JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARA

RETARDÁLT TIPUSU FUNKCIONÁL DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSAINAK ASZIMPTOTIKUS VISELKEDÉSÉRŐL

Krisztin Tibor

doktori értekezése

SZEGED

1981

TARTALOMJEGYZÉK

I. BEVEZETÉS

A retardált tipusu funkcionál differenciálegyenletek (röviden retardált differenciálegyenletek) a differenciálegyenletek egy gyorsan fejlődő, uj ága. Az első retardált differenciálegyenletek 1750 körül jelentek meg Euler munkáiban. Adott tulajdonsággal rendelkező sikbeli görbék egyenletének keresése vezetett ilyen példákhoz. A retardált differenciálegyenletek rendszeres vizsgálata az 1940-es évektől kezdődött, amikor szükségessé vált a gyors müködésü gépek, berendezések pontosabb matematikai leirása.

Mint ismeretes, a közönséges differenciálegyenletek olyan folyamatokat irnak le, amelyekben a t időbeli sebességet meghatározza a t idő és az $x(t)$ állapot. Általános alakjuk

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \qquad \left(x(t),\ f(t, x(t)) \in R^n\right). \tag{1.1}$$

A retardált differenciálegyenletek esetén a t időbeli sebesség az $x(t)$ állapotot megelőző állapotoktól is függ. Ilyen például az

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} e^{s}\, x(t+s)\, ds \qquad \left(x(t) \in R^n\right) \tag{1.2}$$

egyenlet, ahol $0 < r \leq \infty$. Az (1.1)-re és (1.2)-re vonatkozó kezdetiérték-probléma is különböző. Az (1.1) egyenletre vonatkozó Cauchy-probléma a következő: adott $(t_0, x_0) \in R \times R^n$-hez az (1.1) olyan megoldását keressük, amelyre $x(t_0) = x_0$ teljesül, az (1.2) egyenlet esetében pedig adott $t_0 \in R$-hez és a $[-r, 0]$-n értelmezett, R^n-értékü, folytonos φ függvényhez keressük az (1.2) olyan x megoldását, amelyre az $x(t_0+s)=\varphi(s)$ egyenlőség érvényes, ha $s \in [-r,0]$. Tehát közönséges differenciálegyenletre a kezdőpont a véges dimenziós $R \times R^n$ tér eleme, mig az (1.2) egyenletre (t_0,φ) -t a végtelen dimenziós $R \times C([-r,0],R^n)$ térből vettük. Ez és még további különbségek okozzák, hogy egyrészt uj tipusu problémák merülnek fel a retardált differenciálegyenletek elméletében, másrészt az azonos jellegü kérdések vizsgálatához is többnyire más módszerek szükségesek, mint a közönséges differenciálegyenletekben.

Milyen gyakorlati feladatok tanulmányozása vezet retardált tipusu funkcionál differenciálegyenletekhez? Mivel minden hatás véges sebességgel terjed, voltaképpen a fizika legtöbb egyenletét retardált differenciálegyenletként kellene felirni. Szerencsére az esetek nagy többségében erre nincs szükség. Például az égi mechanika mozgásegyenleteinél a mozgások lassuak a gravitációs hatás terjedéséhez képest, ezért az időbeli késleltetés elhanyagolható. Más lenne a helyzet, ha a bolygók 1000-szer gyorsabban mozognának. Figyelembe kell venni azonban a késleltetés hatását például a rakéta mozgásának leirásakor. Ha egy t időpontban olyan parancs érkezik a vezérlőegységhez, hogy a hajtómü fejtsen ki nagyobb tolóerőt, akkor először nagyobb mennyiségü hajtóanyagot kell az égési térbe betáplálni. Amig ez a többlethajtóanyag elég és kiáramlik, addig idő telik el, és eközben a rakéta számottevő utat tesz meg. Ha egy ilyen rakéta mozgását a célhoz viszonyitott helyzete vezérli, akkor az adott pillanatban kifejtett tolóerőt egy korábbi időpontbeli helyzete határozza meg, amely retardált differenciálegyenletet jelent a mozgás leirásánál. Hasonló a helyzet más vezérlési problémánál is [36].

Az atomreaktorok különböző modelljeinek matematikai leirása is sok esetben retardált differenciálegyenlethez vezet (C. CORDUNEANU [8], J.J. LEVIN és J.A. NOHEL [28]).

A retardált tipusu funkcionál differenciálegyenletek egy másik alkalmazási területe a biológia. Az egyik jellemző példa a populációk fejlődését leiró ugynevezett A.J. LOTKA-féle modell [30]. Egy populáció létszámának változása a születésből és a halálozásból adódik. Egy adott időegységre eső születések száma az ivarérett egyedek számától függ, és ez pedig a korábbi jól meghatározott időre eső születések számától. Igy a születéstől az ivarérésig eltelő idő szükségképpen késleltetésként jelentkezik ezekben az egyenletekben. Egy másik példa a járványok terjedésének matematikai leirása (K.L. COOKE és J.A. YORKE [7]).

Retardált differenciálegyenletek alkalmazására további példák és irodalmi utalások találhatók R. BELLMAN és K.L. COOKE [1], SZ.B. NORKIN [35], J.A. MITROPOLSZKIJ és D.I. MARTINJUK [33] és R.D. DRIVER [10] könyvében valamint A.M. ZVERKIN, G.A. KAMENSZKIJ, SZ.B. NORKIN és L.E. ELSZGOLC [45], K.L. COOKE [6], A.D. MISKISZ és L.E. ELSZGOLC [34] cikkében.

Sok, retardált differenciálegyenlettel leirt modellben (pl. populációmodellekben [7], rekeszmodellekben [13]) bizonyos fázis-koordináták legjellemzőbb tulajdonsága az, hogy konstanshoz tartanak, ha $t \to \infty$.

A megoldások konstanshoz tartásának vizsgálata a stabilitásvizsgálat egy finomitása , amely a nullához tartás esetén speciálisan az aszimptotikus stabilitást adja.

A stabilitáselmélet egyik módszere az ugynevezett Ljapunov-féle második módszer, amelynek lényege közönséges differenciálegyenletek esetén az, hogy könnyen kezelhető segédfüggvények, az ugynevezett Ljapunov függvények tulajdonságaiból következtetünk a megoldások viselkedésére, anélkül, hogy a megoldásokat explicit módon ismernénk [38]. Reterdált tipusu funkcionál differenciálegyenletekre ez a módszer átvihető, de a Ljapunov függvények szerepét Ljapunov funkcionálok veszik át [16, 24, 44]. A gyakorlatban azonban nehézkes egy adott retardált differenciálegyenlethez megfelelő Ljapunov funkcionált konstruálni, ezért célszerünek látszott itt is olyan eljárás kidolgozása, amelyben a Ljapunov függvények játszanak központi szerepet. Először B.SZ. RAZUMIHIN [37] kapott Ljapunov függvények segitségével retardált differenciálegyenletekre vonatkozó stabilitási tételeket. Módszerét, amelyet az irodalomban Razumihin tipusu módszernek szokás nevezni, N.N. KRASZOVSZKIJ [24], R.D. DRIVER [9], J. KATO [21, 22, 23], S.E. GROSSMAN és J.A YORKE [12], G. SEIFERT [40, 41], R. GRIMMER és G. SEIFERT [11], J. TERJÉKI [42] sikerrel alkalmazták különböző alaku retardált differenciálegyenletek megoldásainak stabilitásvizsgálatára. S.R. BERNFELD és J.R. HADDOCK [2, 3]-ban skalár funkcionál differenciálegyenletek megoldásainak konvergenciáját biztositó Razumihin tipusu tételt bizonyitottak. Eljárásuk azonban nem volt alkalmazható olyan egyenletekre, amelyek jobboldala egy azonos nagyságrendü közönséges és funkcionál rész összege. Ezek az egyenletek igen fontosak az alkalmazásokban, ezért S.R. BERNFELD és J.R. HADDOCK [2] 1977-ben azt a problémát vetették fel, hogy ebben az esetben létezik-e a megoldások határértéke. Autonóm és periodikus egyenletekre oldották meg a problémát különböző uton C. JEHU [19], J.L. KAPLAN, M. SORG és J.A. YORKE [20], J.R. HADDOCK és J. TERJÉKI [15]. Nemperiodikus egyenletek esetén e disszertáció szerzője adott elegendő feltételeket a megoldások konstanshoz tartására [25].

A jelen disszertáció célja az, hogy a [25]-ben alkalmazott eljárás továbbfejlesztésével általánosabb feltételeket adjunk a megoldások konvergenciájára, a konvergencia gyorsaságát becsüljük és a megoldások további aszimptotikus jellemzőit tudjuk vizsgálni.

A disszertáció II. fejezetében leirjuk azt az egyenletosztályt, amelyre eredményeink vonatkoznak, ismertetjük a későbbiekben használandó fogalmakat, jelöléseket.

A III. fejezet egy összehasonlitási tételt tartalmaz, amely az V., VI. és VII. fejezetben használt módszer alapjául szolgál.

A IV. fejezetben a megoldások létezését, egyértelmüségét, folytathatóságát és a kezdeti adatoktól való folytonos függését tárgyaljuk.

Az V. fejezet fő eredménye a Ljapunov függvénynek a megoldások mentén való konstanshoz tartását állitja véges retardálásu egyenletekre. A Ljapunov függvény deriváltját nem nullával becsüljük felülről, mint azt korábban a Razumihin tipusu tételekben tették, hanem egy nemnegativ függvénnyel, igy a kapott eredmény S.R. BERNFELD és J.R. HADDOCK fentemlitett problémájára is alkalmazható. Elegendő feltételt adunk arra, hogy a Ljapunov függvény exponenciális gyorsasággal tartson konstanshoz. Általános eredményeinket konkrét egyenleteken szemléltetjük. Megmutatjuk többek között, hogy N.N. KRASZOVSZKIJ [24] egyik nevezetes példájában, amelyben KRASZOVSZKIJ a megoldások stabilitását bizonyitotta, a feltételekből a megoldások konstanshoz tartása is következik.

A VI. fejezet vektor Ljapunov függvények konvergenciájára ad elegendő feltételeket. Eredményünk alkalmazásaként megoldjuk GYŐRI ISTVÁN egyik problémáját, amely a biológiai folyamatok matematikai leirásában fontos szerepet játszó ugynevezett rekeszmodellek elméletében merült fel [13].

A VII. fejezetben egy, mind az elmélet, mind a gyakorlat szempontjából érdekes, végtelen retardálásu egyenletet vizsgálunk.

A disszertáció V. fejezetének eredményeit a szerző már publikálta [25, 26], a VI. és VII. fejezet pedig a legujabban kapott tételeit tartalmazza.

II. JELÖLÉSEK, DEFINICIÓK

Jelöljük R-rel a valós, R^+-szal a nemnegativ valós számok halmazát, R^n-nel a valós szám-n-esek euklideszi terét, $|\cdot|$ pedig jelentse az euklideszi normát R^n-ben.

Legyen H a $[-\tau, 0]$-ból az R^n-be képező függvények tere, ahol τ adott szám, $0 \leq \tau \leq \infty$. Az $\tau = \infty$ esetben $[-\tau, 0]$ a $(-\infty, 0]$-t jelölje. Ha $x : [\sigma - \tau, A) \to R^n$, $\sigma < A$, adott függvény, akkor az $x_t \in H$ függvényt $t \in [\sigma, A)$-ra igy definiáljuk: $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-\tau, 0]$.

Tekintsük az

(2.1) $$\dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

retardált tipusu funkcionál differenciálegyenletet, ahol $F : [\sigma, \infty) \times \Omega \to R^n$ adott függvény, $\Omega \subset H$.

Megjegyezzük, hogy az $\tau = 0$ esetben a (2.1) egyenlet közönséges differenciálegyenlet lesz.

<u>2.1 Definició</u> A (2.1) egyenletnek az $I \subset R$ intervallumon az x függvény <u>megoldása</u>, ha

(i) $x : \bigcup_{t \in I} [t - \tau, t] \to R^n$,

(ii) $(t, x_t) \in [\sigma, \infty) \times \Omega$, ha $t \in I$,

(iii) x folytonosan differenciálható I-n,

(iv) x kielégiti (2.1)-et I-n.

2.2 <u>Definició</u> Adott $(\xi, \varphi) \in [\sigma, \infty) \times \Omega$-ra $x(\xi, \varphi)$ a (2.1) egyenlet <u>(ξ, φ) -n átmenő megoldása</u>, ha van olyan $A > \xi$, hogy $x(\xi, \varphi)$ a (2.1) megoldása $[\xi, A)$-n és $x_\xi(\xi, \varphi) = \varphi$.

2.3 Definició Az x a (2.1) egyenletnek nem folytatható megoldása $[\xi, A)$ -n, $\xi < A$, ha

(i) x a (2.1) megoldása $[\xi, A)$ -n,

(ii) nem létezik olyan $A' > A$ és y , hogy y a (2.1) megoldása $[\xi, A')$ -n és $x(s) = y(s)$, ha $s \in [\xi - r, A)$.

2.4 Definició Az x a (2.1) egyenletnek (ξ, φ) -n átmenő maximális megoldása $[\xi, A)$ -n, $\xi < A$, ha

(i) x a (2.1) egyenlet (ξ, φ) -n átmenő megoldása $[\xi, A)$ -n,

(ii) a (2.1) egyenlet bármely $[\xi, A)$ -n értelmezett (ξ, φ) -n átmenő y megoldására $x(t) \geqq y(t)$ teljesül, ha $t \in [\xi, A)$.

A (2.1) egyenlet megoldásai létezésének biztosításához további feltételek szükségesek az F függvényre. Ilyen feltételeket adunk a 4.1 Tételben.

2.5 Definició A $V : [\sigma - r, \infty) \times R^n \to R^m$ függvényt Ljapunov függvénynek nevezzük, ha folytonos és lokális Lipschitz feltételnek tesz eleget.

2.6 Definició A V Ljapunov függvénynek a (2.1) rendszer szerinti jobboldali felső (alsó) deriváltja

$$D^+_{(2.1)} V(t, \varphi) = \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h} \left[V(t+h, \varphi(0) + h F(t, \varphi)) - V(t, \varphi(0)) \right],$$

$$\left(D_{+(2.1)} V(t, \varphi) = \liminf_{h \to 0+} \frac{1}{h} \left[V(t+h, \varphi(0) + h F(t, \varphi)) - V(t, \varphi(0)) \right] \right)$$

ahol $(t, \varphi) \in [\sigma, \infty) \times \Omega$ és a szuprémumot komponensenként értjük.

<u>2.7 Definició</u> A lokális Lipschitz feltételnek eleget tevő $v : [\sigma, \infty) \to R^n$ függvény <u>jobboldali felső</u> (alsó) <u>deriváltja</u>

$$D^+ v(t) = \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}\left[v(t+h) - v(t)\right], \quad \left(D_+ v(t) = \liminf_{h \to 0+} \frac{1}{h}\left[v(t+h) - v(t)\right]\right)$$

ha $t \in [\sigma, \infty)$.

Ha x a (2.1) egyenlet megoldása $[\sigma, A)$ -n és V egy Ljapunov függvény, akkor T. YOSHIZAWA [44] egy eredménye alapján

$$(2.2) \quad D^+_{(2.1)} V(t, x_t) = D^+ V(t, x(t)), \quad D_{+(2.1)} V(t, x_t) = D_+ V(t, x(t)), \quad t \in [\sigma, A).$$

Ha $V = (V_1, \dots, V_m)$ egy Ljapunov függvény és $(t, \varphi) \in [\sigma, \infty) \times H$, akkor legyen

$$\overline{V}(t, \varphi) = \sup_{t-r \le s \le t} V(t+s, \varphi(s)), \quad \underline{V}(t, \varphi) = \inf_{t-r \le s \le t} V(t+s, \varphi(s)).$$

III. EGY ÖSSZEHASONLITÁSI TÉTEL

A differenciálegyenletek elméletében gyakran alkalmazzák az ugynevezett összehasonlitási módszert, amely abban áll, hogy egy differenciálegyenlőtlenséget kielégitő függvényt a megfelelő differenciálegyenlet extremális megoldásaival becsüljük. Ezen eredmények egyike az alább ismertetendő tétel, amelyet a 4., 5. és 6. pontban fogunk használni.

Tekintsük az

$$(3.1) \qquad \dot{u}(t) = g(t, u(t)) \qquad (u(t) \in R)$$

közönséges differenciálegyenletet, ahol g az $E(\subset R^2)$-ből R-be képező függvény. A (3.1) egyenlet a (2.1)-nek az a speciális esete, amikor $R^n=R$, $r=0$, $[\sigma,\infty)\times\Omega=E$ és $F(t,\varphi)=g(t,\varphi(0))$.

<u>3.1 Tétel</u> Legyen E nyilt halmaz R^2-ben, $g:E\to R$ folytonos függvény és $u_0\in R$. Tegyük fel, hogy $[\sigma,A)$ a legnagyobb intervallum, amelyen a (3.1) egyenlet (σ,u_0)-on átmenő u maximális megoldása létezik. Ha $m:[\sigma,A)\to R$ folytonos függvény, $t\in[\sigma,A)$ esetén $(t,m(t))\in E$, $m(\sigma)\leq u_0$ és

$$D_+ m(t)\leq g(t,m(t)), \quad t\in[\sigma,A)\setminus S,$$

ahol $S(\subset R)$ legfeljebb megszámlálható számosságu halmaz, akkor

$$m(t)\leq u(t), \quad t\in[\sigma,A).$$

A 3.1 Tételt [27]-ben ugyanilyen formában kimondva tárgyalja V. LAKSHMIKANTHAM és S. LEELA, ezért itt a bizonyitást elhagyjuk.

<u>3.1 Megjegyzés</u> A 3.1 Tétel a D_+ jobboldali alsó derivált helyett a D^+ jobboldali felső deriváltra is érvényes.

IV. A MEGOLDÁSOK LÉTEZÉSE, EGYÉRTELMÜSÉGE, FOLYTATHATÓSÁGA ÉS FOLYTONOS FÜGGÉSE

A 2. pontban definiáltuk a (2.1) egyenlet (ξ,φ)-n átmenő megoldását. Tetszőleges $\varphi\in H$ kezdőfüggvényre azonban nem feltétlenül létezik (ξ,φ)-n átmenő megoldás. A kezdőfüggvények terének, azaz azon $\varphi\in H$ függvények halmazának a megválasztása, amelyekre a megoldások egzisztenciája, unicitása, folytathatósága és a kezdeti adatoktól való folytonos függése állitható, végtelen retardálás $(r=\infty)$ esetén nehéz feladat. Ha a retardálás véges $(r<\infty)$, akkor a megoldás folytonosságából következik, hogy $t\geq\xi+r$-re az x_t már a $[-r, 0]$ -ból R^n-be képező folytonos függvények terébe tartozik, ezért a kezdőfüggvények terének a $C([-r,0], R^n)$ választható. Végtelen retardálás esetén azonban az x_t mindig tartalmazza részeként a kezdeti függvényt.

J.K. HALE és J. KATO [17] 1978-ban bizonyos alaptulajdonságokkal rendelkező kezdőfüggvényterekre, ugynevezett axiomatizált terekre végtelen retardálásu funkcionál differenciálegyenletek megoldásainak létezését, egyértelmüségét, folytathatóságát és a kezdeti adatoktól való folytonos függését bizonyitották. Ezen eredmények közül néhányat, amelyeket alkalmazni fogunk, bizonyitás nélkül ismertetünk. Itt nem soroljuk fel azokat az axiomákat, amelyeket a kezdőfüggvények terének ki kell elégitenie [17]-ben. Ehelyett négy olyan alaptulajdonságot követelünk meg, amelyek egyrészt következnek J.K. HALE és J. KATO axiomáiból, másrészt elegendőek a 4.1-4.5 Tételek bizonyitásához.

Legyen $B \subset H$ és B -n egy $|\cdot|_B$ norma. Ha $\varphi, \psi \in B$ és $|\varphi - \psi|_B = 0$, akkor a φ, ψ elemeket nem tekintjük különbözőnek. Tegyük fel, hogy a $|\cdot|_B$ normával ellátott B tér Banach tér. B -re teljesüljenek az alábbi feltételek:

ha x a $(-\infty, A)$ -n értelmezett, $[\sigma, A)$ -n folytonos R^n-értékü függvény, $\sigma < A$, $x_\sigma \in B$, akkor bármely $t \in [\sigma, A)$-ra

(A1) $x_t \in B$,

(A2) x_t folytonos függvénye t-nek a $|\cdot|_B$ normából származtatott metrikában,

(A3) van olyan $K > 0$, hogy

$$K\,|x(t)| \leqq |x_t|_B \,,$$

(A4) léteznek olyan $K_1(s)$, $K_2(s)$ folytonos függvények, hogy
$$|x_t|_B \leqq K_1(t-\sigma) \sup_{\sigma \leqq s \leqq t} |x(s)| + K_2(t-\sigma)\,|x_\sigma|_B \,.$$

Tekintsünk néhány speciális példát olyan terekre, amelyek kielégitik az $(A1-A4)$ feltételeket.

4.1 Példa Legyen $\gamma \in R$ és
$$B = \left\{ \varphi \in C\left((-\infty, 0], R^n\right) : \lim_{s \to -\infty} e^{\gamma s} \cdot \varphi(s) \ \text{létezik} \right\},$$
$$|\varphi|_B = \sup_{-\infty < s \leqq 0} e^{\gamma s} |\varphi(s)| .$$

Az (A1) igazolásához elegendő megemliteni, hogy ha
$\lim_{s \to -\infty} e^{\gamma s} \cdot x(\sigma + s) = a$, akkor $\lim_{s \to -\infty} e^{\gamma s} x(t+s) = a\,e^{-\gamma(t-\sigma)}$.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Létezik $s_0 < 0$ és $\delta_1(\varepsilon) > 0$ ugy, hogy $t, t' \in [\sigma, A)$, $|t'-t| < \delta_1(\varepsilon)$ és $s \leqq s_0$ esetén $e^{\gamma s}|x(t+s) - x(t'+s)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel $e^{\gamma s} x(t+s)$ az $[s_0, 0]$ intervallumon egyenletesen folytonos, található olyan $\delta_2(\varepsilon) > 0$, hogy
$$\sup_{s_0 \leqq s \leqq 0} e^{\gamma s} |x(t+s) - x(t'+s)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } |t'-t| < \delta_2(\varepsilon).$$
Ha $|t'-t| < \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$, akkor
$$|x_t - x_{t'}|_B = \sup_{s \leqq 0} e^{\gamma s} |x(t+s) - x(t'+s)| \leqq$$
$$\leqq \sup_{s \leqq s_0} e^{\gamma s} |x(t+s) - x(t'+s)| + \sup_{s_0 \leqq s \leqq 0} e^{\gamma s} |x(t+s) - x(t'+s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tehát x_t folytonos t-ben.

Az (A3) feltétel a $K = 1$ konstanssal, (A4) pedig a
$K_1(s) = \sup_{-s \leqq t \leqq 0} e^{\gamma t}$, $K_2(s) = e^{-\gamma s}$ függvényekkel teljesül.

Ezt a függvényteret használta a megoldások aszimptotikus viselkedésének vizsgálatára J. KATO [23].

<u>4.2 Példa</u> Legyen $r < \infty$ és

$$B = C([-r,0], R^n),$$

$$|\varphi|_B = \sup_{-r \leq s \leq 0} |\varphi(s)|.$$

Könnyen belátható, hogy az $(A1 - A4)$ tulajdonságokkal rendelkezik ez a tér is.

Véges retardálás esetén $(r < \infty)$ ez a leggyakrabban használt kezdőfüggvénytér [10, 16, 24].

<u>4.3 Példa</u> Legyen $p \geq 1$ és

$$B = \Big\{ \varphi : \varphi \in H,\ \varphi \text{ mérhető } (-\infty,-r] \text{ -en, folytonos } [-r,0] \text{ -n,}$$

$$|\varphi|_B < \infty \Big\},$$

$$|\varphi|_B = \left[\sup_{-r \leq s \leq 0} |\varphi(s)|^p + \int_{-\infty}^{0} g(s) |\varphi(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}},$$

ahol $g : (-\infty, 0] \to R^+$ olyan lokálisan Lebesgue-integrálható függvény, hogy minden $t \leq 0$ esetén $\operatorname{ess.sup} \{ g(s) : t \leq s \leq 0 \} < \infty$ és

$$g(t+s) \leq G(t) g(s),$$

ha $t \leq 0$ és $s \in (-\infty, 0] \setminus N_t$, ahol $N_t \subset (-\infty, 0]$ nullamértékü halmaz, $G : (-\infty, 0] \to R^+$. A g-re tett feltételek teljesülnek például akkor, ha g monoton növő.

B.D. COLEMAN és V.J. MIZEL [4, 5] vizsgálták ezt a kezdőfüggvényteret. Megmutatták, hogy ha g a fenti tulajdonságu, akkor B-re igazak az (A1 - A4) tulajdonságok. (A4)-ben

$$K_1(s) = \left[1 + \int_{-s}^{0} g(t) dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$K_2(s) = \max \left\{ \chi_r(s),\ \operatorname*{ess.sup}_{t \leq 0} \left[\frac{g(t-s)}{g(t)} \right]^{\frac{1}{p}} \right\}, \quad \chi_r(s) = \begin{cases} 0, & s > r \\ 1, & s \leq r \end{cases}.$$

A $\mathcal{B}$ térnek a termodinamikai, folytonos mechanikai alkalmazásokban van fontos szerepe [4, 5].

Legyen C Banach tér a $|\cdot|_C$ normával. Tekintsük a

$$(2.1_\lambda) \qquad \dot{x}(t) = \mathcal{F}_\lambda(t, x_t)$$

egyenletet, ahol $\mathcal{F}$ egy λ paramétertől is függ, $\lambda \in C$.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}: [\sigma, \infty) \times \Omega \to R^n$ és $\mathcal{F}_\lambda: [\sigma, \infty) \times \Omega \to R^n$ folytonos függvények, $\Omega \subset \mathcal{B}$ és Ω nyilt halmaz $\mathcal{B}$-ben.

<u>4.1 Tétel</u> (Egzisztencia) Bármely $\varphi \in \Omega$ esetén a (2.1) egyenletnek létezik (σ, φ)-n átmenő megoldása.

<u>4.2 Tétel</u> (Unicitás) Ha van egy L konstans ugy, hogy bármely $(t, \varphi), (t, \psi) \in [\sigma, \infty) \times \Omega$-ra

$$|\mathcal{F}(t, \varphi) - \mathcal{F}(t, \psi)| \leq L\, |\varphi - \psi|_{\mathcal{B}},$$

akkor létezik olyan $L(s)$ folytonos függvény, hogy

$$|x_t(\sigma, \varphi) - x_t(\sigma, \psi)|_{\mathcal{B}} \leq L(t-\sigma)\, |\varphi - \psi|_{\mathcal{B}}, \qquad t \geq \sigma.$$

Speciálisan, (2.1)-nek pontosan egy (σ, φ)-n átmenő megoldása van.

<u>4.3 Tétel</u> (Folytathatóság) Ha x a (2.1) egyenletnek nem folytatható megoldása $[\sigma, A)$-n, akkor bármely $W \subset [\sigma, \infty) \times \Omega$ kompakt halmazhoz van egy t_W, hogy $(t, x_t) \notin W$, ha $t_W \leq t < A$.

<u>4.4 Tétel</u> (Folytathatóság) Ha a 4.3 Tétel feltételei mellett az $\mathcal{F}$ a $[\sigma, \infty) \times \Omega$ korlátos, zárt részhalmazait az R^n korlátos halmazaiba képezi, akkor bármely $W \subset [\sigma, \infty) \times \Omega$ korlátos, zárt halmazhoz létezik egy $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ sorozat, hogy $t_k \to A-0$, ha $k \to \infty$ és $(t_k, x_{t_k}) \notin W$.

<u>4.5 Tétel</u> (Folytonos függés) Ha a (2.1_{λ_0}) egyenletnek létezik pontosan egy $x^{\lambda_0}(\sigma,\varphi)$ megoldása $[\sigma, A]$ -n, $\sigma < A$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $(s,\psi) \in [\sigma,\infty) \times \Omega$, $|s-\sigma| < \delta(\varepsilon)$, $|\varphi-\psi|_{\mathcal{B}} < \delta(\varepsilon)$ és $|\lambda-\lambda_0|_C < \delta(\varepsilon)$ esetén

$$|x_t^{\lambda}(s,\psi) - x_t^{\lambda_0}(\sigma,\varphi)|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$$

minden $t \in [\max\{s,\sigma\}, A]$ -ra, ahol $x^{\lambda}(s,\psi)$ a (2.1_{λ}) egyenletnek (s,ψ) -n átmenő megoldása.

<u>4.1 Megjegyzés</u> A 4.3 Tételnek a J.K. HALE és J. KATO-féle axiomatizált kezdőfüggvénytérre vonatkozó alakja K. SAWANO [39] eredménye. A 4.5 Tételt valamivel gyengébb feltételek mellett Y. HINO [48] bizonyitotta először.

V. RAZUMIHIN TIPUSU TÉTELEK SKALÁR LJAPUNOV FÜGGVÉNYEK KONVERGENCIÁJÁRA

Ebben a pontban véges retardálásu $(r < \infty)$ egyenletekkel foglalkozunk. A kezdőfüggvények tere legyen a szuprémum normával ellátott $C = C([-r,0], R^n)$ tér. Feltételezzük, hogy a (2.1) egyenlet általunk vizsgált megoldásai a $[\sigma,\infty)$ félegyenesen léteznek. Ezt biztositó elegendő feltételeket nyerhetünk a 4.1, 4.3 és 4.4 Tételekből.

1. Legyen V egy skalárértékü Ljapunov függvény. Az alábbi tételek a Ljapunov függvénynek a (2.1) egyenlet megoldásai mentén vett határértékének létezését, a konvergencia gyorsaságát tárgyalják.

5.1 Tétel Legyen x a (2.1) egyenlet megoldása. Tegyük fel, hogy

(i) $V(t,x(t))$ alulról korlátos $[\sigma,\infty)$ -en,

(ii) ha $t \geqq \sigma$, $\varphi \in C$ és

(5.1) $$h_1(V(t,\varphi(0))) > \overline{V}(t,\varphi),$$

akkor

(5.2) $$D^+_{(2.1)} V(t,\varphi) \leqq f_1(t)\, g_1(V(t,\varphi(0)), \overline{V}(t,\varphi)),$$

ahol $h_1 : R \to R$ folytonos, monoton növő függvény, $h_1(s) > s$, $s \in R$, az $f_1 : [\sigma-r,\infty) \to R^+$ függvény folytonos és létezik $K_1 \in R^+$ ugy, hogy minden $t \geqq \sigma$ esetén

(5.3) $$\int_{t-r}^{t} f_1(s)\,ds \leqq K_1,$$

a $g_1 : R\times R \to R$ függvény folytonos, $g_1(u,\cdot)$ monoton növő, $u<v$ esetén $g_1(u,v) > 0$ és

(5.4) $$\int_{u}^{v} \frac{ds}{g_1(s,v)} = \infty.$$

Akkor $\overline{V}(t,x_t)$ monoton csökkenő és a $\lim\limits_{t\to\infty} V(t,x(t))$ határérték létezik.

Bizonyitás. Legyen $v(t) = V(t,x(t))$, $\overline{v}(t) = \overline{V}(t,x_t)$. Először jegyezzük meg, hogy (2.2) alapján $D^+v(t) = D^+_{(2.1)} V(t,x_t)$, $t \geqq \sigma$. A bizonyitás első részében megmutatjuk, hogy $\overline{v}(t)$ monoton csökkenő. Ha nem, akkor van olyan $t_0 \geqq \sigma$ és t_0 bármely jobboldali környezetében egy t ugy, hogy

(5.5) $$a = v(t_0) = \overline{v}(t_0) < \overline{v}(t).$$

Léteznek továbbá t_1, t_2, b számok a következő tulajdonságokkal:

(5.6) $$t_0 \leqq t_1 < t_2, \quad t_2 - t_1 \leqq r,$$

$$(5.7) \qquad a = v(t_1) < v(t_2) = b,$$

$$(5.8) \qquad \bar{v}(t_1) \leqq b,$$

$$(5.9) \qquad a \leqq v(t) \leqq b \qquad (t \in [t_1, t_2]),$$

$$(5.10) \qquad h_1(a) > b.$$

(5.8), (5.9) és (5.10)-ből következik, hogy $h_1(v(t)) > \bar{v}(t)$ és $\bar{v}(t) \leqq b$, ha $t \in [t_1, t_2]$. Igy (ii) és $g_1(u,\cdot)$ monotonitása alapján

$$(5.11) \qquad \begin{cases} D^+ v(t) \leqq f_1(t)\, g_1(v(t), b) & (t \in [t_1, t_2]), \\ v(t_1) = a. \end{cases}$$

Tekintsük az

$$(5.12) \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) = f_1(t)\, g_1(u(t), b) & (t \in [t_1, t_2]), \\ u(t_1) = a \end{cases}$$

kezdetiérték-problémát. (5.3) és (5.6) alapján (5.12) u^o maximális megoldására

$$\int_{t_1}^{t} \frac{\dot{u}^o(s)\, ds}{g_1(u^o(s), b)} = \int_{a}^{u^o(t)} \frac{du}{g_1(u, b)} = \int_{t_1}^{t} f_1(s)\, ds \leqq K_1 \qquad (t \in [t_1, t_2]).$$

Ebből és (5.4)-ből adódik, hogy $u^o(t) < b$, ha $t \in [t_1, t_2]$. Alkalmazva a 3.1 Tételt (5.11) és (5.12)-re, $v(t_2) < b$-t kapjuk, ami ellentmond (5.7)-nek. Tehát $\bar{v}(t)$ monoton csökkenő.

Tegyük fel, hogy a $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ határérték nem létezik. Ekkor (i)-ből és $\bar{v}$ monotonitásából olyan t_3, t_4, c, d, e számok létezése következik, hogy

$$\lim_{t \to \infty} \bar{v}(t) = d,$$

$$(5.13) \qquad \sigma \leqq t_3 < t_4, \quad t_4 - t_3 \leqq r,$$

$$(5.14) \qquad c = v(t_3) < v(t_4) = d,$$

$$(5.15) \qquad c \leqq v(t) \leqq d \qquad (t \in [t_3, t_4]),$$

$$(5.16) \qquad \bar{v}(t_3) \leqq e,$$

$$(5.17) \qquad h_1(c) > e,$$

és minden $t' \geqq \sigma$ esetén az

$$(5.18) \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) = f_1(t)\, g_1(u(t), e) \\ u(t'-r) = c \end{cases} \qquad \left(t \in [t'-r, t']\right),$$

kezdetiérték-probléma u° maximális megoldására az

$$(5.19) \qquad u^\circ(t) < d \qquad \left(t \in [t'-r, t']\right)$$

becslés érvényes. Ha ilyen e szám nincs, akkor van olyan $t' \geqq \sigma$ és $t'' \in [t'-r, t']$, hogy $u^\circ(t) < d$, ha $t \in [t'-r, t'')$ és $u^\circ(t'') = d$. Innen (5.3) felhasználásával

$$\int_{t'-r}^{t''} \frac{\dot{u}^\circ(s)\,ds}{g_1(u(s), e)} = \int_c^d \frac{du}{g_1(u, e)} = \int_{t'-r}^{t''} f_1(s)\,ds \leqq K_1$$

minden $e > d$-re. Ez ellentmondás, mert $g_1(u, \cdot)$ monotonitása és (5.4) alapján

$$\int_c^d \frac{du}{g_1(u, e)} \to \int_c^d \frac{du}{g_1(u, d)} = \infty \qquad (e \to d,\ e > d).$$

(5.15), (5.16) és (5.17)-ből kapjuk, hogy $h_1(v(t)) > \bar{v}(t)$ és $\bar{v}(t) \leqq e$, ha $t \in [t_3, t_4]$. A $g_1(u, \cdot)$ monotonitásából és (ii)-ből következik, hogy

$$(5.20) \qquad \begin{cases} D^+ v(t) \leqq f_1(t)\, g_1(v(t), e) \\ v(t_3) = c. \end{cases} \qquad \left(t \in [t_3, t_4]\right),$$

Legyen $t' = t_3 + r$. Ekkor (5.13)-ból $t_4 \leqq t'$ adódik. Alkalmazva (5.18)-ra és (5.20)-ra a 3.1 Tételt, hasonlóan mint a bizonyitás első részében, az (5.14)-nek ellentmondó $v(t_4) < d$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ez az ellentmondás tételünk állitását igazolja.

<u>5.1 Következmény</u> Legyen x a (2.1) egyenlet megoldása. Tegyük fel, hogy

(i) $V(t,x(t))$ felülről korlátos $[\sigma,\infty)$ -en,

(ii) ha $t \geq \sigma$, $\varphi \in C$ és

$$h_2\left(V(t,\varphi(0))\right) < \underline{V}(t,\varphi),$$

akkor

$$D_{+(2.1)}V(t,\varphi) \geq f_2(t)\, g_2\left(V(t,\varphi(0)), \underline{V}(t,\varphi)\right),$$

ahol $h_2 : R \to R$ folytonos, monoton növő függvény, $h_2(s) < s$, $s \in R$, az $f_2 : [\sigma - r, \infty) \to R^+$ függvény folytonos és létezik $K_2 \in R^+$ ugy, hogy minden $t \geq \sigma$ esetén

$$\int_{t-r}^{t} f_1(s)\,ds \leq K_2 ,$$

a $g_2 : R \times R \to R$ függvény folytonos, $g_2(u,\cdot)$ monoton növő, $u > v$ esetén $g_2(u,v) < 0$ és

$$\int_{u}^{v} \frac{ds}{g_2(s,v)} = \infty .$$

Akkor $\underline{V}(t,x_t)$ monoton növő és a $\lim_{t\to\infty} V(t,x(t))$ határérték létezik.

Bizonyitás. Alkalmazzuk az 5.1 Tételt a $-V(t,x)$ Ljapunov függvényre a $h_1(s) = -h_2(-s)$, $f_1(t) = f_2(t)$, $K_1 = K_2$, $g_1(u,v) = -g_2(-u,-v)$ esetben.

5.2 Tétel Legyen x a (2.1) egyenlet megoldása. Tegyük fel, hogy teljesülnek az 5.1 Tétel és az 5.1 Következmény feltételei. Legyen továbbá $r > 0$ és minden $u_1 < v_1 < w_1$, $u_2 > v_2 > w_2$ -höz létezzen $\alpha > 0$ ugy, hogy

(i) $\displaystyle\int_{u_1}^{v_1} \frac{ds}{g_1(s,w_1)} \leq K_1$ -ből $\displaystyle\frac{w_1 - v_1}{w_1 - u_1} \geq \alpha$ következik,

(ii) $\displaystyle\int_{u_2}^{v_2} \frac{ds}{g_2(s,w_2)} \leq K_2$ -ből $\displaystyle\frac{w_2 - v_2}{w_2 - u_2} \geq \alpha$ következik.

Akkor van olyan $c \in R$ és $M>0$, hogy $t \geq \sigma$ esetén
$$|V(t, x(t)) - c| \leq M e^{-\beta t},$$
ahol $\beta = -\frac{1}{2r} \log(1-\alpha)$.

Bizonyitás. Legyen $v(t) = V(t, x(t))$, $\bar{v}(t) = \overline{V}(t, x_t)$, $\underline{v}(t) = \underline{V}(t, x_t)$. Az 5.1 Tétel és az 5.1 Következmény szerint $\bar{v}$ monoton csökkenő, $\underline{v}$ monoton növő függvény és van egy $c \in R$, amelyre $\lim_{t\to\infty} \underline{v}(t) = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \bar{v}(t) = c$. Innen következik, hogy minden $t \geq \sigma$ -hoz létezik $t' \in [t-r, t]$, melyre $v(t') = c$, továbbá van egy $T \geq \sigma$ ugy, hogy $t \geq T$ esetén $h_1(v(t)) > \bar{v}(t)$, $h_2(v(t)) < \underline{v}(t)$. Legyen $t \geq T + 2r$, $t_0 \in [t-r, t]$, $v(t_0 - r) = c$, $w_1 = \bar{v}(t_0 - r)$. Tekintsük az

$$\text{(5.21)} \qquad \begin{cases} \dot{u}(s) = f_1(s)\, g_1(u(s), w_1) & \left(s \in [t_0 - r, t_0]\right), \\ u(t_0 - r) = c \end{cases}$$

kezdetiérték-problémát. (5.21) u^0 maximális megoldására
$$\int_{t_0-r}^{s} \frac{\dot{u}^0(v)\,dv}{g_1(u^0(v), w_1)} = \int_{c}^{u^0(s)} \frac{du}{g_1(u, w_1)} = \int_{t_0-r}^{s} f_1(u)\,du \leq K_1 \qquad \left(s \in [t_0 - r, t_0]\right).$$
Ebből (i) alkalmazásával az következik, hogy

$$\text{(5.22)} \qquad u^0(s) - c \leq (1-\alpha)(w_1 - c) \qquad \left(s \in [t_0 - r, t_0]\right).$$

Ugy, mint az 5.1 Tétel bizonyitásában, a 3.1 Tétel felhasználásával az (5.21) és (5.22) alapján kapjuk, hogy
$$v(s) - c \leq (1-\alpha)(w_1 - c) \qquad \left(s \in [t_0 - r, t_0]\right).$$
A $\bar{v}$ monotonitásából

$$\text{(5.23)} \qquad \bar{v}(t) - c \leq (1-\alpha)\left(\bar{v}(t-2r) - c\right),$$

ha $t \geq T + 2r$. Legyen $t \in [T + 2kr, T + 2(k+1)r)$, ahol k pozitiv egész. Ekkor (5.23)-ból

$$(5.24)\quad \begin{aligned} \bar{v}(t)-c &\leq (1-\alpha)\left(\bar{v}(t-2r)-c\right) \leq (1-\alpha)^2\left(\bar{v}(t-4r)-c\right) \leq \\ &\leq \dots \leq (1-\alpha)^k\left(\bar{v}(t-2kr)-c\right) \leq (1-\alpha)^k\left(\bar{v}(T)-c\right) = \\ &= (1-\alpha)^{\frac{t}{2r}}(1-\alpha)^{k-\frac{t}{2r}}\left(\bar{v}(T)-c\right) \leq \\ &\leq (1-\alpha)^{-\left(\frac{T}{2r}+1\right)}\left(\bar{v}(T)-c\right)(1-\alpha)^{\frac{t}{2r}}. \end{aligned}$$

Hasonlóan mutatható meg, hogy

$$(5.25)\qquad c-\underline{v}(t) \leq (1-\alpha)^{-\left(\frac{T}{2r}+1\right)}\left(c-\underline{v}(T)\right)(1-\alpha)^{\frac{t}{2r}} \qquad \left(t \geq T+2r\right).$$

A $\bar{v}, \underline{v}$ monotonitásából és (5.24), (5.25)-ből könnyen következik állitásunk.

2. Az 5.1 Tétel és az 5.1 Következmény a $V(t,x)=|x|$ esetben a megoldások normája határértékének létezésére adnak elegendő feltételt. Az alábbiakban speciális alaku egyenletekre alkalmazzuk ezt az általános eredményt.

Tekintsük az

$$(5.26)\qquad \dot{x}(t) = f(t,x(t)) + g(t,x_t)$$

egyenletet, amely (2.1)-nek az a speciális esete, amikor $F(t,\varphi) = f(t,\varphi(0)) + g(t,\varphi)$.

<u>5.3 Tétel</u> Legyen x az (5.26) egyenlet megoldása. Tegyük fel, hogy $p: [\sigma-r, \infty) \to R^+$, $q: R \to R$ olyan folytonos függvények, amelyekre

(i) létezik $K>0$, hogy $t \geq \sigma$ esetén

$$(5.27)\qquad \int_{t-r}^{t} p(s)\,ds \leq K,$$

(ii) q monoton növő és ha $u<v$, akkor

$$(5.28)\qquad \int_{u}^{v} \frac{ds}{q(v)-q(s)} = \infty,$$

(iii) bármely $t \geq \sigma$ -ra és $\varphi \in C$ -re

$$|g(t,\varphi)| \leq p(t)\, q\Big(\max_{-r \leq s \leq 0} |\varphi(s)|\Big), \tag{5.29}$$

$$\overline{\lim_{h\to 0+}}\, \frac{1}{h}\Big(|\varphi(0)+h f(t,\varphi(0))| - |\varphi(0)|\Big) \leq -p(t)\, q(|\varphi(0)|). \tag{5.30}$$

Akkor $\max\limits_{-r \leq s \leq 0} |x(t+s)|$ monoton csökken és a $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)|$ határérték létezik.

Bizonyitás. Az 5.1 Tételt alkalmazzuk a $V(t,x) = |x|$, $f_1(t) = p(t)$, $g_1(u,v) = q(v) - q(u)$ esetben. (5.27)-ből és (5.28)-ból következik (5.3) és (5.4). A Ljapunov függvény deriváltjára vonatkozó becslést (5.29) és (5.30) alapján a következő módon kaphatjuk:

$$D^+_{(5.26)} |\varphi| = \limsup_{h\to 0+} \frac{1}{h}\Big(|\varphi(0) + h f(t,\varphi(0)) + h g(t,\varphi)| - |\varphi(0)|\Big) \leq$$

$$\leq \limsup_{h\to 0+} \frac{1}{h}\Big(|\varphi(0) + h f(t,\varphi(0))| - |\varphi(0)|\Big) + |g(t,\varphi)| \leq$$

$$\leq p(t)\Big[q\Big(\max_{-r\leq s\leq 0} |\varphi(s)|\Big) - q(|\varphi(0)|)\Big].$$

Tehát az 5.1 Tétel alkalmazható.

A skalár esetben $(R^n = R)$ érvényes az (5.26) egyenletre a következő tétel.

5.4 Tétel Legyen x az (5.26) egyenlet megoldása. Tegyük fel, hogy $f(t,0) \equiv 0$ és bármely $t \geq \sigma$, $\varphi \in C$ esetén

(i) $\varphi(0) f(t,\varphi(0)) \leq -a(t)\varphi^2(0)$,

(ii) $|g(t,\varphi)| \leq a(t) \max\limits_{-r\leq s\leq 0} |\varphi(s)|$,

(iii) $\int\limits_{t-r}^{t} a(s)\, ds \leq K$, ahol $\alpha : [\sigma - r, \infty) \to R^+$ folytonos függvény.

Akkor a $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ határérték létezik.

Bizonyitás. Az 5.3 Tételt alkalmazzuk a $p(t) = \alpha(t)$, $q(u) = u$ esetben. Könnyü látni, hogy (5.27), (5.28), (5.29) és a $\varphi(0) = 0$ esetben (5.30) érvényes. Ha $\varphi(0) \neq 0$, akkor

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left(|\varphi(0) + h f(t,\varphi(0))| - |\varphi(0)|\right) =$$

$$= \limsup_{h\to 0+} |\varphi(0)| \frac{1}{h}\left[1 + h \frac{f(t,\varphi(0))}{\varphi(0)} - 1\right] \leq -\alpha(t)\,|\varphi(0)|.$$

Tehát az 5.3 Tétel feltételei igazak. Mivel skalár egyenletet vizsgáltunk, következik a $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ határérték létezése is.

3. Most olyan egyenletet fogunk vizsgálni, amelynek a biológiai, kémiai alkalmazásokban fontos szerepe van [7]. Tekintsük az

$$(5.31)\qquad \dot{x}(t) = -h(x(t)) + h(x(t - \tau(t))) \qquad (x(t) \in R)$$

differenciálegyenletet, ahol $h : R \to R$, $\tau : [\sigma, \infty) \to [0, r]$ folytonos függvények. Az (5.31) egyenlet az (5.26)-nak az a speciális esete, amikor $f(t,\varphi(0)) = -h(\varphi(0))$, $g(t,\varphi) = h(\varphi(-\tau(t)))$.

5.5 Tétel Legyen x az (5.31) egyenlet egy megoldása. Ha a h függvény monoton növő és lokális Lipschitz feltételnek tesz eleget legfeljebb egy pont kivételével, akkor a $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ határérték létezik.

Bizonyitás. Feltehető, hogy h a 0 pont kivételével tesz eleget lokális Lipschitz feltételnek. Először megmutatjuk, hogy x korlátos. Ha x nem korlátos $[\sigma, \infty)$ -en, akkor létezik olyan $t' \geq \sigma$, hogy vagy $\dot{x}(t') > 0$ és $x(t') \geq x(t' - \tau(t'))$ vagy $\dot{x}(t') < 0$ és

$x(t') \leqq x(t'-\tau(t'))$. A h monotonitásából az első esetben $\dot{x}(t') \leqq 0$, a másodikban $\dot{x}(t') \geqq 0$, ami ellentmondás. Tehát x korlátos. Legyen $m = \liminf_{t\to\infty} x(t)$, $M = \limsup_{t\to\infty} x(t)$. Tegyük fel, hogy $M > m$ és $M \neq 0$. Az 5.1 Tételt alkalmazzuk az $R^n = R$, $V(t,x) = x$, $f_1(t) \equiv 1$, $g_1(u,v) = h(v) - h(u)$ esetben azzal a megjegyzéssel, hogy (5.4)-et elég a $\limsup_{t\to\infty} V(t, x(t))$ egy környezetéből vett u, v esetén megkövetelni. Ha $u, v \in (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$, ahol $0 < \varepsilon < |M|$, akkor van olyan L , hogy $h(u) - h(v) \leqq L|u-v|$ és igy $\int_u^v \frac{ds}{h(v)-h(s)} \geqq \int_u^v \frac{ds}{L(v-s)} = \infty$, $u < v$.
A Ljapunov függvény deriváltjára vonatkozó becslés $D^+_{(5.31)} x_t = \dot{x}(t)$-ből könnyen látható. Tehát az 5.1 Tétel alkalmazható: $\lim_{t\to\infty} x(t)$ létezik. Ha $M = 0$, akkor $m \neq M$ esetén $m \neq 0$ és az 5.1 Következmény alkalmazható.

<u>5.6 Tétel</u> Legyen x az (5.31) egyenlet (σ, φ) -n átmenő megoldása. Ha a h függvény monoton növő és a $\left[\min_{-r\leqq s\leqq 0} \varphi(s), \max_{-r\leqq s\leqq 0} \varphi(s)\right]$ intervallumon Lipschitz feltételnek tesz eleget az L Lipschitz konstanssal, akkor van olyan $c \in R$ és $M > 0$, hogy

$$|x(t) - c| \leqq M e^{-\beta t} \qquad (t \geqq \sigma),$$

ahol $\beta = -\frac{1}{2r} \log(1 - e^{-Lr})$.

<u>Bizonyitás.</u> Az 5.2 Tétel alkalmazható az $R^n = R$, $V(t,x) = x$, $f_i(t) \equiv 1$, $K_i = r$, $g_i(u,v) = h(v) - h(u)$, $i = 1, 2$, esetben azzal a megjegyzéssel, hogy az 5.2 Tétel (i), (ii) feltételét elegendő $u_i, v_i, w_i \in \left[\min_{-r\leqq s\leqq 0} \varphi(s), \max_{-r\leqq s\leqq 0} \varphi(s)\right]$ esetén megkövetelni, $i = 1, 2$.

Ekkor ugyanis $\int_{u_i}^{v_i} \frac{ds}{L(w_i - s)} \leq \int_{u_i}^{v_i} \frac{ds}{h(w_i) - h(s)} \leq r$ -ből $\frac{w_i - v_i}{w_i - u_i} \geq e^{-Lr}$ következik, $i = 1, 2$. Tehát állitásunk az 5.2 Tétel következménye.

<u>5.7 Tétel</u> Legyen x az (5.31) egyenlet egy megoldása. Ha a h függvény monoton növő és $\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$, akkor a $\lim_{t \to \infty} x(t)$ határérték létezik.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel $r(t) \to 0$, ha $t \to \infty$, létezik $T(\varepsilon) > \sigma + \varepsilon$, hogy $r(t) \leq \varepsilon$, ha $t \geq T(\varepsilon) - \varepsilon$. Először megmutatjuk, hogy ha $t \geq T(\varepsilon)$, akkor $\max_{-\varepsilon \leq s \leq 0} x(t+s)$ monoton csökkenő. Ha nem lenne monoton csökkenő, akkor létezne $t_0 > T(\varepsilon)$ ugy, hogy $\dot{x}(t_0) > 0$ és $x(t_0) > x(t_0 + s)$, $-\varepsilon \leq s < 0$. Ekkor az (5.31) egyenlet és h monotonitása alapján $\dot{x}(t_0) = -h(x(t_0)) + h(x(t_0 - r(t_0))) \leq 0$, ami ellentmondás. Tehát $\max_{-\varepsilon \leq s \leq 0} x(t+s)$ monoton csökkenő, ha $t \geq T(\varepsilon)$. Hasonlóan mutatható meg, hogy $\min_{-\varepsilon \leq s \leq 0} x(t+s)$ monoton növő, ha $t \geq T(\varepsilon)$.
Legyen $m = \lim_{t \to \infty} \min_{-\varepsilon \leq s \leq 0} x(t+s)$, $M = \lim_{t \to \infty} \max_{-\varepsilon \leq s \leq 0} x(t+s)$.
Nyilván $m = \liminf_{t \to \infty} x(t)$, $M = \limsup_{t \to \infty} x(t)$. Rolle tételét alkalmazva kapjuk, hogy ha $t \geq T(\varepsilon)$, $t_1 = \max_{-\varepsilon \leq s \leq 0} x(t+s)$, $t_2 = \min_{-\varepsilon \leq s \leq 0} x(t+s)$, akkor létezik $t' \in (t_1, t_2)$, amelyre $\dot{x}(t') = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ (ha $t_1 > t_2$, akkor $t' \in (t_2, t_1)$). Mivel $|t_2 - t_1| \leq \varepsilon$, $|\dot{x}(t')| \geq \frac{M-m}{\varepsilon}$. Mivel ε tetszőleges kicsi volt, $m \neq M$ esetén létezik $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ sorozat, amelyre $t_k \to \infty$ és $|\dot{x}(t_k)| \to \infty$, ha $k \to \infty$.
Másrészt az (5.31) egyenletből $|\dot{x}(t)| \leq |h(K)| + |h(-K)|$, ha $|x(t)| \leq K$, $t \geq \sigma$. Ez ellentmondás, tehát a $\lim_{t \to \infty} x(t)$ határérték létezik.

4. A következő tételben egy lineáris differenciálegyenlet megoldásainak vizsgálatára az időfüggő $V(t,x) = k(t)|x|$ Ljapunov függvényt alkalmazzuk.

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\,x(t-\tau_i(t)) \qquad (x(t)\in R^n) \tag{5.32}$$

egyenletet, ahol $a,\ b_i,\ \tau_i : [\sigma,\infty) \to R$ folytonos függvények, $0 \leq \tau_i(t) \leq r,\quad i=1,\dots,m.$

<u>5.8. Tétel</u> Legyen x az (5.32) egyenlet egy megoldása $[\sigma,\infty)$ -en. Tegyük fel, hogy a $k : [\sigma-r,\infty) \to (0,\infty)$ függvény folytonos, lokális Lipschitz feltételnek tesz eleget és minden $t \geq \sigma$ esetén

$$k(t)\sum_{i=1}^{m} \frac{|b_i(t)|}{k(t-\tau_i(t))} \leq a(t) - \frac{D^+k(t)}{k(t)}, \tag{5.33}$$

és létezik $K>0$, hogy minden $t \geq \sigma$ -ra

$$\int_{t-r}^{t} k(s)\sum_{i=1}^{m} \frac{|b_i(s)|}{k(s-\tau_i(s))}\,ds \leq K. \tag{5.34}$$

Akkor a $\lim\limits_{t\to\infty} k(t)|x(t)|$ határérték létezik.

<u>Bizonyitás</u>. Az 5.1 Tételt alkalmazzuk a $V(t,x) = k(t)|x|$, $f_1(t) = k(t)\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{|b_i(t)|}{k(t-\tau_i(t))}$, $g_1(u,v) = v-u$, $K_1 = K$ esetben. Az 5.1 Tétel (i) feltétele nyilván teljesül, a (ii) feltételben (5.3) és (5.4) az $\int\limits_{u}^{v} \frac{ds}{v-s} = \infty$ -ből, $u<v$, és (5.34)-ből következik. Az (5.33) felhasználásával a Ljapunov függvény deriváltjára az alábbi becslést kapjuk:

$$D^+_{(5.32)} V(t,\varphi) = \limsup_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left[\left|k(t+h)\left(\varphi(0) - h\, a(t)\varphi(0) + h\sum_{i=1}^{m} b_i(t)\varphi(-\tau_i(t))\right)\right| - k(t)|\varphi(0)|\right]$$

$$\leq \limsup_{h\to 0+} \frac{1}{h}\Big[|\varphi(0)|\big(k(t+h)(1-h\,a(t)) - k(t)\big)\Big] + k(t)\sum_{i=1}^{m}|b_i(t)|\cdot|\varphi(-\tau_i(t))|$$

$$\leq k(t)|\varphi(0)|\left(\frac{D^+k(t)}{k(t)} - a(t)\right) + k(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{|b_i(t)|}{k(t-\tau_i(t))}\, k(t-\tau_i(t))|\varphi(-\tau_i(t))|$$

$$\leq k(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{|b_i(t)|}{k(t-\tau_i(t))}\,\bar{V}(t,\varphi) - \left(a(t) - \frac{D^+k(t)}{k(t)}\right)V(t,\varphi(0))$$

$$\leq k(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{|b_i(t)|}{k(t-\tau_i(t))}\Big[\bar{V}(t,\varphi) - V(t,\varphi(0))\Big].$$

Mivel az 5.1 Tétel feltételei érvényesek, a $\lim\limits_{t\to\infty} k(t)|x(t)|$ határérték létezik.

5.1 Megjegyzések Az 5.1 Tétel R^n helyett Banach térbeli egyenletekre is érvényes. A Ljapunov függvény deriváltja pozitiv is lehet a B.SZ. RAZUMIHIN [37] által bevezetett (5.1) halmazon. Az eddigi ilyen tipusu eredményekben a Ljapunov függvény deriváltját 0-val becsülték felülről (J. KATO [22], S.R. BERNFELD és J.R. HADDOCK [2]), igy az 5.1 Tétel ezek általánositása. A $g_1(u,v)$ -re kirótt feltételeket teljesiti például a $v-u$ függvény.

Ha az 5.2 Tételben $g_1(u,v) = g_2(u,v) = v-u$, akkor $\alpha = e^{-K}$, ahol $K = \max\{K_1, K_2\}$.

Az 5.3-5.7 Tételek a (2.1) egyenlet olyan speciális eseteit vizsgálják, amikor annak jobboldala egy ugynevezett közönséges és egy funkcionál részből áll és azok azonos nagyságrendüek. Ekkor S.R. BERNFELD és J.R. HADDOCK fentemlitett eredményei nem alkalmazhatók a megoldások határértéke létezésének bizonyitására, mivel a $V(t,x)=|x|$ Ljapunov függvény deriváltja pozitiv értéket is felvesz.

Az 5.3 Tétel feltételeiből általában nem következik a $\lim_{t\to\infty} x(t)$ határérték létezése, amit az $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1$ példa is mutat.

Ha a 5.4 Tétel feltételei mellett még

$$|g(t,\varphi)| \leq a(t)\gamma \max_{-r\leq s\leq 0}|\varphi(s)|,\quad 0\leq\gamma<1,\quad \int_{\sigma-r}^{\infty} a(t)\,dt=\infty$$

is igaz, akkor az $x=0$ megoldás aszimptotikusan stabilis (E. WINSTON [43]). Az 5.4 Tétel feltételeiből az $x=0$ megoldás aszimptotikus stabilitása nem következik (még akkor sem, ha $\int_{\sigma-r}^{\infty} a(t)\,dt=\infty$). Például az $\dot{x}(t) = -x(t)+x(t-1)$ egyenletnek minden konstans függvény megoldása.

<u>5.1 Példa</u> Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = -\sqrt[3]{x(t)} + \sqrt[3]{x(t-\tau(t))} \qquad (x(t)\in R)$$

egyenletet, ahol $\tau:[\sigma,\infty)\to[0,r]$ folytonos függvény. Mivel a $\sqrt[3]{u}$ függvény az $u=0$ pont kivételével lokális Lipschitz feltételnek tesz eleget, az 5.5 Tétel alkalmazásával kapjuk, hogy a $\lim_{t\to\infty} x(t)$ határérték létezik.

Ha a $\varphi\in C$ kezdőfüggvény olyan, hogy $0\notin\left[\min_{-r\leq s\leq 0}\varphi(s),\ \max_{-r\leq s\leq 0}\varphi(s)\right]$, akkor az $x(\sigma,\varphi)$ megoldás exponenciális gyorsasággal tart konstanshoz.

Példánk egy uj bizonyitása S.R. BERNFELD és J.R. HADDOCK [2] következő, 1977-ben kimondott sejtésének:

az $\dot{x}(t) = -\sqrt[3]{x(t)} + \sqrt[3]{x(t-r)}$ skalár egyenlet minden megoldása konstanshoz tart, ha $t \to \infty$.

A sejtést először C. JEHU [19] bizonyitotta.

<u>5.2 Példa</u> Legyen adva az

$$\dot{x}(t) = -h(x(t)) + h(x(t-\tau(t))) \qquad (x(t) \in R) \tag{5.35}$$

egyenlet, ahol

$$h(u) = \begin{cases} u & \text{, ha } u \leqq -1 \\ \sqrt{1-u^2} - 1 & \text{, ha } -1 < u \leqq 0 \\ 1 - \sqrt{1-u^2} & \text{, ha } 0 < u \leqq 1 \\ u & \text{, ha } 1 < u \end{cases}$$

és

$$\tau(t) = \begin{cases} t + \frac{3}{2}\pi & \text{, ha } 0 \leqq t < \frac{\pi}{2} \\ t - \arccos(2\cos t) + 2\pi & \text{, ha } \frac{\pi}{2} \leqq t < \frac{2}{3}\pi \\ t - \arccos(2 + 2\cos t) + \pi & \text{, ha } \frac{2}{3}\pi \leqq t < \pi \\ t + \frac{\pi}{2} & \text{, ha } \pi \leqq t < \frac{3}{2}\pi \\ t - \arccos(2\cos t) + \pi & \text{, ha } \frac{3}{2}\pi \leqq t < \frac{5}{3}\pi \\ t - \arccos(2 - \cos t) & \text{, ha } \frac{5}{3}\pi \leqq t < 2\pi \end{cases}$$

továbbá $\tau(t+2\pi) = \tau(t)$. Ekkor az (5.35) egynletnek $x(t) = \sin t$ megoldása. Azaz az 5.5 Tétel nem igaz, ha a h függvény két pont kivételével tesz eleget lokális Lipschitz feltételnek.

<u>5.3 Példa</u> Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) + b(t)\,x(t-\tau(t)) \qquad (x(t) \in R) \tag{5.36}$$

egyenletet, ahol $a > 0$, $b, \tau : [\sigma, \infty) \to R$ folytonos függvények, $0 \leqq \tau(t) \leqq r$. Az (5.36) egyenlet megoldásait az 5.8 Tétel segitségével vizsgáljuk három esetben.

1. eset: $|b(t)| \leq \gamma a, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad t \geq \sigma.$

Alkalmazzuk az 5.8 Tételt a $k(t) = \exp(\alpha t)$ esetben, ahol $\alpha > 0$ olyan, hogy $\gamma a \exp(\alpha r) \leq a - \alpha$ teljesüljön. Ilyen α van, mert a baloldal $\alpha \to 0$ esetén γa-hoz, a jobboldal pedig a-hoz tart. Az (5.33) és (5.34) feltételek teljesülnek, mert

$$e^{\alpha t} \frac{|b(t)|}{e^{\alpha(t - \tau(t))}} \leq e^{\alpha r} |b(t)| \leq e^{\alpha r} \gamma a \leq a - \alpha = a - \frac{D^+(e^{\alpha t})}{e^{\alpha t}}.$$

Tehát a $\lim_{t \to \infty} e^{\alpha t} x(t)$ határérték létezik. Ebből következik, hogy $x(t) \leq M e^{-\alpha t}$, ha $t \geq \sigma$, valamely $M > 0$-ra. Ezt az eredményt kapta más módszerrel N.N. KRASZOVSZKIJ [24] 1959-ben és J.K. HALE [16] 1971-ben.

2. eset: $|b(t)| \leq a, \quad t \geq \sigma.$

Legyen $k(t) \equiv 1$. Az 5.8 Tétel alkalmazásával a $\lim_{t \to \infty} x(t)$ határérték létezését nyerjük. Ez az eset N.N. KRASZOVSZKIJ [24] hires példája, amelyben ő az $x = 0$ megoldás stabilitását bizonyitotta. Itt azt kaptuk, hogy a feltételekből a megoldások konstanshoz tartása is következik.

3. eset: $\int_{t-\tau(t)}^{t} (a - |b(s)|)ds \leq 0, \quad \int_{t-r}^{t} |b(s)| \exp\left(\int_{s-\tau(s)}^{s} (a - |b(u)|)du \right) ds \leq K, \quad t \geq \sigma.$

Legyen $k(t) = \exp\left(\int_{\sigma}^{t} (a - |b(s)|) ds \right)$. Ekkor $\frac{D^+ k(t)}{k(t)} = a - |b(t)|$.

Az (5.33) és (5.34) feltételek teljesülése könnyen látható.

Tehát a

$$(5.37) \qquad \lim_{t \to \infty} x(t)\, e^{\int_{\sigma}^{t} (a - |b(s)|) ds}$$

határérték létezik. Ha

$$\int_{\sigma}^{\infty} \left(|b(s)| - a \right) ds < \infty,$$

akkor létezik a $\lim_{t\to\infty} x(t)$ határérték is. Igy például az

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) + \left(a + \frac{1}{(t-\sigma+1)^2}\right) x\,(t-\tau(t))$$

egyenlet minden megoldása konstanshoz tart. Az (5.37) segitségével a megoldások végtelenbe tartásának rendje is vizsgálható. Például az

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) + 2a\,x\,(t-r)$$

egyenlet minden x megoldására a $\lim_{t\to\infty} x(t)\,e^{-a(t-\sigma)}$ határérték létezik.

VI. VEKTOR LJAPUNOV FÜGGVÉNYEK KONVERGENCIÁJÁRÓL

1. Ebben a fejezetben vektorértékü Ljapunov függvények segitségével fogunk elegendő feltételeket adni bizonyos differenciálegyenlet-rendszerek megoldásainak konstanshoz tartására. Olyan egyenleteket mutatunk, amelyekre korábbi eredményeink nem alkalmazhatók.

A (2.1) egyenlet $[\sigma, \infty)$ -en létező megoldásait fogjuk vizsgálni az $r<\infty$ esetben a $C = C([-r,0], R^n)$ kezdőfüggvénytérrel.

Legyen $m \geq 1$ egész szám, $V=(V_1,\dots,V_m)$ Ljapunov függvény, $\Pi\ (\subset R^n)$ korlátos, zárt halmaz és $g=(g_1,\dots,g_m): \Pi \to R^n$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy g_i az i-edik változójában szigoruan monoton csökkenő, a j-edik változójában $(j \neq i)$ szigoruan monoton növő Π-n, továbbá létezik olyan $L>0$, hogy $L u_i + g_i(u_1,\dots,u_i,\dots,u_m)$ monoton növő u_i -ben Π-n, $i=1,\dots,m$, és $\sum_{i=1}^{m} g_i(u) = 0$, ha $u \in \Pi$.

A tétel kimondása előtt az alábbi lemmát bizonyitjuk.

6.1 Lemma Ha $a_i < b_i$, $i = 1,\dots,m$, $[a_1,b_1]\times\dots\times[a_m,b_m]\in\Pi$ és $g_i(b_1,\dots,b_m)=0$, $i=1,\dots,m$, akkor van olyan $(c_1,\dots,c_m)\in[a_1,b_1)\times\dots\times[a_m,b_m)$, hogy $g_i(c_1,\dots,c_m)=0$, $i=1,\dots,m$.

Bizonyitás A $c_1,\dots,c_m$ számokat transzfinit indukcióval fogjuk megkonstruálni.

Legyen $c_i^{(0)}=a_i$, $i=1,\dots,m$, és tegyük fel, hogy a $c_1^{(\alpha+1)},\dots,c_j^{(\alpha+1)},c_{j+1}^{(\alpha)},\dots,c_m^{(\alpha)}$ számokat már meghatároztuk ugy, hogy $\left(c_1^{(\alpha+1)},\dots,c_j^{(\alpha+1)},c_{j+1}^{(\alpha)},\dots,c_m^{(\alpha)}\right)\in[a_1,b_1]\times\dots\times[a_m,b_m]$, $0\leqq j\leqq m-1$. Ha $g_{j+1}\left(c_1^{(\alpha+1)},\dots,c_j^{(\alpha+1)},c_{j+1}^{(\alpha)},\dots,c_m^{(\alpha)}\right)\leqq 0$, akkor legyen $c_{j+1}^{(\alpha+1)}=c_{j+1}^{(\alpha)}$. Ha pedig $g_{j+1}\left(c_1^{(\alpha+1)},\dots,c_j^{(\alpha+1)},c_{j+1}^{(\alpha)},\dots,c_m^{(\alpha)}\right)>0$, akkor mivel g_{j+1} a $j+1$-edik változójában szigoruan csökkenő, a többi változójában szigoruan növő és $\left(c_1^{(\alpha+1)},\dots,c_j^{(\alpha+1)},c_{j+1}^{(\alpha)},\dots,c_m^{(\alpha)}\right)\in$ $\in[a_1,b_1]\times\dots\times[a_m,b_m]$, $g_{j+1}(b_1,\dots,b_m)=0$, létezik pontosan egy olyan $c_{j+1}^{(\alpha+1)}\in[a_{j+1},b_{j+1}]$, hogy $c_{j+1}^{(\alpha+1)}>c_{j+1}^{(\alpha)}$ és $g_{j+1}\left(c_1^{(\alpha+1)},\dots,c_j^{(\alpha+1)},c_{j+1}^{(\alpha+1)},c_{j+2}^{(\alpha)},\dots,c_m^{(\alpha)}\right)=0$ teljesül. Ha α limesz rendszám, akkor legyen $c_i^{(\alpha)}=\sup_{\beta<\alpha}c_i^{(\beta)}$, $i=1,\dots,m$.

Megmutatjuk, hogy a $c_i=c_i^{(\omega_1)}$, $i=1,\dots,m$, számok kielégitik a kivánt feltételeket (ω_1 az első nem megszámlálható rendszám). A konstrukció alapján nyilvánvaló, hogy $(c_1,\dots,c_m)\in[a_1,b_1]\times\dots\times[a_m,b_m]$. Ha valamely j-re $(1\leqq j\leqq m)$ $g_j(c_1,\dots,c_m)>0$, akkor minden $\beta<\omega_1$ esetén a $c_1^{(\beta+1)}>c_1^{(\beta)},\dots,c_m^{(\beta+1)}>c_m^{(\beta)}$ relációk közül legalább egy teljesül, azaz van olyan k $(1\leqq k\leqq m)$, hogy a $\{\beta:\ \beta<\omega_1$ és $c_k^{(\beta+1)}>c_k^{(\beta)}\}$ halmaz nem megszámlálható. Ez ellentmondás, mert a $(c_k^{(\beta)}, c_k^{(\beta+1)})$ intervallumok $(\beta < \omega_1)$ diszjunktak és megszámlálható sokan vannak. Tehát $g_i(c_1,\dots,c_m)=0$, $i=1,\dots,m$. Ha $c_i > a_i$, $i=1,\dots,m$, akkor van olyan β rendszám és j index $(1 \leqq j \leqq m)$, hogy $c_j^{(\beta+1)} > c_j^{(\beta)} = a_j$ és $c_1^{(\beta+1)} > a_1, \dots, c_{j-1}^{(\beta+1)} > a_{j-1}$, $c_{j+1}^{(\beta)} > a_{j+1}, \dots, c_m^{(\beta)} > a_m$. Ekkor $g_i\left(c_1^{(\beta+1)}, \dots, c_{j-1}^{(\beta+1)}, c_j^{(\beta)}, c_{j+1}^{(\beta)}, \dots, c_m^{(\beta)}\right) \geqq 0$ $i \neq j$ esetén és határozott egyenlőtlenség áll, ha $i=j$, amiből a $\sum_{i=1}^{m} g_i\left(c_1^{(\beta+1)}, \dots, c_{j-1}^{(\beta+1)}, c_j^{(\beta)}, c_{j+1}^{(\beta)}, \dots, c_m^{(\beta)}\right) > 0$ ellentmondást kapjuk. Tehát valamely j-re $c_j = a_j$ és igy a g_i-k monotonitási tulajdonságából $c_i < b_i$, $i = 1, \dots, m$. Ezzel állitásunkat igazoltuk.

<u>6.1 Tétel</u> Legyen x a (2.1) egyenlet megoldása $[\sigma, \infty)$-en. Tegyük fel, hogy

(i) $V(t, x(t)) \in \Pi$, ha $t \geqq \sigma$,

(ii) ha $t \geqq \sigma$, $\varphi \in C$, $\overline{V}(t,\varphi) \in \Pi$ és valamely i-re $(i = 1, \dots, m)$

(6.1) $$h\left(V_i(t, \varphi(0))\right) > \overline{V}_i(t, \varphi),$$

akkor ugyanazon i indexre

(6.2) $$D^+_{(2.1)} V_i(t,\varphi) \leqq L\left[\overline{V}_i(t,\varphi) - V_i(t,\varphi(0))\right] + g_i\left(\overline{V}_1(t,\varphi), \dots, \overline{V}_m(t,\varphi)\right)$$

teljesül, $i = 1, \dots, m$, ahol $h : R \to R$ folytonos, monoton növő függvény, $h(s) > s$.

Akkor a $\lim_{t\to\infty} V(t, x(t))$ határérték létezik.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $v(t) = V(t, x(t))$, $\bar{v}(t) = \overline{V}(t, x_t)$, $a = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, v(t)$, ahol a $\overline{\lim}$ komponensként értendő.

Mivel Π korlátos és zárt, ezért $a=(a_1,\dots,a_m)\in\Pi$ és $-\infty<a_i<\infty$, $i=1,\dots,m$. Először megmutatjuk, hogy $g(a)=0$. Ha ez nem igaz, akkor van olyan i index $(1\leq i\leq m)$, hogy $g_i(a)<0$. Feltehetjük, hogy $i=1$.
A h függvény $h(s)>s$ tulajdonságából következik $\varepsilon>0$ létezése ugy, hogy $h(a_1-\varepsilon)>a_1$. Indirekt feltevésünk és $a=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, v(t)$ alapján van olyan $T\geq\sigma$ és $b=(b_1,\dots,b_m)\in\Pi$, amelyekre $h(a_1-\varepsilon)>b_1$, $v_i(t)\leq b_i$, ha $t\geq T$, $i=1,\dots,m$, továbbá

$$(6.3)\qquad b_1+\frac{g_1(b)}{L}<a_1 .$$

Ha $t\geq T+r$ és $v_1(t)\geq a_1-\varepsilon$, akkor $h(v_1(t))>b_1\geq \bar v_1(t)$.
Igy a (ii) feltételből és a g_1 monotonitási tulajdonságaiból

$$(6.4)\qquad D^+v_1(t)\leq L\big(b_1-v_1(t)\big)+g_1(b),$$

ha $t\geq T+r$ és $v_1(t)\geq a_1-\varepsilon$. A 3.1 Tétel és (6.4) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(6.5)\qquad v_1(t)\leq \max\left\{a_1-\varepsilon,\ \left(b_1+\frac{g_1(b)}{L}\right)\left(1-e^{-L(t-T-r)}\right)+v_1(T+r)e^{-L(t-T-r)}\right\},$$

ha $t\geq T+r$. (6.3)-ból és (6.5)-ből $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, v_1(t)\leq$
$\leq \max\left\{a_1-\varepsilon,\ b_1+\dfrac{g_1(b)}{L}\right\}$ következik, ami ellentmond a_1 definiciójának. Tehát $g(a)=0$.

Tegyük fel, hogy a $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ határérték nem létezik.
Ekkor van olyan i index $(1\leq i\leq m)$, amelyre a $\lim\limits_{t\to\infty} v_i(t)$ határérték sem létezik. Feltehető, hogy $i=1$. Mivel v_1 korlátos $[\sigma,\infty)$ -en, az indirekt feltevésből következik olyan a_0 szám és $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ sorozat létezése, hogy $a_0<a_1$, $h(a_0)>a_1$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=\infty$ és $v_1(t_k)=a_0$, $k=0,1,\dots$. Legyen $b^{(k)}=\sup\limits_{t\geq t_k-r} v(t),\ k=0,1,\dots$

Nyilván $\lim\limits_{k\to\infty} b^{(k)} = a$ és mivel Π zárt, $b^{(k)}\in\Pi$, $k=0,1,\dots$.
Válasszuk a k_0 számot ugy, hogy $k\geq k_0$ -ból $h(a_1)>b_1^{(k)}$ és $\left(b_1^{(k)}+\frac{g_1(b^{(k)})}{L}\right)\left(1-e^{-3Lr}\right)+a_0e^{-3Lr}<a_1$ következzen.
Ha $k\geq k_0$, $t\geqq t_k$ és $v_1(t)\geqq a_0$, akkor $h(v_1(t))>\bar{v}_1(t)$, azaz (6.2) érvényes $i=1$ -re. Ebből a g_1 monotonitási tulajdonságainak felhasználásával kapjuk, hogy

$$(6.6)\qquad \begin{cases} D^+v_1(t)\leqq L\left(b_1^{(k)}-v_1(t)\right)+g_1\left(b^{(k)}\right) & \left(k\geq k_0,\ t\geqq t_k,\ v_1(t)\geqq a_0\right)\\ v_1(t_k)=a_0 . \end{cases}$$

A 3.1 Tételnek (6.6)-ra való alkalmazásával

$$v_1(t)\leqq\left(b_1^{(k)}+\frac{g_1(b^{(k)})}{L}\right)\left(1-e^{-L(t-t_k)}\right)+a_0\,e^{-L(t-t_k)}$$

adódik, ha $k\geq k_0$ és $t\geqq t_k$. Ekkor

$$v_1(t)\leqq\left(b_1^{(k)}+\frac{g_1(b^{(k)})}{L}\right)\left(1-e^{-3Lr}\right)+a_0e^{-3Lr}<a_1$$

a $[t_k,t_k+3r]$ intervallumon, azaz létezik olyan b_1 szám, hogy $a_0<b_1<a_1$ és $\bar{v}_1(t)<b_1$, ha $t\in[t_k+r,t_k+3r]$, $k\geq k_0$. Mivel $g_i(b_1,a_2,\dots,a_m)<0$, $i=2,\dots,m$, a k_1 szám megválasztható a következőképpen: $k_1\geq k_0$ és $k\geq k_1$ esetén $b_i^{(k)}+\frac{g_i(b_1,b_2^{(k)},\dots,b_m^{(k)})}{L}\left(1-e^{-Lr}\right)<a_i$,
$h(a_i-\varepsilon)>b_i^{(k)}$ valamely $\varepsilon>0$ -ra, $i=2,\dots,m$.
Ha $k\geq k_1$, $t\in[t_k+r,\ t_k+3r]$ és $v_i(t)\geq a_i-\varepsilon$, $i=2,\dots,m$, akkor feltételeink szerint

$$D^+v_i(t)\leqq L\left(b_i^{(k)}-v_i(t)\right)+g_i\left(b_1,b_2^{(k)},\dots,b_m^{(k)}\right),\qquad i=2,\dots,m.$$

A 3.1 Tétel segitségével ebből

$$(6.7) \qquad v_i(t) \leq \max\left\{a_i-\varepsilon,\ \left(b_i^{(k)}+\frac{g_i(b_1,b_2^{(k)},\dots,b_m^{(k)})}{L}\right)\left(1-e^{-L(t-t_k-\tau)}\right)+v_i(t_k+\tau)e^{-L(t-t_k-\tau)}\right\}$$

következik a $[t_k+\tau,\ t_k+3\tau]$ intervallumon, $i=2,\dots,m$.
Mivel $v_i(t_k+\tau) \leq b_i^{(k)}$, (6.7)-ből $v_i(t)$ -re a következő becslést kapjuk a $[t_k+2\tau,\ t_k+3\tau]$ intervallumon:

$$(6.8) \qquad v_i(t) \leq \max\left\{a_i-\varepsilon,\ b_i^{(k)}+\frac{g_i(b_1,b_2^{(k)},\dots,b_m^{(k)})}{L}\left(1-e^{-L\tau}\right)\right\} < a_i\,.$$

(6.8)-ból könnyen látható olyan $b_2,\dots,b_m$ számok létezése, hogy $b_i<a_i$ és $\bar{v}_i(t_k+3\tau)<b_i$, $i=2,\dots,m$. A 6.1 Lemma szerint van olyan $c=(c_1,\dots,c_m)\in[b_1,a_1)\times\dots\times[b_m,a_m)$, hogy $g(c)=0$. Igy azon a halmazon, ahol $\bar{v}_i(t)<c_i$, $i=1,\dots,m$, és $h(v_i(t)) > \bar{v}_i(t)$, érvényes

$$(6.9) \qquad D^+v_i(t) \leq L\,(c_i - v_i(t)) \qquad\qquad (t \geq t_k+3\tau).$$

Mivel $h(c_i)>c_i$, (6.9) igaz a c_i egy környezetében. Ismét a 3.1 Tétel alkalmazásával (6.9)-ből $v_i(t)<c_i$ következik a $[t_k+3\tau,\infty)$ intervallumon, $i=1,\dots,m$. Ez azonban ellentmond az a definiciójának. Tehát igazoltuk a tétel állitását.

<u>6.1 Megjegyzés</u> Ha a 6.1 Tételben $\lim\limits_{t\to\infty} V(t,x(t))=a$, akkor $g(a)=0$.

2. A 6.1 Tételnek egy fontos alkalmazása van a rekeszrendszerek elméletében. Tekintsük az

$$(6.10)\qquad \dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(x_i(t)) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ij}(x_i(t)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} h_{ji}(x_j(t-\tau_{ji})) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ji}(x_j(t)),\quad i=1,\dots,n,$$

differenciálegyenletrendszert, ahol $h_{ij}, g_{ij}: R \to R$ szigoruan monoton növő, lokális Lipschitz feltételnek eleget tevő függvények, $h_{ij}(0) = g_{ij}(0) = 0$ és $0 \leq \tau_{ij} \leq r$, $i,j = 1,\dots,n$.
A (6.10) egyenlet megoldásait csak olyan $\varphi \in C$ kezdőfüggvényekre vizsgáljuk, amelyekre $\varphi(s) \geq 0$, $-r \leq s \leq 0$, (ahol $\varphi(s) \geq 0$-t ugy értjük, hogy $\varphi_i(s) \geq 0$, $i=1,\dots,n$), mivel csak ennek az esetnek van fizikai jelentése. Először megmutatjuk, hogy nemnegativ kezdőfüggvényhez nemnegativ megoldás tartozik.

<u>6.2 Tétel</u> Ha $\varphi \in C$, $\varphi(s) \geq 0$, $-r \leq s \leq 0$, akkor a (6.10) egyenlet $[\sigma, A)$ -n létező $x(\sigma,\varphi)$ megoldására $x(\sigma,\varphi)(t) \geq 0$ teljesül $[\sigma, A)$ -n.

<u>Bizonyitás.</u> Mivel a h_{ij}, g_{ij} függvények folytonosak, a 4.1 Tételből következik az $x(\sigma,\varphi)$ megoldás létezése valamely $[\sigma, A)$ intervallumon, $\sigma < A$. Legyen $\psi_k(s) = \varphi(s) + (\frac{1}{k},\dots,\frac{1}{k})$, $-r \leq s \leq 0$. Ekkor $\psi_k(s) > 0$, $-r \leq s \leq 0$. Tekintsük a (6.10) egyenlet $x(\sigma,\psi_k)$ megoldását. Tegyük fel, hogy létezik olyan $t_0 \in (\sigma, A)$, hogy $x_i(\sigma,\psi_k)(t_0) = 0$ valamely i indexre és $x(\sigma,\psi_k)(t) > 0$, ha $t \in [\sigma, t_0)$. Ha $x(\sigma,\psi_k)(t_0) \neq 0$ vagy $\sum_{j=1}^{n} \tau_{ji} \neq 0$, akkor $\dot{x}_i(t) > 0$ következik (6.10)-ből, ami nem lehet, mert $x_i(t_0) = 0$ és $x_i(t) > 0$, ha $t \in [\sigma, t_0)$.
Ha $x(\sigma,\psi_k)(t_0) = 0$ és $\tau_{ij} = 0$, $i,j = 1,\dots,n$, akkor

(6.10)-ből $\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) = 0$ adódik, tehát $\sum_{i=1}^{n} x_i(t) =$ konstans, $t \in [\sigma, A)$. Igy $0 = \sum_{i=1}^{n} x_i(t_0) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\sigma) \geq \frac{n}{k}$, ellentmondás. Tehát $x(\sigma, \psi_k)(t) > 0$ a $[\sigma, A)$ intervallumon. Mivel a h_{ij}, g_{ij} függvények lokális Lipschitz feltételnek tesznek eleget, a (6.10) egyenletre alkalmazható a 4.5 Tétel: az $x(\sigma, \psi_k)$ függvény egyenletesen konvergál $x(\sigma, \varphi)$ -hez a $[\sigma, A)$ bármely kompakt részhalmazán, ha $k \to \infty$. Ebből $x(\sigma, \varphi)(t) \geq 0$ következik $[\sigma, A)$ -n, amit bizonyitani kellett.

Most megmutatjuk, hogy nemnegativ kezdőfüggvényhez a $[\sigma, \infty)$ -en létező korlátos megoldás tartozik.

6.3 Tétel Ha $\varphi \in C$, $\varphi(s) \geq 0$, $-r \leq s \leq 0$, akkor $x(\sigma, \varphi)$ kiterjeszthető a $[\sigma, \infty)$ félegyenesre és korlátos $[\sigma, \infty)$ -en.

Bizonyitás. A 4.4 Tétel szerint elegendő megmutatni, hogy létezik $K > 0$, amelyre $|x(\sigma, \varphi)(t)| \leq K$ teljesül az $x(\sigma, \varphi)$ maximális létezési intervallumán. A (6.10) egyenletből

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\right) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_{ij}}^{0} h_{ij}(x_i(t+s))\,ds\right)$$

Integráljunk σ -től t -ig:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_{ij}}^{0} h_{ij}(x_i(t+s))\,ds = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(0) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_{ij}}^{0} h_{ij}(\varphi_i(s))\,ds = \text{állandó}.$$

Ebből és a 6.2 Tételből következik $x(\sigma, \varphi)$ korlátossága és a fentiek szerint a tétel állitása is.

Végül az alábbi tételben bebizonyitjuk, hogy a (6.10) egyenlet nemnegativ kezdőfüggvényhez tartozó megoldása konstanshoz tart, ha $t \to \infty$.

<u>6.4 Tétel</u> Ha $\varphi \in C$, $\varphi(s) \geq 0$, $-r \leq s \leq 0$, akkor a $\lim_{t\to\infty} x(\sigma,\varphi)(t)$ határérték létezik.

<u>Bizonyitás.</u> A 6.3 Tétel alapján $x(\sigma,\varphi)$ létezik a $[\sigma,\infty)$ intervallumon és $|x(\sigma,\varphi)| \leq K$, ha $t \in [\sigma,\infty)$. Alkalmazzuk a 6.1 Tételt a (6.10) egyenletre abban az esetben, amikor

$$m = n, \quad V(t,x) = x, \quad \Pi = [0,K] \times \dots \times [0,K], \quad L = (2n-1)L_1,$$

$$g_i(u_1,\dots,u_n) = -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(u_i) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ij}(u_i) + \sum_{j=1}^{n} h_{ji}(u_j) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ji}(u_j),$$

ahol L_1 a h_{ij}, g_{ij} függvények közös Lipschitz konstansa a $[0,K]$ intervallumon, $h(s) = s+1$. Könnyü látni a Π-re és g-re tett feltételek érvényességét. (6.2)-t elegendő az $x = x(\sigma,\varphi)$ megoldás mentén megkövetelni. A (6.10) egyenletből kapjuk, hogy

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(x_i(t)) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ij}(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} h_{ji}(x_j(t-\tau_{ji})) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ji}(x_j(t)) \leq$$

$$\leq -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(x_i(t)) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ij}(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\bar{x}_i(t)) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ij}(\bar{x}_i(t)) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\bar{x}_i(t)) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ij}(\bar{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} h_{ji}(\bar{x}_j(t)) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ji}(\bar{x}_j(t)) \leq$$

$$\leq L\left(\bar{x}_i(t) - x_i(t)\right) + g_i\left(\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_n(t)\right), \qquad i = 1,\dots,n,$$

azaz (6.2) érvényes az x megoldás mentén. Mivel a 6.1 Tétel feltételei teljesülnek, a $\lim_{t\to\infty} x(\sigma,\varphi)(t)$ határérték létezik.

<u>6.2 Megjegyzés</u> A (6.10) egyenlet egy speciális rekeszrendszert ir le. Adott n doboz, az i-edik dobozból két cső vezet a j-edikbe , $j \neq i$, $i = 1,\dots,n$, az i-edik dobozból önmagába is vezet cső. A t időpillanatban az i-edik dobozban $x_i(t)$ anyag van, $i = 1,\dots,n$. Az i-edik dobozból a j-edikbe egységnyi idő alatt $h_{ij}(x_i(t))$ anyag folyik az első és $g_{ij}(x_i(t))$ a második csövön keresztül. Az elsőn folyó anyag τ_{ij} idő mulva érkezik a j-edik dobozba, mig a másodikon folyó azonnal. Az i-edik dobozból egységnyi idő alatt $h_{ii}(x_i(t))$ anyag folyik az önmagába visszacsatolt csőbe, a csőbe folyt anyag τ_{ii} idő mulva visszaömlik a dobozba. A 6.4 Tétel azt állitja, hogy a dobozokban lévő anyagmennyiségek konstanshoz tartanak.

A rekeszrendszerek egy általános leirása található például [13]-ban. H. MAEDA, S. KODAMA és Y. OHTA [32], H. MAEDA és S. KODAMA [31], valamint R.M. LEWIS és B.D.O. ANDERSON [29] azt az esetet vizsgálják, amikor a rendszernek nincsen önmagába visszacsatolt csővel rendelkező doboza. Azt bizonyitják nemlineáris rendszerre is, hogy az nyugalmi állapotához tart. I. GYŐRI és J. ELLER [14] lineáris rendszerre mutatták meg a nyugalmi állapothoz való tartást akkor, ha visszacsatolások is vannak. [13]-ban GYŐRI kérdésként vetette fel nemlineáris rendszerre ezt a problémát. A 6.4 Tétel megoldja a problémát arra az esetre, amikor a rendszer teljesen összefüggő, azaz mindegyik dobozból mindegyikbe vezet cső.

VII. AZ $\dot{x}(t) = -h(t,x(t)) + \int_{-\infty}^{0} h(t,x(t+s))\,d\eta(t,s) + p(t)$ EGYENLET VIZSGÁLATA

Ebben a fejezetben az

$$(7.1)\qquad \dot{x}(t) = -h(t,x(t)) + \int_{-\infty}^{0} h(t,x(t+s))\,d\eta(t,s) + p(t) \qquad (x(t)\in R)$$

funkcionál differenciálegyenlet megoldásainak konstanshoz tartását bizonyitjuk. Ilyen tipusu egyenletek pl. az atomreaktorok modelljeinek matematikai leirásában [8] és a matematikai biológiában használt rekeszmodellek vizsgálatában [13] fordulnak elő. A (7.1) egyenlethez jutunk el a véges retardálásu (5.31) egyenletnek végtelen retardálásura való formális általánositásával is. R. GRIMMER és G. SEIFERT [11] és G. SEIFERT [40,41] a (7.1)-hez hasonló tipusu egyenletek megoldásainak korlátosságát, stabilitását és aszimptotikus stabilitását vizsgálták. Eredményeikben azonban az egyenlet jobboldalában a közönséges rész a domináns. Mi azt az esetet tárgyaljuk, amikor (7.1)-ben a közönséges és a funkcionál rész azonos nagyságrendü, azaz $\int_{-\infty}^{0} d\eta(t,s) = 1$.

Tegyük fel, hogy a (7.1) egyenletben $h: R^+ \times R \to R$ folytonos függvény, $h(t,\cdot)$ monoton növő R-en, $h(\cdot,x)$ korlátos R^+-on, minden $a,b\in R$ -hez létezik olyan $L = L(a,b) > 0$, hogy $x,y\in [a,b]$ -ből $|h(t,x) - h(t,y)| \leq L|x-y|$ következik R^+-on. Az $\eta: R^+\times(-\infty,0] \to R^+$ függvény olyan, hogy $\eta(t,\cdot)$ monoton növő, balról folytonos és minden $t\in R^+$ -ra $\int_{-\infty}^{0} d\eta(t,s) = 1$, továbbá van $\vartheta: (-\infty,0] \to R^+$ folytonos függvény, amelyre $\int_{-\infty}^{0} \vartheta(s)\,ds < \infty$ és $\vartheta(s) \geq \eta(t,s)$ teljesül, ha $(t,s)\in R^+\times(-\infty,0]$. A $p: R^+\to R$ függvény folytonos és $p\in L^1(R^+)$. A (7.1) egyenletben és a továbbiakban előforduló integrálokat Lebesgue-Stieltjes értelemben értjük.

Legyen $r = \infty$ és

$$M = \Big\{ \varphi \in H : \varphi \text{ mérhető, } \int_{-\infty}^{0} |h(t,\varphi(s))|\, d\eta(t,s-t) < \infty$$

minden $t \geq 0$-ra,

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} |h(t,\varphi(s))|\, d\eta(t,s-t)dt < \infty \Big\}.$$

Az M tér általában nem lineáris, ezért a IV. pont eredményei nem alkalmazhatók tetszőleges $\varphi \in M$ kezdőfüggvény esetén. A (7.1) egyenlet $x(0,\varphi)$ megoldásának a $[0,\infty)$ -re való kiterjeszthetőségét és a $\lim\limits_{t\to\infty} x(0,\varphi)(t)$ határérték létezését azonban tetszőleges $\varphi \in M$ kezdőfüggvényre be fogjuk bizonyitani a 7.1 és 7.2 Tételben, feltéve, hogy φ -re érvényes az (i) és (ii) tulajdonság:

(i) létezik $(0,\varphi)$ -n átmenő megoldás,

(ii) ha $x(0,\varphi)$ a (7.1) egyenlet nem folytatható megoldása $[0,A)$ -n, $0 < A < \infty$, akkor $\overline{\lim\limits_{t\to A-0}} |x(0,\varphi)(t)| = \infty$.

Az (i) és (ii) érvényességét a továbbiakban mindig feltesszük.

Jelöljük C_γ -val a 4.1 Példában adott $\mathcal{B}$ teret. A IV. fejezet 4.1 és 4.4 Tétele alapján minden C_γ -beli φ -re igaz (i) és (ii). Megmutatjuk, hogy ha $\gamma \leq 0$, akkor $C_\gamma \subset M$. Valóban, ha $\varphi \in C_\gamma$, akkor φ korlátos $(-\infty,0]$-n, és igy $h(t,\varphi(s))$ is korlátos $(-\infty,0]$ -n. Mivel $h(t,\cdot)$ monoton növő, $h(t,-K_1) \leq$ $\leq h(t,\varphi(s)) \leq h(t,K_1)$ valamely $K_1 > 0$ -ra, $s \leq 0$, és mivel $h(\cdot,x)$ korlátos R^+-on, kapjuk, hogy $|h(t,\varphi(s))| \leq K_2$, $t \geq 0$, $s \leq 0$. Ebből

$$\int_{-\infty}^{0} |h(t,\varphi(s))|\, d\eta(t,s-t) \leq K_2 \int_{-\infty}^{0} d\eta(t,s-t) = K_2\, \eta(t,-t) \leq K_2\, \vartheta(-t),$$

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} |h(t,\varphi(s))|\, d\eta(t,s-t)dt \leq K_2 \int_{0}^{\infty} \vartheta(-t)dt < \infty,$$

tehát $\varphi \in M$, amit állitottunk.

Érvényes az alábbi két tétel.

7.1 Tétel A (7.1) egyenlet $x(0,\varphi)$ megoldása kiterjeszthető a $[0,\infty)$ intervallumra és korlátos $[0,\infty)$ -en.

Bizonyitás. Legyen x a (7.1) egyenlet $(0,\varphi)$ -n átmenő nem folytatható megoldása $[0,A)$ -n, $A>0$. Feltevésünk szerint van ilyen x . Megmutatjuk, hogy létezik olyan $K>0$, amelyre $|x(t)| \leqq K$ teljesül, ha $t \in [0,A)$. Definiáljuk az y függvényt és az S halmazt a következőképpen:

$$y(t) = \max_{0 \leqq s \leqq t} x(s), \quad 0 \leqq t < A, \quad S = \{ t : t \in [0,A), \ x(t) = y(t) \}.$$

Ha $t \in [0,A) \setminus S$, akkor $D^+ y(t) = 0$, ha pedig $t \in S$, akkor

$$D^+ y(t) \leq \dot{x}(t) = -h(t,x(t)) + \int_{-\infty}^{0} h(t,x(t+s))\,d\eta(t,s) + p(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{-t} h(t,x(t+s))\,d\eta(t,s) - h(t,x(t))\int_{-\infty}^{-t} d\eta(t,s) + \int_{-t}^{0}\big(h(t,x(t+s)) - h(t,x(t))\big)d\eta(t,s) +$$

$$+ p(t) \leq \int_{-\infty}^{0} h(t,x(s))\,d\eta(t,s-t) - h(t,\varphi(0))\eta(t,-t) + |p(t)| \leqq$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{0} |h(t,\varphi(s))|\,d\eta(t,s-t) + k\,\vartheta(-t) + |p(t)| = \alpha(t),$$

ahol $k = \sup_{t \geqq 0} |h(t,\varphi(0))|$. Az α függvény R^+ -on értelmezve van, $\alpha(t) \geqq 0$, ha $t \geqq 0$ és $\alpha \in L^1(R^+)$. Ebből

$$D^+ y(t) \leqq \alpha(t) \qquad \big(t \in [0,A)\big) \tag{7.2}$$

következik. Mivel $\varphi \in M$, $\int_{-\infty}^{0} \vartheta(s)\,ds < \infty$ és $p \in L^1(R^+)$,

a 3.1 Tétel alapján (7.2)-ből $y(t) \leq \varphi(0) + \int_0^t \alpha(s)ds \leq$
$\leq \varphi(0) + \int_0^\infty \alpha(s)ds = K_1 < \infty$, $t \in [0, A)$. Tehát $x(t) \leq K_1$, ha $t \in [0, A)$, ahol K_1 az A -tól független konstans. Hasonlóan mutatható meg olyan, az A -tól független K_2 konstans létezése, hogy $x(t) \geq K_2$, ha $t \in [0, A)$. Ha $A < \infty$, akkor x folytatható a $[0, A)$ -nál bővebb intervallumra feltevésünkkel ellentétben, mert x korlátos $[0, A)$ -n. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

7.2 Tétel A (7.1) egyenlet bármely $x(0, \varphi)$ megoldására a $\lim_{t\to\infty} x(0, \varphi)(t)$ határérték létezik.

Bizonyitás. A 7.1 Tétel szerint a (7.1) egyenlet $x = x(0, \varphi)$ megoldása létezik $[0, \infty)$ -en és korlátos $[0, \infty)$ -en. Tegyük fel, hogy nem létezik x végtelenben vett határértéke. Ekkor vannak olyan a, b, c, d számok, hogy $a > b > c$, $d > 0$, $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, x(t) = b$, $\underline{\lim_{t\to\infty}}\, x(t) < c$, $|x(t)| \leq a$ és $-h(t, c) \leq d$, ha $t \geq 0$. Legyen $L = L(-a, a)$ és $\Theta = \int_{-\infty}^0 \vartheta(s)ds$. Az ε számot ugy válasszuk meg, hogy

$$0 < \varepsilon < \frac{(b-c)e^{-L\Theta}}{2(1-e^{-L\Theta})} \tag{7.3}$$

teljesüljön. Mivel $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, x(t) = b$, van olyan $t_1 \geq 0$, hogy $t \geq t_1$ esetén $x(t) \leq b + \varepsilon$. Legyen

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^{t_1} |h(t, x(s))|\, d\eta(t, s-t) + d\cdot\vartheta(t_1 - t) + |p(t)|, \quad t \geq t_1.$$

Megmutatjuk, hogy $\alpha \in L^1([t_1, \infty))$. Az

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^{0} |h(t, \varphi(s))|\, d\eta(t, s-t) + d\cdot\vartheta(t_1 - t) + |p(t)| + \int_0^{t_1} |h(t, x(s))|\, d\eta(t, s-t)$$

felbontás és $\varphi \in M$, $\vartheta \in L^1((-\infty,0])$, $p \in L^1(R^+)$ alapján elegendő az $\int_0^{t_1} |h(t,x(s))|\, d\eta(t,s-t)$ függvény integrálható-ságát bizonyitani. Ha $s \in [0,t_1]$, akkor $|h(t,x(s))| \leq k$ és igy

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_0^{t_1} |h(t,x(s))|\, d\eta(t,s-t)dt \leq \int_{t_1}^{\infty} k \int_0^{t_1} d\eta(t,s-t)dt \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{\infty} k\left(\eta(t,t_1-t)-\eta(t,-t)\right)dt \leq k\int_{t_1}^{\infty}\left(\vartheta(t_1-t)+\vartheta(-t)\right)dt < \infty .$$

Mivel $\alpha \in L^1([t_1,\infty))$ és $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) < c$, létezik olyan t_2, hogy $t_2 \geq t_1$, $x(t_2) = c$ és

$$(7.4) \qquad \int_{t_2}^{\infty} \alpha(t)dt < \frac{(b-c)e^{-L\Theta}}{2} .$$

Hasonlóan, mint a 7.1 Tétel bizonyitásában, definiáljuk az y függvényt és az S halmazt:

$$y(t) = \max_{t_2 \leq s \leq t} x(s), \quad t \geq t_2, \qquad S = \{t:\ t \geq t_2,\ y(t) = x(t)\}.$$

Ha $t \in [t_2,\infty)\setminus S$, akkor $D^+y(t) = 0$, ha pedig $t \in S$, akkor

$$D^+y(t) \leq \dot{x}(t) = -h(t,x(t)) + \int_{-\infty}^{0} h(t,x(t+s))\,d\eta(t,s) + p(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_1-t} h(t,x(t+s))\,d\eta(t,s) - h(t,x(t))\int_{-\infty}^{t_1-t} d\eta(t,s) + \int_{t_1-t}^{t_2-t}\left(h(t,x(t+s))-h(t,x(t))\right)d\eta(t,s) +$$

$$+ \int_{t_2-t}^{0}\left(h(t,x(t+s))-h(t,x(t))\right)d\eta(t,s) + p(t) \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t_1-t} |h(t,x(t+s))|\,d\eta(t,s) - h(t,c)\int_{-\infty}^{t_1-t} d\eta(t,s) + L\left(b+\varepsilon-x(t)\right)\int_{t_1-t}^{t_2-t} d\eta(t,s) + |p(t)| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t_1} |h(t, x(s))|\, d\eta(t, s-t) + d\cdot\vartheta(t_1-t) + L(b+\varepsilon - x(t))\vartheta(t_2-t) + |p(t)| =$$

$$= -L\vartheta(t_2-t)y(t) + L(b+\varepsilon)\vartheta(t_2-t) + \alpha(t).$$

Ha $t \geq t_2$, akkor $y(t) \leq b+\varepsilon$. Igy

$$(7.5)\qquad \begin{cases} D^+y(t) \leq -L\vartheta(t_2-t)y(t) + L(b+\varepsilon)\vartheta(t_2-t) + \alpha(t) & (t \geq t_2) \\ y(t_2) = c. \end{cases}$$

A 3.1 Tételt alkalmazzuk (7.5)-re. Azt kapjuk, hogy

$$(7.6)\qquad \begin{aligned} y(t) &\leq c\cdot e^{-L\int_{t_2}^{t}\vartheta(t_2-s)\,ds} + (b+\varepsilon)\left(1-e^{-L\int_{t_2}^{t}\vartheta(t_2-s)\,ds}\right) + \\ &+ \int_{t_2}^{t}\alpha(s)\, e^{-L\int_{s}^{t}\vartheta(t_2-u)\,du}\, ds\,, \quad (t \geq t_2). \end{aligned}$$

(7.6)-ból a (7.3) és (7.4) felhasználásával

$$\begin{aligned} y(t) &\leq b+\varepsilon + \left(c-(b+\varepsilon)\right)e^{-L\Theta} + \int_{t_2}^{\infty}\alpha(t)\,dt = \\ &= b-(b-c)e^{-L\Theta} + \varepsilon\left(1-e^{-L\Theta}\right) + \int_{t_2}^{\infty}\alpha(t)\,dt < b \end{aligned}$$

következik, ha $t \geq t_2$. Ebből $x(t) \leq y(t)$ alapján $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, x(t) < b$ adódik, ellentmondás. Tehát a $\lim_{t\to\infty} x(t)$ határérték létezik.

<u>7.1 Következmény</u> Ha $h: R \to R$ monoton növő és lokális Lipschitz feltételnek tesz eleget, $\eta: (-\infty, 0] \to R^+$ monoton növő, balról folytonos, $\eta(0) = 1$ és $\int_{-\infty}^{0}\eta(s)\,ds < \infty$, továbbá $\varphi\,(\in M)$-re (i) és (ii) teljesül, akkor az

$$\dot{x}(t) = -h(x(t)) + \int_{-\infty}^{0} h(x(t+s))\, d\eta(s) \tag{7.7}$$

egyenlet $x(0,\varphi)$ megoldására a $\lim_{t\to\infty} x(0,\varphi)(t)$ határérték létezik.

7.1 Megjegyzés . GYŐRI [13]-ban rekeszmodellek vizsgálatával kapcsolatban azt a kérdést vetette fel, hogy a (7.7) egyenlet megoldásai konstanshoz tartanak-e a $(-\infty, 0]$ -n korlátos, folytonos kezdőfüggvények esetén. Ha φ korlátos és folytonos $(-\infty, 0]$ -n, akkor könnyen látható, hogy $\varphi \in M$. Ha φ -re még (i) és (ii) is igaz, akkor a 7.1 Következmény alapján az $x(0,\varphi)$ megoldás konstanshoz tart.

A fenti eredmények illusztrálására tekintsük a következő példákat.

7.1 Példa Az

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \int_{-\infty}^{0} e^{s} x(t+s)\, ds$$

egyenlet $x(0,\varphi)$ megoldása konstanshoz tart, ha $t \to \infty$, bármely $\varphi \in B = \{\varphi : \varphi \in H,\ \varphi$ mérhető és $|\varphi(0)| + \int_{-\infty}^{0} e^{s} |\varphi(s)|\, ds < \infty \}$ kezdőfüggvényre. Valóban, ez a kezdőfüggvénytér a 4.3 Példában adottnak a $g(s) = e^{s}$, $r = 0$, $p = 1$ speciális esete, igy rá érvényesek a 4.1-4.5 Tételek. Másrészt ha $\varphi \in B$, akkor

$$\int_{-\infty}^{0} e^{s-t} |\varphi(s)|\, ds = e^{-t} \int_{-\infty}^{0} e^{s} |\varphi(s)|\, ds < \infty,$$

$$\int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} e^{s-t} |\varphi(s)|\, ds\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{s} |\varphi(s)|\, ds \int_{0}^{\infty} e^{-t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{s} |\varphi(s)|\, ds < \infty,$$

azaz $\varphi \in M$, ha $\eta(t,s) = e^{s}$, $h(x) = x$.

Tehát a 7.1 és 7.2 Tétel alkalmazásával kapjuk állitásunkat.

7.2 Példa Tekintsük az

$$(7.8) \qquad \dot{x}(t) = -x^3(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} x^3(t - \tau i)$$

egyenletet, ahol $\tau > 0$. Ez az egyenlet (7.7)-nek a $h(x) = x^3$, $\eta(s) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \geq -\frac{s}{\tau}}}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ speciális esete. A 7.1 Következmény alapján a $\lim_{t\to\infty} x(0,\varphi)$ határérték létezik, ha $\varphi \in C_\gamma \subset M$. Megmutatjuk, hogy ha $\gamma < \frac{\log 2}{3\tau}$, akkor $C_\gamma \subset M$. Ha φ folytonos $(-\infty, 0]$-n és a $\lim_{s\to-\infty} e^{\gamma s}\varphi(s)$ határérték létezik, akkor $|\varphi(s)| \leq K e^{-\gamma s}$, $s \leq 0$, valamely $K > 0$-ra. Igy

$$\int_{-\infty}^{0} |\varphi^3(s)| d\eta(s-t) \leq \frac{K}{2^k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e^{3\gamma\tau i} = \frac{K}{2^k} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{e^{3\gamma\tau}}{2}\right)^i,$$

ha $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, ahol $k \geq 0$ egész szám. Ebből

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{0} |\varphi^3(s)| d\eta(s-t)dt \leq K \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{e^{3\gamma\tau}}{2}\right)^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2K \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{e^{3\gamma\tau}}{2}\right)^i.$$

Ha $e^{3\gamma\tau} < 2$, akkor $\varphi \in C_\gamma$-ból $\varphi \in M$ következik. Tehát $\varphi \in C_\gamma$ esetén $\left(\gamma < \frac{\log 2}{3\tau}\right)$ a (7.8) egyenlet bármely $(0,\varphi)$-n átmenő x megoldása konstanshoz tart, ha $t \to \infty$. Megjegyezzük, hogy $\gamma > 0$ esetén C_γ tartalmazza a $(-\infty, 0]$-n korlátos, folytonos függvények halmazát.

VIII. IRODALOMJEGYZÉK

[1] BELLMAN, R. and COOKE, K.L., Differential-Difference Equations, Academic Press (New York, 1963).

[2] BERNFELD, S.R. and HADDOCK, J.R., A variation of Razumikhin's method for retarded functional differential equations, Nonlinear Systems and Applications, An International Conference (V. Lakshmikantham ed.), Academic Press (New York, 1977), 561-566.

[3] BERNFELD, S. R. and HADDOCK, J.R., Liapunov-Razumikhin functions and convergence of solutions of scalar functional differential equations, Applicable Anal. (megjelenés alatt)

[4] COLEMAN, B.D. and MIZEL, V.J., Norms and semi-groups in the theory of fading memory, Arch. Rational Mech. Anal., 23(1966), 87-123.

[5] COLEMAN, B.D. and MIZEL, V.J., A general theory of dissipation in materials with memory, Arch. Rational Mech. Anal., 27(1967), 255-274.

[6] COOKE, K.L., Functional-differential equations: some models and perturbation problems, Differential Equations and Dynamical Systems, Academic Press (New York, 1967), 167-183.

[7] COOKE, K.L. and YORKE, J.A., Some equations modelling growth processes and gonorrhea epidemics, Math. Biosci., 16(1973), 75-101.

[8] CORDUNEANU, C., Integral Equations and Stability of Feedback Systems, Academic Press (New York, 1973).

[9] DRIVER, R.D., Existence and stability of solutions of a delay-differential system, Arch. Rational Mech. Anal., 10(1962), 401-426.

[10] DRIVER, R.D., Ordinary and Delay Differential Equations, Springer-Verlag (New York, 1977).

[11] GRIMMER, R. and SEIFERT, G., Stability Properties of Volterra Integrodifferential Equations, J. Differential Equations, 19(1975), 142-166.

[12] GROSSMAN, S.E. and YORKE, J.A., Asymptotic behavior and exponential stability criteria for differential delay equations, J. Differential Equations, 12(1972), 236-255.

[13] GYŐRI, I., Delay differential and integro-differential equations in biological compartmental models, Systems Science (Wroclaw) (megjelenés alatt).

[14] GYŐRI, I. and ELLER, J., Compartmental systems with pipes, Math. Biosci., 53(1981), 223-247.

[15] HADDOCK, J.R. and TERJÉKI, J., Lyapunov-Razumikhin functions and an autonomous principle for functional differential equations (megjelenés alatt).

[16] HALE, J.K., Functional Differential Equations, Springer-Verlag (New York, 1971).

[17] HALE, J.K. and KATO, J., Phase space for retarded equations with infinite delay, Funkcial. Ekvac., 21(1978), 11-41.

[18] HINO, Y., Continuous dependence for some functional differential equations, Tôhoku Math. J., 23(1971), 565-571.

[19] JEHU, C., Comportement asymptotique des solutions de l'equation $\dot{x}(t) = -f(t, x(t)) + f(t, x(t-1)) + h(t)$, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I., 92(1978), 263-269.

[20] KAPLAN, J.L., SORG., M. and YORKE, J.A., Solutions of $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-L))$ have limits when f is an order relation, Nonlinear Anal., 3(1979), 53-58.

[21] KATO, J., On Liapunov-Razumikhin type theorems, Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations, Springer-Verlag Lecture Notes Math., 243(1971), 54-65.

[22] KATO, J., On Liapunov-Razumikhin type theorems for functional differential equations, Funkcial. Ekvac., 16(1973), 225-239.

[23] KATO, J., Stability problem in functional differential equations with infinite delay, Funkcial. Ekvac., 21(1978), 63-80.

[24] КРАСОВСКИЙ, Н.Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз (Москва, 1959).

[25] KRISZTIN, T., On the convergence of solutions of functional differential equations, Acta Sci. Math., 43(1981), 45-54.

[26] KRISZTIN, T., A Ljapunov-Razumikhin condition for convergence of solutions of delay differential equations, Proceedings of the International Conference Functional-Differential Systems and Related Topics II. (megjelenés alatt).

[27] LAKSHMIKANTHAM, V. and LEELA, S., Differential and Integral Inequalities. Theory and Applications., Vol. I., Academic Press (New York, 1969).

[28] LEVIN, J.J. and NOHEL, J.A., On a system of integro-differential equations occurring in reactor dynamics, J. Math. Mech., 9(1960), 347-368.

[29] LEWIS, R.M. and ANDERSON, B.D.O., Insensitivy of a class of nonlinear compartmental systems to the introduction of arbitrary time delays, IEEE Trans. Circuits Syst. , 27(1980), 604-612.

[30] LOTKA, A.J., Elements of Mathematical Biology, Dover Publications, N. Y., 1956.

[31] MAEDA, H. and KODAMA, S., Some results on nonlinear compartmental systems, IEEE Trans. Circuits Syst. , 26(1979), 203-204.

[32] MAEDA, H., KODAMA, S. and OHTA, Y., Asymptotic behavior of nonlinear compartmental systems: Nonoscillation and stability, IEEE Trans. Circuits Syst., 25(1978), 372-378.

[33] МИТРОПОЛЬСКИЙ, Ю.А., МАРТЫНЮК, Д.И., Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием, АН УССР Киевск. ун-та (Киев, 1969).

[34] МЫШКИС, А.Д., ЭЛЬСГОЛЬЦ, Л.Э., Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Успехи матем. наук, 22(1967), 21-57.

[35] НОРКИН, С.Б., Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, Наука (Москва, 1965).

[36] OĜUZTÖRELI, M.N., Time-Lag Control Systems, Academic Press (New York, 1966).

[37] РАЗУМИХИН, Б.С., Об устойчивости систем с запаздыванием, Прикл. мат. мех., 20(1956), 500-512.

[38] ROUCHE, N., HABETS, P. and LALOY, M., Stability Theory by Liapunov's Direct Method, Springer-Verlag (New York, 1977).

[39] SAWANO, K., Exponentially asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardations megjelenés alatt).

[40] SEIFERT, G., Liapunov-Razumikhin conditions for stability and boundedness of functional differential equations of Volterra type, J. Differential Equations, 14(1973), 424-430.

[41] SEIFERT, G., Liapunov-Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type, J. Differential Equations, 16(1974), 289-297.

[42] TERJÉKI, J., On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations, Ann. Polon. Math., 36(1979), 299-314.

[43] WINSTON, E., Asymptotic stability for ordinary differantial equations with delayed perturbations, SIAM J. Math. Anal., 5(1974), 303-308.

[44] YOSHIZAWA, T., Stability Theory by Liapunov's Second Method, Math. Society of Japan (Tokyo, 1966);

[45] ЗВЕРКИН, А.М., КАМЕНСКИЙ, Г.А., НОРКИН, С.Б., ЭЛЬСГОЛЬЦ, Л.Э., Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, Успехи матем. наук, 17(1962), 77-164.

Köszönetet mondok Dr. Pintér Lajos docens és Dr. Terjéki József adjunktus uraknak a téma felvetéséért és a disszertáció megirásához nyujtott sokoldalu támogatásukért. Köszönöm a Differenciálegyenletek Szeminárium résztvevőinek értékes megjegyzéseiket.

Külön köszönet Virág Ágnesnek a gyors és pontos gépelésért.