai diszciplinát elfogadják. Tulajdonképpen minden matematikai elméletet elfogadnak; a hasznosság szerintük nem kritérium. Részben ezzel magyarázható, hogy számunkra szokatlanul kis jelentőséget tulajdonitanak a Kolmogorov-féle elméletnek. Általában elfogadják ennek objektivisztikus interpretációját is, tudniillik a valószinüség az elméletben leirt módon történő gyakoriságon alapuló megközelitésének jogosságát. Csak a szubjektiv valószinüség értelmezésének lehetőségét ismeri el B. de Finetti, L.Lavage és még sokan mások.

Ezen a ponton természetes módon vetődik fel a kérdés: Vajon a valószinüség szubjektiv fogalmának az értelmezése egyöntetü-e? A válaszunk egyértelmüen nem, és a differenciák nemcsak a fogalom természetes fejlődéséből származnak.

A valószinüség szubjektivista felfogásának klasszikus formája tömöritve a következő. A valószinüség a hitünk mértéke valamely esemény bekövetkeztére vonatkozólag és számszerüen

$$P(C) = \frac{a}{b+a} \text{ ,}$$

ha a összeget tennénk b ellenében, arra fogadván, hogy C bekövetkezik. Ha csak ennyit követelünk meg a valószinüség fogalmától, az nyilvánvalóan sok nehézséget okoz. Amennyiben egy esemény valószinüsége az illető esemény bekövetkeztében való várakozásunknak a mértéke, akkor ugyanazon esemény bekövetkeztére minden egyes embernek más és más valószinüségi itélete lehet. (A várakozás mértéke helyett gyakran beszélnek a racionális hit fokáról is.) A gondot az okozza, hogy bekerül egy pszichológiai elem, amely teljesen ellenőrizhetetlen. Egy másik megközelités szerint a valószinüség annyiban szubjektiv, amennyiben az a kiszámitást végrehajtó személy ismereteitől függ. Már Laplace-nak és Jevonsnak is hasonló elképzelése volt. Jevons szerint amennyiben egy esemény bekövetkezésének körülményeiről semmit nem tudunk, annak valószinüségét $\frac{1}{2}$ -nek kell tekinteni. [26,29]

Laplace-nál hasonló, de bonyolultabb példát találunk. [26,3o-31]

Világos, hogy itt nem a valóságban, hanem a szubjektum tudásában meglévő szimmetria tükröződik.

Felvethetjük, hogy vajon a valószinüség ilyen értelmezése nem logikai természetü-e? Valóban, nem mindig könnyü különbséget tenni a valószinüség-terminus logikai és szubjektiv értelmezése között.

Azt mondhatjuk, hogy a 6o-as évek második feléig a különböző szubjektivisztikus valószinüség-elméletek a levegőben lógtak; nem volt elméleti, még kevésbé gyakorlati alkalmazásuk. Ez a helyzet müvelőiket nem tulzottan keseritette el, de bármennyire is igyekeznek egyes logikusok és matematikusok a hasznossági szempontokat figyelmen kivül hagyni, hosszu távon még a polgári gondolkodók sem építgethetnek légvárakat. A 6o-as évek második felében, még inkább 197o körül ugy érezhettük, hogy a szubjektiv valószinüség kérdése holtpontra jutott; nincs esély előrelépésre. Ekkor azonban már alakultak a feltételek a továbblépéshez. Az idevágó kutatásokat a legteljesebb homály fedte, és nem is véletlenül. Ugyanis a szubjektiv valószinüség elméletének első és jelentős alkalmazása - katonai alkalmazás volt. Két szoros összekapcsolódó diszciplináról, a játékelméletről és a döntéselméletről van szó. Természetesen ezek az elméletek - különösen a játékelmélet - egyre inkább jól kezelhető, egzakt matematikai formát öltenek. A valószinüség szubjektiv fogalma nem direkt módon ezekben a matematikai rendszerekben szerepel, hanem az alkalmazhatóságukhoz szükséges modellek létrehozásához vagyunk kénytelenek a sokat vitatott fogalmat felhasználni. (Erről ld. pl. [46]) Nézzük meg most egy eléggé általános érvelést a szubjektiv valószinüség mellett. L. Savage három érvet hoz fel. [44,4]

(i) Bármilyen objektivisztikus nézet alapján a valószinüségek csak ismétlődő eseményekre alkalmazhatók. Objektivisztikus nézet alapján vagy értelmetlen beszélni annak valószinüségéről, hogy egy adott állitás igaz, vagy ez a valószinüség csak 1 vagy 0 lehet, attól függően, hogy az állitás valójában igaz vagy hamis.

(ii) Az előző alapján világos, hogy egy objektivisztikus valószinüség nem lehet egy állitásba vetett bizalom mértéke. Azaz, objektivisztikus nézet alapján nem mondhatjuk azt, hogy egy állitás igaz egy bizonyos valószinüséggel.

(iii) Ha az embernek választani kell több lehetséges cselekvés között, akkor az objektiv valószinüség alapján nem lehetséges kiszámitani, hogy a cselekvések közül melyik a legigéretesebb, azaz, melyiknek van a legnagyobb várt haszna.

Nos, ugy véljük, Savage mindhárom állitásában van némi igazság. Az azonban kérdéses, érvnek tekinthetők-e a szubjektiv valószinüség mellett; az objektiv valószinüség

elleni irányulásuk nem feltünő, bár kimutatható.
A legtöbb marxista tudós szerint az (i) alatti állitás helytálló, de csupán annyit jelent, hogy az egyszeri, azonos körülmények között többször meg nem ismételhető eseményeknél nem lehet valószinüségről beszélni, sőt, ezek nem képezhetik tudományos vizsgálat tárgyát. [4o,41]
Ez utóbbit tul erős kijelentésnek tartjuk. A carnapi valószinüségi logika elemzésekor elmondottak alapján (ii) megállapitása számunkra nem teljesen meggyőző. Nem látjuk be, miért lenne elvileg lehetetlen egy c(A,B) konfirmáció függvény statisztikus megalapozása. (iii) megállapitásával nem érthetünk egyet, mert az a játékelmélet elvetését jelentené. Azt a kérdést azonban nyitva hagyjuk, hogy van-e a játékelmélet mellett a szubjektiv valószinüségen alapuló döntéselméletnek létjogosultsága.

## 3.2. A szubjektiv és a logikai valószinüség-fogalom elkülönitéséről

### A szubjektiv valószinüség és a pszichologizmus

A bevezetőben emlitettük, hogy az egyes valószinüség-értelmezések között átfedések lehetségesek. J.M. Keynes 2.2-ben vázolt valószinüség-felfogása jól mutatja a szubjektiv és a logikai valószinüség-felfogás érintkezési pontját. Keynes szerint "A 'biztos' és a 'valószinü' fogalmak valamely kijelentésről alkotott racionális hitünk azon különböző fokait irják le, amelyek elfogadására a (már megszerzett) ismeretek különböző szintjei jogositanak fel bennünket. Minden kijelentés igaz vagy hamis, de a róluk alkotott ismereteink körülményeinktől függnek. Gyakran elégséges arról beszélni, hogy a kijelentések biztosak vagy valószinüek. Ezek pontosan a kijelentéseknek a tényleges vagy lehetséges ismereteink egészéhez való viszonyát fejezik ki, és a kijelentéseknek önmagukban nem jellemzőjük. Valamely kijelentés e viszonyának a foka ugyanakkor olyan mértékben változhat attól függően, milyen ismeretekhez viszonyitjuk, hogy értelmetlen egy kijelentést valószinünek neveznünk anélkül, hogy meg ne jelölnénk azt az ismeretet, amelyhez viszonyitjuk. Ilyen fokban tehát a valószinüség <u>szubjektivnek</u> nevezhető." Idézi: Hársing [47,242-243] (Kiemelés tőlem. H.F.)

Vannak olyan gondolkodók, akik szigoruan szét akarják választani a valószinüségi logikát és a szubjektiv valószinüség elméletét. Vagy a valószinüségi logikát kivánják megszabaditani a szubjektivisztikus elemektől (pl. Keynes birálói közül E.Kaila [47,243]) vagy a szubjektiv valószinüség-elméletet pszichologizálja. (Pl. Kyburg és Smokler [27,1o].) Az első törekvés jogossága alig vitatható, a második nem szerencsés. Célszerü az egyes tudományos törekvések közötti különbségtétel, de csak egy bizonyos határig. Nézzük meg például, hogyan különbözteti meg a logikai probabilitás fogalmát a szubjektivisztikus valószinüség-felfogástól Kyburg és Smokler.

Ha adott egy S állitás és egy E evidenciatest, akkor a valószinüségi logika feltevése szerint létezik egy és csak egy valós p szám ugy, hogy S valószinüsége E-re vonatkozóan p. A szubjektivisztikus nézet szerint a valószinüség egy viszonyt reprezentál egy állitás és egy evidenciatest között, de ez nem tisztán logikai reláció. A hozzáfüzött numerikus érték a hit fokát reprezentálja. A szubjektivisztikus nézet szerint ez az érték nem egyedülálló módon determinált. Egy adott állitásnak bármely valószinüsége lehet 0 és 1 között az adott evidencia alapján,az adott személy hitétől függően. [27,5-6] Igy áll elő az a számunkra kétségtelenül furcsa helyzet, hogy a pszichikus elemektől való szabadulás helyett határozottan az individuumok eltérő viselkedésére épitenek. A későbbiekben persze ugy tünik, hogy ezt a szándékukat nem veszik nagyon komolyan a szubjektiv probabilitás képviselői és általában némileg más alapra épitkeznek. Ennek oka az, hogy nem térhetnek ki két - egyébként kapcsolódó - kérdés megválaszolása elől. Először: A valószinüség empirikus pszichológiai fogalom-e vagy valami más? Másodszor: Ha a valószinüség szubjektiv fogalom, akkor lehet-e racionális, és ha igen, milyen értelemben? Kyburg és Smokler véleménye szerint a valószinüség szubjektivisztikus elmélete nem empirikus pszichológiai elmélet. Bruno de Finetti szerint a szubjektiv valószinüség fogalmát egy félreértett kisérletsorozat miatt értelmezték empirikus pszichológiai elméletként. E kisérletek során azt vizsgálták, hogy az emberek hitfokozatai megfelelnek-e az elmélet hitfokozatainak. Ebben a kisérletben azonban nem az elméletet, hanem az embereket vizsgálták. Nem azt akarták megtudni, hogy az elmélet pontosan birja-e az emberek viselkedését, hanem azt, hogy az emberek racionálisak-e ezen elmélet előirásai szerint. [27,6] Ezután azt kellene megvizsgálnunk, milyen - a szubjektivisztikus önkényen tulmutató - racionális elemei vannak a probabilitás szubjektiv elméletének. Valamennyi ilyen tipusu teóriának van egy közös eleme, amely bizonyos mértékig logikaivá is teszi ezeket az elméleteket. Arról van szó, hogy a viszonyban álló állitásokban a hit fokozatainak csak bizonyos kombinációi megengedhetők. Ha egy személy S állitásban p mértékben bizik, akkor S tagadásában 1-p mértékben kell biznia. Ezt a "kell"-t a szubjektiv valószinüség képviselői a következőképpen magyarázzák. Ha valakinek a hitfokozatai S-ben és S tagadásában nem rendelkeznek ezzel az előirt viszonnyal, akkor lehetséges lenne fogadásokat kötni valaki ellen olyan módon, hogy valaki köteles veszíteni tekintet nélkül arra, hogy S igaz volt-e vagy hamis. Például, ezen elmélet szerint azt mondani, hogy S valószinüsége $\frac{1}{4}$ egy bizonyos A személy számára, annyit jelent, hogy A hajlandó 3-at tenni 1 ellen arra nézve, hogy nem igaz S. A feltétlen veszteséget hozó fogadás két fogadásból állna: az esély 1:3 S ellen, és

1:3 S tagadása ellen. Nyilvánvaló, hogy A fogadó-partnere 2 egységet vesztene akkor is, ha S igaz, és akkor is, ha S nem igaz.

További jelentős, a szubjektiv valószinüségre vonatkozó megszoritást jelentenek a koherencia és konzisztencia követelményei. Egy adott, szubjektivisztikus itéletet alkotó személy nemcsak egy itéletet hoz létre, hanem itéletek összefüggő rendszerét. Ez utóbbit a szakirodalomban az egyén hittestének nevezik. A hitfokok elosztása a hittesten belül nem lehet önkényes. A <u>koherencia</u> annak megkövetelését jelenti, hogy a hittest egyes itéleteibe vetett bizalomnak arányai feleljenek meg a hittestben található itéletek közötti viszonyoknak. A megfelelés konkrét formáját és szabályait mindig egy valószinüségi kalkulus rögzíti. Minden kalkulusban közös a következő szabály: Ha az evidencia logikailag maga után vonja az E itélet igazságát, akkor E itéletnek a hit legmagasabb fokával kell birnia. Amennyiben az evidencia E tagadását vonja maga után, akkor az E itélet igazságába vetett hitünk csak a legalacsonyabb hitfokozat lehet. Ezen utóbbi kritériumot szokás a <u>konzisztencia</u> követelményeinek nevezni.

A koherencia és konzisztencia megkövetelése elég szük határt szab a szubjektivisztikus önkénynek; merőben logikai jelentőségü korlátozások. Annyiban azonban szubjektiv, hogy a személy bármely hitfokkal birhat bármely állitásban, ha egyébként a többi hitfok ezzel összhangban van az adott három követelmény szerint. Ezzel szemben a valószinüség gyakorisági és logikai felfogása szerint egy adott esemény illetve állitás valószinüségének a foka egyértelmüen meghatározott. [27,6-7] Hamarosan látni fogjuk, hogy pl. Carnap a koherencia és a konzisztencia fogalmát nem ebben az értelemben használja.

## 3.3. A szubjektiv valószinüség és a valószinüségi logika összefüggése

### 3.3.1. R. Carnap a valószinüség-fogalmak összefüggéséről

Az előzőekben már emlitettük a döntéselmélet, a szubjektiv valószinüségelmélet és a valószinüségi logika összefüggésének kérdését. E probléma általános vizsgálata ilyen keretek között nem oldható meg. Ugy gondoljuk viszont, hogy a három diszciplina összefüggéseit jól érzékelteti Carnap [8] -ban kifejtett felfogása. Carnap e nézeteit főbb vonalaiban sokan elfogadják, bár aligha van csak egy logikus is, aki teljesen egyetértene vele. A valószinüség-fogalmak fejlődésére vonatkozó felfogása kétségtelenül érdekes és néhány szempontból elfogadhatónak tünik.

Térjünk rá most az "Inductive Logic and Rational Decisions" cimü [8] Carnap tanulmány idevágó gondolatainak ismertetésére. (E tanulmány kézirata Carnap halála előtti évben készült el.) Ebben a rövid, de az induktiv logika lényegét és méginkább megalapozását nagyon jól megvilágitó tanulmányban a valószinüségi logika a megismerés folyamatának egy magasszintü produktumaként szerepel. E fejlődés formája itt nem a fogalmak explikációja, hanem a szubjektiv vagy heurisztikus megközelités felől az egzakt, ezért önmagában (legalábbis formális matematikai rendszerként) mindenképpen helytálló elmélet felé vezet az ut. Megemlitjük, hogy ez szerencsés eljárás. Csodát persze nem eredményez, ti. a valószinüségi logika problémáit ez sem oldja meg. Megkönnyiti természetes interpretáció fellelését, de ezen tulmenően nem tudunk kimutatni más lényeges pozitivumot. Most azonban nézzük meg közelebbről ezt az érdekes és gazdag gondolatsort, melynek követése végett meg kell ismerkednünk a szubjektiv valószinüség elmélete és a döntéselmélet alapgondolataival is. (A szubjektiv valószinüségen alapuló döntéselméletről részletesebben [27] és [46] alapján tájékozódhatunk.)

Tekintsük át először a döntéshozás szokásos sémáját. X személynek T időpontban választania kell $A_1$, $A_2$,... lehetséges cselekvések között. A választás körülményeiről a következőket tételezzük fel: X tudja, hogy a valóságnak a döntés számára releváns állapotai T időben $W_1$, $W_2$,... . X nem tudja, hogy melyik a tényleges állapot. Azzal a feltételezéssel élünk, hogy a lehetséges cselekvések és a lehetséges állapotok száma véges. X tudja, hogy ha az $A_m$ lehetséges cselekvést választaná, és a dolgok állapota $W_n$ lenne, akkor cselekedetének eredménye $O_{m,n}$ lenne. Ezt az $O_{m,n}$-et egyedül $A_m$ és $W_n$ határozza meg, és X ismeri ezt az összefüggést. Feltételezzük még, hogy adott X számára egy $U_x$ hasznossági függvény, mely az $O_{m,n}$ értékeken (tehát a lehetséges kimeneteleken) értelmezett, és X ki tudja számitani értékét bármely $O_{m,n}$ esetén. Ennek alapján az $A_m$ lehetséges cselekvés szubjektiv értékét X számára T időben a következő kifejezés értékével mérhetjük:

$$V_{X,T}(A_m) = \sum_n \left[ U_x(O_{m,n})\, P(W_n) \right], \qquad 3.3.(1)$$

ahol $P(W_n)$ a $W_n$ állapot valószinüsége és az összegezés valamennyi $W_n$ állapotra történik. (Megjegyezzük, hogy itt annyiban van szó szubjektiv értékről, amennyiben a lehetséges állapotokon értelmezett P függvény szubjektiv jellegü, azaz meghatározásakor nagymértékben önkényesen járunk el.)

A várható érték szokásos definiciójának ismeretében világos, hogy 3.3 (1) éppen az $A_m$ cselekvés várt hasznossága X számára. A várt hasznosság amennyiben várt, annyiban nyilván a priori. Ha a $W_n$ valószinüséget befolyásolná az, hogy éppen az $A_m$ aktust hajtottuk végre (ami nagyon is elképzelhető), akkor a $P(W_n \mid A_m)$ valószinüséget kellene venni $P(W_n)$ helyett. A döntéshozás bayesi szabálya a következő kézenfekvő követelményt támasztja: Ugy választunk egy lehetséges cselekvést, hogy az maximálja a V értéket. E követelmény két elvvel támasztható alá:

(i) A döntéseket rendszerint ugy hozzuk, hogy a választott döntésnek maximumértéke van.

(ii) Egy racionális döntés olyan cselekvés választásában áll, melynek maximumértéke van.

Az (i) elv egy pszichológiai törvény (már amennyiben egyáltalán törvény). A leiró döntéselméletbe tartozik, ami a pszichológia része. (ii) viszont a normativ döntéselméletbe tartozik, amely racionális követelményeket fogalmaz meg a döntésekkel szemben. Az itt szereplő P valószinüség jellegéről később részletesen beszélünk. Egyelőre pontosabb jellemzés nélkül csak annyit, hogy P szubjektiv valószinüség-fogalom. Ennek Carnap szerint két fajtája lehet. Az egyik a hit tényleges fokát reprezentálja, a másik a hit racionális fokát. Tehát: X tényleges hitfoka pszichológiai fogalom. Ettől különbözhet a racionális hit foka. Annak alapján, hogy a döntés meghozásakor a tényleges hitfokot vagy a racionális hitfokot vesszük alapul, beszélhetünk tényleges vagy racionális döntésről. A tényleges hit Carnap szerint a bizonytalanság állapotában lévő személyek viselkedésének kutatása alapján rögzithető, pl. viselkedés fogadásokkal vagy szerencsejátékokkal kapcsolatban. Erre a pszichológiai fogalomra használja a <u>hit</u> terminust.

Itt térünk ki néhány terminológiai megjegyzésre. Az angol nyelvben a hit, hihetőség, bizalom stb. terminusok használata pontosabb, mint a magyarban. Csak a legfőbb eltérésekről: A vallásos hit külön nevet visel: "faith". Ez nagyban csökkenti a félreértéseket. A szubjektiv hitet (tehát egy egyénnek valamilyen esemény bekövetkeztébe vagy állitás igazságába vetett hitét) a "credence" terminussal nevezik meg. Filozófiai, logikai szövegekben rendszerint "hit"-nek forditják, ennél még az egyébként szokásos köznapi forditás ("bizalom") is jobb lenne. A "credibility" terminus a racionális hit mértékét jelöli, itt a "hihetőség" nem rossz forditás, de a magyar nyelvben a "bizalom" és a "hihetőség" szavak között nincs meg az a különbség, ami az itt leirt értelemben a "credence" és a "credibility" között megállapitható.

T időben X személynek H állitásba vetett hitét $Cr_{X,T}(H)$-val jelölhetjük. Ha X és Y különböző személyek, akkor általában $Cr_{X,T}(H) \neq Cr_{Y,T}(H)$, és ha $T_1 \neq T_2$, akkor általában $Cr_{X_1,T_1}(H) \neq Cr_{X_1,T_2}(H)$.

A hit itteni definicióját használva 3.2 (1) értékdefiniciót a következő alakban irhatjuk:

$$V_{X,T}(A_m) = \sum_n \left[ U_x(O_{m,n}) \; P(W_n) \right],$$

(Szokásos módon értelmezhető a feltételes hit is:

$$Cr_{X,T}(H \mid E) = \frac{Cr_{X,T}(E \cap H)}{Cr_{X,T}(E)}$$

föltéve, hogy $Cr_{X,T}(E) > 0.$)

Amennyiben a Cr függvény alapján hozunk döntést (minden egyéb feltétel nélkül) akkor tényleges döntésről beszélhetünk, a fenti értelemben. A tényleges döntések értelme a fogadási arányon keresztül világitható meg.

Egy fogadás a következőképpen zajlik le. X befizet a fogadóirodába a összeget, partnere, Y, b összeget fizet be. Egyetértenek abban, hogy ha H teljesül, X kapja a+b-t, ha H nem teljesül, Y kapja a+b-t, azaz a teljes összeget. Az, hogy X személy T időpontban belemegy-e a fogadásba, nyilván a $Cr_{X,T}(H)$ függvénytől függ. Számára akkor éri meg fogadni, ha $Cr_{X,T}(H) > q \left(= \frac{a}{a+b}\right)$-nél. (Ez éppen az az eset, amikor X azt hiszi, hogy nyereségének várható értéke nagyobb 0-nál.) Ilyen alapon $Cr_{X,T}(H)$ felfogható a legmagasabb fogadási aránynak, amivel X még hajlandó fogadni. Cr tehát kapcsolatban van a fogadásokkal. Nyilvánvaló, hogy az olyan Cr függvényt, mely alkalmazásával feltétlen veszteséget hozó fogadást köthetünk, nem célszerü elfogadni hitfüggvénynek. Cr konstrukciójának pl. ki kell zárni a következő fogadásrendszer megkötésének lehetőségét: A személy fogadása két részből áll: a) 1:3-hoz, ha H igaz b) 1:3-hoz, ha H nem igaz. Az eredmény: Ha H igaz, A nyer két egységet, ha H nem igaz, A nyer két egységet. Azaz, A fogadó partnere mindenképpen veszit; számára ez nem kivánatos fogadás. Carnap a fenti értelemben nemkivánatosnak minősithető fogadások kizárásához szükséges követelményt nevezi a konzisztencia követelményének. A konzisztenciát a $Cr_{X,T}(H) = 1 - Cr_{X,T}(\overline{H})$ feltétel teljesülése biztositja. (Ld. erről pl. [27,6], [22,719].)

A deskriptiv döntéselméletről a normativ döntéselméletre való áttérést Carnap nem annyira a normativ döntéselmélet immanens értékeiért tartja célszerünek, mivel annak módszertani státusza szerinte is problematikus, hanem azért, mert ez az összekötő kapocs a leiró döntéselmélet és az induktiv logika között. [8,13]

Az előbbi fogadásokkal kapcsolatos megjegyzések alapján érthető az első racionalitás-követelmény (R1). Megfogalmazásához szükség van a következő <u>definicióra:</u>
Egy Cr függvény akkor és csak akkor <u>koherens,</u> ha nincs olyan Cr-rel összhangban lévő fogadási rendszer, mely tiszta veszteséghez vezet minden lehetséges esetben.
Ennek alapján az első racionalitás-követelmény:
R1: Ahhoz, hogy Cr racionális legyen, a Cr függvénynek koherensnek kell lennie.

Bruno de Finetti 1931-ben bebizonyitotta, hogy egy Cr függvény akkor és csak akkor koherens, ha Cr valószinüségi mérték. Ennél általában többet, ti. Cr szigoru koherenciáját követelik meg. Cr <u>szigoruan koherens</u> akkor és csak akkor, ha Cr koherens, és nincs olyan fogadási rendszer, mely Cr-rel összhangban van, ugy, hogy az eredmény tiszta veszteség legalább egy lehetséges esetben, de olyan sincs, mely mindig nyereséget hoz. Ennek alapján fogalmazható meg a másik racionalitási követelmény:
R2: Ahhoz, hogy a hitfüggvény <u>racionális</u> legyen, szigoruan koherensnek kell lennie.

Definiáljuk ezután a reguláris hitfüggvényt.
Egy Cr függvény akkor és csak akkor __reguláris,__ ha Cr egy valószinüségi mérték és H atomi állitásra $Cr(H) = 0$ csak akkor teljesül, ha H lehetetlen.

Az eddig vizsgált hitfüggvények időtől függetlenek. Figyelembe kell azonban venni, hogy az idő folyamán a hitfüggvény változhat. R1 és R2 követelmények időtől függetlenek, a további követelmények kimondásakor viszont az uj ismeretek valószinüséget módositó hatására is tekintettel vannak. Jelöljük X hitfüggvényét a $T_n$ időpontban $Cr_n$-nel, $T_{n+1}$ időpontban $Cr_{n+1}$-gyel. Az E állitás reprezentálja az X által kapott megfigyelési adatokat a két időpont között.
A harmadik követelmény a következőképpen fogalmazható meg:
R3: $Cr_{n+1}$ csak $Cr_n$-től és E-től függ, éspedig az alábbi módon:
Bármely H állitásra teljesül a

$$Cr_{n+1}(H) = \frac{Cr_n(E \cap H)}{Cr_n(E)}$$

összefüggés. $Cr'_n$ definicióját felhasználva: $Cr_{n+1}(H) = Cr'_n(H \mid E)$. Jelöljük $Cr_i$-vel $(i=1,2,\ldots,n)$ X személyes valószinüségét $E_i$ állitás alapján a $T_i$ időpontban. Tételezzük fel, hogy már az első adat (állitás) ismerete előtt rendelkeztünk valamilyen kezdő hitfüggvénnyel.
Jelöljük ezt a kezdeti hitfüggvényt $Cr_o$-val. Legyen $K_n = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$. Megmutatható, hogy $Cr_n(H) = Cr'_o(H \mid K_n)$, ahol $Cr'_o$ a $Cr_o$-n alapuló feltételes hitfüggvény. A $Cr'_o$ feltételes kezdeti hitfüggvényt __hihetőség függvény__-nek nevezik és "Cred"-del jelölik.

Felmerülhet a kérdés: miért használnak két jelölést ugyanarra a függvényre? Ennek oka az, hogy a Cred függvénnyel szemben támasztott követelményeket Carnap szerint természetes módon enyhithetjük, igy a Cred függvény különbözhet $Cr_0$-tól. Vizsgálódásunk szempontjából ennek konkrét formája érdektelen; a továbbiakban a Cred függvény már ebben a módositott értelemben szerepel. Cred$(H|A)$ jelenti X H-ba vetett hitét A tetszőleges állitás figyelembevételével a T időpontban. Az enyhités lényege heurisztikusan ugy irható le, hogy a Cred függvényt már ugy tekintjük, mint ami valamely adatsorozat eredményeként jött létre. Ha X tényleges megfigyelésen alapuló tudása a T időpontban $K_{X,T}$, akkor bármely H állitásra:

$$Cr_{X,T}(H) = Cred_X(H \mid K_{X,T}),$$

a definició szerint. Nyilvánvaló, hogy a döntéshozáshoz szükséges $V_{X,T}(A_m)$ függvényben Cr függvényt helyettesithetjük a Cred függvénnyel.

Megjegyezzük, hogy a Cr függvény és a Cred függvény Carnap által vélt eltérése elég gyengén indokolt. Carnap a következőket irja: "Mig $Cr_{X,T}$ jellemzi X állapotát T időpontban a hitére való vonatkozásban, az ő $Cred_X$ függvénye az ő mélyenfekvő, permanens intellektuális karakterének jellemvonása, nevezetesen az ő folytonos diszpoziciója hit képzésére a megfigyelései alapján." [8,19] Továbbá, a Cred függvény a hitfüggvényből fejlődik ki. A fogalmak fejlődését általában az jellemzi, hogy az empirikustól a kevésbé empirikus felé fejlődnek. A hitfüggvény fejlődésének jellemzője egy ehhez hasonló belső pszichikus fejlődés a pillanatnyi hajlamtól az állandó állapot felé. Ezek a fejtegetések aligha mutatnak ki reális különbséget a Cr és a Cred függvények között. Egymásra kölcsönösen visszavezethetők, viszonyuk leginkább a feltételnélküli és a feltételes valószinüség viszonyára hasonlit. Ennél sokkal lényegesebb az a kérdés, hogy mi szükség van a $Cr_0$ függvényre (vagy a Cred függvényre)? Carnap válasza: az R4 racionalitás-követelmény alátámasztásához szükséges.

R4: Legyen $a_i$ és $a_j$ két individuum. Legyen H és H' két állitás ugy, hogy H' H-ból jöjjön létre azáltal, hogy $a_i$ helyett $a_j$-t veszünk és forditva. Akkor $Cr_0(H) = Cr_0(H')$.

E követelmény - mint láttuk - szükséges a Carnap-féle valószinüségi logika kiépitéséhez. R4 az 1. szimmetria-feltétel speciális esete. "H-nak és H'-nek pontosan ugyanaz a logikai formája, csak abban különböznek, hogy referenciájuk két különböző individuumra irányul. Előfordulhat, hogy ezek az individuumok egészen különbözők. De különbözőségük nem ismert a $T_0$ időben, igy semmilyen befolyásuk nem lehet H és H' $Cr_0$ értékeire" - érvel Carnap. [8,23] Ugy vélem, itt saját szavaival fogalmazza meg a hiányzó alap sokat vitatott elvét. (A hiányzó alap elvének kritikáját ld. pl. Hársing [47,249-251].) Maga Carnap is bevallja, hogy éppen erről van szó. A hiányzó alap elvét eredeti, Laplace-nál szereplő formájában tul erősnek véli, de az elv alapgondolatát helytállónak tartja. [8,27] Világos tehát, hogy $Cr_0$ bevezetése az R4 szimmetria-követelmény kimondásához volt szükséges.

Most már csak egy lépés választ el bennünket a valószinüségi logikától, de a talaj már nagyon ingatag. E hátralévő lépést nem érheti lényegi birálat, az eddigiekben ismertetett megalapozás helyessége viszont nagyon vitatható.

A valószinüségi logika kiépitésében Carnap a racionális $Cr_0$ és a racionális Cred függvényre épit. $Cr_0$-nak $\mathcal{M}$-mel jelölt függvényt feleltet meg, melyet mértek függvénynek nevez. A Cred-nek megfelelő logikai függvényt a $\mathcal{C}$ szimbólummal jelöli, és $\mathcal{C}$-függvénynek vagy konfirmációs függvénynek hivja. $\mathcal{C}(H \mid E)$ tehát jelenti H konfirmációjának fokát E-re vonatkozóan. $\mathcal{M}$-et és $\mathcal{C}$-t tisztán logikai uton, matematikai eszközök felhasználásával definiálják, a valószinüségi logika axiómái tisztán logikailag megfogalmazottak. Az axiómák választására vonatkozó okok viszont nem logikaiak, azt tartják szem előtt, hogy az $\mathcal{M}$ függvények ténylegesen feleljenek meg a $Cr_0$ függvényeknek és a $\mathcal{C}$ függvények a Cred függvénynek.

Ezzel tulajdonképpen vázlatosan áttekintettük az idős Carnap felfogását a valószinüség kérdéséről. Jól látható, hogy bonyolult, alaposan kimunkált elméletről van szó, amelynek gyakran eléggé meglepő belső elemeit a lehető legnagyobb mértékben megpróbálja ellentmondástalanná és összefüggővé tenni. A már emlitett összetettség, valamint az egység, az összefüggés kimutatására szolgáló eszközök és több fundamentális feltételezés vitatható volta kétségtelenül nehézkessé teszi a problémakör tárgyalását, ennek ellenére fel kell figyelnünk arra a törekvésre, amely a valószinüségi logikát mint természetes általánositások eredményeként adódó logikát kivánja bemutatni. Ennyiben következetesen ragaszkodik a valószinüségi logika megteremtésének régi elvéhez.

Lényeges, hogy az általánositás alapja nem a deduktiv logika, hanem a szubjektiv valószinüség fogalmán alapuló döntéselmélet. Sajnos Carnapnak, e kitünő logikusnak az erőfeszitéseit - mint láttuk - nem koronázta igazi siker.

### 3.3.2. Carnap ismertetett gondolatainak értékelése

Carnap a valószinüség fogalmát a tényleges illetve a racionális emberi viselkedés szabályai általánositásaként közelitette meg. A köznapi szóhasználatban a racionális és a logikus általában felcserélhető. Ebben az esetben aligha. A "logikus" érvelést szokásosan ugy értelmezhetjük, mint a logika szabályainak megfelelő érvelést. Döntéshozáskor azonban figyelembe vesznek egy olyan szempontot, mely semmiképpen nem logikai: A maximális haszonra törekvés posztulátumát.

Kérdéses lehet, hogy jogos-e racionálisnak tekinteni a maximális haszonra törekvést. Véleményünk szerint ez is egy elfogadható szempont lehet. Annál is inkább, mert a ráció (ratio) szó jelentéséről a következőket találjuk Hobbes-nál: "A latinban a pénzbeli elszámolásokat rationesnek nevezik, magát a számadást pedig rationationak és azt, amit a számlákban és a könyvekben mi tételeknek hivunk, a latinok nominának, vagyis neveknek hivták. És aztán ugy látszik, a ratio szó értelmét minden más okoskodásra is kiterjesztették." [17,33]

Ugy tünik tehát, hogy Carnap valószinüségi logikája tényleg általánositás, de nem a kétértékü, deduktiv logika általánositása, hanem a nem egzakt, szubjektiv valószinüségfogalomé, mely ténylegesen közel áll állitások elfogadásának ill. elvetésének és az ezen alapuló cselekvésnek, tehát döntésnek a problémájához. Világos, hogy Carnap ismertetett időskori felfogása szerint a konfirmáció függvény elsősorban nem arra alkalmas, hogy segitségével indukciót alapozzunk meg, hanem arra, hogy a megismert $c(H|E)$ valószinüséget döntéshozásban alkalmazzuk.

Mi a viszonya a hagyományos, kétértékü logikához? Semmi esetre sem annak általánositása, a fentebb emlitett okok miatt. Nem tartalmazza speciális esetként a kétértékü logikát, de támaszkodik a kétértékü logikára. Elfogadja a dichotómia elvét és felhasználja a predikátumlogikát.

Az lehetne a következő kérdésünk, hogy a valószinüség ilyen felfogása mennyiben felel meg a leibnizi elképzelés szellemének?

Véleményünk szerint a Carnap-féle valószinüségi logika a leibnizi terv szellemében fogant. Ezen állitásunk mellett három érvet hozunk fel.

Először: Carnap szerint a valószinüségi logika a racionális emberi magatartásra épül, és igy természetes kiegészitője a logikus magatartásnak. A valószinüségi logika Leibniz felfogása szerint is a logika kiegészitője. [9,25o]

Másodszor: E racionális kiegészités tartalmazza a hasznosság figyelembevételét. "A véletlenen muló haszon reményeit vagy sikerét ennek a haszonnak és elérései valószinüsége nagyságának szorzatával kell mérni, tekintve, hogy a reménykedés egyszerre és külön arányos a haszon nagyságával és valószinüségével." [9,247] Bár a fogalmazás formálisan csak a várható érték egy speciális esetre való formulázásának tünhet (a hasznosság esetére), a kontextus figyelembevételével nyilvánvaló, hogy Leibniz szerint az emberi cselekvések egyik mércéje általában a hasznosság lehet. A $V_{X,T}$ hasznosság függvény és a haszon nagyságán alapuló döntés figyelembevétele egyértelmüen a leibnizi gondolat megvalósitása.

Harmadszor: Leibniz szerint a hipotézisek valószinüségének fokát kell becsülni. Ezt a következő, érdekes és fontos, de eléggé elfelejtett érveléssel támasztja alá: "...az analizis ... az okozatoknak az okokra történő vagyis következményeknek az alapelvekre vagy a megfigyelt jelenségeknek a hipotetikus törvényekre történő visszavezetésében áll. Márpedig tudjuk, hogy ez a regresszió a forditottja a direkt deduktiv rendszernek, ez csak valószinü, akkor, amikor visszatérés nincs. Ekkor fel kell becsülni az igy felállitott hipotézis valószinüségi fokát és pontosan ez a valószinüségek inverz számitásának rendeltetése, amely annak felbecsülésében áll, amelyet olyan okok valószinüségének hivnak, amelyek egy a tapasztalat által adott és ismert okozatot képesek létrehozni." [9,273] (Kiemelés tőlem. H.F.)

Semmit sem változtat a helyzeten, hogy a carnapi valószinüségelmélet az idézetben szereplő értelemben vett hipotézisek valószinüségének meghatározására nem alkalmas.

További megjegyzések:

Amennyiben Carnap célja a valószinüség-fogalom kibontakozásának elemzésével részben a valószinüségi logika interpretációjának megalapozása, a "fejlődési folyamat" leirását pozitivnak tekinthetjük. A valószinüségi logika felől nézve azonban ugyanez a szubjektiv valószinüség melletti érvelést jelenti.

Kétségtelen, hogy Carnap közeledik a szubjektiv valószinüség hiveinek álláspontjához. Ez abban mutatkozik meg, hogy a szubjektiv valószinüséget a valószinüség egyik olyan tipusának tekinti, mely kvantitative megragadható. Igy tovább bővül az eredeti $vszg_1$-ből és $vszg_2$-ből álló összesség. A következőket irja: "... ez a logikai elmélet a valószinüségnek csak az absztrakt, formális aspektusaival foglalkozik, és a (személyes) valószinüség teljes jelentését a döntéselmélet szélesebb kontextusában érthetjük csak meg, a valószinüség és a hasznosság illetve racionális cselekvés közötti kapcsolatokon keresztül." [8,26] Véleménye szerint az objektiv (statisztikus) valószinüség a szubjektiv valószinüség speciális esete. A döntéselmélet ismertetésében a következőket olvashatjuk: "... abban a speciális esetben, amikor X ismeri a statisztikai valószinüségeket a $W_1$ releváns állapotaira vonatkozóan, de nem tudja, hogy melyik a tényleges állapot, a döntéselv használhatná ezeket a valószinüségeket. ...És nincs ez ellentétben avval a nézettel, hogy a döntéselvnek a személyes valószinüségre kellene vonatkoznia, mivel a speciális helyzetben a személyes valószinüség X számára egyenlő lenne a statisztikai valószinüséggel." [8,9]

Ugy véljük, hogy a carnapi valószinüség-felfogás sokoldaluságának, szinességének valamint Carnapnak – a logika és az emberi magatartás viszonyáról alkotott érdekes (bár egyáltalán nem kifogástalan) elképzelésének ismerete hozzájárulhat a valószinüség-fogalom körül duló viták termékenyebb folytatásához.

## 3.4. A szubjektiv valószinüség-felfogás kritikájához

Nem állitjuk, hogy a valószinüségnek egy szubjektivisztikus felfogása eleve csak értelmetlen és értéktelen lehet. Ennek ellenére egész sor olyan ellenvetést tehetünk a szubjektiv valószinüség-értelmezésekkel szemben, melyek valamennyi általunk ismert szubjektiv valószinüségelméletre vonatkoznak.

Az objektivisztikus elméletek ellen felhozott érveik filozófiailag nem helytállók. Mint láttuk, a legtöbb esetben az egyedi, nem ismétlődő eseményekre hivatkozva vetik el egy objektivisztikus valószinüségelmélet lehetőségét. Savage idézett megfogalmazása például implicite arra mutat, hogy események ismétlődésének a lehetőségét nem ismeri el. Ha ugyanis nem igy lenne, akkor az objektivisztikus értelmezés lehetőségét a valóság egy területén el kellene ismernie. Ugy véljük, hogy kiindulópontjuk nem teljesen hibás, ti. tényleg nincs két egyforma esemény. Ugyanakkor azonban az is igaz, hogy minden esemény több olyan eseményosztálynak is eleme, mely osztályokat éppen az elemeikben meglévő <u>közös vonások</u> kapcsolnak össze osztállyá. (Erről 1.4-ben már beszéltünk.) Ez olyan tény, melyet minden marxista beállitottságu filozófus elismer. A szokásos ellenérv polgári oldalról az, hogy az első egy ontológiai megközelités, a második esetben azonban ismeretelméleti megközelitést alkalmazunk, hiszen az öszszes tényező helyett csupán néhányat (a statisztikai alkalmazásokban mindig véges sokat) veszünk figyelembe.

Ilyen megközelités esetén tehát nem a valóságra, hanem annak egy modelljére hivatkozunk. Ez azonban nem igaz, hiszen a közös sajátosságok megléte ugyanugy objektiv természetü, mint a differenciák megléte. Az eddigiekben figyelembevett szempontok alapján egyenrangunak kellene tekintenünk a jelenségekben meglévő közös vonásokon alapuló megismerési módszereket a különbségeken alapuló módszerekkel. Ugy vélem, alaposabb tudományelméleti hivatkozások nélkül kijelenthetjük, hogy a dolgokban, jelenségekben meglévő közös vonások adják a megismerés alapját általában. Ezt még akkor is leszögezhetjük, ha Rényi már idézett megállapitását (az egyedi jelenségek tudományos vizsgálat tárgyát nem képezhetik) ujra bizonyitandónak tekintjük. Az abszolut egyedi események létezésének állitását egyébként több polgári gondolkodó is - igy pl. K.Popper - elutasitja. [3o,19-2o]

Vajon milyen filozófiai felfogást takar az objektiv valószinüség leirt szellemben történő elvetése? Többről van szó, mint a jelenségek két oldalából az egyiknek a kiemelése. Emögött nyilvánvalóan - ki nem mondottan - a törvények objektivitásának tagadása áll. Ugyanakkor - gondoljunk de Finettire - az emberi gondolkodásban meglévő "szabályosságot" nem tagadják. Suppes, de Finetti és Savage filozófiai müveltségét valamelyest ismerve, biztosak lehetünk abban, hogy filozófiai felfogásuk ilyen interpretálása ellen tiltakoznának. Egy dolog azonban egy filozófiai felfogást magunkénak vallani, és egy másik, hogy konkrét tevékedésünk milyen filozófiai koncepció megvalósulásaként fogható fel. Ugy véljük, hogy ismertetett megközelitésünk, ha durva is, de a lényeget illetően közel áll az igazsághoz.

Fontosnak tartjuk felhivni a figyelmet arra, hogy az emlitett szerzők feltehetőleg elvetik a tükrözéselméletet. Ahol a koherenciaelméletre hivatkoznak, ott ez teljesen egyértelmünek tünik, hiszen az igazság koherenciaelmélete az igazság korrespondencia elméletével szembenáll. (Ld. erről [45] releváns részeit.) A helyzet azonban bonyolultabb, ugyanis a matematikai állitások analitikusak, az emlitett igazságelméletek hatásköre nem terjed ki rájuk, különleges státuszuk van az állitások között. Pusztán a koherencia követelményének felállitása egy matematikai diszciplina megalapozásában tehát nem jelenti a tükrözéselmélet elvetését. Az viszont már elgondolkodtató, hogy a szubjektiv valószinüség elméletének megalapozásában sehol nem találunk egyetlen olyan elemet sem, amely a tapasztalatra, a gyakorlatra hivatkozás lenne, amely - a szokásos és általunk is helyesnek tartott marxista értelmezés szerint - végső soron az elméletek kielégitő megalapozottságának kritériumát jelenthetné. Természetesen tudunk olyan kisérletsorozatokról, melyek a szubjektiv valószinüség megmérésére irányultak. Pl. Suppes [46,89] -ben leirja, hogy Davidoon az 5o-es évek első felében végzett ilyen kisérleteket. Mint 3.2 -ben emlitettük, az ilyen kisérletsorozatra természetes reakció volt a pszichologizmus vádja a szubjektiv valószinüség elméletével szemben. Láttuk, hogy de Finetti ezt a vádat szellemesen visszautasitotta. A csapdából kimászva azonban másik csapdába esett. Nagyon nehéz megmondani, mi teszi tudományossá elméleteiket, ha nem törvény fellelése és alkalmazása áll mögötte. (Még ha pszichológiai is !) Kiutként a <u>racionalitásra</u> hivatkoznak. A szubjektiv valószinüségelmélet tudományos, mert racionális - mondják. Mit értenek racionalitás alatt? Nagyon eltérő szempontokra hivatkoznak. Ilyen például az a követelmény, hogy ha egy egyén egy S állitásban p mértékben bizik, akkor tagadásában 1-p mértékben kell biznia. Egy más jellegü követelmény a maximális várható nyereségre törekvés.

Ezekből - az általunk megfelelő helyen tárgyalt - érvekből még nem látható közvetlenül, mennyire eklektikusak a szubjektiv valószinüség elméletei. Nézzük meg azonban azt, mit mondanak a szubjektiv valószinüségen alapuló döntéselmélet felhasználásáról. A feltétel: Hasonló szituációban hasonló eredményre vezessen. [46,88] Mégis vannak tehát hasonló szituációk, vagy másként fogalmazva van hasonlóság a szituációkban? Ugy véljük, itt ellentmondásról van szó. A hasonló szituációk létezésének elismerése és a jelenségek abszolut egyediségére vonatkozó elgondolás a dialektikus materializmus talaján bajosan illeszthető össze. E két állitásban a pozitivisztikus szemlélet mutatkozik meg. Mig szerintük a valóságban az azonosságnak, ismétlődésnek, törvénynek stb. semmi alapja nincs, az ember számára a szituációkban megjelennek hasonló vonások, ezek azonban nem az objektiv valóságból származnak, igy csak a szubjektivumból származhatnak. Ezek szerint a racionalitás-követelmények csak a szubjektummal szembeni és nem a szubjektum-objektum viszonyra vonatkozó elvárásokat fogalmaznak meg.

Ilyen megközelitésben az adekvátság és a materiális interpretáció amely a felhasználhatóság alapját jelenti kérdése fel sem vethető! Ilyen filozófiai talajról itélve nyilván nincs ellentmondás a törvények objektiv létének tagadása, a jelenségek abszolut egyediségének és a szituációk közötti hasonlóság létezésének egyidejü állitása között; a maguk módján tehát következetesek.

Eddigi gondolatainkból következik-e az, hogy a szubjektiv valószinüség-elmélet használhatatlan, értelmetlen? Semmiképpen. Megalapozása azonban elfogadhatatlan, továbbá semmiféle olyan gyakorlati vagy egyéb felhasználást eddig nem tudott felmutatni, mellyel az objektivisztikus valószinüségelmélet ne rendelkezne. Az elmondottak értelmében egyébként a szó igazi értelmében vett gyakorlati alkalmazást elvileg nem mutathat föl, mert ez filozófiai koncepciójukba ellentmondástalanul nem illeszthető be.

Elmondhatjuk, hogy a speciális szubjektiv valószinüségelméletek szinte teljesen improduktivak. Ez látszólag ellentmond annak, amit a szubjektiv valószinüségelmélet katonai alkalmazásáról emlitettünk. Az emlitett alkalmazások általunk ismert része valóban szubjektive becsült valószinüségeket használ fel. Miután a becsült valószinüségek rendelkezésre állnak, utána axiomatikus matematikai eljárással végzik el a szükséges számitásokat. A szóban forgó axiomatizált elméleteknek azonban lehetséges (ténylegesen van is) objektivisztikus interpretációja. Ami tehát szubjektivisztikus, az egy a priori valószinüségeloszlás posztulálása.[6] Ha ehhez adna valamilyen megalapozott módszert a valószinüség szubjektivisztikus elmélete, akkor létjogosultságát bebizonyithatná. Suppes azonban maga is beismeri, hogy ez eddig nem sikerült, a szubjektiv valószinüségelméletek nem azt valósitják meg, amit kellene, "...amit egy racionális ember akar, az azon a priori eloszlás kiválasztásának módszere, amely a legjobban használja fel az ő a priori információját. A jelen elmélet vagy Savage-é kevés segitséget nyujt e ponton." - irja. [46,1o2] Igaza van, és ehhez csak annyit teszünk hozzá, hogy mások szubjektiv valószinüségi elméletei se nyujtanak több segitséget az optimális a priori eloszlás kiválasztásában.

A szubjektiv valószinüség elméletének utóbb ismertetett felfogása nem mond ellent a valószinüség objektivisztikus értelmezésének. A valószinüség szubjektivisztikus értelmezésének hivei ennek ellenére különböző mértékben, de birálják a valószinüség objektiv jellegü megközelitését. Ennek oka szerintünk a valószinüség szubjektivisztikus felfogását megalapozó, e területen mind a mai napig klasszikus forrásnak számitó Hume hatása. Hume filozófiájának rövid ismertetésére a 4. részben keritünk sort.

Összegezve elmondhatjuk, hogy a valószinüség szubjektivisztikus elmélete a mai formájában semmi pozitivumot nem tud felmutatni, de nem tartjuk kizártnak, hogy ötletes fejlesztése valami értékes eredményhez vezessen. Egy ilyen lehetséges továbbfejlesztésben azonban nem nagyon bizhatunk, mert ezt a torz filozófiai alapkoncepció erősen gátolhatja. Az a kérdés, hogy a meglévő szubjektiv valószinüségi kalkulusoknak adható-e a marxista tudományelmélet talajáról elfogadható interpretációja, további elmélyült vizsgálatot igényel. <u>Feltételezésünk</u> szerint interpretálhatók, de nem hoznak uj eredményeket.

Sajnálatos tény, hogy a logika és a matematika funkciójára vonatkozó - Arisztotelésznél már meglévő - természetes felfogásnak a mai polgári tudományelméletben vajmi kevés nyomát találhatjuk. A logika és a matematika <u>végső soron</u> organ, eszköz. Egy ilyen megközelités persze nem oldaná meg automatikusan a dolgozatban felvetett problémákat, de a vizsgálódások egy hasznos szempontja lehetne.

## 4. A szubjektiv valószinüségelméletek filozófiai alapjairól

> Egyetlen ut vezet csak a tudományos tisztánlátáshoz, a (tudomány) történeti tanulmányok!
>
> E. Mach

### 4.1. Bevezetés

A szubjektiv valószinüségelméletek - mint már említettük - meglehetősen heterogének. Ma, amikor a szubjektiv valószinüségelméletek önálló matematikai diszciplinát alkotnak, könnyen megeshet, hogy a fától nem látjuk az erdőt, azaz nem ismerjük föl azt a filozófiai alapot, melyre ezek az elméletek támaszkodnak. A valószinüség teljes szubjektivizálásának igénye nem XX. századi ötlet. A szubjektiv valószinüség-felfogás ősatyjának általában David Hume-ot tekintik, és ez valóban igy is van. A pozitivisztikus attitüd feltételezését eddig csupán néhány egyszerü érvvel támasztottuk alá, ezek közül is több formális, ti. személyekre történő hivatkozás. Tartalmi szempontból a törvények létezésének megkérdőjelezése az eddig kimutatott legsulyosabb momentum, ami a szubjektiv valószinüségelméletek pozitivisztikus indittatását mutatja. A továbbiakban mélyebb érveket is felhozunk.

Megkiséreljük kimutatni, hogy a valószinüségelméletek nem objektivisztikus részének XX. századi kétirányu fejlődését a Bécsi Kör filozófiája bomlásának két iránya jelöli ki.

Igy a logikai- és szubjektiv valószinüség közötti eltérések származásának okával együtt a kettő közötti összefüggés is érthető lesz, és az is, hogy miért éppen Carnap keresi - és részben meg is találja - a két valószinüségtipus közötti összefüggést.

## 4.2. Hume filozófiájáról

Csupán egyetlen dobókocka fölött kell elmélkednünk, hogy felfogjuk az emberi értelem egyik legérdekesebb müködését.

D.Hume

Az előzőekben többször is felvetődött az a kérdés, hogy a valószinüség szubjektiv és objektiv értelmezései kizárják-e egymást. E kérdésre adandó válasz nyilván az egyes valószinüség-tipusok értelmezésétől függ, ezek viszont filozófiai koncepciók függvényei.

Azoknak a filozófusoknak és matematikusoknak a munkáiban, akik csak a szubjektiv valószinüség létezését ismerik el, általában több-kevesebb vizsgálódással fellelhetők Hume gondolatai. Gyakran ugy hivatkoznak filozófiájára, mint bázisbölcseletükre. (Ld. pl. [14,78-92]) Hume filozófiájában valóban elutasitja a valószinüség objektivisztikus felfogását. Utóbbi állitásunk igazolása végett emlékeztetünk Hume-közismert szkeptikussága ellenére is ragyogó - bölcseletének néhány elemére.

Hume szerint egyedül az emberi szubjektum létezésében lehetünk biztosak. "A modern kutatók részéről általánosan elismert dolog, hogy a tárgyak összes érzékelhető tulajdonsága, tehát kemény, lágy, meleg, hideg, fehér, fekete stb. voltuk csak másodlagos: e tulajdonságok nem magukban a tárgyakban léteznek, hanem csupán az elme képzetei, minden külső őstipus vagy minta nélkül, amelyet képviselnének." [19/a,238]

Most szükségtelen vizsgálnunk, hogy ez az állitás Hume filozófiájában preszuppozició-e, vagy levezetett.[7] Számunkra csak az eredmény érdekes, hiszen az idézett gondolat eleve kizárja a valószinüség objektivisztikus értelmezését. Leibniz másoknak cimzett kritikájától[8] előre félve, Hume megpróbálja a valószinüség fogalmát részletesen elemezni. Értekezése ([18], a továbbiakban ezen fejezeten belül: "Értekezés") I. könyvének III. része három szakaszában foglalkozik a valószinüséggel. Fejtegetéseiben található néhány zavaró momentum. Láthatóan nem tudja teljesen a szubjektum keretein belül tárgyalni a valószinüség problémáját.

A külvilág létezésének kérdése Hume-nál a következőképpen vetődik fel: "Hogy érzéki képzeteinket hozzájuk hasonló külső tárgyak hozzák-e létre, ez ténykérdés, de hogyan döntsük el ezt a kérdést? Nyilvánvalóan a tapasztalat alapján, mint minden más, hasonló jellegü kérdést. Itt azonban a tapasztalat néma, s annak is kell lennie. Az elmének csak képzetei lehetnek, s a képzeteknek a tárgyakkal való kapcsolatáról nem lehet semmiféle tapasztalata. E kapcsolat feltételezésének tehát nincs semmilyen ésszerü alapja." [19/a, 236-237] A szükségszerüség és az okság egészen sajátos, az előbb idézett alapgondolatokkal összecsengő értelmezést kap. "Az ok és az okozat közti szükségszerü kapcsolaton alapul, ha az egyikről a másikra következtetünk. Következtetésünk alapja a megszokott egyesülésből származó gondolati átmenet. Tehát a szükségszerü kapcsolat és a gondolati átmenet valójában egy és ugyanaz.

A szükségszerüség ideája valamilyen benyomásból ered. Érzékeink révén nem kapunk olyan benyomást, mely efféle ideát támaszthatna bennünk. Tehát valamilyen belső benyomásból, a reflexió valamilyen benyomásából kell a szükségszerüség ideájának származnia. Belső benyomásaink között pedig csak egyet lehet találni, amelyik valahogyan is összefügg a szóban forgó jelenséggel, ez pedig az a bizonyos hajlam - amely a megszokás folytán alakul ki bennünk -, hogy az egyik tárgyról gondolatban szokásos kisérőjének ideájára térjünk át. Ebben áll tehát a szükségszerüség lényege." [18,233] Hume szavaival összefoglalva: "A lélekben találjuk meg az okok valóságos erejét csakugy, mint kapcsolatukat és szükségszerü voltukat." [18,234] Nyilvánvaló, hogy ilyen megközelités alapján nem csak a természettörvények létezését nem lehet elismerni, de az egész szubjektumon kivüli világ létezése kérdéssé válik. Igy aztán az egyes események bekövetkezésére semmiképpen nem tudunk következtetni. "... megfigyelés és tapasztalat segitsége nélkül hiába is próbálunk bármilyen egyedi történést meghatározni, bármilyen okra vagy okozatra következtetni." [19,47] [9] Hume azonban mintha tenne egy kivételt. Aligha vonható ugyanis kétségbe, hogy egy feldobott kocka - néhány egyszerü feltétel teljesülése esetén - leesik. "... el kell ismernünk, hogy vannak bizonyos okok, amelyek meghatározzák, hogy a feldobott kocka leesik, hogy esés közben nem változtatja meg alakját, és hogy leesvén valamelyik oldalán állapodik meg, különben nem végezhetünk számitásokat az eshetőségek törvényeit illetően " - irja. [18, 184] Itt kétségtelenül megmutatkozik Hume gondolatmenetének gyengesége.

Nem ez az egyetlen hely, ahol ugy tünik, hogy a nagy terjedelem a preciz, koherens tárgyalásmód rovására ment.

Példaként egy logikai pontatlanságot említek. Az Értekezés 182. oldalán a következőt írja: "A valószinüség vagy találgatásból való következtetés megint csak kétféle lehet, az egyik eshetőségeken alapul, a másik okokból származik. Rendre megvizsgáljuk mind a kettőt." [18,182] Az általa végrehajtott vizsgálat eredménye azonban azt mutatja, hogy a valószinüség az eshetőségekből és az okokból származik, nem pedig az eshetőségekből vagy az okokból.[10] [18,187]

Reméljük, sikerült megmutatnunk Hume filozófiájának azon pontjait, melyek kizárják egy ovjektivisztikus valószinüségértelmezés lehetőségét. Ugy véljük, hogy a fejezetünk mottójának választott sorok is jól mutatják, szubjektiv-e vagy objektiv a valószinüség Hume szerint. Mielőtt rátérnénk filozófusunk pozitiv eredményeinek ismertetésére, két megjegyzést szeretnénk tenni. Először is, felhivjuk a figyelmet arra a tényre, hogy a szubjektiv valószinüség általunk lehetségesnek tartott értelmezési módja nem mond ellent a valószinüség objektivisztikus értelmezésének. Másodszor, feltehetően már Hume tisztában volt a szubjektiv valószinüség-felfogásnak azzal a nagy hátrányával, hogy annak alapján rendkivül nehéz numerikus valószinüségeket bevezetni. Ezt látszik alátámasztani az, hogy a hosszadalmas fejtegetésekben csak egyszer esik szó a valószinüség numerikus jellemzésének lehetőségéről. (Ezt a részt fentebb idéztük is. [18,184])

Hume természetesen több igaz megállapitást is tett a valószinüség természetéről. Mindenekelőtt rendkivül tisztán látta a valószinüség terminus hétköznapi használatának formáit. Elemzése a mai napig a "valószinüség" kategória természetes pragmatikájának legrészletesebb leirása. Világosan látja, hogy a beszélt nyelvben a valószinüség csak egy modalitás, mely a lehetséges és a szükségszerü között helyezkedik el. [18,198]

Feltételezi a valószinüségek összehasonlithatóságát. Ennek alapja szerinte az, hogy az egyes elemi események azonos valószinüség-egységekből épülnek fel, legfeljebb számuk térhet el.[11] [18,183]

A véletlenről a következőket irja: "... a filozófusok körében köztudott, hogy amit a köznép véletlennek nevez, az valójában ismeretlen és rejtett ok csupán." [18,189] A véletlen ilyen megközelitése még ma is gyakran fölbukkan, marxista igényü matematikusok között is. Ezen általában azt értik, hogy az okok ismeretének hiánya kontingencia forrása, s ez valóban igy is van.

Felismerte, hogy "nincs olyan nagy valószinüség, mely kizárná a vele ellenkező lehetőségek fönnállását, hiszen különben nem valószinüség, hanem bizonyosság volna." [18,196]

Az okok valószinüségét vizsgáló szakaszban dialektikus gondolatcsirákat találhatunk. Pl.: "... tüzetesen megvizsgálván a dolgokat, mindig azt találják, hogy az okozatok ellentétes volta ellentétes, egymás hatását akadályozó és egymással összeütköző okok jelenlétéről árulkodik." [18,191]

Végül megjegyezzük, hogy vázlatunkban szándékosan csak egyszer hivatkoztunk Hume ismertebb munkájára, a "Tanulmány az emberi értelemről" c. könyvre. Ez utóbbi ugyan kétségtelenül világosabb és mentes az explicit logikai hibáktól, ugyanakkor viszont közel sem olyan gondolatgazdag és részletes, mint az "Értekezés". Igaz, hogy Hume az "Értekezés"-t

megtagadta, de csak mint iró, és nem mint filozófus.
[19/b, Figyelmeztetés]

## 4.3. A Bécsi Kör szerepe a valószinüségelméletek fejlődésében

Ebben a fejezetben azt kivánjuk megvizsgálni, hogy milyen összefüggés mutatható ki a Bécsi Kör filozófiája és a valószinüségi logika, valamint a szubjektiv valószinüségelméletek között. Az eddigiek alapján is nyilvánvaló szoros kapcsolatot most elsősorban történetiségében kiséreljük meg elemezni.[12]

### 4.3.1. A verifikáció problémája

A Bécsi Kör által alapvetőnek tekintett egyik filozófiai probléma tudásunk megalapozottságának kérdése. Schlick ismert, az "Erkenntnis" hasábjain megjelent cikkében a következőket irja: "Az a belátás, hogy a mindennapi élet és a tudomány kijelentései végső soron csak valószinüségi érvényre tarthatnak igényt, hogy még a legáltalánosabb, minden tapasztalat által igazolt kutatási eredmények is csak hipotézis-jellegüek, ez a belátás Descartes óta, de kisebb mértékben már az ókortól kezdve ujra és ujra arra ösztökélte a filozófusokat, hogy egy olyan megrendithetetlen alapot keressenek, amelyet nem illethet semmiféle kétely, amely olyan szilárd talaj, amire tudásunk ingadozó épülete alapozható." [1,26o]

A tudomány épülete a "határozott empirizmus"[13] szerint a protokoll-tételeken nyugszik, melyek a Bécsi Kör gondolkodóinak egybehangzó véleménye szerint közvetlenül tények konstatálását kifejező itéletek. Abban már nem értenek egyet, hogy a protokolltételek logikailag vagy történetileg állnak a megismerés kezdetén. Schlick szerint ez nem jelent lényeges eltérést, a két felfogás összeegyeztethető egymással. [1,264]

Ezt ugy érthetjük, hogy a protokolltételek (azaz, olyan állitások, melyek az egyszerü megfigyelési adatokat regisztrálják) történetileg is és logikailag is a megismerés alapját jelentik. Tehát, e tételekből jönnének létre fokozatosan a tudomány többi tételei. Figyelembe véve, hogy a protokolltételek mindig szingulárisak, mig a tudományok tételei mindig univerzális állitásokat tartalmaznak, igy a tudomány tételeihez <u>indukció</u> utján jutnánk el. [1,277]

Persze, a tudomány Schlickék szerint nem az igy felfogott protokolltételekre épül. Hiszen bármilyen egyszerü tényt regisztrálunk is, a tény jelentése csak a konstatálás pillanatában biztos, utána akár leirjuk, akár emlékezetben tároljuk, megbizhatósága kétséges. Amennyiben tehát tudományos tételeink a protokolltételekre épülnek, annyiban hipotézisek. E hipotézisek azonban alátámaszthatók, éspedig a <u>verifikáció</u> során.
"A tudomány próféciákat tesz, amelyeket a "tapasztalattal" ellenőrzünk. A tudomány lényeges funkciója a jóslás." Schlick, [1,278-279] Számunkra most az az érdekes, hogy a Bécsi Kör tagjainak felfogása szerint a megfigyelési állitások alapján indukció segitségével hipotézisekhez jutunk. Miért szükséges és hogyan történik a tapasztalati ellenőrzés?
"A konstatálásokra semmiféle logikailag tartható épületet nem lehet emelni, mert már abban a pillanatban el is tüntek, amint az ember épiteni kezd. Ezért, ha időben a megismerési folyamat elején állnak, semmire sem használhatók logikailag. De egészen más a helyzet, ha a megismerési folyamat végén vannak: a konstatálások lesznek a verifikáció (vagy a falszifikáció) befejezései, és fellépésük pillanatában már be is töltötték kötelességüket. Semmi sem kapcsolódik hozzájuk logikailag, nem lehet semmiféle következtetést levonni belőlük, abszolut befejezést, végpontot képeznek." [1,279]
Fontosnak tartjuk felhivni a figyelmet arra, hogy a falszifikáció nem teljesen mellőzött tényező Schlicknél, ahogyan Popper kritikája alapján gondolhatnánk.

Az eddig elmondottaknak látszólag semmi köze a valószinüség problémájához. Az ismertetett gondolatok azonban elvezetnek a <u>konfirmáció</u> fogalmához.

## 4.3.2. Áttérés a teljes verifikációról a konfirmációra

Poppernek a verifikációra irányuló kritikája nem hullott terméketlen talajra. 1935-ben jelent meg a "Logik der Forschung", 1936-ban Carnap válasza, az "Ellenőrizhetőség és jelentés" (Testability and Meaning)[14].

"Ha verifikáción az igazság végleges és egyértelmü megállapitását értjük, akkor egy univerzális mondat, pl. egy ugynevezett fizikai vagy biológiai törvény, sohasem verifikálható. ... Nem tudjuk verifikálni a törvényt, de tudjuk ellenőrizni egyes eseteinek - vagyis a törvényből és más, már megalapozott mondatokból levezetett partikuláris mondatoknak - az ellenőrzésén keresztül. Ha az ellenőrző kisérletek folytatólagos sorozatában egyetlen negativ esetet sem találunk, akkor a pozitiv esetek szaporodásával lépésről lépésre növekedni fog a törvénybe vetett bizalmunk. Ezért verifikáció helyett itt inkább a törvény fokozatosan növekvő <u>konfirmációjáról</u> beszélhetünk." [1,384]
Carnap idézett mondatai nem igényelnek magyarázatot. A kérdés most már csak az, hogyan kapcsolódik a valószinüség fogalma a konfirmációhoz. Carnap 1936-ban még nem tartja valószinünek, hogy egy állitásnak másik állitással való alátámasztottságának fokát kvantitative mérni lehetne. "Talán tanácsosabb csak topológiai fogalomként, azaz csak viszonyokon keresztül definiálni (ti. a konfirmációt - H.F.) - pl.:

"$S_1$ ugyanolyan vagy nagyobb mértékben van konfirmálva, mint $S_2$" - mégpedig oly módon, hogy a legtöbb mondatpár nem lesz egymással összehasonlitható." [1,387] Ez pontosan a valószinüségi logika Keynes-i koncepciója! Később, mint láttuk, éppen egy kvantitativ valószinüségi logika megvalósitását tüzi ki célul maga elé. Kételyének forrása elsősorban a Reichenbachot ért és általa is helyesnek tartott popperi kritika. Reichenbach szerint a hipotézis konfirmációjának fokát a valószinüség fokaként lehet interpretálni, aholis a valószinüség Mises-Reichenbach-féle gyakorisági értelmezéséről van szó. Popper szerint aligha lehet olyan hipotézissorozatot találni, melyre a gyakoriság fogalmát tudnánk alkalmazni. Valóban, ma sincs tudomásunk róla, hogy sikerült volna a konfirmáció mértékét gyakorisági alapon interpretálni. Carnap később a logikai valószinüségre támaszkodik a konfirmáció mértékének vizsgálatában. Ennek lehetőségét Carnap 1936-ban még nem láthatta. Azok a logikai eszközök, melyek lehetővé tették Carnap valószinüségi logikájának kiépitését, még éppen csak kialakulóban voltak.[15]

### 4.3.3. A "koherencia" fogalmának eredetéről

> Mivel egyetlen embernek sem jut eszébe egy mesekönyv állitásait igaznak, egy fizikai tankönyvéit pedig hamisnak tartani, a koherencia-tan teljesen elhibázott.
>
> M. Schlick

Ebben a pontban természetesen nem a koherencia szokásos, hanem a szubjektiv valószinüségelméletben használatos fogalmáról lesz szó. Mielőtt rátérnénk az érdemi tárgyalásra, rá kell mutatnunk Popper indukciókritikájának egy hiányosságára.

Popper keményen birálja a verifikáció elvét, közben azonban -- legalábbis látszólag -- nem vesz tudomást arról, hogy a verifikáció elve közvetlenül kapcsolódik egy jelentéselmélethez. Feltehető, hogy kritikája szempontjából ezt a jelentéselméletet irrelevánsnak tartja. Mi azonban a továbbiakban kénytelenek vagyunk érinteni a verifikációs módszer kérdését. A Bécsi Kör filozófiájában a verifikáció elvét természetesen egésziti ki a verifikációs módszer. Mig a verifikáció elve egy állitás értelmes vagy értelmetlen voltának eldöntésére alkalmas, a verifikációs elmélet azt mondja meg egy értelmes állitásról, hogy mi annak az értelme. Waismann szavaival: "Az állitás jelentése ... azonos verifikálásának módszerével." [49,229]

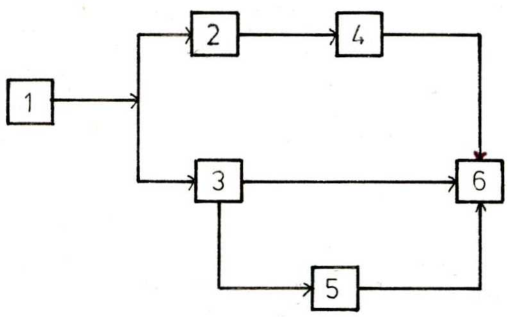
Schlick - reagálva Popper azon javaslatára, hogy a protokoll-tételeket célszerüségi alapon, konvenció szerint válasszuk - rámutat, hogy Popper gondolatai nem ujszerüek, azok az igazság koherencia elméletén (coherence theory of truth) alapulnak. Valóban, ha a tudomány valamennyi kijelentésének nem a protokolltételekhez, hanem az összes többi kijelentéshez kell igazodnia, akkor az igazság csak az állitások egymással való megegyezésében állhat. Schlick kiáll a korrespondencia elmélet mellett. Szerinte a koherencia megkövetelése kevés. Ha egy állitáshalmaz koherens, attól a benne lévő állitások még nem lesznek igazak. "A koherenciához még valami mást is hozzá kell venni, tudniillik azt az elvet, amelynek alapján elő kell állitani az összeegyeztethetőséget, és csak ez lenne a tulajdonképpeni kritérium." [1,27o] Schlick gondolatait nem részletezzük tovább, részletes kifejtése [1] -ben megtalálható. [1,266-27o]

Nem elemezzük tovább a koherenciaelméleteket, csupán azt kivántuk megmutatni, hogy nem néhány matematikusnál előforduló, saját elméletüket alátámasztani kivánó gondolatról, hanem egy határozottan filozófiai indittatásu és töltetü koncepcióról van szó.

### 4.3.4. Összegzés

Láttuk, hogy a verifikáció elvét különböző okok miatt módositani kellett. Az egyik ut a Carnap által követett (és Schlick által is helyeselt), amely a konfirmációs elmélethez vezetett, ami viszont Carnap valószinüségi logikájának kiindulópontja. A másik ut a koherenciaelmélet elfogadása. Erre hajlott Neurath és még számos - elsősorban angolszász nyelvterületen élő - filozófus.
A koherenciaelmélethez kapcsolódik a döntéselmélet. Az igy

kialakuló szakadékot kisérli meg áthidalni Carnap a 3.3-ban tárgyalt elemzései során. A Bécsi Kör valószinüségre vonatkozó nézeteinek fejlődését a 3. ábrán mutatjuk be.




1. A verifikáció elve
2. Konfirmációs elmélet
3. Koherenciaelmélet
4. Carnap valószinüségi logikája
5. Döntéselmélet
6. Carnap szintetizáló kisérlete

3. ábra

## 5. A valószinüség filozófiai és matematikai fogalmának kapcsolatáról

### 5.1. Filozófiai kategória-e a valószinüség?

Amennyiben a kérdést úgy fogalmazzuk át, hogy a valószinüség valami olyan kategória-e, mely a valóság mindhárom területén (a természet, a társadalom és a gondolkodás) fellelhető, akkor a válasz félrevezető lesz. Természetesen a valószinüségi és statisztikai törvények ugyanugy érvényesek emberek bizonyos populációira, mint a rádióaktiv bomlásra, ettől azonban még nem válik a valószinüség automatikusan filozófiai kategóriává. Ti. a valószinüségi törvények sokoldalu alkalmazhatóságának oka a matematikai modell[16] és a valóság viszonyának sajátosságaiban keresendő. Az, hogy a valószinüség mindhárom valóságszférában fellelhető, annak következménye, hogy a valószinüség általában populációk bizonyos tulajdonságait fejezi ki. Ez utóbbi tény egyuttal korlátokat is szab a valószinüség alkalmazásának, hiszen nem csak sokaságok ill. ismétlődő események léteznek. Világos tehát, hogy a valószinüség nem olyan értelemben általános, mint például a mozgás vagy a mennyiség.

Más értelemben persze a valószinüség filozófiai kategóriának tekinthető, hiszen a determinizmus elméletének modern kifejtéseiben általában külön kategóriaként szerepel. (Természetesen a valószinüség filozófiai értelmezése nem egyszerüen a valószinüség matematikai fogalmának interpretációja.) Amennyiben valóban igaz az, hogy a determinizmus elmélete nem fejthető ki a valószinüség kategória nélkül (azaz, a valószinüség olyan kategória, mely nem redukálható egyéb filozófiai kategóriákra), akkor el kell fogadnunk filozófiai kategóriának. Ugy tünik, hogy a valószinüség nem eliminálható a filozófiai kategóriák sorából, ez azonban nem biztos. Ugyanis, a későbbiekben ismertetésre kerülő számhasadási hipotézisnek van egy olyan következménye, mely szerint a valószinüség kategória más kategóriákra visszavezethető. Eddig azonban e hipotézisnek se a tagadását, se magát a hipotézist nem sikerült megfelelően alátámasztani. (Részletesebben ld. 5.4.-ben.)

B. Csendov bolgár filozófus érdekes könyvében ([1o]) részletesen vizsgálja a valószinüség kapcsolatát a determinizmus problémakörével. Csendov szerint a valószinüség (filozófiai szinten) nem helyettesithető más kategóriákkal. Véleményünk szerint azonban - mint már emlitettük - ez a kérdés a tudomány mai szintjén még nem válaszolható meg. Csendov fejtegetései más ok miatt se teljesen meggyőzőek. Ugy tünik, hogy helyenként összekeveri a valószinüség filozófiai fogalmát a valószinüség valamilyen matematikai fogalmának filozófiai interpretációjával. Szerintünk nem lehet eleve feltételezni, hogy a valószinüség filozófiai fogalma matematikai fogalom interpretációja lenne.[17]

A valószinüség valamilyen matematikai fogalma - létrehozója szándékától függetlenül - mindig felfogható ugy, hogy az a valószinüség filozófiai (általános) fogalmának egy vagy több sajátosságát egzakt eszközökkel próbálja meg leirni. Hogy aztán a létrehozott matematikai kalkulus valójában mit fejez ki, azt mindig külön kell vizsgálni. Ugyanis egy matematikai kalkulus formalizált, szintaktikus rendszer, mely elvileg[18] sohase csak egyféleképpen interpretálható. Ez utóbbi triviális megjegyzést a továbbiakban szem előtt kell tartanunk a valószinüség matematikai fogalmának elemzésekor.

A valószinüség matematikai fogalmát szükebben is tágabban is értelmezhetjük. Érthetjük egyfelől mint a szintaktikus rendszeren belüli meghatározást (pl.:"nemnegativ 1-re normált σ-additiv halmazfüggvény") másfelől ugy is, mint a szintaktikus rendszeren belüli meghatározás ismert értelmes interpretációinak összességét. Mig az előbbi esetben a valószinüséget szintaktikai, az utóbbi esetben szemantikai aspektusból közelitjük meg.[19] A valószinüség szintaktikai aspektusban azonban nyilván nem vethető össze a valószinüség filozófiai fogalmával.

Ezek után megkérdezhetnénk, hogy a valószinüség igy értelmezett "matematikai" fogalmai közül a szemantikus nem filozófiai fogalom-e? Formálisan - mivel metamatematikai fogalom - filozófiai kategória. A kérdés azonban nem igy merül fel. A valódi probléma a következő: Milyen a viszony a valószinüség matematikai és filozófiai fogalma között?[20]

Látni fogjuk, hogy téves az a szokásos megközelités, mely szerint a valószinüség matematikai fogalma csak a valószinüség filozófiai fogalmának egy - kvantitative megragadható - részét irja le. Elemzésünk folytatása előtt azonban át kell tekintenünk részletesebben a valószinüség filozófiai értelmezését.

Ismét olyan területre érkeztünk, ahol csupán szerény és nem éppen összahangzó eredmények állnak rendelkezésünkre. Következő vázlatunkban a vitákat nem érintjük, a vitatott kérdésekkel kapcsolatban saját véleményünket ismertetjük.

## 5.2. A valószinüség, mint filozófiai kategória

"ahogyan aránylik a keletkezéshez a lét, ugy viszonylik a hiedelemhez az igazság"

Platon

A valószinüség kategória a szükségszerü és a véletlen kategóriák vizsgálatakor merül fel. A dialektikus materializmus szerint a véletlen objektive létezik. [12,492-495] Rényi a következőképpen magyarázza a véletlen objektivitását: "Azzal, hogy a jelenségek okaira rámutatunk, még igen keveset mondottunk az illető jelenségről, hiszen az okok bonyolult láncolata alakulhatott volna másképpen is és ez esetben a jelenség lefolyása is más lett volna. Éppen ez jellemzi a véletlen eseményeket, amelyeknél nagyszámu ok bonyolult és általában áttekinthetetlen láncolata lép fel, melyek részletekbe menő ismerete a gyakorlatban nem mindig lehetséges, a főbb okok pedig még nem határozzák meg egyértelmüen a jelenség lefolyását, még több lehetőséget engednek meg, és ezért nem teszik lehetővé annak pontos előrelátását sem.
... nem attól válik egy esemény véletlenné, hogy nem tudjuk előrelátni pontosan a lefolyását, hanem megforditva. A véletlen eseményeket éppen azért nem tudjuk előrelátni, mert objektive nem egyértelmüen determináltak. A véletlen tehát objektiv kategória és nem szubjektiv." [41,67] Látni fogjuk,

hogy Rényi nagyon közel jár az általunk helyesnek tartott értelmezéshez. Zavaró azonban, hogy a véletlen objektivitásának forrására ugy mutat rá, hogy egyuttal megismerési nehézségekre hivatkozik.

Már Engels kifejti, hogy a véletlen tagadása a szükségszerü tagadását is jelenti. "A véletlenséget ... nem magyarázzák a szükségszerüségből (t.i. a szükségszerüséget elismerő,de a véletlent tagadó filozófusok - H.F.), hanem éppenséggel a szükségszerüséget lesüllyesztik pusztán véletlennek a létrehozására." [12,494] A véletlen kapcsolatos az oksági összefüggéssel is, ugyanis a véletlen eseményeknek is van okuk. [4o,8], [41,67]

A véletlent a filozófiában mint külsőt, mint az adott dolog lényegéből nem következő hatást, okot stb. tekintik. Pl. a pénzfeldobás esetén - bizonyos egyszerü feltételek teljesülése mellett - szükségszerü az, hogy az érme leesik. Véletlen azonban, hogy fej vagy irás az eredmény, ugyanis a pénzfeldobás tényéből nem következik (másképpen: a pénz feldobásához képest külső tényező) az, hogy az érme melyik oldalára esik.

A valószinüség a potenciálisan <u>többkimenetelü</u> események egyes kimeneteleinek a jellemzője. Gyakrabban mondják azt, hogy a valószinüség a <u>véletlen</u> események jellemzője. Ez is helyes, ugyanis a potenciálisan többkimenetelü események egyes kimenetelei <u>véletlenek</u> az esemény bekövetkezésének szükségszerüségéhez képest. Fejtegetéseinket a következőképpen pontosithatjuk:

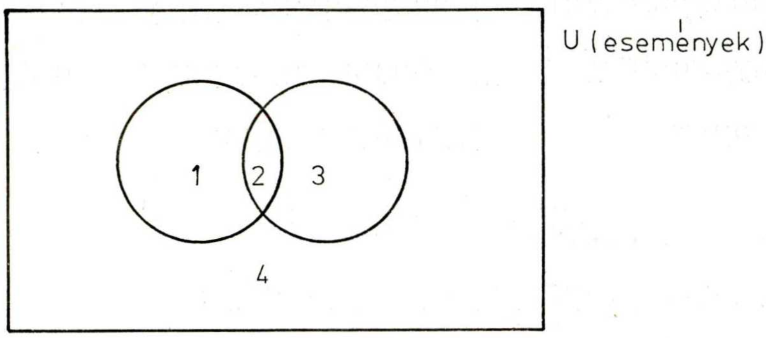
Legyenek $t_1 < t < t_2$ időpontok. $t_1$ időpontban tudjuk, hogy végzünk egy lehetőség szerint többkimenetelü K kisérletet t időpontban, melynek kimenetele $t_2$-ben már ismert lesz. $t_1$-kor csupán K lehetséges kimeneteleit ismerjük, hogy melyik következik be ezek közül, azt nem tudjuk. De nem azért nem tudjuk, mert az esemény kimenetelét meghatározó okokat nem ismerjük (bár ez sem kizárt), hanem azért, mert $t_1$-kor még nem egyértelmüen meghatározott a kisérlet kimenetele. A valószinüség abból származik, hogy vannak olyan események, melyeknek több kimenetele lehetséges, és $t_1$-kor még nem dőlt el, hogy melyik következik be $t_2$-kor. Egy adott kimenetel (esemény) valószinüsége nem más, mint megvalósulhatóságának mértéke, szokásos kifejezéssel: a lehetőség és a valóság viszonyának mértéke. Másként fogalmazva: a valószinüség a véletlen és a szükségszerü viszonyából származik. Talán meglepő lehet, de feltehető, hogy már Platon (!) hasonlóan értelmezte a valószinüséget. Fejezetünk mottóját a Timaioszból választottuk. [36,536] Platon észrevételét különösen értékessé teszi, hogy a "valószinüség" kategóriát akkor még nem ismerték. A valószinüségnek a szükségszerü-véletlen és a lehetőség-valóság viszonnyal való kapcsolatát dialektikus materialista filozófiai talajról A.N.Kolmogorov fejtette ki először. A "Nagy Szovjet Enciklopédiá"-ba irt "Valószinüség" szócikkét a következőképpen kezdi: "A matematikai valószinüség számszerü jellemzője valamilyen meghatározott esemény bekövetkezése lehetőségének ilyen vagy olyan korlátlanul ismételhető feltételeik mellett, azaz ezen feltételek és események között objektive létező kapcsolat jellemzője." [25/VII,5o8] Később a következőt olvashatjuk: "A matematikai valószinüség kifejezője a véletlen és a szükségszerü sajátos kapcsolatának." [25/VII,5o9] Kolmogorov elemzései csak a matematikai valószinüségre vonatkoznak, innen a továbblépés logikailag kézenfekvő. Az idézett szócikkből az is világos, hogy Kolmogorov (az objektiven felfogott) valószinüség numerikus jellemzését csak tömegjelenségek[21] esetén tartja lehetségesnek. Felmerülhet a kérdés: nem áll-e az ellentétben azzal, amit az egyedi események valószinüségéről mondtunk? Ugy véljük, nem. A valószinüség meghatározása a valószinüség Kolmogorov-féle elméletén belül tulajdonképpen egy sajátos mérési eljárásként fogható fel. "Valószinüségek meghatározására a valószinüségszámitásnak ugyanugy megvannak az eszközei, mint ahogy a fizika kidolgozott módszerekkel rendelkezik a tömeg mérésére. A valószinüség megismerésének módszerei általában közvetettek, azonban végső fokon mindig a gyakoriság megfigyelésén alapulnak. A módszert a matematikai statisztika módszerei szolgáltatják." [4o,43] Szerintünk a szubjektiv valószinüség tudományelméleti státusza (egyszerü hipotézis) nem teszi lehetővé, hogy a szubjektiv valószinüséget egy sorba állitsuk az objektiv valószinüséggel. Egy egyedi esemény becsült valószinüsége nem az objektiv lehetőség-valóság viszony kifejezője, hanem szubjektiv elemektől terhes, mindenekelőtt függ a rendelkezésünkre álló ismeretektől. Tehát a becslés nem csak az (objektiv) valószinüséget, hanem tudásunkat is jellemzi. (Ettől persze még értelmes és fontos lehet.) Ugyanakkor, ha sikerül valamilyen eseményosztályba besorolni a vizsgált jelenséget, akkor gyakran a valószinüség objektiv értelemben vett mérése is lehetséges.

Az eddig elmondottak alapján ugy tünhet, hogy a valószinüség filozófiai fogalma általánosabb a valószinüség matematikai fogalmánál, pontosabban mondva: A valószinüség matematikai fogalma csak valódi részét képes jellemezni azoknak a jelenségeknek, ahol az objektiv valószinüség előfordul. Ez azonban nem igaz.

## 5.3. A valószinüség filozófiai és matematikai fogalmai extenzióinak viszonyáról

Láttuk, hogy a valószinüség Kolmogorov-féle elmélete bizonyos esetekben képes a filozófiai értelemben vett valószinüség numerikus jellemzésére. Ennél azonban sokkal többre használható. Kolmogorov elmélete ugyanis minden olyan esetben alkalmazható, amikor kontingencia áll fenn, függetlenül attól, hogy annak mi a forrása. (Feltételezzük az egyéb feltételek teljesülését, elsősorban azt, hogy tömegjelenségről van szó.) Nem kell tehát objektiv véletlennek fennállnia, Kolmogorov elmélete akkor is kitünően müködik, ha a valóságban már egyértelmüen meghatározott az adott jelenség kimenetele, de valami miatt ezt nem tudjuk. Például azért, mert nem ismerjük az összes okot, vagy figyelembevételük jóval bonyolultabb, költségesebb számitásokat igényelne mint a valószinüségszámitás eszközeinek felhasználása. A valószinüségszámitást alkalmazó számára teljesen közömbös, hogy a kontingenciát objektiv véletlen vagy tudáshiány idézi elő. A matematikusok ezzel teljesen tisztában vannak. Ez abban is megmutatkozik, ahogyan a véletlent definiálják.[22] Rényi pl. a következőket irja: "A körülmények bizonyos K komplexumának fennállása esetén az A esemény be is következhet, meg nem is, más szóval bekövetkezhet az A esemény, de bekövetkezhet az A-tól különböző B,C,... események egyike is. ... a véletlen jelenségeknek éppen ugy megvannak a meghatározott okaik, (mint a szükségszerü jelenségeknek - H.F.) azonban azok (legalább részben) a körülmények figyelembe vett K komplexumán kivüli okok." [4o,7-8](Kiemelés tőlem. H.F.) E felfogás szerint tehát a véletlen annak a következménye, hogy nem veszünk figyelembe minden lehetséges okot. Teljesen hasonlóan közeliti meg a kérdést Prékopa és Tandori is. [38,11] és [48,1] Szerintünk ez a megközelités is jogos. A "véletlen" szó azonban itt nem azt jelenti, amit az első részben ismertetett filozófiai "véletlen" fogalom, hanem azt, amit fentebb kontingenciának neveztünk. A "kontingencia" és a "véletlen" szavak megkülönböztetése egy önkényes ötlet, nem konvencionális, célja mondanivalónk világosabbá tétele.

Az eddig elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy a valószinüség matematikai fogalma részben általánosabb a valószinüség filozófiai fogalmánál. A két fogalom terjedelmi viszonyát a 4. ábra szemlélteti.[23]




1, 2, 3 és 4: az elemi tartományok

1 ∪ 2: objektiv véletlen események

2 ∪ 3: azok a kontingens események, melyek numerikusan jellemezhetőek

2: objektiv véletlen tömeg események

1 ∪ 2 ∪ 3: kontingens események

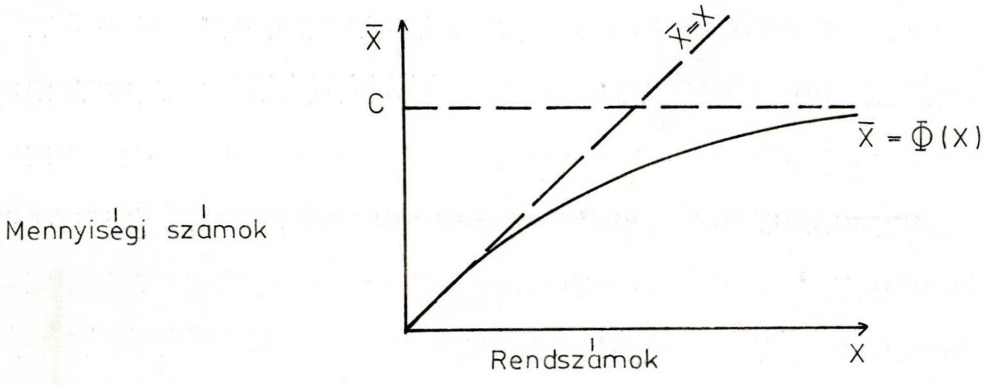
4 ∪ 3: Szükségszerü események

4. ábra

5.4. <u>Egy kisérletről</u>

I.P. Truszov és B.A.Lasztocskin a 6o-as évek második felében kidolgozták az u.n. számhasadási elméletet. [29], [28] A számhasadási elmélet ismertetése és elemzése [16] -ban található. Lényegét a következőkben foglalhatjuk össze:

A számhasadási elmélet feltételezi, hogy a számok kettéválása mennyiségi számokra és rendszámokra nem csak a transzfinitben, hanem már a végesben bekövetkezik. A számhasadást egy $\bar{x} = \Phi(x)$ függvény irja le, ahol a $\Phi$ függvény alakját a megmérendő mennyiség természete határozza meg. (x rendszámot, $\bar{x}$ pedig mennyiségi számot jelöl.) A hasadási függvényt az 5. ábrán szemléltetjük. (Az ábrát [28]-ból vettük át.)




5. ábra

A számhasadási elmélet feltételezi, hogy a valóságban a mennyiség és a rendszám között csak kis mennyiségeknél van hozzávetőleges egybeesés, a továbbiakban a mennyiség elmarad a rendszám mögött, és aszimptotikusan valamilyen C határérték felé közeledik. Az általánosan elfogadott matematikai szemlélet szerint véges esetben nem teszünk különbséget a rendszámok és a mennyiségi számok között, azaz ugy tekintjük, hogy a széthasadás függvényének alakja $\bar{x} = x$.

Előre felhivjuk a figyelmet a most következő levezetés heurisztikus jellegére. Helyenként ugyan matematikailag korrektté tehető, többnyire azonban az egyes lépéseket csak formális analógia igazolja.

Jelöljük a $\Phi(x)$ hasadási függvény deviváltját $\varphi(x)$-szel. (Föltesszük, hogy $\varphi(x)$ létezik. Föltevésünk szerint $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = C$. Ekkor

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = C \qquad 5.2\ (1)$$

teljesül, mivel $\Phi(0) = 0$.

Tegyük föl, hogy adott egy $\xi$ valószinüségi változó, mely csak nemnegativ értékeket vehet föl, és létezik az $F(x)$ eloszlás- és $f(x)$ sürüségfüggvénye. Föltevésünk alapján,

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 1 \qquad 5.2\ (2)$$

5.2 (1) mindkét oldalát C-vel osztva:

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{C}\,dx = 1 \qquad 5.2\ (3)$$

5.2 (2)-t és 5.2 (3)-at összehasonlitva esetleg feltehető, hogy

$$\int_0^{x_0} f(x)\,dx = \int_0^{x_0} \frac{\varphi(x)}{C}\,dx \qquad 5.2\ (4)$$

minden nemnegativ valós $x_0$-ra teljesül.[24] 5.2 4 -et átalakitva, kapjuk, hogy

$$P(\xi < x_0) = \frac{\Phi(x_0)}{C} = \frac{X}{C} \qquad 5.2\ (5)$$

Hogyan interpretálható ez az eredmény? Röviden azt lehet mondani, hogy a valószinüség nem más, mint a mennyiség viszonya saját maximális értékéhez.

Az ismertetett gondolatmenetnek két nagyon érzékeny pontja van. Az egyik a $\Phi$ szaturációs függvény létezésére és formájára vonatkozó kiinduló feltevés, a másik az 5.2 (4) -hez vezető feltételezés. Célunk most csupán a merész és szép eredményeket hozó[25] heurisztikus okoskodás bemutatása volt. Felmerül a kérdés: A valószinüség ilyen értelmezése nem mond-e ellent a valószinüség 5.2-ben adott értelmezésének? Emlékeztetünk rá, hogy 5.2-ben azt mondtuk, egy esemény valószinüsége nem más, mint megvalósulhatóságának mértéke, azaz a lehetőség-valóság viszony mértéke. 5.2 (5) nyilván ugyanezt fejezi ki, azzal a konkretizálással, hogy itt feltételezzük a valószinüség számszerü kifejezhetőségét.

A lehetséges konzekvenciák közül csak egyet emelünk ki. A megadott interpretáció szerint a valószinüség mennyiségi viszonyt fejez ki. Ennek alapján viszont a valószinüség klasszikus definicióját - amit azzal vádoltak, hogy nem definició, hanem kiszámitási eljárás - visszahelyezhetjük eredeti logikai státuszába.

Nyilvánvaló, hogy a fent vázolt valószinüségértelmezési kisérlet inkább érdekes, mint értékes. Megbizhatósága csekély. Ugyanis a számhasadási elmélet jelenlegi formájában elvileg falszifikálhatatlannak tünik. [16, 18] Nem kell popperiániusnak lennünk ahhoz, hogy ezt sulyos fogyatékosságnak találjuk.

## U T Ó S Z Ó

Kivánatosnak tartjuk az értekezés nóvumainak vázlatos ismertetését, bár ez inkább csak a forma kedvéért szükséges, ugyanis maximálisan törekedtünk arra, hogy ne sajátitsuk ki mások gondolatait. Ha valahol mégis szerepelne hivatkozás nélkül olyan fejtegetés, amely másoknál is előfordul, akkor az csupán véletlen koincidencia.

A dolgozat általunk lényegesnek tartott eredményei:

(i) Az első marxista igényü munka, amely a szubjektiv valószinüség-értelmezéssel részletesebben foglalkozik, és sikraszáll a szubjektiv valószinüség dialektikus materialista interpretációjának lehetősége mellett.

(ii) A különböző valószinüségértelmezések közötti összefüggéseket szisztematikusan elemzi.

(iii) A szokásostól eltérően értelmezzük a valószinüség matematikai és filozófiai fogalmának viszonyát.

(iv) Uj a Bécsi Kör jelentőségének értékelése a valószinüségértelmezés kibontása szempontjából.

(v) A "véletlen" terminus kétértelmüségének megszüntetése céljából bevezettük a "kontingencia" és a "véletlen" kategóriáinak megkülönböztetését.

Tisztában vagyunk azzal, hogy néhány évszázadok óta vitatott kérdést nem tudtunk kielégitően megválaszolni. Az induktiv logika és a szubjektiv valószinüségelméletek gnoszeológiai státuszának tisztázása további kutatómunkát igényel.

A dolgozat megirásához nyujtott segitségért köszönettel tartozunk Ruzsa Imre professzor urnak.

# J E G Y Z E T E K

1 Itt most nem térünk ki arra, hogy a relativ gyakoriság és a valószinüség között milyen összefüggés van Mises szerint; ld. később.

2 Hasonló a helyzet a később tárgyalandó Kolmogorov-féle elméletnél.

3 Ez természetesen nem az ő felfedezésük. Marx után a polgári tudomány/történetirás u.n. duhemianus szárnyánál is - elsősorban Koyré-nél - megtalálható.

4 A fundamentális ideák mibenlétéről magyarul ld.: [13,32-33]

5 Carnapról van szó.

6 Egy valószinüségeloszlás posztulálása (hipotézisként történő felhasználása) szerintünk megengedhető, ezt már 1.4 végén kifejtettük.

7 Véleményünk szerint egy olyan levezetésről van szó, mely premisszáit az elérni kivánt célnak megfelelően választotta. Sejtésünk az, hogy a premisszák konjunkciója logikailag ekvivalens a konkluzióval.

8 Már 2.2-ben utaltunk erre.

9 Hasonló gondolatok találhatók [18] 2oo. oldalán is: "...a tárgyak gyakori vagy állandó találkozását megfigyelvén sincs semmiféle észbeli indokunk bármire következtetni korábbi tapasztalatunk körén tul eső tárgyakkal kapcsolatban."

1o Az idézet logikai strukturájában kizáró vagy szerepel.

11 Érvelését hibásnak tartjuk. A tiszta, okmentes eshetőség fogalmára támaszkodik, ami persze Hume szerint sem létezik. [18,187]

12 Talán kifogásolható, hogy eddigi vizsgálódásaink során a rendezési elvünk inkább logikai és nem történeti volt. Véleményünk szerint matematikai jellegü vagy legalábbis a matematikát közvetlenül érintő vizsgálatok esetén bizonyos határokon belül ez az eljárás megengedhető lehet. Szubjektiv értékitélet kérdése, hogy tulléptünk-e ezen a határon.

13 Schlick kifejezése. [1,261]

14 Csupán a vizsgált kérdés szempontjából talán nem tünik tul érdekesnek Carnap ezen cikke. Azt kell azonban mondanunk, hogy egyik legjelentősebb irása, amennyiben szinte programjának számitott.

15 A tárgyalási univerzum és a predikátumok terjedelmének pontos rögzitése szükségességének felismeréséig, a szintaxis és a szemantika fogalmának letisztulásáig 1936-ban meg nem jutott el a logika tudománya.

16 A "matematikai modell" kifejezést kommentálnunk kell, ugyanis nem a filozófiában szokásos értelmezését használjuk. Matematikai modell alatt a filozófiai szakirodalom matematikailag hasonló modellt, tehát anyagi modellt ért. Mi itt természetesen eszmei modellre, pontosabban jelmodellre gondolunk. A felmerülő modellelméleti fogalmakról ld.: [24,73-8o]

17 Azt sem tartjuk szerencsésnek, hogy Csendov a determinizmus kategóriáit az általános-különös kategóriapárba szoritja bele. Ugyanis e kategóriákat néha hibásan alkalmazza. Ld. pl. [1o,84]-on a $(P_i)$ és a $(D_i)$ mátrix viszonyára vonatkozó állitását.

18 Itt azért használtuk az "elvileg" szót, mert lehetséges, hogy adott időpontban adott szintaktikus rendszernek nem ismert több értelmes interpretációja. Azonban semmi nem zárja ki azt, hogy később ilyet találjanak.

19 Szigoruan véve az interpretáció lehetősége nem matematikai kérdés, hanem a matematika alkalmazását érintő, és igy inkább metamatematikai probléma.

2o Most és a továbbiakban a valószinüség matematikai fogalma alatt a valószinüség Kolmogorov-féle elméletében szereplő valószinüség-fogalmat értjük.

21 A tömegjelenség fogalmát 1.4-ben adtuk meg.

22 Erről ld. még 1.4-et.

23 Felhivjuk a figyelmet arra, hogy az ábrából nem szabad kiolvasni olyat, ami nincs rajta. Nem állitjuk, hogy az eredményeknek csak egy ilyen osztályozása létezik. A szükségszerü és véletlen (már Hegel által leirt ) dialektikája előttünk is ismert, emiatt azonban nem mondunk le az ábrázolásról.

Megadjuk az 1,3 és 4 elemi tartományok jelentését is, bár az ábra felirata alapján ez világos.
1: objektiv véletlen egyedi események 3: kontingens, de nem objektiv véletlen események 4: nem kontingens szükségszerü események.

24 Ez a tulajdonképpeni hipotézis.

25 Az eredményekről ld: [28,1o6-113]

# IRODALOM

1 A Bécsi Kör filozófiája. Szerk.: Altrichter F. Budapest 1972.
2 Arisztotelesz: Metafizika. Budapest 1957.
3 F.Bacon: Novum Organum I. rész. In: Filozófiatörténeti Szöveggyüjtemény I. kötet. Budapest 1966.
4 Carnap's Intellectual Antobiography. In: The Philosophy of Rudolf Carnap. La Salle 1963.
5 R.Carnap: Logical Foundation of Probability. Chicago 195o.
6 R.Carnap: Philosophical Foundations of Phisics. New York, London 1966.
7 R.Carnap - W.Stegmüller: Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Wien 1959.
8 Studies in Inductive Logic and Probability. Szerk.: R.Carnap, C.Jeffrey. Berkeley, Los Angeles, London 1971.
9 L.Couturat: La logique de Leibniz d'apres de documents inidits. Paris 19o1.
1o B.Csendov: Opregyelennoszty, nyeopregyelennoszty, modalnosztyi, verojatnoszty - kategorii szovremennogo naucsnogo poznanyija. Szófia 1974.
11 Engels: Ludwig Feuerbach és a klasszikus német filozófia vége. In: Marx és Engels Müvei 21. Budapest 197o.
12 Engels: A természet dialektikája. In: Marx és Engels Müvei 2o. Budapest 1974.
13 Fehér M.: A tudományfejlődés elméletek története. In: A filozófia időszerü kérdései 38, 1979.
14 B. de Finetti: Le vrai et le probable. In: Dialectica 3, 1949.
15 Fodor J.: A valószinüség fogalma a matematikában és a filozófiában. In: BME Társadalomtudományi Közlemények. 1971/2.
16 Hegyi F.: A számfogalom értelmezésének egy filozófiai problémájáról. In: Acta Philosophica XXIV., Szeged 198o.
17 T. Hobbes: Leviatán. Budapest 197o.
18 D. Hume: Értekezés az emberi természetről. Budapest 1976.

19/a D.Hume: Tanulmány az emberi értelemről. Budapest 1973.
19/b D.Hume: Vizsgálódás az emberi értelemről. Budapest 19o6.
2o Jordán K.: Fejezetek a klasszikus valószinüségszámitásból. Budapest 1956.
21 Katona P.: A tükröződési elmélet és a tudat aktivitása. Budapest 1978.
22 J.G.Kemeny: Carnap's Theory of Probability and Induction. In: The Philosophy of Rudolf Carnap. La Salle 1963.
23 J.M.Keynes: A treatise on probability. London, Macmillan 1921.
24 Kocsondi A.: Modell-módszer. Budapest 1976.
25 A.N.Kolmogorov: Verojatnoszty. In: Bolsaja Szovjetszkaja Enciklopedija. 7. kötet. Moszkva 1951.
26 K.I.Kupcov: Determinizm i verojatnoszty. Moszkva 1976.
27 Studies in Subjective Probability. Szerk.: H.E.Kyburg, H. E. Smokler. New York 1964.
28 B.A. Lasztocskin: Végtelenség és valószinüség. In: Végtelenség és világegyetem. Budapest 1974.
29 B.A.Lasztocskin, J.P. Trusov: Raszcseplenyije meri i prognozirovanyije kacsesztvennogo szkacska In: Matyeriali k konferencii "Matyematyizacija znanyij". Moszkva, 1968.
3o Sz.A. Lebegyev: Indukcija kak metod naucsnogo poznanyija. Moszkva 198o.
31 J. Locke: Értekezés az emberi értelemről. Budapest 1979.
32 Lukács Gy.: A társadalmi lét ontológiájáról Budapest 1976.
33 J. S. Mill: A deduktiv és az induktiv logika rendszere. Budapest 1874-77.
34 R. v. Mises: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien 1951.
35 B.N.Pjatnyicin: Filoszofszkije problemü verojátnosztnüh i sztatyisztyicseszkih metodov. Moszkva 1976.
36 Platon: Összes müvei. Budapest 1943.
37 K. R. Popper: Logik der Forschung. Tübingen 1969.
38 Prékopa A.: Valószinüségelmélet. Budapest 1972.

39 Rényi A.: Levelek a valószinüségről. Budapest 1967.
4o Rényi A.: Valószinüségszámitás. Budapest 1954.
41 Rényi A.: A valószinüségszámitás elvi kérdései a dialektikus materializmus megvilágitásában. In: Filozófiai Évkönyv. Budapest 1952.
42 Ruzsa I.: A szimbolikus logika elemei. Budapest 1977.
43 Szimbolikus logika I-III. Szerk.: Ruzsa I. Budapest 1975.
44 L. Savage: The Foundations of Statistics. New York 1954.
45 Sós V.: Modern igazságelméletek. Budapest 1978.
46 P.Suppes: The Role of Subjective Probability and Utility in Decision-making. In: Selected Papers from 1951 to 1969. Amsterdam 1969.
47 Logikai tanulmányok. Szerk.: Tamás Gy. Budapest 1971.
48 Tandori K.: Valószinüségszámitás. Szeged 1973.
49 F.Waismann: Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. In: Erkenntnis 1(193o-31)