

A FUZZY HALMAZOK ELMÉLETÉNEK MÉRTÉKELMÉLETI ÉS LOGIKAI
MEGALAPOZÁSA ÉS ALGEBRAI VIZSGÁLATA

EGYETEMI DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Vas Zoltán

JATE Kalmár László Kibernetikai Laboratórium
SZEGED, 1982.



TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

1.	A FUZZY HALMAZOK ELMÉLETÉNEK ALAPFOGALMAI	1
1.1.	Alapvető definíciók	1
1.2.	Halmazelméleti műveletek fuzzy halmazokon	2
1.3.	További fogalmak	6
1.4.	A fuzzy halmazok algebrai reprezentációja	8
2.	A MAXIMUM ÉS MINIMUM MŰVELETEK AXIOMATIKUS TÁRGYALÁSA	12
2.1.	A maximum és minimum műveletek axiómarendszerei	12
2.2.	A bizonyítások összefoglalása	16
3.	FUZZY MÉRTÉK ÉS FUZZY INTEGRÁL	19
3.1.	Mértékelméleti alapfogalmak	19
3.2.	Fuzzy mérték	21
3.3.	A fuzzy mérték speciális esetei	22
3.4.	Fuzzy integrál	28
3.5.	A fuzzy és a Lebesgue integrál összehasonlítása	30
3.6.	A fuzzy mérték kiterjesztése	32
4.	FUZZY LOGIKA	34
4.1.	Többértékű logikák	34
4.2.	A fuzzy és a valószínűségi logika ..	40
4.3.	További fuzzy logikák	44
5.	FUZZY KAPCSOLÓ MŰVELETEK	47
5.1.	Fuzzy algebra	48
5.2.	Reprezentációs tétel	51

5.3.	A reprezentációs tétel következményei	59
5.4.	Példák a kapcsoló műveletekre és generátor függvényeikre ...	63

IRODALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

A fuzzy halmazok elmélete alig másfél évtizedes multra tekint vissza. Létrehozásának fő célja a humán rendszerek új szempontú vizsgálata. A tudományos elemzések során minél teljesebb, szélesebb körű feladattal foglalkozunk, annál több bizonytalansági tényezővel találjuk magunkat szemben. Amikor ezeket a feladatokat egzakt módszerekkel tárgyaljuk, az ilyen tényezők leírása nagy nehézséget okoz, sok esetben nem is valósítható meg.

A valószínűségszámítás igen jó eszköz a bizonytalanságok egy részének leírására. A valószínűség és fuzzy tulajdonság közötti alapvető különbség, hogy míg a valószínűség jól definiált, konkrétan meghatározott események előfordulásának valószínűségére ad mértéket, addig a fuzzy tulajdonság azt fejezi ki, hogy maguk az események, elemek, fogalmak bizonytalanok, "rosszul definiáltak".

Dolgozatunkban a fuzzy halmazok elméletének matematikai alapjait tárgyaljuk. A fuzzy halmazokat úgy tekintjük, mint kiterjesztett karakterisztikus függvényeket, ahol az értékkészlet nem a $\{0,1\}$ két elemű halmaz, hanem a $[0,1]$ intervallum, vagy valamilyen általánosabb halmaz.

Az első fejezetben a fuzzy halmazok elméletének alapfogalmait ismertetjük. A fuzzy halmaz fogalmának definiálása után áttekintjük, hogy milyen műveleteket lehet értelmezni a fuzzy halmazok körében, és milyen strukturát alkotnak a fuzzy halmazok ezekkel a műveletekkel.

Ismertetjük a fuzzy halmazoknak a közösleges halmazok megfelelően választott halmazával történő reprezentációját

Az első fejezethez szorosan kapcsolódó második fejezetben a fuzzy halmazokon értelmezett maximum és minimum műveletek axiómatikus meg-

alapozásának lehetőségeit tárgyaljuk. Több szerző cikkét összehasonlítva vizsgáljuk a műveletek jogosultságát.

A harmadik fejezetben a fuzzy mértékkel és a fuzzy integrállal foglalkozunk. Először ismertetjük a szükséges mértékelméleti alapfogalmakat, majd értelmezzük a hagyományos halmazok fuzzy mértékét. A véges halmazokon értelmezett fuzzy mértékek speciális eseteinek az irodalomból ismert osztályozását kiterjesztjük végtelen számosságú halmazokra is. Defináljuk a fuzzy integrált és ennek segítségével a fuzzy halmazokon értelmezett fuzzy mértéket. Összehasonlítjuk a fuzzy és a Lebesgue mértéket és integrált.

A negyedik fejezetben ismertetjük a fuzzy logikát, mint többértékű logikát. A mértékelméleti megközelítés után itt a megfelelő többértékű logikák összehasonlításával vizsgáljuk a fuzzy halmazok és valószínűségi elmélet kapcsolatát.

Az utolsó fejezetben az első és második fejezetben már tárgyalt műveletek további elemzésére térünk vissza. Kiválasztva a műveletek bizonyos tulajdonságait, nevezetesen a folytonosságot, monotonitást és asszociativitást, keressük a hagyományos halmazelméleti egyesítés és metszetképzés fuzzy halmazokra történő általánosítását. Az ilyen tulajdonságú műveletekre megfogalmazzuk és bebizonyítjuk a megfelelő reprezentációs tételket. Ismertetjük ezen tételek következményeit és összevetjük az irodalomban található hasonló eredményekkel.

Ezen a helyen szeretnék köszönetet mondani Dr. Dombi József tudományos munkatársnak és Dr. Hunya Péter tudományos főmunkatársnak a problémák felvetéséért, a hasznos konzultációkért és azokért az észrevételekért, amelyeket a kézirat elolvasása után tettek.

1. A fuzzy halmazok elméletének alapfogalmai

A fuzzy halmazok elméletének alapja a halmazelméleti karakterisztikus függvény fogalmának kiterjesztése. Legyen X nem üres alaphalmaz, és $A \subseteq X$ az X egy részhalmaza, és jelöljük μ_A -val az A részhalmaz karakterisztikus függvényét:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin A, \\ 1, & \text{ha } x \in A. \end{cases}$$

A μ_A karakterisztikus függvény az X alaphalmazt a $\{0,1\}$ kétértékű halmazba képezi le, azaz $\mu_A : X \rightarrow \{0,1\}$. Tehát az X halmaz minden eleméről pontosan tudjuk, hogy az A részhalmaznak eleme, vagy nem eleme.

Ha azonban valamilyen sok bizonytalanságot hordozó fogalomrendszert akarunk halmazelméleti módon megközelíteni, akkor a halmazhoz tartozást nem tudjuk ilyen egyértelműen eldönteni. Csak olyanokat állíthatunk, hogy az X halmaz egy eleme többé vagy kevésbé tartozik az A részhalmazhoz.

Az itt leírtak matematikai megfogalmazásához a fuzzy halmazok elméletében a karakterisztikus függvény fogalmának általánosításával juthatunk el. Az $\tilde{A}$ fuzzy halmaz olyan kiterjesztett karakterisztikus függvény, amely értékeit a $[0,1]$ intervallumból veszi fel.

1.1. Alapvető definíciók

1.1.1. Definíció. Az $\tilde{A}$ fuzzy halmaz a nem üres X alaphalmazon értelmezett tetszőleges

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$$

függvény. A közönséges halmazok karakterisztikus függvénye ilyen értele-

ben speciális fuzzy halmaz.

Megjegyezzük, hogy Zadeh [43] dolgozatában a fuzzy halmazokat $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$ párok halmazaként értelmezte, ahol $\mu_{\tilde{A}}$ az $\tilde{A}$ fuzzy halmaz tagsági függvénye, és $\mu_{\tilde{A}}(x)$ az x elem $\tilde{A}$ fuzzy halmazhoz való tartozásának szintje. Az általunk használt definícióban a fuzzy halmazokat azonosítjuk a tagsági függvénnyel. Ez a felfogás az utóbbi időben az irodalomban elterjedt, a problémák tárgyalását, és az írásmódot jelentősen megkönnyíti. Ezért, vagy $\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$ -vel jelöljük a fuzzy halmazokat, és $\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}, \dots$ -vel tagsági függvényüket, vagy pedig magát a $\mu, \nu, \dots$ függvényt tekintjük a fuzzy halmaznak.

Jelöljük $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ -szel az X alaphalmazhoz tartozó fuzzy halmazok halmazát, $\mathcal{Ch} = \mathcal{Ch}(X)$ -szel az X -hez tartozó karakterisztikus függvények halmazát. $\mathcal{Ch}(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$.

1.2. Halmazelméleti műveletek fuzzy halmazokon

A közösleges halmazok részhalmazainak metszetét és egyesítését Zadeh [43] a következő módon terjesztette ki:

1.2.1. Definíció. Ha $\tilde{A}$ és $\tilde{B}$ tetszőleges $\mathcal{F}$ -beli fuzzy halmazok, akkor

$$\text{egyesítés: } \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \quad \text{és}$$

$$\text{metszet: } \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \quad \text{minden } x \in X \text{ esetén.}$$

A maximum és minimum műveletek elméleti megalapozását, jogosultságának vizsgálatát, a probléma axiomatikus eszközökkel való megközelítését a 2. fejezetben tárgyaljuk.

A Zadeh-i műveleteken kívül különböző indokok alapján másokat is javasoltak a halmazelméleti műveletek általánosítására. Ilyenek például:

1.2.2. Definíció.

$$\begin{aligned}
 &: \mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \text{és} \\
 &: \mu_{\tilde{A} \odot \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \text{vagy} \\
 &: \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \min(1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)) \quad \text{és} \\
 &: \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \max(0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1) .
 \end{aligned}$$

1.2.1. Tétel. Ha $(\oplus, \odot)$ a fenti műveletpárok bármelyike, akkor teljesül, hogy

- (1) $\oplus$ és $\odot$ monoton, kommutatív és asszociatív,
- (2) a $\oplus$ és $\odot$ műveleteket a közöséges halmazokra alkalmazva a szokásos egyesítést és metszetképzést kapjuk,
- (3) ha $\tilde{A}$ tetszőleges $\mathcal{F}$ -beli fuzzy halmaz, akkor minden $x \in X$ elemre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} \oplus \emptyset &= \tilde{A} \quad , \quad \tilde{A} \oplus X = X \quad , \\
 \tilde{A} \odot \emptyset &= \emptyset \quad , \quad \tilde{A} \odot X = \tilde{A} \quad .
 \end{aligned}$$

A felsorolt három műveletpár mindegyikében a metszetképzés un. t -norma.

1.2.3. Definíció. A $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ kétváltozós függvényt háromszög normának / t -norma/ nevezzük, ha teljesülnek a következő tulajdonságok /Schweizer és Sklar [34] /:

- (1) $t(0, 0) = 0$, $t(a, 1) = t(1, a) = a$, minden $a \in [0, 1]$ esetén,
- (2) $t(a, b) \leq t(c, d)$, ha csak $a \leq c$, $b \leq d$,
- (3) $t(a, b) = t(b, a)$,
- (4) $t(t(a, b), c) = t(a, t(b, c))$.

1.2.2. Tétel. Minden t -norma kielégíti a

$$t_w(a,b) \leq t(a,b) \leq \min(a,b)$$

egyenlőtlenséget, ahol

$$t_w(a,b) = \begin{cases} a, & \text{ha } b = 1, \\ b, & \text{ha } a = 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a t_w függvény segítségével is definiálható fuzzy művelet.

A fuzzy kapcsoló műveleteket /fuzzy halmazok egyesítése és metszete/ részletesebben a dolgozat 5. fejezetében tárgyaljuk.

1.2.4. Definíció. Ha $\tilde{A}$ tetszőleges fuzzy halmaz, akkor komplementerét $\bar{\tilde{A}}$ -val jelölve

$$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \text{ minden } x \in X\text{-re.}$$

Az itt értelmezett művelet indoklása nehezebb probléma, mint a maximum és minimum műveletek jogosultságának alátámasztása. A komplementer képzéséhez alkalmazott függvényre Bellman és Giertz [4] a következő feltételeket adta:

- (1) $\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)$ egyedül a $\mu_{\tilde{A}}(x)$ -től függjön, azaz
 $\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = h(\mu_{\tilde{A}}(x))$, minden $x \in X$ mellett,
- (2) $h(0) = 1$ és $h(1) = 0$, visszanyerve a szokásos komplementer képzést, ha A hagyományos részhalmaz,
- (3) h folytonos és szigorúan monoton csökkenő,
- (4) h involutív, azaz $h(h(\mu_{\tilde{A}}(x))) = \mu_{\tilde{A}}(x)$.

Ezek a feltételek azonban nem határozzák meg egyértelműen h -t. Ahhoz, hogy a $h(u) = 1-u$ függvényt kapjuk, további feltételek szükségesek.

Ha az (1) - (4) feltételek mellett a

(5) minden $x_1, x_2 \in X$ -re

$$\text{ha } \mu_{\tilde{A}}(x_1) + \mu_{\tilde{A}}(x_2) = 1, \text{ akkor } \mu_{\tilde{A}}(x_1) + \mu_{\tilde{A}}(x_2) = 1$$

feltételt követeljük meg, akkor $h(u) = 1-u$ / Gaines [15] /.

Az 5. feltétel helyett Bellman és Giertz egy sokkal szigorubb követelményt állítva kapta ugyanezt az eredményt:

(6) minden $x_1, x_2 \in X$ -re

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1) - \mu_{\tilde{A}}(x_2) = \mu_{\tilde{A}}(x_2) - \mu_{\tilde{A}}(x_1) .$$

1.2.3. Tétel. A $(\oplus, \odot)$ az 1.1.4. definícióban megadott komplementer képzéssel kielégíti a De Morgan azonosságot, azaz minden $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$ -re

$$\overline{\tilde{A} \oplus \tilde{B}} = \tilde{A} \odot \tilde{B} , \text{ és}$$

$$\overline{\tilde{A} \odot \tilde{B}} = \tilde{A} \oplus \tilde{B} .$$

1.2.4. Tétel. Ha $\mathcal{F}(X)$ az X alaphalmazhoz tartozó fuzzy halmazok halmaza, akkor - az 1.2.1. és 1.2.3. tételeket is figyelembe véve -

(1) $(\mathcal{F}(X), \cup, \cap, \overline{})$ pszeudo-komplementumos disztributív háló, tehát

- $\cup$ és $\cap$ idempotensek, kölcsönösen disztributívok, és teljesül az elnyelési tulajdonság,

- nem teljesül a kizárt harmadik elve, azaz általában nem teljesülnek az

$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} = \emptyset, \quad \text{és} \quad \tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} = X$$

egyenlőségek.

- (2) $(\mathcal{F}(X), \hat{+}, \cdot, \neg)$ pszeudo-komplementumos, nem disztributív struktúra, tehát
- $\hat{+}$ és $\cdot$ nem idempotens, nem disztributív, és nem teljesül az elnyelési tulajdonság,
 - nem teljesül a kizárt harmadik elve,
- (3) $(\mathcal{F}(X), \cup, \cap, \neg)$ komplementumos, nem disztributív struktúra, tehát
- $\cup$ és $\cap$ nem idempotens, nem disztributív és nem teljesül az elnyelési tulajdonság,
 - teljesül a kizárt harmadik elve.

1.3. További fogalmak

1.3.1. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a $\tilde{B}$ fuzzy halmaz tartalmazza az $\tilde{A}$ fuzzy halmazt, vagy másképpen fogalmazva az $\tilde{A}$ megelőzi $\tilde{B}$ -t / $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ /, ha

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \text{minden } x \in X \text{ esetén.}$$

$\leq$ reláció parciális rendezés $\mathcal{F}$ -n.

Két fuzzy halmazt akkor tekintünk egyenlőnek, ha

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \quad (x \in X).$$

1.3.1. Tétel. Tetszőleges $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}$ fuzzy halmazokra teljesül, hogy

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} \leq \tilde{A} \cdot \tilde{B} \leq \tilde{A} \cap \tilde{B} \leq \tilde{A} \cup \tilde{B} \leq \tilde{A} \dot{\cup} \tilde{B} \leq \tilde{A} \cup \tilde{B}.$$

1.3.2. Definíció. Az $\tilde{A}$ fuzzy halmaz α -szinthalmazának nevezzük és $\tilde{A}_\alpha$ -val jelöljük a

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid x \in X \text{ és } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

hagyományos halmazt.

Teljesülnek a következő tételek:

1.3.2. Tétel. Tetszőleges $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmaz előáll

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min(\alpha, \mu_{\tilde{A}_\alpha}(x))$$

alakban.

1.3.3. Tétel.

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cup \tilde{B}_\alpha, \text{ és}$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\alpha, \text{ de}$$

$$(\tilde{A})_\alpha \neq \tilde{A}.$$

A fuzzy halmazok fogalmának egy további lehetséges általánosítását úgy kapjuk, hogy az értékészlet $[0,1]$ intervalluma helyett egy általánosabb strukturát választunk. Legyen $(L, \vee, \wedge)$ teljes disztributív háló.

1.3.3. Definíció. A nem üres X halmaz L -fuzzy halmaza egy

$$\mu: X \rightarrow L$$

függvény. Jelöljük $\mathcal{F}_L(X)$ -szel az X alaphalmazhoz tartozó L -fuzzy halmazok halmazát. Az $L = [0,1]$ esetben $\mathcal{F}_L(X) = \mathcal{F}_{[0,1]}(X) = \mathcal{F}(X)$ /Gougen [18] /.

1.4. A fuzzy halmazok algebrai reprezentációja

A fuzzy halmazokra vonatkozó reprezentációs tétel azt állítja, hogy minden fuzzy halmazhoz hozzárendelhető közöségi halmazok egy megfelelően választott halmaza. Ehhez a tételhez a következő úton jutunk el /Negoita és Ralescu [31] / .

Legyen $(L, \vee, \wedge)$ teljes háló.

1.4.1. Definíció. A tetszőleges X halmaz L -véletlen halmaza az X részhalmazainak olyan

$$\mathcal{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in L}$$

összettsége, ahol $E_\alpha \subseteq X$, minden $\alpha \in L$, és amelyben $E_{\vee \alpha_i} = \bigcup_{i \in I} E_{\alpha_i}$, minden $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq L$ mellett.

Az L -véletlen halmazok halmazát jelöljük $\mathfrak{L}_L(X)$ -szel.

1.4.2. Definíció. Legyen $\mathcal{E}'$ és $\mathcal{E}''$ $\mathfrak{L}_L(X)$ -beli L -véletlen halmaz. Akkor mondjuk, hogy $\mathcal{E}''$ tartalmazza $\mathcal{E}'$ -t / $\mathcal{E}' \leq \mathcal{E}''$ /, ha

$$E' \subseteq E'' \text{ , minden } \alpha \in L \text{ mellett.}$$

Megadható egy teljes háló az $\mathfrak{L}_L(X)$ halmazon a következő műveletekkel:

1.4.3. Definíció. Legyen $\mathcal{E}' = \{E'_\alpha\}_{\alpha \in L}$ és $\mathcal{E}'' = \{E''_\alpha\}_{\alpha \in L}$ $\mathfrak{L}_L(X)$ -beli véletlen halmaz. Ekkor az L -véletlen halmazokon az egyesítés és metszetképzés művelete:

$$\mathcal{E}' \cup \mathcal{E}'' = (E'_\alpha \cup E''_\alpha)_{\alpha \in L} \text{ , és}$$

$$\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' = \bigcup \mathcal{E} \text{ , ahol } \mathcal{E} \in \mathfrak{L}_L(X) \text{ , } \mathcal{E} \leq \mathcal{E}' \text{ , és } \mathcal{E} \leq \mathcal{E}'' \text{ .}$$

Megjegyezzük, hogy $(E'_\alpha \cap E''_\alpha)_{\alpha \in L}$ nem feltétlenül eleme $\mathcal{L}_L(X)$ -nek.

Belátható, hogy $\mathcal{L}_L(X)$ teljes háló, amelynek a legkisebb eleme

$\mathcal{E}^0 = \{E_\alpha\}_{\alpha \in L}$, ahol minden $\alpha \in L$ -re $E_\alpha = \emptyset$, a legnagyobb eleme

$\mathcal{E}^1 = \{E_\alpha\}_{\alpha \in L}$, ahol minden $\alpha \in L$ -re $E_\alpha = X$.

A továbbiakban az $(L, \leq)$ parciálisan rendezett halmaztól követeljük meg a következő tulajdonságokat:

(L1) L teljes háló,

(L2) minden $A \subseteq L$ -re, ha $a \leq \sup A$, akkor létezik olyan $b \in A$, hogy $a \leq b$.

Tegyük fel még, hogy minden $f : L \rightarrow \mathcal{P}(X) / \mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmaza/ függvényre teljesül, hogy

(F1) $f(0) = \emptyset$,

(F2) $f(\bigvee_{i \in I} \alpha_i) = \bigcup_{i \in I} f(\alpha_i)$, minden $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq L$ esetén.

Legyen $\mathcal{L}_L(X)$ az ilyen tulajdonságú függvények halmaza, azaz

$$\mathcal{L}_L(X) = \{f : L \rightarrow \mathcal{P}(X) \mid f \text{-re teljesül F1 és F2}\}.$$

Látható, hogy egy tetszőleges $\mathcal{L}_L(X)$ -beli f függvénynek egy L -véletlen halmaz felel meg, és viszont. A

$$\mathcal{L}'_L(X) = \{f : L \rightarrow \mathcal{P}(X) \mid f(0) = X, \text{ és } f(\bigvee_{i \in I} \alpha_i) = \bigcap_{i \in I} f(\alpha_i)\}$$

halmazt szintén használni fogjuk.

1.4.1. Tétel. Az $(\mathcal{L}'_L, \wedge, \nabla)$ és az $(\mathcal{L}_L, \vee, \triangle)$ struktúra teljes háló, ahol

$$(\bigwedge_{i \in I} f_i)(\alpha) = \bigcap_{i \in I} f_i(\alpha), \quad f_i \in \mathcal{L}'_L,$$

$$\bigvee_{i \in I} f_i = \bigwedge f, \quad \text{ahol } f_i \in \mathcal{L}'_L, \quad f \in \mathcal{L}'_L, \quad \text{és } f \geq f_i,$$

valamint

$$(\bigvee_{i \in I} g_i)(\alpha) = \bigcup_{i \in I} g_i(\alpha), \quad g_i \in \mathcal{L}''_L,$$

$$\bigwedge_{i \in I} g_i = \bigvee g, \quad \text{ahol } g_i \in \mathcal{L}''_L, \quad g \in \mathcal{L}''_L, \quad \text{és } g \leq g_i.$$

Látható továbbá, hogy $\mathcal{L}'_L$ infimum-teljes, míg $\mathcal{L}''_L$ szuprémum-teljes halmaz, és az $\mathcal{L}_L(X)$ és $\mathfrak{F}_L(X)$ izomorf strukturák.

A fuzzy halmazok és az L -véletlen halmazok közötti megfeleltetés két leképezés szorzataként áll elő. Ezek:

1.4.2. Tétel. Létezik egy $\Phi_1 : \mathfrak{F}_L(X) \rightarrow \mathcal{L}'_L(X)$ bimorf leképezés úgy, hogy

$$\Phi_1(\mu) = f_\mu, \quad \text{ahol } f_\mu(\alpha) = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\}.$$

1.4.3. Tétel. Az $\mathcal{L}'_L(X)$ és $\mathcal{L}_L(X)$ teljes hálók izomorf strukturák, mégpedig a

$$\Phi_2 : \mathcal{L}'_L(X) \rightarrow \mathcal{L}_L(X)$$

izomorfizmus mellett, ahol

$$\Phi_2(f) = g, \quad g(\alpha) = X - f(\alpha).$$

1.4.4. Tétel. /Reprezentációs tétel/ Létezik egy Ψ izomorfizmus az $\mathfrak{F}_L(X)$ és $\mathcal{L}_L(X)$ teljes hálók között, mégpedig

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1 : \mathfrak{F}_L(X) \rightarrow \mathcal{L}_L(X).$$

Igy megteremtettük a kapcsolatot az L -fuzzy halmazok és az L -véletlen halmazok között.

Tekintsünk néhány speciális esetet. Legyen tehát

$$\mathcal{L} = \{f \mid f : L \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad f(0) = \emptyset, \quad f(\bigvee_{i \in I} \alpha_i) = \bigcup_{i \in I} f(\alpha_i) \}.$$

- (1) ha $L = \{0, 1\}$, akkor $\mathcal{L} \approx \mathcal{P}(X)$,
az X részhalmazainak halmaza,
- (2) ha $L = [0, 1]$, akkor $\mathcal{L} \approx \mathcal{F}(X)$,
az X fuzzy halmazainak halmaza,
- (3) ha L teljesíti az $L1$ és $L2$ feltételeket,
akkor $\mathcal{L} \approx \mathcal{F}_L(X)$,
az L -fuzzy halmazok halmaza.

2 . A maximum és minimum műveletek axiómatikus tárgyalása

2.1. A maximum és minimum műveletek axiómarendszerei

Zadeh a fuzzy halmazok elméletének kialakításakor [43] nagyon egyszerű indoklást adott a maximum és minimum művelet bevezetéséhez.

A következőket írta:

- (Z1) két fuzzy halmaz egyesítése legyen az a legkisebb fuzzy halmaz, amelyik tartalmazza mindkettőt,
- (Z2) két fuzzy halmaz metszete legyen az a legnagyobb fuzzy halmaz, amelyiket mind a két fuzzy halmaz tartalmazza.

Ez természetes definíció, mert ekvivalens a hagyományos egyesítésnek és metszetképzésnek a halmazok részben rendezett strukturájában megadott értelmezésével. Zadeh bebizonyította, hogy a $[0,1]$ intervallum esetén a Z1 és Z2 a maximum és minimum művelet.

Mint az 1. fejezetben láttuk, a max - min műveleteken kívül másokat is javasoltak a halmazelméleti műveletek általánosítására. Éppen ezért szükségessé vált a különböző műveletek jogosultságának vizsgálata. Ilyen irányú törekvések először a max és min műveletek védelmében történtek. Ezeknek a dolgozatoknak az volt a céljuk, hogy olyan érveket soroljanak fel, amelyek az illető műveletek indokoltságát elméleti és gyakorlati szempontból alátámasztják. Ezt a célt megfelelően megválasztott axiómarendszerek segítségével érték el.

Valamennyi munkában közös az a feltételezés, hogy a fuzzy halmazokon értelmezett egyesítés és metszetképzés műveletére érvényes, hogy

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = d(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \text{ és}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = c(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \text{ minden } x \in X \text{ esetén,}$$

ahol $d, c : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ függvények. Az axiómákat ezekre a függvényekre vonatkozóan mondták ki.

Az axiómarendszerek közül az első Bellman és Giertz [4] munkájában jelent meg. Cikkükben azt bizonyították, hogy a Zadeh-i definíció nemcsak természetes, de egy teljesen indokolt feltételrendszer mellett az egyetlen lehetséges is. Ez az a dolgozat, amelyre szinte minden későbbi szerző kiindulásként hivatkozik.

Hamacher [21] cikkében a fuzzy halmazokon értelmezett műveletek különböző osztályait vizsgálta, és bebizonyította, hogy Bellman és Giertz axiómarendszerénél egy szűkebb axiómarendszer is a max és min műveleteket adja.

Trillas, Alsina és Valverde [40] több szempontból közelítette meg a fuzzy halmazokon értelmezett egyesítés, metszetképzés és komplementerképzés problémáját. Ezek közül azt emeljük ki, hogy ismertették a fenti két feltételrendszert, és egy általánosabb műveletosztály vizsgálatának kiindulópontjaként közöltek egy - az előzőektől különböző - axiómarendszert.

Dubois és Prade [11] a többtényezős döntések elméletében előforduló aggregációs műveletek osztályozását és interpretálását kísérelték meg. Ezen belül közöltek egy feltételrendszert, amelynek egyetlen lehetséges megoldása a max és min műveletek.

Fung és Fu [14] a többtényezős döntések problémáját fuzzy környezetben vizsgálva felállítottak egy - Bellman és Giertz rendszerénél élesebb - axiómarendszert, amelyet szintén csak a max és min műveletek elégítenek ki.

A fenti öt axiómarendszert jelöljük rendre BG, H, TAV, DP és FF rövidítésekkel.

A továbbiakban először - rövid indoklásokkal - leírjuk a lehetséges axiómákat, majd összefoglaljuk egy táblázatban, hogy a fenti dolgozatokban ezek közül melyek alkotnak teljes rendszert a max és min műveletek szempontjából.

Interpretáljuk a d és c függvények x és y változóit, mint elfogadási mértékeket /szinteket/, vagy igazságértékeket.

- (A1) A d és c függvények folytonosak, azaz változóik kis mértékű változása a közös elfogadási szintet kis mértékben változtatja.
- (A2) d és c monoton növekvő mindkét változója szerint, tehát ha egyik változó igazságértéke sem csökken, akkor az összevont érték sem csökkenhet.
- (A3) A $d(x, x)$ és $c(x, x)$ függvények szigorúan monoton növekvők, tehát ha $x' < x''$ akkor ez az egyenlőtlenség az elfogadási szintekre is teljesül, azaz

$$d(x', x') < d(x'', x'') \quad \text{és} \quad c(x', x') < c(x'', x'').$$

- (A4) d és c kommutatív, azaz a változók felcserélése az elfogadási szintet nem változtatja.
- (A5) d és c asszociatív, azaz
$$d(x, d(y, z)) = d(d(x, y), z) \quad \text{és}$$
$$c(x, c(y, z)) = c(c(x, y), z), \text{ minden } x, y, z \in [0, 1] \text{ -re.}$$
Ez az axióma a kétváltozós műveletek többváltozósá váló kiterjesztését támogatja.

(A6) d és c kölcsönösen disztributív, azaz
 $d(x, c(y, z)) = c(d(x, y), d(x, z))$ és
 $c(x, d(y, z)) = d(c(x, y), c(x, z))$, minden $x, y, z \in [0, 1]$
 esetén.

(A7) d és c idempotens, azaz
 $d(x, x) = x$ és $c(x, x) = x$, minden $x \in [0, 1]$ -re.

Az A5, A6 és A7 axiómákat Bellman és Giertz úgy indokolta, hogy a logikailag ekvivalens kijelentéseknek az igazságértéke legyen egyenlő.

(A8) $d(x, y) \geq \max(x, y)$ és $c(x, y) \leq \min(x, y)$. Ez az axióma azt biztosítja, hogy a változók számának növekedésével a c függvény által meghatározott elfogadási szint nem növekedhet, míg a d által meghatározott nem csökkenhet.

(A9) $d(0, 0) = 0$, $d(1, 1) = 1$, $d(0, 1) = d(1, 0) = 1$ és
 $c(0, 0) = 0$, $c(1, 1) = 1$, $c(0, 1) = c(1, 0) = 0$.

Ez az ún. korrespondencia elv, azaz a fuzzy halmazokon értelmezett egyesítés és metszetképzés műveleteit a hagyományos halmazokra alkalmazva a halmazelméleti egyesítést és metszetképzést kapjuk.

(A10) $d(1, x) = d(x, 1) = 1$ és
 $c(0, x) = c(x, 0) = 0$, minden $x \in [0, 1]$ esetén.

(A11) $d(0, x) = d(x, 0) = x$ és
 $c(1, x) = c(x, 1) = x$, minden $x \in [0, 1]$ -re.

Ez az utóbbi két axióma a korrespondencia elvnél szigorúbb feltétel.

Az axiómarendszerek táblázata

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
BG	X	X	X	X	X	X		X	X		
H		X	X		X	X		X			
TAV		X				X					X
DP	X	X			X		X		X		
FF	X	X		X	X		X			X	

2.2. A bizonyítások összefoglalása

Az előzőekben ismertetett valamennyi axiómarendszert csak a maximum és minimum műveletek elégítik ki. Ezt a szerzők dolgozataikban külön-külön bebizonyították. Most - bizonyítások nélkül - kiemeljük azokat a főbb állításokat, amelyek segítségével aztán minden axiómarendszer esetén a teljes bizonyítás felépíthető.

Az idempotencia - mint azt az 5. fejezetben még látni fogjuk - a maximum és minimum műveletek meghatározó tulajdonsága. Mivel a BG és H axiómarendszerekben nem szerepel az idempotencia ezért Bellman és Hamacher először ezt bizonyította be más tulajdonságok segítségével. Bellman-nal ellentétben Hamacher nem használta ki a folytonosságot /A1/ és a korrespondencia elvet /A9/ bizonyítása során.

2.2.1. Segédétel. Az A3, A5, A6 és A8 axiómák teljesülése esetén a d és c függvény idempotens /Hamacher [21] /.

A maximum és minimum műveletek szempontjából egy másik erős tulajdonság az A_{11} .

2.2.2 Segédteétel. Ha d és c folytonos /A1/, monoton /A2/, asszociatív /A5/ és teljesíti a korrespondencia elvet /A9/, akkor teljesül az A_{11} axióma /Dubois [10] /.

Az A_{11} axióma felhasználásával a műveletek idempotens tulajdonságát más módon is megkaphatjuk.

2.2.3. Segédteétel. Ha d és c kölcsönösen disztributív /A6/, teljesíti a korrespondencia elvet /A9/ és A_{11} -et, akkor d és c idempotens /Trillas [40] /.

Az alábbi két tétel az A_8 axiómát és a

$$\min(x, y) \leq c(x, y) \quad , \quad d(x, y) \geq \max(x, y)$$

tulajdonságokat adja, amelyeknek már triviális következménye a

$$c(x, y) = \min(x, y) \quad \text{és} \quad d(x, y) = \max(x, y)$$

egyenlőségek.

2.2.4. Segédteétel. Ha d és c monoton /A2/ és teljesíti A_{11} -et, akkor

$$c(x, y) \leq \min(x, y) \quad \text{és} \quad d(x, y) \geq \max(x, y) \quad /A_8/ \quad .$$

2.2.5. Segédteétel. Ha d és c monoton /A2/ és idempotens /A7/, akkor

$$\min(x, y) \leq c(x, y) \quad \text{és} \quad \max(x, y) \geq d(x, y) \quad .$$

Ezekután az egyes axiómarendszerek alapján a bizonyítás menete a következő:

H : 2.2.1. , 2.2.5.

DP : 2.2.2. , 2.2.4. , 2.2.5.

TAV: 2.2.4. , * , 2.2.3. , 2.2.5.

FF : 2.2.5. , ** , 2.2.2. , 2.2.4.

A * és **jelölésekkel a következő két egyszerű állítást helyettesítettük:

* : $A8 \Rightarrow d(0,0) = 0, d(1,1) = 1$ és
 $c(0,0) = 0, c(1,1) = 1.$

** : $A10 \Rightarrow d(0,1) = d(1,0) = 1 ,$
 $c(0,1) = c(1,0) = 0.$

Megjegyezzük, hogy a bizonyítások fent leírt menetei nem minden esetben egyeznek meg a szerzők által megadott levezetésekkel. Célunk az volt, hogy a dolgozatokból kiemelt legjelentősebb összefüggések felhasználásával valamennyi axiómarendszer esetén megfelelő levezetést kapjunk.

3. Fuzzy mérték és fuzzy integrál

A fuzzy halmazok segítségével olyan objektumok, fogalmak tulajdonságait próbáljuk megfogalmazni, amelyekben rejlő bizonytalanságokat egyéb matematikai eszközökkel nem, vagy nagyon bonyolult módon lehetne megadni. Amikor ezeknek az objektumoknak a viselkedését, mozgását akarjuk vizsgálni, felmerül a kérdés, hogy a hagyományos matematikai eszközök alkalmazhatók-e? Ezek az egyébként hatékony módszerek sokszor csak olyan szigorú feltételek fennállása esetén használhatók, amelyeket egy fuzzy halmazok segítségével felállított rendszer nem teljesít.

Ezért felmerül az igény olyan matematikai módszerek kidolgozására, amelyek segítségével a fuzzy tulajdonságokat hordozó rendszerek is jól kezelhetők. Így született meg a fuzzy mértékek és fuzzy integrálok elmélete. A fuzzy mértékek segítségével a fuzzy tulajdonságokkal rendelkező objektumok szubjektív értékelésére nyílik lehetőség.

3.1. Mértékelméleti alapfogalmak

Először azokat a halmazelméleti és mértékelméleti fogalmakat ismer-tetjük, amelyekre a fuzzy mérték és integrál tárgyalásánál szükségünk lesz /Halmos [19] / .

3.1.1. Definíció. Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{R}$ rendszerét halmazgyűrűnek nevezzük.

$$(1) \text{ ha } A, B \in \mathcal{R} \text{ esetén } A \cup B \in \mathcal{R}, \text{ és}$$

$$(2) \text{ ha } A, B \in \mathcal{R} \text{ esetén } A - B \in \mathcal{R}.$$

3.1.2. Definíció. Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszerét halmazalgebrának nevezzük,

- (1) ha $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{A}$, és
 (2) ha $A \in \mathcal{A}$ esetén $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

3.1.1. Tétel. Az $\mathcal{R}$ halmazgyűrű akkor és csak akkor halmazalgebra, ha $X \in \mathcal{R}$.

3.1.3. Definíció. A halmazgyűrűt Borel féle halmazgyűrűnek, vagy σ -gyűrűnek nevezzük, ha

$$A_n \in \mathcal{R} \quad (n=1,2,\dots) \quad \text{esetén} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

A Borel féle halmazalgebra / σ -algebra/ hasonlóan definiálható.

3.1.4. Definíció. Az X halmaz részhalmazainak $\mathcal{M}$ rendszerét monotonnak nevezzük, ha tetszőleges $\mathcal{M}$ -beli monoton $\{E_n\}$ sorozatra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}.$$

3.1.2. Tétel. Minden σ -algebra monoton rendszer, és ha egy algebra monoton, akkor σ -algebra.

3.1.5. Definíció. Az X halmaz részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszerén értelmezett $m: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^*$ halmazfüggvény σ -additív,

$$\text{ha } A_n \in \mathcal{A} \quad (n=1,2,\dots) \quad \text{esetén} \quad m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

3.1.6. Definíció. A halmazgyűrűn értelmezett σ -additív, nemnegatív halmazfüggvényt mértéknek nevezzük.

3.1.7. Definíció. Az $\mathcal{R}$ halmazgyűrűn értelmezett m mértéket σ -végesnek nevezzük, ha minden $A \in \mathcal{R}$ halmazhoz található olyan $A_n \in \mathcal{R} \quad (n=1,2,\dots)$ halmazsorozat, hogy minden A_n halmaz véges mértékű, és $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

3.2. Fuzzy mérték

Legyen $\mathcal{M}$ az X halmaz részhalmazainak olyan monoton rendszere, amelyre $\emptyset, X \in \mathcal{M}$.

3.2.1. Definíció. Az $\mathcal{M}$ -n értelmezett $g : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvényt fuzzy mértéknek nevezzük /Sugeno [37]/, ha

- (1) $g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$,
- (2) ha $A, B \in \mathcal{M}$ és $A \subseteq B$, akkor $g(A) \leq g(B)$,
- (3) ha $\{A_n\}$ $\mathcal{M}$ -beli monoton halmazsorozat, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) .$$

Itt az (1) a korlátosságot és nem-negativitást, (2) a monotonitást, és (3) a folytonosságot biztosítja. A 3. feltétel csak végtelen X halmaz esetén lényeges.

3.2.2. Definíció. Az $(X, \mathcal{M}, g)$ hármast fuzzy mértéktérnek, g -t a mérhető $(X, \mathcal{M})$ tér fuzzy mértékének nevezzük.

Ha $A \in \mathcal{M}$, akkor az A halmaz $\mathcal{M}$ -mérhető.

3.2.3. Definíció. Legyen $h : X \rightarrow [0, 1]$. A h függvényt $\mathcal{M}$ -mérhetőnek, vagy mérhetőnek nevezzük, ha az

$$\{x \mid h(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{M}, \text{ azaz az } \alpha\text{-szinthalmoz mérhető minden } \alpha \in [0, 1] \text{ -re.}$$

3.2.1. Tétel. Legyen g az $(X, \mathcal{M})$ tér fuzzy mértéke. Ekkor, ha $A, B \in \mathcal{M}$, akkor

- (1) $g(A \cup B) \geq \max(g(A), g(B))$,
- (2) $g(A \cap B) \leq \min(g(A), g(B))$.

3.2.4. Definíció. Ha $g(A \cup B) = \max(g(A), g(B))$ minden $A, B \in \mathcal{M}$ -re, akkor g $\mathcal{M}$ -additív.

3.3. A fuzzy mérték speciális esetei

A továbbiakban a $\mathcal{B}$ Borel rendszert tekintjük a g fuzzy mérték értelmezési tartományának. A $\mathcal{B}$ Borel féle halmazalgebra a 3.1.2. tétel alapján monoton rendszer.

Vizsgáljuk meg most a fuzzy mérték néhány speciális esetét és ezek egymáshoz való viszonyát.

3.3.1. Definíció. Legyen g a $\mathcal{B}$ Borel halmazalgebrán értelmezett fuzzy mérték. A g -t hihetőségi /credibility/ mértéknek nevezzük /Shafer [29] / , ha tetszőleges $\mathcal{B}$ -beli diszjunkt $\{A_n\}$ halmazsorozatra

$$g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g(A_n) \quad \text{/szuperadditív/}$$

tulajdonság teljesül.

3.3.2. Definíció. Ha a $\mathcal{B}$ -n értelmezett fuzzy mérték szubadditív, azaz $\mathcal{B}$ tetszőleges diszjunkt $\{A_n\}$ halmazsorozatára

$$g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} g(A_n)$$

teljesül, akkor g -t elfogadhatósági /plausibility/ mértéknek nevezzük.

Mint ahogy a valószínűség matematikai fogalmát a valószínűségi mérték axiómáival szokás megadni, úgy a Shafer [29] által tárgyalt hihetőség és elfogadhatóság matematikai definícióját a megfelelő mértékek axiómáival adjuk meg.

A valószínűségi mérték az egyetlen olyan fuzzy mérték, amely egyidejűleg hihetőségi és elfogadhatósági mérték.

Mivel a klasszikus mértékek additivitásával szemben a fuzzy mérték monoton tulajdonsága nem elegendő ahhoz, hogy két idegen halmaz egyesítésének mértékét meghatározzuk az egyes halmazok mértéke alapján, Sugeno [37] javasolt egy szabályt, amely elvezet egy további speciális fuzzy mérték definíciójához.

3.3.3. Definíció. Legyen $\mathcal{B}$ az X halmaz részhalmazainak Borel féle halmazalgebrája. A $\mathcal{B}$ -n értelmezett g_λ halmazfüggvényt megszámlálhatóan λ -additívnek nevezzük, ha minden $\mathcal{B}$ -beli $\{A_n\}$ diszjunkt halmazsorozatra

$$g_\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n) \right) = \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda g_\lambda(A_n)) - 1 \right],$$

ahol $\lambda \in (-1, \infty)$ és $\lambda \neq 0$.

A következő tétel alapján látható, hogy a λ -additivitás a $\emptyset$ -additivitás /3.1.5. def./ általánosítása.

3.3.1. Tétel. Ha g_λ a $\mathcal{B}$ Borel féle halmazalgebrán értelmezett megszámlálhatóan λ -additív halmazfüggvény és $\{A_n\}$ -beli diszjunkt halmazsorozat, akkor

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_\lambda(A_n).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} g_\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda g_\lambda(A_n)) - 1 = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \prod_{i=1}^n (1 + \lambda g_\lambda(A_i)) - 1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n g_{\lambda}(A_i) + \lambda \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i, j \leq n}} g_{\lambda}(A_i) \cdot g_{\lambda}(A_j) + \dots \right) \right] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_{\lambda}(A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{\lambda}(A_n) .
 \end{aligned}$$

3.3.2. Tétel. Ha a $\mathcal{B}$ Borel féle halmazalgebrán értelmezett $g : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvény megszámlálhatóan λ -additív és $g_{\lambda}(X) = 1$, akkor g_{λ} fuzzy mérték.

Bizonyítás.

Az $\{X, \emptyset, \emptyset, \dots\}$ $\mathcal{B}$ -beli diszjunkt halmazsorozat. Ezért

$$g_{\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda} \left[(1 + \lambda g_{\lambda}(X)) \cdot \prod_{n=2}^{\infty} (1 + \lambda g_{\lambda}(\emptyset)) - 1 \right].$$

Az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1 + \lambda g_{\lambda}(\emptyset)) = 1 .$$

Ez akkor és csak akkor igaz, ha $g_{\lambda}(\emptyset) = 0$.

Ezzel beláttuk, hogy a g halmazfüggvény teljesíti a 3.2.1. definíció 1. feltételét.

Ha $A, B \in \mathcal{B}$ és $A \cap B = \emptyset$, akkor $\{A, B, \emptyset, \dots\}$ $\mathcal{B}$ -beli diszjunkt halmazsorozat és így a megszámlálható λ -additivitás felhasználásával nyerjük, hogy

$$g_{\lambda}(A \cup B) = g_{\lambda}(A) + g_{\lambda}(B) + \lambda \cdot g_{\lambda}(A) \cdot g_{\lambda}(B) , \text{ ahol}$$

$$\lambda \in (-1, \infty) \text{ és } \lambda \neq 0 .$$

A g_{λ} halmazfüggvény monotonitásának bizonyításához felhasználjuk, hogy minden $E, F \in \mathcal{B}$ és $E \subseteq F$ esetén

$$E \cup (F - E) = F \text{ és } E \cap (F - E) = \emptyset .$$

Ezért minden $E, F \in \mathcal{B}$ -re, ha $E \subset F$, akkor

$$g_\lambda(F) - g_\lambda(E) = g_\lambda(F - E) \cdot (1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)) .$$

Az egyenlőség jobb oldala nem negatív, így minden $E, F \in \mathcal{B}$ -re, ha $E \subseteq F$, akkor $g_\lambda(E) \leq g_\lambda(F)$. Tehát g_λ monoton.

Be kell bizonyítani még, hogy g_λ folytonos.

Legyen $\{A_n\}$ $\mathcal{B}$ -beli monoton növekvő halmazzsorozat és tegyük fel, hogy $A_0 = \emptyset$.

Ekkor

$$\begin{aligned} g_\lambda(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) &= g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1})) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda g_\lambda(A_n - A_{n-1})) - 1 \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{i=1}^n (1 + \lambda g_\lambda(A_i - A_{i-1})) - 1 \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_\lambda(\bigcup_{i=1}^n (A_i - A_{i-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_\lambda(A_n) . \end{aligned}$$

Legyen most $\{A_n\}$ $\mathcal{B}$ -beli monoton csökkenő halmazzsorozat. Ekkor az $\{\bar{A}_n = X - A_n\}$ sorozat monoton növekvő. A bizonyításban felhasználjuk a következő összefüggést: ha $E \in \mathcal{B}$ és $\bar{E} = X - E$, akkor

$$g_\lambda(X) = g_\lambda(E \cup \bar{E}) = g_\lambda(E) + g_\lambda(\bar{E}) \cdot (1 + \lambda g_\lambda(E)) .$$

Innen

$$g_\lambda(E) = \frac{1 - g_\lambda(\bar{E})}{1 + \lambda g_\lambda(E)} , \text{ minden } E \in \mathcal{B} .$$

Figyelembe vesszük még, hogy a g_λ monotonitása és $g_\lambda(X) = 1$ miatt $g_\lambda(E) < \infty$, minden $E \in \mathcal{B}$ -re, és hogy $\lambda > -1$ miatt $1 + \lambda g_\lambda(\bar{E}) > 0$.

Ezekből, és a sorozatok határértékére vonatkozó összefüggések alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_{\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) &= \frac{1 - g_{\lambda}(X - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n)}{1 + \lambda g_{\lambda}(X - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n)} = \frac{1 - g_{\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n)}{1 + \lambda g_{\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n)} = \\ &= \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\lambda}(\bar{A}_n)}{1 + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\lambda}(\bar{A}_n)} = \frac{1 - g_{\lambda}(\bar{A}_n)}{1 + \lambda g_{\lambda}(\bar{A}_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\lambda}(A_n). \end{aligned}$$

Tehát g folytonos és így fuzzy mérték $\lambda \in (-1, \infty)$ -re.

A $\lambda = 0$ esetben a 3.3.1. tétel alapján a λ -additivitás helyettesíthető a σ -additivitással.

3.3.3. Tétel. Ha a $\mathcal{B}$ Borel féle halmazalgebrán értelmezett $g_0 : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvény σ -additív és $g_0(X) = 1$, akkor g_0 fuzzy mérték. /Halmos [19]/

Végül a λ -additív fuzzy mérték és az elfogadhatósági illetve a hihetőségi mérték összehasonlítását végezzük el.

3.3.4. Tétel. Ha a $\mathcal{B}$ Borel féle halmazalgebrán értelmezett g_{λ} fuzzy mérték megszámlálhatóan λ -additív és

- (1) ha $\lambda \in (-1, 0)$, akkor g_{λ} szubadditív, tehát elfogadhatósági /plausibility/ mérték, és
- (2) ha $\lambda \in (0, \infty)$, akkor g_{λ} szuperadditív, tehát hihetőségi /credibility/ mérték.

Bizonyítás. A bizonyítás első lépésében teljes indukciót alkalmazunk.

Az $n = 2$ esetben a

$$g_{\lambda}(A_1 \cup A_2) = g_{\lambda}(A_1) + g_{\lambda}(A_2) + \lambda g_{\lambda}(A_1) \cdot g_{\lambda}(A_2)$$

egyenlőségéből az állítások könnyen következnek. Tegyük fel, hogy n -re teljesül (1) és (2). Legyenek $\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$ $\mathcal{B}$ -beli diszjunkt halmazok.

Ekkor

- ha $\lambda \in (-1, 0)$, akkor

$$\begin{aligned} g_{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= g_{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + g_{\lambda}(A_{n+1}) + \lambda g_{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cdot g_{\lambda}(A_{n+1}) \leq \\ &\leq g_{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + g_{\lambda}(A_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^n g_{\lambda}(A_i) + g_{\lambda}(A_{n+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} g_{\lambda}(A_i). \end{aligned}$$

- ha $\lambda \in (0, \infty)$, akkor

$$\begin{aligned} g_{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= g_{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + g_{\lambda}(A_{n+1}) + \lambda g_{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cdot g_{\lambda}(A_{n+1}) \geq \\ &\geq g_{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + g_{\lambda}(A_{n+1}) \geq \sum_{i=1}^n g_{\lambda}(A_i) + g_{\lambda}(A_{n+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} g_{\lambda}(A_i). \end{aligned}$$

Tehát tetszőleges $\mathcal{B}$ -beli véges diszjunkt halmazsorozatra teljesülnek a tétel állításai, ezért ha $\{A_n\}$ tetszőleges $\mathcal{B}$ -beli végtelen diszjunkt halmazsorozat, akkor

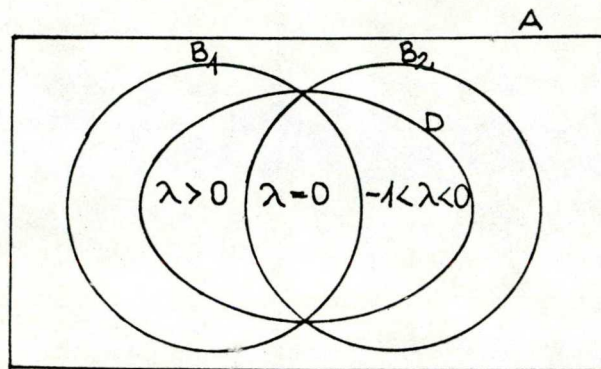
- $\lambda \in (-1, 0)$ esetben

$$g_{\lambda}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\lambda}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_{\lambda}(A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{\lambda}(A_n), \text{ és}$$

- $\lambda \in (0, \infty)$ esetben

$$g_{\lambda} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\lambda} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_{\lambda}(A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{\lambda}(A_n).$$

A 3.3.2. , 3.3.3. és 3.3.4. tétel eredményeit összefoglalva kapjuk a következő ábrát:



A: fuzzy mérték

D : g_{λ} mérték

B1: credibility mérték

$B1 \cap B2$: valószínűségi

B2: plausibility mérték

mérték

Ezt az eredményt Banon a véges halmazok esetére vezette le / [3] /.

3.4. Fuzzy integrál

A fuzzy integrálok a várható értékhez hasonló rendeltetésű funkcionálok, de amíg a várható érték lineáris, a fuzzy integrálok csak monotonok.

3.4.1. Definíció. Legyen $h : X \rightarrow [0, 1]$ $\mathcal{B}$ -mérhető függvény. Az $A \in \mathcal{B}$ halmazon a $h(x)$ függvény g fuzzy mértékre vonatkozó integrálja

$$\int_A h(x) \circ g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \left[\max(\alpha, g(A \cap F_{\alpha})) \right],$$

ahol $E_\alpha = \{x \mid h(x) \geq \alpha\}$.

Jelöljük a fuzzy integrált röviden $\int_A h \circ g$ -vel, ha pedig $A = X$, akkor $\int h \circ g$ -vel, és legyen $a \wedge b = \min(a, b)$ és $a \vee b = \max(a, b)$.

A következő tételekben a fuzzy integrál tulajdonságait mutatjuk be Sugeno [37] dolgozata alapján.

3.4.1. Tétel. Legyen $a \in [0, 1]$, akkor

$$\int a \circ g = a$$

3.4.2. Tétel. Ha $h_1 \leq h_2$, akkor teljesül, hogy

$$\int h_1 \circ g \leq \int h_2 \circ g.$$

Ennek a tételnek egyszerű következménye, hogy

$$\begin{aligned} \int (h_1 \vee h_2) \circ g &\geq \int h_1 \circ g \vee \int h_2 \circ g \quad \text{és} \\ \int (h_1 \wedge h_2) \circ g &\leq \int h_1 \circ g \wedge \int h_2 \circ g. \end{aligned}$$

Ezekben az egyenlőtlenségekben egyenlőség teljesül, ha a g fuzzy mérték $\mathcal{B}$ -additív.

3.4.3. Tétel. Ha χ_F az F halmaz karakterisztikus függvénye, akkor az F halmaz fuzzy mértéke

$$g(F) = \int \chi_F \circ g.$$

Ennek az egyenlőségnek a felhasználásával adódik, hogy

$$\int_A h \circ g = \int (\chi_A \wedge h) \circ g.$$

3.4.4. Tétel. Ha $A \subseteq B$, akkor

$$f_A \circ g \leq f_B \circ g.$$

Következmény:

$$f_{A \cup B} \circ g = f_A \circ g \vee f_B \circ g, \text{ és}$$

$$f_{A \cap B} \circ g = f_A \circ g \wedge f_B \circ g.$$

Az egyenlőtlenség itt is egyenlőséggé változik, ha a g fuzzy mérték $\mathcal{B}$ -additív.

3.4.5. Tétel. Ha $a \in [0, 1]$, akkor

$$f(a \vee h) \circ g = a \vee f \circ g, \text{ és}$$

$$f(a \wedge h) \circ g = a \wedge f \circ g.$$

3.4.6. Tétel. Ha $\{h_n\}$ $\mathcal{B}$ -mérhető függvények monoton sorozata, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f h_n \circ g = f(\lim_{n \rightarrow \infty} h_n) \circ g.$$

3.5. A fuzzy és a Lebesgue integrál összehasonlítása

Legyen X tetszőleges halmaz, és $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ X részhalmazainak olyan véges, diszjunkt sorozata, hogy $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Az X -n értelmezett lépcsősfüggvény

$$h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

alakú, ahol χ_{E_i} az E_i halmaz karakterisztikus függvénye.

3.5.1. Definíció. Az $(X, \mathcal{B}, m)$ mértéktérben a h függvény A halmazon vett Lebesgue integrálja

$$\int_A h \, dm = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot m(A \cap E_i).$$

Az integrál értéke nem függ a h függvény előállításától [Halmos [19] /].
Tételezzük fel, hogy $0 \leq \alpha_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq n$) és $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$.
Ekkor teljesül a következő állítás:

3.5.1. Tétel. Legyen $F_i = E_i + E_{i+1} + \dots + E_n$ ($1 \leq i \leq n$). A h lépcsősfüggvény írható

$$h(x) = \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge \chi_{F_i}(x)]$$

alakban, azaz a h kétfajta előállítása azonosan egyenlő.

3.5.2. Tétel. A fenti h lépcsősfüggvény A halmazon vett fuzzy integrálja

$$\int_A h \circ g = \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge g(A \cap F_i)], \quad F_1 = X,$$

és a jobboldal értéke nem függ a h függvény előállításától.

A 3.5.1. definíciót és a 3.5.2. tételt összehasonlítva a Lebesgue és a fuzzy integrál hasonlósága jól látható. Végül vessük össze mennyiségileg a két integrált.

Legyen h $\mathcal{B}$ -mérhető függvény. Ekkor egy P valószínűségi mértékre vonatkozóan meghatározható mind a fuzzy integrál, mind pedig a függvény Lebesgue integrálja. Teljesül a következő egyenlőtlenség:

3.5.3. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{B}, P)$ valószínűségi mező és $h : X \rightarrow [0, 1]$ $\mathcal{B}$ -mérhető függvény. Ekkor teljesül, hogy

$$\left| \int_X h \, dP - \int_X h \circ P \right| \leq \frac{1}{4} .$$

3.6. A fuzzy mérték kiterjesztése

A 3.2.1. definícióban a fuzzy mértéket az X alaphalmaz részhalmazainak monoton osztályán értelmeztük. Ez a definíció természetes módon kiterjeszthető a fuzzy halmazokra is. A kiterjesztés megvalósításához a 3.4.3. tételben szereplő egyenlőség nyújt lehetőséget. Ott a hagyományos halmaz fuzzy mértéke egyenlő karakterisztikus függvényének fuzzy integráljával. Ezért a fuzzy halmaz fuzzy mértékét a tagsági függvényének fuzzy integráljaként kapjuk.

3.6.1. Definíció. Legyen $\tilde{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ Borel féle halmazalgebra esetén az összes $\mathcal{B}$ - mérhető fuzzy halmazt /tagsági függvényt/ tartalmazó halmaz. $\tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ fuzzy kiterjesztésének nevezzük. A $\tilde{\mathcal{B}}$ elemeit Borel féle fuzzy halmazoknak nevezzük. /Belátható, hogy ez a definíció megalapozott./

3.6.2. Definíció. Ha $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}$, akkor

$$\tilde{g}(\tilde{A}) = \int \mu_{\tilde{A}} \circ g .$$

$\tilde{g}$ a g fuzzy mérték $\tilde{\mathcal{B}}$ -re való kiterjesztése.

3.6.1. Tétel. Teljesül, hogy $\tilde{\mathcal{B}}$ -n $\tilde{g} = g$ és

- (1) $0 \leq \tilde{g}(\tilde{A}) \leq 1$, minden $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}$, és
- (2) ha $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$ és $\tilde{A} \leq \tilde{B}$, akkor $\tilde{g}(\tilde{A}) \leq \tilde{g}(\tilde{B})$.
- (3) ha $\{\tilde{A}_n\}$ $\tilde{\mathcal{B}}$ -beli monoton sorozat, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}(\tilde{A}_n) = \tilde{g}(\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n) .$$

Tehát a $\tilde{g}$ kiterjesztett fuzzy mérték az egyszerű fuzzy mértékkel meg-

egyező tulajdonságokkal rendelkezik, azaz korlátos, nem-negatív és folytonos.

3.6.2. Tétel. Ha $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$, akkor

$$(1) \quad \tilde{g}(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \geq \max(\tilde{g}(\tilde{A}), \tilde{g}(\tilde{B})), \text{ és}$$

$$(2) \quad \tilde{g}(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \leq \min(\tilde{g}(\tilde{A}), \tilde{g}(\tilde{B})).$$

4. Fuzzy logika

Miután Zadeh létrehozta a fuzzy halmazok elméletét [43] világossá vált, hogy az ott megfogalmazott elvek alkalmazhatók egy megfelelő fuzzy logikai rendszerben. Az ilyen logikában egy adott univerzum elemeihez - az X -hez tartozó fuzzy halmaz által - rendelt tagsági szintek úgy értelmezhetők, mint igazságértékek.

Az igazságértékek alkalmas halmaza a $[0,1]$ valós intervallum. A fuzzy halmazokon értelmezett egyesítés és metszetképzés alapján a fuzzy logikai diszjunkcióhoz és konjunkcióhoz tartozó igazságérték műveleteknek a maximum és minimum műveleteket választhatjuk. Így a fuzzy logika úgy tekinthető, mint egy speciális többértékű logika.

Számos dolgozatban a többértékű logikák közül Lukasiewicz $\mathcal{L}_{N_1}$ rendszerét tekintették fuzzy logikának / [17] , [25] , [26] , [29] , [32] /.

A fuzzy logika egy általánosabb megközelítését Gougen [18] dolgozta ki, aki az L -fuzzy halmazokhoz kapcsolódva bevezetett egy általánosabb igazságérték strukturát. Megemlítjük még Zadeh munkáit [5] , [42] , amelyekben az igazságértékek fuzzy halmazok.

A következőkben ismertetjük Lukasiewicz többértékű logikai rendszereit és a valószínűségi logikát, majd az $\mathcal{L}_{N_1}$ rendszert, mint fuzzy logikát összehasonlítjuk a valószínűségi logikával. Végül leírjuk a fuzzy logikák néhány további speciális esetét.

4.1. Többértékű logikák

A klasszikus kétértékű logikában /KL/ a kétértékűség elve szerint a kijelentések két diszjunkt osztályba sorolhatók: az igaz, illetve a hamis kijelentések osztályába. A két osztálynak nincs közös eleme /ellentmondás-

talanság/, és nincs olyan kijelentés, amely egyik osztályba sem sorolható /a "harmadik" kizárása/.

A logika fejlődésének fő vonalában a kétértékű logikák állottak és állnak. A kétértékűség elve történetileg és logikailag szorosan kapcsolódik a harmadik kizárása elvéhez.

A klasszikus alternáló logikától eltérő logika megteremtésére igen sok kísérlet történt már eddig. Általában onnan indultak ki, hogy megszüntették a kizárt harmadik elvét, tehát a két logikai értéken túl másokat is megengedtek.

A többértékű logikák keletkezését J. Lukasiewicz és E.Post 1920-ban megjelent dolgozatától számítjuk.

Lukasiewicz 3-értékű logikája

Lukasiewicz a modális kijelentéseket elemezve arra a következtetésre jutott, hogy a modális kijelentésekre értéktáblázatot csak úgy lehet készíteni, ha olyan logikát szerkesztünk, amelyben az "igaz" és "hamis" értékek mellett egy harmadik "neutrális" értéket is felvesszünk. Ez az érték a jövőre vonatkozó bizonyos kijelentések meghatározatlan igazságstátuszához tartozik. Jelöljük ezt a logikai rendszert $\mathcal{L}_3$ -mal.

Az igaz, a közbülső /neutrális/, és a hamis értéket i, k, h betűkkel jelölve, az értékük sorrendjét csökkenőnek tekintve, a műveleti igazságfüggvények megadása nélkül, az ezekben alkalmazott szabályokat néhány pontban ismertetjük:

- (0) az i és h egymás ellentétei, k pedig önmaga ellentéte,
- (1) egy kijelentés és negációja mindig ellentétel értékűek,
- (2) a konjunkció értéke a kisebb értékű tag értékét követi,

- (3) a diszjunkció értéke a nagyobb értékű tag értékét követi,
- (4) a $x \supset y$ implikáció értéke mindig azonos a $\neg x \vee y$ értékével /mint KL-ben/, kivéve ha $|x| = |y| = k$ /itt $|x|$ és $|y|$ az x és y kijelentés logikai értéke/,
- (5) $|x \equiv y| = |(x \supset y) \wedge (y \supset x)|$ /mint KL-ban/.

Lukasiewicz eredetileg csak az implikáció és negáció értéktáblázatát adta meg, a többi igazságfüggvényt az alábbi /a KL-ban is teljesülő/ összefüggésekkel adta meg:

4.1.1. Definíció.

- (A) $|x \vee y| = |(x \supset y) \supset y|$,
- (B) $|x \wedge y| = |\neg(\neg x \vee \neg y)|$,
- (C) $|x \equiv y| = |(x \supset y) \wedge (y \supset x)|$.

4.1.2 . Definíció: Valamely logikai rendszerben egy formulát érvényesnek mondunk, ha paramétereinek bármely értéke mellett az i értéket veszi fel

Észrevehető, hogy KL néhány érvényes formulája $\mathcal{L}_3$ -ban nem érvényes.

Igy pl. a

$$x \vee \neg x \quad \text{és} \quad \neg(x \wedge \neg x)$$

formulák az $|x| = k$ esetben nem az igaz, hanem a k értéket veszik fel, azaz a kizárt harmadik és az ellentmondástalanság törvényét kifejező, KL-ban érvényes formulák az $\mathcal{L}_3$ -ban nem érvényesek. Viszont $\mathcal{L}_3$ minden érvényes formulája a kétértékű logikában is érvényes. Tehát Lukasiewicz $\mathcal{L}_3$ logikája ugy tekinthető, mint a KL egy sajátos általánosítása.

Lukasiewicz 3-értékű logikájának többértékű általánosításai

Lukasiewicz az $\mathcal{L}_3$ rendszer mintájára bevezette az $\mathcal{L}_n$ rendszereket $/n = 1, 2, \dots/$. Az egyes rendszerek igazságértékei a $[0, 1]$ intervallumba esnek, a megengedett értékek a végpontok $/0$ és $1/$, valamint az intervallum $(n - 1)$ részre való osztásával nyert osztópontok.

A negációt és implikációt, mint igazságfüggvényeket a következő módon definiálta:

4.1.3. Definíció.

$$(L1) \quad |\neg x| = 1 - |x|,$$

$$(L2) \quad |x \supset y| = \min(1, 1 - |x| + |y|).$$

A többi igazságfüggvény a negáció és implikáció segítségével úgy definiálódik, mint 4.1.1.-ben. Átalakítva ezeket a kifejezéseket nyerjük, hogy

4.1.1. Tétel.

$$(L3) \quad |x \vee y| = \max(|x|, |y|),$$

$$(L4) \quad |x \wedge y| = \min(|x|, |y|),$$

$$(L5) \quad |x \equiv y| = \min(1 - |x| + |y|, 1 - |y| + |x|).$$

Önnyű belátni, hogy $\mathcal{L}_2$ azonos KL-val, ha az 1 értéket i -vel, 0 -t pedig h -val azonosítjuk. Így tehát $\mathcal{L}_n$ a KL n -értékű általánosítása.

Lukasiewicz a véges sok igazságértékkel bíró rendszerekhez hasonlóan definiálta a végtelen sok igazságértékkel rendelkező rendszereket. Ezek közül kettőt emelünk ki példaként:

- (1) az $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ logikai rendszer igazságértékei a $[0, 1]$ intervallum racionális számai,

- (2) az $\mathcal{L}_{N_1}$ rendszer igazságértékei a $[0,1]$ intervallum valós számai.

Ha az $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{L}_{N_0}$, $\mathcal{L}_{N_1}$ rendszerekben a 4.1.2. definíciónak megfelelően értelmezzük a formulák érvényességét, és az X rendszer érvényes formuláinak halmazát $T(X)$ -szel jelöljük, akkor igaz, hogy

4.1 2. Tétel.

$$T(\mathcal{L}_{N_1}) \subseteq T(\mathcal{L}_{N_0}) \subseteq T(\mathcal{L}_n) \subseteq T(\mathcal{L}_2) = T(KL).$$

A végtelen sok értékű logikáknak /ugyanugy, mint a véges sok igazságértékűeknek/ egymástól eltérő rendszerei lehetségesek. A továbbiakban olyan többértékű logikai rendszert mutatunk be, amely Lukasiewicz rendszeréhez képest eltérő sajátosságokkal rendelkezik.

Valószínűségi logika

A többértékű logika valószínűségi megközelítésének alapja, hogy a kijelentésekhez véletlen értékeket, vagy valószínűségeket rendelünk. Feltételezzük, hogy adott egy p mérték függvény, amely a kijelentések halmazának minden tagjához hozzárendel egy valós számot. Erről a hozzárendelésről feltesszük, hogy kielégíti a valószínűségi mértékkel szemben támasztott összes követelményt.

Tehát, ha p olyan függvény, hogy minden x kijelentéshez hozzárendel egy valós számot, akkor $p(x)$ kielégíti az alábbi feltételeket:

(P1) $0 \leq p(x)$, minden x -re,

(P2) $p(x \vee y) = p(x) + p(y)$, feltéve, hogy x és y egymást kölcsönösen kizáró kijelentések, azaz $p(x \wedge y) = 0$,

(P3) $p(x) = p(y)$, ha x és y logikailag ekvivalens kijelentések, azaz $p(x \wedge \neg y) = 0$ és $p(\neg x \wedge y) = 0$,

(P4) $p(x \vee \neg x) = 1$.

Ezeket a tulajdonságokat figyelembe véve teljesülnek az alábbi állítások /Rescher [33] /:

4.1.3. Tétel.

- (1) $0 \leq p(x) \leq 1$, minden x -re,
- (2) $p(\neg x) = 1 - p(x)$,
- (3) $p(x) \leq p(y)$, ha $p(x \wedge \neg y) = 0$,
- (4) $p(x \wedge \neg x) = 0$,
- (5) $p(x \vee y) = p(x) + p(y) - p(x \wedge y)$.

A kijelentések valószínűségének mérésére különböző eljárások születtek. Ilyent tartalmaz Rudolph Carnap [7] munkája is.

A kijelentések valószínűségének ez a rendszere felfogható úgy, mint egy többértékű logika, amelyben a $p(x)$ az x kijelentés igazságértéke.

Ebben a rendszerben is az 1 játsza az igaz érték, a 0 a hamis érték szerepét. Az összetett kijelentések igazságértékére vonatkozó összefüggések a következők:

4.1.4. Tétel.

- (1) $p(\neg x) = 1 - p(x)$,
- (2) $p(x \vee y) = p(x) + p(y)$, ha $p(x \wedge y) = 0$, egyébként létezik olyan $\lambda \geq 0$, hogy $\lambda \leq p(x) + p(y)$, de $\lambda \geq p(x)$ és $\lambda \geq (p(y))^2$,
- (3) $p(x \wedge y) = p(x) + p(y) - p(x \vee y)$,
- (4) $p(x \supset y) = p(\neg x \vee y)$,
- (5) $p(x \equiv y) = p((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x))$.

Ezt a többértékű logikai rendszert jelöljük VL -lel.

Szembevetendő különbség a Lukasiewicz féle logikák és a valószínűségi logika között, hogy míg az L logikákban egy összetett kijelentés igazságértékét egyértelműen meghatározzák komponenseinek igazságértékei egy megfelelő igazságfüggvény alapján, addig VL -ben nem definiáltunk explicit módon igazságfüggvényt, hanem csak bizonyos tulajdonságokat kívántunk meg. Az igazságfüggvény hiánya ahhoz a feltételezéshez vezethet bennünket, hogy a VL jelentősen különbözik más, látszólag jóval hagyományosabb kijelentéskalkulustól. Ez a feltevés azonban hamis, mint az a következő tételből is látható /Rescher [33] / :

4.1.5. Tétel. A valószínűségi logika (VL) és a kétértékű logika (KL) érvényes formuláinak halmaza megegyezik, azaz

$$T(VL) = T(KL) .$$

4.2. A fuzzy és a valószínűségi logika

A fuzzy és valószínűségi elmélet összehasonlításának egy másik lehetséges útja a mértékelmélet mellett a fuzzy és valószínűségi logika hasonlóságának és különbözőségének feltárása.

Gaines [16] munkájában bevezetett egy ún. bizonytalansági logikát /BL/, mint a kijelentések L hálóján értelmezett kiértékelést. Ez a rendszer nagyon hasonló a valószínűségi logikához, de ebben sem a kizárt harmadik elve, sem az ellentmondástalanság törvénye nem teljesül. Mind a fuzzy logika /FL/, mind pedig a valószínűségi logika /VL/ speciális esete a bizonytalansági logikának /BL/.

Definiáljuk részletesebben BL-t:

- (B1) $L(X, F, T, \vee, \wedge)$ az X kijelentéshalmaz elemei által generált szabad háló a $\vee$ és $\wedge$ műveletekkel, és a maximális T , és a minimális F elemmel.

Tekintsük a szokásos rendezést

- (B2) $x \leq y$ ha van olyan $z \in L$, hogy $y = x \vee z$, minden $x, y \in L$.

Tegyük fel még, hogy az L kijelentés háló minden eleméhez hozzárendelünk egy igazságértéket a $p : L \rightarrow [0, 1]$ folytonos, rendezéstartó függvénnyel, amelyre teljesül, hogy

(B3) $p(F) = 0, p(T) = 1,$

(B4) ha $x \leq y$, akkor $p(x) \leq p(y)$, minden $x, y \in L$, és

(B5) $p(x \vee y) + p(x \wedge y) = p(x) + p(y)$, minden $x, y \in L$,

azaz p folytonos, rendezéstartó értékelés L -n /Birkhoff [6] /.

Megjegyezzük, hogy p létezésének szükséges feltétele, hogy a háló moduláris legyen.

Az implikáció és negáció megadásához felhasználjuk az L hálón értelmezett d mértéket, amelyhez a következő módon juthatunk el.

Definiáljuk a $\equiv$ relációt úgy, hogy

(B6) $x \equiv y \Leftrightarrow p(x \wedge y) = p(x \vee y)$, minden $x, y \in L$,

Ez a reláció kongruencia L -n, úgy hogy

$$x \equiv y \Leftrightarrow ((x \wedge z) \equiv (y \wedge z) \text{ és } (x \vee z) \equiv (y \vee z)),$$

minden $x, y \in L$.

Mindezekből kapjuk, hogy

$$p(x \wedge y) = p(x \vee y) \Rightarrow p(x \wedge z) = p(y \wedge z) \text{ és } p(x \vee z) = p(y \vee z), \text{ minden}$$

$x, y, z \in L$, azaz az $x \equiv y$ azt jelenti, hogy x szabadon helyettesíthető y -nal.

Tehát a p -re vonatkozóan az $\equiv$ reláció egy lehetséges logikai ekvivalencia. Értelmezve a

$$(B7) \quad d(x, y) = p(x \vee y) - p(x \wedge y)$$

kvázimértéket L -n, teljesül, hogy

$$\begin{aligned} d(x, x) &= 0, \\ 0 &\leq d(x, y) \leq 1 \\ d(x, y) + d(y, z) &\geq d(x, z), \text{ és} \\ d(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x \equiv y. \end{aligned}$$

Ezek alapján legyen

$$(B8) \quad p(x \equiv y) = 1 - d(x, y) = 1 - p(x \vee y) + p(x \wedge y),$$

minden $x, y \in L$ -re,

azaz $p(x \equiv y) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \equiv y$.

Definiáljuk az implikáció kiértékelését úgy, mint $x \wedge y$ és x , vagy $x \vee y$ és y ekvivalenciájának értékét

$$(B9) \quad p(x \supset y) = p(x \equiv (x \wedge y)) = p((x \vee y) \equiv y) = 1 - p(x) + p(x \wedge y).$$

Végül értelmezzük a negációt

$$(B10) \quad p(\neg x) = p(x \equiv F) = p(x \supset F) = 1 - p(x), \text{ minden } x \in L$$

formában. Tételezzük fel, hogy $\neg x \in L$ és $x \supset y \in L$.

A B1 - B10 alapján teljesül, hogy

$$p(x \vee \neg x) + p(x \wedge \neg x) = 1, \text{ minden } x \in L.$$

Ebből következik, hogy a kizárt harmadik elve $p(x \vee \neg x) = 1$ /, és az

ellentmondástalanság törvénye $p(x \wedge \neg x) = 0$ / ekvivalens ebben a logikában.

Összefoglalva: a B1, B2 egy hálót definiál, és B3 - B5 ezen egy pozitív izoton kiértékelést. A B1 - B7 -nek eleget tevő strukturát Gaines alapvető bizonytalansági logikának nevezte.

Az ekvivalencia az implikáció és a negáció B8 - B10 feltételekkel definiált kiértékelése nem az egyetlen lehetséges megoldás.

Végül tegyük fel még, hogy az L háló disztributív, azaz

$$(B11) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \text{ minden } x, y, z \in L.$$

Az így definiált rendszer magába foglalja mind a valószínűségi, mind pedig fuzzy logikát, mint ahogy azt az alábbi tételekből láthatjuk /Gaines [16] /:

4.2.1. Tétel. Ha a

$$(B12) \quad p(x \vee \neg x) = 1, \text{ minden } x \in L$$

feltételt hozzákapsoljuk a B1 - B11 feltételek által meghatározott disztributív bizonytalansági logikához, akkor az így nyert logika pontosan a P1 - P4 feltételekkel megadott valószínűségi logika.

4.2.2. Tétel. Ha a

(B13) $p(x \supset y) = 1$ vagy $p(y \supset x) = 1$, minden $x, y \in L$ feltételt hozzáadjuk B1 - B11-hez, akkor az így nyert logika pontosan az L1 - L5 által definiált fuzzy logika $/L_{\mathcal{N}_1}/$.

A fenti két tétel segítségével választ kaphatunk arra a kérdésre is, hogy milyen feltételek mellett egyezik meg a fuzzy és a valószínűségi logika.

4.2.3. Tétel. Az FL és VL logikai rendszerek akkor és csakis akkor egyeznek meg, ha p kétértékű, azaz mindkét logika pontosan a klaszikus kétértékű logika.

Bizonyítás. A kétértékű logika mind a fizzy logikának, mind pedig a valószínűségi logikának speciális esete.

Ha pedig az FL és VL megegyezik, azaz B1 - B13 feltételek egyszerre teljesülnek, akkor minden $x \in L$ -re

$$\text{vagy } 1 = p(x \supset \neg x) = 1 - p(x) + p(x \wedge \neg x) = 1 - p(x) ,$$

$$\text{vagy } 1 = p(\neg x \supset x) = 1 - p(\neg x) + p(x \wedge \neg x) = 1 - p(\neg x) .$$

Ebből következik, hogy minden $x \in L$ -re $p(x) = 1$, vagy $p(x) = 0$.

4.3. További fuzzy logikák

Az 1.2.4. tételben megadott fuzzy halmazokon értelmezett három strukturákhoz hozzárendelhetők többértékű logikai rendszerek.

Jelöljük $p(x)$ -szel az x kijelentéshez rendelt igazságértéket, $p(x) \in [0, 1]$.

4.3.1. Definíció. Mindhárom esetben a negációhoz rendelt igazságérték legyen

$$p(\neg x) = 1 - p(x) .$$

Teljesül, hogy

$$p(\neg(\neg x)) = p(x) .$$

4.3.2. Definíció. Az implikációt értelmezzük úgy, hogy

$$p(x \supset y) = p(\neg x \vee y) ,$$

az ekvivalenciát pedig

$$p(x \equiv y) = p((\neg x \supset y) \wedge (\neg y \supset x))$$

formában.

Az így értelmezett többértékű logikák a klasszikus kétértékű logika általánosításai.

Ha a fenti szempontokat is figyelembe véve az $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, -)$, $(\mathcal{P}(X), \hat{\cup}, \cdot, -)$, $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, -)$ fuzzy strukturákhoz rendre a $(\vee_1, \wedge_1, \neg, \supset_1, \equiv_1)$, $(\vee_2, \wedge_2, \neg, \supset_2, \equiv_2)$,

$(\vee_3, \wedge_3, \neg, \supset_3, \equiv_3)$ logikai műveleteket rendeljük, akkor

$$(1) \quad p(x \vee_1 y) = \max(p(x), p(y))$$

$$p(x \wedge_1 y) = \min(p(x), p(y))$$

$$p(x \supset_1 y) = \max(1 - p(x), p(y))$$

$$p(x \equiv_1 y) = \min(\max(1 - p(x), p(y)), \max(1 - p(y), p(x))),$$

$$(2) \quad p(x \vee_2 y) = p(x) + p(y) - p(x) \cdot p(y)$$

$$p(x \wedge_2 y) = p(x) \cdot p(y)$$

$$p(x \supset_2 y) = 1 - p(x) + p(x) \cdot p(y)$$

$$p(x \equiv_2 y) = (1 - p(x) + p(x) \cdot p(y)) \cdot (1 - p(y) + p(x) \cdot p(y)),$$

$$(3) \quad p(x \vee_3 y) = \min(1, p(x) + p(y))$$

$$p(x \wedge_3 y) = \max(0, p(x) + p(y) - 1)$$

$$p(x \supset_3 y) = \min(1, 1 - p(x) + p(y))$$

$$p(x \equiv_3 y) = \min(1 - p(x) + p(y), 1 - p(y) + p(x)).$$

Az így definiált logikai rendszerekben a diszjunkcióra, konjunkcióra és negációra teljesülnek azok a tulajdonságok, amelyeket az 1.2.3 és 1.2.4. tételekben a megfelelő halmazelméleti műveletekre kimondtunk. Ezenkívül minden esetben teljesül, hogy

}

4.3.1. Tétel.

$$\begin{aligned} p(x) + p(y) &= p(x \vee_1 y) + p(x \wedge_1 y) = \\ &= p(x \vee_2 y) + p(x \wedge_2 y) = \\ &= p(x \vee_3 y) + p(x \wedge_3 y). \quad [10] . \end{aligned}$$

Ezek a többértékű logikai rendszerek abban az értelemben fuzzy logikák, hogy a fuzzy halmazokon értelmezett struktúrák alapján definiáltuk őket.

5. Fuzzy kapcsoló műveletek

A dolgozat 2. fejezetében a maximum és minimum műveletek axiomatikus megalapozásával foglalkoztunk a [4], [11], [14], [20], [40] munkák alapján. A későbbiekben más axiómarendszerek is születtek [20], [21], amelyeknek nem a max-min műveletek a reprezentációi, illetve voltak olyan dolgozatok, amelyekben algebrai struktúrákat vizsgáltak reprezentáció nélkül [2], [22], [23]. Ezekben a hangsúly az axiómák racionális megalapozásán volt.

Az axiomatikus vizsgálatok azonban nem tudták egységesíteni a műveletekre vonatkozó nézeteket, hanem még szerteágazóbbá tették a problémát. Az axiómarendszerek egymáshoz való viszonyának a vizsgálata megoldást hozhatott volna, de nagy nehézséget okozott az axiómák összehasonlíthatatlansága. Egyetlen ilyen vizsgálat született csupán [16].

A [10] és [40] monografikus munkák lehetőséget biztosítottak a műveletek és axiómarendszerek közös tulajdonságainak felderítésére és egy minimális axiómarendszer megválasztására [8].

Ezen minimális rendszer axiómái a műveletek szigorú monotonossága, a korrespondencia elv teljesülése, az asszociativitás és a folytonosság.

A korrespondencia elvet minden fuzzy művelet teljesíti, azaz a karakterisztikus függvényre való korlátozásuk klasszikus halmazelméleti művelet.

Az asszociativitás a dolgozatban eddig tárgyalt minden műveletre teljesül, másrészt lehetőséget teremt a kétváltozós művelet többváltozósá válnak kiterjesztésére.

A folytonosság hiánya a művelet homogén hatását szüntetné meg.

A szigorú monotonosságot nem minden művelet teljesíti, feltétele inkább a reprezentáció megvalósítását szolgálta. A monotonosság azonban az irodalom-

ban előforduló minden műveletre fennáll.

Ennek a fejezetnek a fő eredménye a fenti négy tulajdonsággal bíró összes művelet reprezentációjának megadása.

A vizsgálat támaszkodik a rendezett félcsoportok [13], [30] és az asszociatív függvényegyenletek [1] elméletére.

5.1. Fuzzy algebra

Legyen I a valós számegyenes $[0, 1]$ zárt intervalluma. Ez a jelölés részben a leírás egyszerűsítését szolgálja, részben utal a kimondott tételek és definíciók általánosíthatóságára /pl. L-fuzzy halmazok/.

Tekintsünk egy

$$* : \mathfrak{F}^n \rightarrow \mathfrak{F} \quad /n=1, 2, \dots/$$

n változós algebrai műveletet a fuzzy halmazok $\mathfrak{F}$ halmazán.

5.1.1. Definíció. A $*$ művelet izoton /antiton/, ha a

$$\mu_i \leq \nu_i \quad /i=1, 2, \dots, n/$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\mu_1 * \dots * \mu_n = \nu_1 * \dots * \nu_n \quad / \mu_1 * \dots * \mu_n \geq \nu_1 * \dots * \nu_n /$$

minden $(\mu_1, \dots, \mu_n), (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathfrak{F}^n$ -re.

Az izoton és antiton műveleteket együttesen monotonnak nevezzük.

5.1.2. Definíció. Fuzzy algebrán [9] /fuzzy halmazok algebráján/ értünk minden olyan $\mathfrak{F}$ -n értelmezett algebrai struktúrát, amelyre teljesül, hogy

(A1) minden művelete monoton.

A fuzzy algebrát "szokásosnak" nevezzük, ha teljesül még a következő feltétel:

(A2) minden algebrai műveletének C_k -ra való korlátozása megegyezik valamelyik ugyanannyi változós halmazelméleti művelettel.

Azokat az $\langle \mathfrak{F}, * \rangle$ szokásos fuzzy algebrákat /továbbiakban egyszerűen fuzzy algebra/ vizsgáljuk, amelyek kielégítik az alábbi feltételeket:

(F1) $A * \mu$ művelet kétváltozós kapcsoló művelet, azaz a C_k halmazra való korlátozása, vagy a halmazokon értelmezett metszetképzés, vagy az egyesítés.

Tekintsük azokat a fuzzy algebrai műveleteket, amelyekhez létezik olyan $f : I \times I \rightarrow I$ függvény, hogy

$$(\mu * \nu)(x) = f(\mu(x), \nu(x)), \text{ minden } x \in X \text{-re.}$$

$A * \mu \rightarrow f$ hozzárendelés nyilvánvalóan kölcsönösen egyértelmű. Jelöljük az ilyen tulajdonságú fuzzy algebrai műveletek halmazát Z -vel.

(F2) $*$ legyen Z -beli művelet.

5.1.1. Tétel. Legyen a $* : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ Z -beli művelet. Az $F1$ feltételt kielégítő $\langle \mathfrak{F}, * \rangle$ algebrai struktúra akkor és csak akkor fuzzy algebra, ha a $*$ -hoz rendelt f függvényre teljesül, hogy

(1) f a $*$ -gal megegyező értelemben monoton, és

- (2) $f(0,0) = 0$, $f(1,1) = 1$, továbbá ha a $*$ művelet ~~Ch~~-ra való korlátozása a metszetképzés /egyesítés/, akkor $f(0,1) = f(1,0) = 0$ / $f(0,1) = f(1,0) = 1$ /.

Bizonyítás.

Legyen $\langle \mathcal{F}, * \rangle$ az F1 feltételt kielégítő fuzzy algebra.

Az f függvény monotonitásának bizonyításához legyen $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ úgy, hogy $x_1 \leq x_2$ és $y_1 \leq y_2$. Tekintsük a

$$\mu_1(x) = x_1, \mu_2(x) = x_2, \nu_1(x) = y_1, \nu_2(x) = y_2, x \in X$$

fuzzy halmazokat. Ezekre teljesül, hogy

$$\mu_1 \leq \mu_2 \text{ és } \nu_1 \leq \nu_2.$$

A $*$ művelet izotonitásából következően

$$\mu_1 * \nu_1 = \mu_2 * \nu_2.$$

Figyelembe véve F2-t

$$f(\mu_1(x), \nu_1(x)) = f(\mu_2(x), \nu_2(x)), \text{ minden } x \in X \text{ esetén.}$$

Tehát $x_1 \leq x_2$ és $y_1 \leq y_2$ -ből következik, hogy

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2),$$

azaz f izoton. Az antiton esetre az állítás hasonlóan látható be.

Az A2 valamint F1, és F2 felhasználásával az f függvényre vonatkozó 2. állítás könnyen belátható.

A tétel megfordításának bizonyítása szintén egyszerű.

Következmény: a $*$ -hoz rendelt f művelettel az I rendezett algebrái struktúra.

Az 5.1.1. tétel biztosítja azt, hogy az $F1$ és $F2$ feltételeket kielégítő $\langle F, * \rangle$ fuzzy algebrák reprezentációinak vizsgálatához elegendő a művelethez rendelt f művelet által meghatározott algebrái struktúra reprezentációjának a vizsgálata.

Az f -re vonatkozóan tegyük fel még, hogy

(F3) f asszociatív, és

(F4) f folytonos $I \times I \rightarrow I$ -n.

5.1.2. Tétel. A fenti tulajdonságokkal rendelkező f függvény által meghatározott $*$ művelet asszociatív és pontonként folytonos, azaz ha a $\{\mu_n\}$ és $\{\nu_n\}$ fuzzy halmazok sorozatai pontonként konvergálnak a μ és ν fuzzy halmazokhoz, akkor a $\{\mu_n * \nu_n\}$ fuzzy halmazok sorozata pontonként konvergál a $\mu * \nu$ fuzzy halmazhoz.

5.2. Reprezentációs tétel

Ebben a fejezetben állításainkat arra az esetre mondjuk ki, amikor az f által meghatározott $*$ művelet Ch -ra való korlátozása a halmazelméleti metszetképzés. Jelöljük ekkor a meghatározó függvényt c -vel /az egyesítésnek megfelelő függvényt d -vel jelöljük/. A c -re kimondott állítások és azok bizonyításai értelemszerűen átvihetők d -re is.

Foglaljuk össze a $c : I \times I \rightarrow I$ függvényről megkövetelt tulajdonságokat:

(T1) c monoton,

(T2) $c(0,0) = 0$, $c(1,1) = 1$, $c(0,1) = c(1,0) = 0$,

(T3) c asszociativ, és

(T4) c folytonos .

5.2.1. Tétel. Ha c -re teljesül T1 és T3, akkor

(T1') c izoton [13] .

Igy az I halmaz a c művelettel teljesen rendezett félcsoportot alkot.

5.2.1. Definíció. A h függvényt Archimedes-inek nevezzük az $[a,b]$ intervallumon, ha

$$h(x,x) < x, \text{ minden } x \in (a,b) .$$

Az Archimedes-i esetre vonatkozó reprezentációs tételt Ling [27] bizonyította be az elemi analízis eszközeivel. A tétel származtatható Mostert és Shields korábbi eredményéből is [30] . A továbbiakban Ling tételét használjuk fel.

5.2.2. Tétel. Legyen J a valós számegetes zárt $[a,b]$ intervalluma és $h : J \times J \rightarrow J$ függvény.

A h függvényre akkor és csak akkor teljesül, hogy

(1) h monoton.

(2) h asszociativ,

(3) h folytonos,

(4) $h(a,a) = a, h(b,b) = b, h(b,x) = h(x,b) = x, x \in X,$ (1)

(5) h Archimedes-i,

ha létezik egy folytonos, szigorúan monoton csökkenő, $g : [a,b] \rightarrow [0,\infty]$ függvény, amelyre $g(b) = 0$ úgy, hogy h reprezentálható

$$h(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y))$$

formában, ahol $g^{(-1)}$ a g függvény pseudo-inverze

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} b & , \text{ ha } 0 \leq x \leq g(b) , \\ g^{-1}(x) & , \text{ ha } g(b) \leq x \leq g(a), \text{ és} \\ a & , \text{ ha } g(a) \leq x , \end{cases}$$

ahol g^{-1} a g függvény szokásos inverze a $[g(b), g(a)]$ -n.

A g függvényt a h Archimedes-i művelet additív generátorának nevezzük, és a g egy pozitív multiplikatív konstanstól eltekintve egyértelműen meghatározott, azaz $\alpha \cdot g$ ($\alpha > 0$) szintén h -t generálja.

Megjegyezzük, hogy a tétel kimondható úgy is, hogy a g' generátor függvény az $[a, b]$ intervallumot a $[-\infty, 0]$ -ba képezi le, folytonos, szigorúan monoton növekvő, és $g(b) = 0$. Ebben az esetben a pseudo-inverz definíciója is értelemszerűen módosul.

A (T1) - (T4) tulajdonságokkal bíró c függvény eleget tesz az 5.2.2. tétel (1) - (4) feltételeinek. A továbbiakban azonban nem korlátozzuk vizsgálatainkat az Archimedes-i esetre, hanem általánosan a T1-T4 tulajdonságokkal rendelkező függvények reprezentációját keressük.

Tekintsük az I intervallum idempotens pontjainak halmazát:

$$N = \{x \mid x \in I, c(x, x) = x\}.$$

5.2.3. Segéd-tétel. Az N zárt halmaz.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy N tartalmazza minden torlódási pontját.

Legyen x_0 az N tetszőleges torlódási pontja. Ekkor kiválasztható N -ből olyan $\{x_n\}$ pontsorozat, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Mivel minden n -re $x_n \in N$, ezért $c(x_n, x_n) = x_n$, valamint c folytonos (T4), így

$$c(x_0, x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} c(x_n, x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} x_n = x_0,$$

tehát $x_0 \in N$.

Legyen $M = I - N$. Az M korlátos és nyitott ponthalmaz. Tegyük fel továbbá, hogy M nem üres.

5.2.4. Segédteétel. M előállítható véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok olyan páronként egymásba nem nyúló, nyitott intervallumok egyesítéseként, amelyek végpontjai nem tartoznak M -be [38].

Tehát M előáll

$$M = \bigcup_{i \in P} M_i$$

formában, ahol P véges, vagy megszámlálhatóan végtelen indexhalmaz és $M_i = (a_i, b_i)$, melyre ha $x \in (a_i, b_i)$, akkor

$$c(x, x) \neq x, \text{ valamint } c(a_i, a_i) = a_i, \text{ és } c(b_i, b_i) = b_i.$$

Válasszunk ki egy tetszőleges $[a_i, b_i] \times [a_i, b_i]$ tartományt. Ezen a tartományon is teljesül, hogy c izoton (T1'), asszociatív (T3), és folytonos (T4). A T2-nek megfelelő tulajdonságok meghatározásához tekintsük a következő tételeket:

5.2.5. Segédteétel. Minden $x \in [a_i, b_i]$ -re

$$1 \quad c(a_i, x) = c(x, a_i) = a_i, \text{ és} \quad (2)$$

$$2 \quad c(b_i, x) = c(x, b_i) = b_i. \quad (3)$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy

$$c(1, x) = c(x, 1) = x, \text{ minden } x \in I. \quad (4)$$

A T2 alapján $c(0, 1) = 0$ és $c(1, 1) = 1$, ezért a folytonosság T4 figyelembevételével a $c(x, 1)$ függvény az I -t I -re képezi le. Ekkor bármely $y \in I$ -re létezik olyan $x \in I$, hogy $c(x, 1) = y$. Ezt a tényt és az asszociativitást (T3) felhasználva:

$$c(y, 1) = c(c(x, 1), 1) = c(x, c(1, 1)) = c(x, 1) = y, \quad y \in I.$$

A tétel első része az izotonság (T1') és (4) egyszerű következménye:

$$a_i = c(a_i, a_i) \leq c(x, a_i) \leq c(1, a_i) = a_i.$$

A második rész bizonyítása a (4) bizonyításának $[a_i, b_i]$ -re való alkalmazása.

5.2.6. Segéd-tétel. Minden $x \in (a_i, b_i)$ esetén $c(x, x) < x$.

Bizonyítás. Az izotonság (T1') és a (3) következményeként

$$c(x, x) \leq c(b_i, x) = x, \text{ minden } x \in [a_i, b_i] \text{ -re.}$$

Ha $x \in (a_i, b_i)$, akkor $c(x, x) \neq x$, így

$$c(x, x) < x, \text{ minden } x \in (a_i, b_i) \text{ mellett.}$$

5.2.7. Segéd-tétel. Minden $(x, y) \in [a_i, b_i] \times [a_i, b_i]$ -re

$$c(x, y) \leq \min(x, y).$$

Bizonyítás. A (3) következtében

$$c(x, y) \leq c(x, b_i) = x, \text{ és } c(x, y) \leq c(b_i, y) = y, \text{ ezért}$$

$$c(x, y) \leq \min(x, y).$$

5.2.8. Segédttétel. Legyen $H = I^2 - \bigcup_{i \in P} M_i^2$. Ekkor

$$c(x, y) = \min(x, y), \text{ minden } (x, y) \in H \text{ esetén.}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x \leq y$. Legyen $(x, y) \in H$.

Ha $x \in N$ és $y \in I$, akkor

$$x = c(x, x) \leq c(x, y) \leq c(x, 1) = x.$$

Ha $x \in (a_i, b_i) \in M$ és $y \notin (a_i, b_i)$, akkor

$$x = c(x, b_i) \leq c(x, y) \leq c(x, 1) = x.$$

Mindkét esetben $c(x, y) = x = \min(x, y)$. Az $y \leq x$ feltétel mellett hasonlóan következik, hogy $c(x, y) = y = \min(x, y)$.

Legyen c_i a c függvény $[a_i, b_i] \times [a_i, b_i]$ tartományra való korlátozása. A $c(a_i, a_i) = a_i$, és a $c(b_i, b_i) = b_i$ egyenlőségek, valamint c izotonsága (T1'), folytonossága (T4) következményeként a c_i az $[a_i, b_i] \times [a_i, b_i]$ tartományt $[a_i, b_i]$ intervallumra képezi le.

Összefoglalva: c_i teljesíti a (T1'), (T3), (T4), a

$$(T2') \quad c_i(a_i, a_i) = a_i, \quad c_i(b_i, b_i) = b_i, \text{ és}$$

$$c_i(a_i, b_i) = c_i(b_i, a_i) = a_i$$

feltételeket, valamint az 5.2.6. tétel alapján Archimedes-i. Ezért a Ling tétel /5.2.2. tétel/ alapján létezik c_i -hez additív g_i generátor függvény, minden $i \in P$ -re.

Igy c -re érvényes a következő reprezentációs tétel:

5.2.9. Tétel. Legyen $c : I \times I \rightarrow I$ függvény. A c akkor és csak akkor teljesíti a (T1) - (T4) feltételeket, ha c előáll

$$c(x, y) = \begin{cases} g_i^{(-1)}(g_i(x) + g_i(y)), & \text{ha } (x, y) \in M_i^2 = (a_i, b_i)^2 \\ \min(x, y) & , \text{ha } (x, y) \in I^2 - \bigcup_{i \in P} M_i^2 \end{cases} \quad (5)$$

formában, ahol $\{M_i\}_{i \in P}$ I -beli, páronként egymásba nem nyúló, véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok nyitott intervallum összessége. A g_i az $[a_i, b_i]$ zárt intervallumot a $[0, \infty]$ intervallumba leképező függvény, amely folytonos, szigorúan monoton csökkenő, és $g_i(b_i) = 0$.

A $g_i^{(-1)}$ a g_i pseudo-inverze.

Megjegyezzük még, hogy a P lehet üres is.

Bizonyítás.

Tfh. a $c : I \times I \rightarrow I$ függvényre teljesül T1 - T4.

Ha az I minden pontja idempotens, azaz $I = N$, akkor az 5.2.8. tétel alapján $c(x, y) = \min(x, y)$, minden $(x, y) \in I^2$.

Ha $N \subset I$, akkor az 5.2.3. és 5.2.4. tétel következtében I^2 -ben vannak olyan, páronként egymásba nem nyúló $[a_i, b_i] \times [a_i, b_i]$ tartományok, amelyekben a c_i függvények az 5.2.5. - 5.2.8. tételek alapján kielégítik a 5.2.2. /Ling/ tétel feltételeit. Ezért az adott tartományokon léteznek a c_i -khez g_i additív generátor függvények. Az ilyen tartományokon kívül a 5.2.8. tétel alapján $c(x, y) = \min(x, y)$.

Az állítás megfordításának bizonyításához tegyük fel, hogy a $c : I \times I \rightarrow I$ függvény előáll (5) formában.

Ha P üres, akkor $c(x,y) = \min(x,y)$, minden $(x,y) \in I^2$. Tehát teljesül $T1 - T4$.

Ha P nem üres, akkor az 5.2.2. tétel alapján az $\{M_i^2\}_{i \in P}$ tartományokban külön-külön, valamint ezen tartományokon kívül a c függvény izoton, asszociatív, és folytonos.

Mivel (1) miatt az M_i^2 tartományok határán $c(x,y) = \min(x,y)$, ezért c -nek itt nincs szakadáshelye. Tehát c folytonos I^2 -n. Ugyanezekből következik a $T2$ tulajdonság is.

Az izotonság $T1'$ és az asszociativitás $T3$ bizonyítása egyszerű, de hosszadalmas számolást igényel, ezért nem közöljük.

Végül kimondjuk a fuzzy halmazokon értelmezett egyesítésnek megfelelő $d : I \times I \rightarrow I$ függvényre vonatkozó reprezentációs tételt. Ekkor a $(T1) - (T4)$ feltételek a következőképpen módosulnak:

- $(T1^*)$ d monoton,
- $(T2^*)$ $d(0,0) = 0$, $d(1,1) = 1$, $d(0,1) = d(1,0) = 1$,
- $(T3^*)$ d asszociatív,
- $(T4^*)$ d folytonos.

5.2.10. Tétel. Legyen $d : I \times I \rightarrow I$ függvény. A d akkor és csak akkor teljesíti a $(T1^*) - (T4^*)$ feltételeket, ha d előáll

$$d(x,y) = \begin{cases} h_i^{(-1)}(h_i(x) + h_i(y)), & \text{ha } (x,y) \in M_i^2 = (a_i, b_i)^2 \\ \max(x,y) & , \text{ha } (x,y) \in I^2 - \bigcup_{i \in P} M_i^2 \end{cases}$$

formában, ahol $\{M_i\}_{i \in P}$ I -beli, páronként egymásba nem nyúló, véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok nyitott intervallum összessége.

A h_i az $[a_i, b_i]$ zárt intervallumot a $[0, \infty]$ intervallumba leképező függvény, amely folytonos, szigorúan monoton növekvő és

$h_i(a_i) = 0$. A $h_i^{(-1)}$ a h_i pszeudo-inverze.

5.3. A reprezentációs tétel következményei

Ebben a fejezetben ismertetjük a 5.2.9. és 5.2.10. reprezentációs tételek néhány következményét, és a tételekhez kapcsolódó további összefüggéseket.

5.3.1. Tétel. Ha a $c : I \times I \rightarrow I$ művelet kielégíti a (T1) - (T4) és a $d : I \times I \rightarrow I$ művelet a (T1*) - (T4*) feltételeket, akkor c és d kommutatív.

Bizonyítás. Az állítás a c függvény (5) és a d függvény (6) előállításából egyszerűen adódik.

Utalva a t -norma 1.2.3. definíciójára, és figyelembe véve az előző tételt teljesül, hogy

5.3.2. Tétel. Minden (T1) - (T4) feltételt kielégítő $c : I \times I \rightarrow I$ függvény folytonos t -norma.

Folytonos t -normákra vonatkozó vizsgálatokat Schweizer és Sklar végzett [34], [35] dolgozatában.

A reprezentációs tételek feltételeit kielégítő c és d függvények egy speciális osztályával Frank foglalkozott [12] cikkében. Az általa felvetett és megoldott probléma a következő volt:

Keressük azokat a c, d függvény párokat, amelyek kielégítik a

$$(E1) \quad c(x, y) + d(x, y) = x + y,$$

$$(E2) \quad c : I \times I \rightarrow I, \quad d : I \times I \rightarrow I,$$

$$(E3) \quad c \text{ és } d \text{ folytonos,}$$

(E4) c és d asszociativ,

(E5) $c(0, x) = c(x, 0) = 0$, $c(1, x) = c(x, 1) = x$,
 $d(0, x) = d(x, 0) = x$, $d(1, x) = d(x, 1) = 1$, $(x \in I)$

feltételrendszert.

5.3.3. Tétel. Az (E1) - (E5) feltételeket teljesítő c és d függvények kielégítik a (T1) - (T4) illetve (T1*) - (T4*) feltételeket /Frank [12] /.

Ebből következik, hogy a c előállítható (5) d pedig (6) alakban. Ennek megfelelően átfogalmazva Frank tételét kapjuk, hogy

5.3.4. Tétel. Legyenek c és d az (E2) - (E5) feltételeket kielégítő függvények. A c, d függvénytér akkor és csak akkor megoldása az (E1) egyenletnek, ha c előáll (5) és d (6) alakban úgy, hogy az $\{M_i\}$ $i \in p$ intervallumrendszer a két előállításban megegyezik és a megfelelő (g_i, h_i) generátorfüggvény párokra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} g_i(x) &= -\log x' & \text{és} & \quad h_i(x) = -\log(1 - x'), \text{ vagy} \\ g_i(x) &= 1 - x' & \text{és} & \quad h_i(x) = x', \text{ vagy} \\ g_i(x) &= -\log\left(\frac{s^{x'} - 1}{s - 1}\right) & \text{és} & \quad h_i(x) = -\log\left(\frac{s^{1-x'} - 1}{s - 1}\right), \end{aligned}$$

ahol $0 < s < \infty$ és $s \neq 1$, valamint $x' = \frac{x - a_i}{b_i - a_i}$.

/Megjegyezzük, hogy ha $i \neq j$, akkor g_i és g_j nem feltétlenül azonos típusu./

Az (E1) függvényegyenletnek a jelentősége például a 4. fejezetben tárgyalt kijelentéshálón történő értékelésnél van. Ha $\hat{x}$ és $\hat{y}$ valamely kijelentéshálóbeli kijelentések és $x = p(\hat{x})$ és $y = p(\hat{y})$ a nekik megfelelő igazságértékek, és feltételezzük, hogy

$$p(\hat{x} \wedge \hat{y}) = c(p(\hat{x}), p(\hat{y})) \quad \text{és}$$

$$p(\hat{x} \vee \hat{y}) = d(p(\hat{x}), p(\hat{y})),$$

akkor a hálón való kiértékelés definíciójában szereplő

$$p(\hat{x} \wedge \hat{y}) + p(\hat{x} \vee \hat{y}) = p(\hat{x}) + p(\hat{y})$$

feltételnek megfelelő

$$c(x, y) + d(x, y) = x + y$$

egyenlet az (E1) egyenlettel azonos.

A reprezentációs tételekhez kapcsolódva ismét a maximum és minimum műveletekre térünk vissza. A reprezentációs tételek másik következménye:

5.3.5. Tétel. A (T1) - (T4) tulajdonságokat kielégítő $c : I \times I \rightarrow I$ függvény és a (T1*) - (T4*) tulajdonságokat teljesítő $d : I \times I \rightarrow I$ függvény akkor és csak akkor egyezik meg a $\min(x, y)$ illetve $\max(x, y)$ függvénnyel, ha c és d idempotens a teljes I -n.

Ez a tétel alátámasztja azt a - 2. fejezetben a maximum és minimum műveletek axiómatikus tárgyalásánál - kimondott állításunkat, hogy az idempotencia a maximum és minimum műveletek meghatározó tulajdonsága.

Most vizsgáljuk meg a $\min(x, y)$ függvény generátorfüggvénnyel történő előállításának lehetőségét. Az 5.2.2. tétel alapján a minimum függvénynek nincs a tételben megadott alakú additív generátorfüggvénye, mert nem Archimedes-i. Ling ezt a problémát tovább vizsgálva a következő eredményre jutott [27]:

5.3.6. Tétel. Legyen $[a, b]$ a valós számegyenes zárt intervalluma. Ha $c(x, y) = \min(x, y)$, minden $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ esetén, akkor nem létezik olyan folytonos $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ függvény, hogy $\min$

előállítható

$$\min(x, y) = g^*(g(x) + g(y))$$

formában, ahol g - nem feltétlenül folytonos - g^* -ra teljesül, hogy

$$g^*(g(x)) = x, \text{ minden } x \in [a, b] \text{ -re.}$$

5.3.7. Tétel. Az 5.3.6. tétellel megegyező feltételek mellett nem létezik olyan szigorúan monoton csökkenő $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ függvény, hogy a $\min$ függvény előállítható lenne

$$\min(x, y) = g^*(g(x) + g(y))$$

formában, ahol g^* az 5.3.6. tételben megadott függvény.

Más szempontból azonban kapcsolatot teremthetünk a generátorfüggvények és a $\min(x, y)$ között. Legyen $c : I \times I \rightarrow I$ a (T1) - (T4) tulajdonságokat kielégítő szigorúan monoton - tehát Archimedes-i - függvény, amelynek additív generátorfüggvénye $g(x)$.

5.3.8. Tétel. A $g^\lambda(x)$ ($\lambda > 0$) függvény szintén eleget tesz a generátorfüggvények tulajdonságainak /Dombi [8]/.

5.3.9. Tétel. Ha $c_\lambda(x, y)$ a $g^\lambda(x)$ generátorfüggvénnyel meghatározott művelet, akkor

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_\lambda(x, y) = \min(x, y)$$

/Dombi [8]/.

Természetesen a maximum műveletre is hasonló állítások mondhatók ki.

5.4. Példák a kapcsoló műveletekre és generátorfüggvényeikre

Az irodalomban számos - a maximum és minimum művelettől különböző - fuzzy kapcsoló művelet pár ismert. A következő táblázatban ezek közül összefoglalunk néhányat a hozzájuk tartozó additív generátorfüggvényekkel együtt. Valamennyi $c : I \times I \rightarrow I$ függvény kielégíti a (T1) - (T4) feltételeket, és valamennyi $d : I \times I \rightarrow I$ függvény a (T1*) - (T4*) feltételeket.

(1) Zadeh [42] :

$$c(x, y) = \max(x+y-1, 0)$$

$$g(x) = 1-x,$$

$$d(x, y) = \min(x+y, 1)$$

$$h(x) = x ;$$

(2)

$$c(x, y) = x \cdot y$$

$$g(x) = -\log(x),$$

$$d(x, y) = x+y-x \cdot y$$

$$h(x) = -\log(1-x);$$

(3) Hamacher [20]:

$$c(x, y) = \frac{x \cdot y}{x+y-x \cdot y}$$

$$g(x) = \frac{1-x}{x} ,$$

$$d(x, y) = \frac{x+y-2 \cdot x \cdot y}{1-x \cdot y}$$

$$h(x) = \frac{x}{1-x} ;$$

(4) Hamacher [20] :

$$c_a(x, y) = \frac{x \cdot y}{a+(1-a) \cdot (x+y-x \cdot y)}$$

$$g_a(x) = \log \frac{a-(a-1) \cdot x}{x} \quad (a > 0) ,$$

$$d_b(x, y) = \frac{(b-1) \cdot x \cdot y + x + y}{1+b \cdot x \cdot y}$$

$$h_b(x) = \log \frac{b \cdot x - 1}{1-x} \quad (b > -1) ;$$

(5) Yager [8]:

$$c_\lambda(x, y) = 1 - \min \{1, [(1-x)^\lambda + (1-y)^\lambda]^{1/\lambda}\} \quad g_\lambda(x) = (1-x)^\lambda ,$$

$$d_\lambda(x, y) = \min(1, (x^\lambda + y^\lambda)^{1/\lambda}) \quad h_\lambda(x) = x^\lambda \quad (\lambda > 1) ;$$

(6) Frank [12] :

$$\begin{aligned} c_s(x, y) &= \log_s \frac{(x^x - 1) \cdot (s^y - 1)}{1 - 1} + 1 & g_s(x) &= \log_s \frac{s - 1}{s^x - 1} \quad (s > 0), \\ d_s(x, y) &= \log_s \frac{(s^{1-x} - 1) \cdot (s^{1-y} - 1)}{s - 1} + 1 & h_s(x) &= \log_s \frac{s - 1}{s^{1-x} - 1} \quad (s > 0); \end{aligned}$$

(7) Dombi [8] :

$$\begin{aligned} c_\lambda(x, y) &= \frac{1}{1 + ((\frac{1}{x} - 1)^\lambda + (\frac{1}{y} - 1)^\lambda)^{1/\lambda}} & g_\lambda(x) &= (\frac{1}{x} - 1)^\lambda \quad (\lambda > 0), \\ d_\lambda(x, y) &= \frac{1}{1 + ((\frac{1}{x} - 1)^\lambda + (\frac{1}{y} - 1)^\lambda)^{1/\lambda}} - 1/\lambda & h_\lambda(x) &= (\frac{1}{x} - 1)^{-\lambda} \quad (\lambda > 0); \end{aligned}$$

A reprezentációs tétel legáltalánosabb esetében az 1×1 tartomány Archimedes-i blokkjaiban a c, d, g és h függvények a fenti kifejezésekkel megfelelő függvénytranszformációkkal nyerhetők.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Aczel, J.: Lectures on functional equations and their applications, Academic Press, New York, 1969.
2. Albert, P.: The algebra of fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems 1, pp.203-230, 1978.
3. Banon, G.: Distinction between several subsets of fuzzy measures, Fuzzy Sets and Systems 5, pp.291-305, 1981.
4. Bellman, R.E. and Giertz, M.: On the analitic formalism of the theory of fuzzy sets, Information Science 5, pp. 149-156, 1973.
5. Bellman, R.E. and Zadeh, L.A.: Local and fuzzy logics in Modern uses of multiple valued logic, ed.by Dunn, J.M.and Epstein, G., D.Reidel Publishing Company, Boston, pp. 105-166, 1977.
6. Birkhoff, G.: Lattice theory, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1948.
7. Carnap, R.: Logical foundations of Probability, Chicago, 1950.
8. Dombi, J.: A general class of fuzzy operators, the deMorgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators, Fuzzy Sets and Systems 8, pp. 149-163, 1982.

9. Drewniak, J.: Axiomatic systems in fuzzy algebra,
Acta Cybernet, 1980.
10. Dubois, D. and Prade, H.: Fuzzy sets and systems,
Academic Press, New York, 1980.
11. Dubois, D. and Prade, H.: New results about properties and
semantics of fuzzy set-theoretic operators,
1-st Synposion on Policy Analysis and Information Systems, Surham,
North Caroline, U.S.A., 1979.
12. Frank, M.J.: On the simultaneous associativity of $F(x,y)$ and
 $x + y - F(x,y)$,
Aequationes Mathematicae 19, pp. 194-226, 1979.
13. Fuchs, L.: Partially ordered algebraic systems,
Pergamon Press, Oxford, 1963.
14. Fung, L.W. and Fu, K.S.: An axiomatic approach to rational
decision making in fuzzy environment in Fuzzy sets and their
applications to cognitive and decision processes,
ed. by Zadeh, L.A. and Fu, K.S. and Tanaka, K. and Shimura, M.,
Academic Press, pp. 227-256, 1975.
15. Gaines, B.R.: Foundations of fuzzy reasoning,
Int. J. Man-Mach. Stud. 8, pp. 623-668, 1976.
16. Gaines, B.R.: Fuzzy and probability uncertainty logics,
Information and Control 38, pp. 154-169, 1978.

17. Giles, R.: Lukasiewicz logic and fuzzy set theory,
Internat. J. Man-Machine Studies 8, pp. 313-327, 1976.
18. Gougen, J.A.: L-fuzzy sets,
J.Math.Anal. Appl. 18, pp. 145-174, 1967.
19. Halmos, P.R.: Measure Theory,
D.Van Norstrand Company, New York, 1951.
20. Hamacher, H.: Über logische Aggregationen nicht-linär explizierter
Entscheidungskriterien,
R.G. Fischer Verlag, 1978.
21. Hamacher, H.: Über logische Verknüpfungen unscharfer Aussagen
und deren zugehörige Bewertungsfunktionen in Progress in Cybernetics
and Systems Research Vol. III.
ed.by Trappl, R. and Klir, G.J. and Riccardi, L.
John Wiley and Sons, New York, pp. 276-288, 1979.
22. Kóczy, L.T.: Fuzzy algebras and some questions of their technical
applications,
dissertations /in hungarian/, University of Engineering, Budapest, 1975.
23. Kóczy, L.T. and Hajnal, M.: A new attempt to axiomatise fuzzy
algebra with on applications example,
Problems Control Inform.Theory 6, pp.47-66, 1977.
24. Kóczy, L.T.: On some basic theoretical problems of fuzzy mathema-
tics,
Acta Cybernet 3, pp. 225-237, 1977.

25. Lakoff, G.: Hedges: a study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts,
J.Philos.Logic 2, pp. 458-508, 1973.
26. Lee, R.C.T. and Chang, C.L.: Some properties of fuzzy logic,
Information and Control 19, pp.417-431, 1971.
27. Ling, C.H.: Representacion of associative functions,
Publ. Math. Debrecen 12, pp.182-212, 1965.
28. Lukasiewicz, J.: Philosophische Bemerkung zu mehrwertigen Systemen des Ausagenkalküls,
Comptes Rendus des Seances de la Societé des Sciences et des Lttres de Varsowie, Classe III.23, pp. 51-71, 1930.
29. Marinos, P.N.: Fuzzy logic and its application on switching systems,
IEEE Trans. Computers 18, pp. 343-348, 1969.
30. Mostert, P.S. and Shields, A.L.: On the structure of semigroups an a compact manifold with boundary,
Anals of Mathematics 65, pp. 117-143, 1957.
31. Negoita, C.V. and Ralescu, D.A.: Applications of fuzzy sets to systems analysis,
Birkaeuser, Basel, 1975.
32. Preparata, F.P. and Yeh, R.T.: Continuously valued logic,
J.Comput. Syst. Sci. 6, pp. 397-418, 1972.
33. Recher, N.: Many-valued logic,
McGraw-Hill Book C., NewYork, 1969.

34. Schweitzer, B. and Sklar, A.: Associative functions and abstract semigroups,
Publ. Math. Debrecen 10, pp. 69-91, 1963.
35. Schweitzer, B. and Sklar, A.: Associative functions and statistical triangle inequality,
Publ. Math. Debrecen 8, pp. 169-186, 1961.
36. Shafer, G.: A mathematical theory of evidence,
Princeton University Press, 1976.
37. Sugeno, M.: Theory of fuzzy integral and its applications,
Ph. D. Thesis, Tokyo, Inst. of Technol, 1974.
38. Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok,
Tankönyvkiadó, Budapest, pp. 17-48, 1975.
39. Thole, U. and Zimmermann, H.J. and Zysne, P.: On the suitability of minimum and product operators for the intersection of fuzzy sets,
Fuzzy Sets and Systems 2, pp. 167-180, 1979.
40. Trillas, E. and Alsina, C. and Valverde, L.: Do we need max-min and 1-j in fuzzy sets theory? in
Applied Systems and Cybernetics ed. by Lasker, G.F.,
Pergamon Press, New York, pp. 2808-2814, 1981.
41. Vas, Z. and Dombi, J.: Basic theoretical treatment of fuzzy connectives,
Acta Cybernet. /in appear/, 1982.

42. Zadeh, L.A.: Fuzzy logic and its application to approximate reasoning,
Inf. Process 74, Proc. IFIP Congr., 3, pp. 591-594, 1974.
43. Zadeh, L.A.: Fuzzy sets,
Information and Control 8, pp. 338-353, 1965.