BIZONYOS MÁSODRENDŰ NEM-LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSAINAK ASZIMPTOTIKUS VISELKEDÉSÉRŐL

K a r s a i J á n o s

doktori értekezése

JATE
BOLYAI INTÉZET
SZEGED
1983

1. BEVEZETÉS

Egy rugóra függesztett m tömegü golyó surlódásmentes közegben való mozgását az

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

egyenlet irja le. Az $f(x)$ rugóerő a kitéréssel ellentétes irányu ($xf(x) > 0$ ha $x \neq 0$), de általában nem-lineáris. Előfordul, hogy a rugalmassági együttható időben változik. A mozgásegyenlet ekkor:

(E1) $$\ddot{x} + q(t)f(x) = 0 ,$$

ahol $q(t) > 0$.

Ha az impulzus az időtől explicit módon is függ, akkor a pont az

(E2) $$(p(t)\dot{x})^{\cdot} + q(t)f(x) = 0 \qquad (p(t) > 0) ,$$

ha még külső erő is hat, akkor az

(E2') $$(p(t)\dot{x})^{\cdot} + q(t)f(x) = e(t,x,\dot{x})$$

egyenlet szerint mozog. Ilyen alaku a változó fonal-

hosszuságu matematikai inga mozgásegyenlete is:

$$(\ell^2(t)\dot{\varphi})^{\cdot} + g\ell(t)\sin\varphi = 0 \quad ,$$

melyben $\ell(t)$ az inga pillanatnyi hossza, g a nehézségi gyorsulás, $\varphi(t)$ pedig a függőlegestől való eltérés szöge.

A valóságban azonban surlódás mindig hat a mozgó testre. Ha az elsőként tekintett golyó valamilyen inhomogén surlódó közegben rezeg, akkor ezt az

$$(E3) \qquad \ddot{x} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + f(x) = 0$$

egyenlet, ha pedig külső erő is hat, akkor az

$$(E3') \qquad \ddot{x} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + f(x) = e(t,x,\dot{x})$$

egyenlet szerint teszi $\left(g(t,x,\dot{x}) \geq 0 \right)$.

A fenti egyenletek mind speciális esetei az

$$(E) \qquad (p(t)\dot{x})^{\cdot} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + q(t)f(x) = 0$$

illetve az

$$(E') \qquad (p(t)\dot{x})^{\cdot} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + q(t)f(x) = e(t,x,\dot{x})$$

differenciálegyenleteknek. Ebben a dolgozatban azzal

az igen gazdag irodalommal rendelkező problémával foglalkozunk, hogy az (E) vagy (E') egyenlet szerint mozgó test milyen körülmények között közeledik minden határon tul az $x=0$ egyensulyi helyzetéhez, miközben a t idő a végtelenbe tart, vagyis, milyen feltételek mellett teljesül minden megoldásra a $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ reláció.

Az első eredmények a lineáris

$$(\text{E1L}) \qquad \ddot{x} + q(t)x = 0$$

egyenletre vonatkoztak, ezért ebben a speciális esetben tekintsük át röviden, mikor várható a $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ reláció teljesülése. Legyen $x(t)$ megoldás. Az

$$E(t) = \frac{1}{q(t)}\dot{x}^2(t) + x^2(t)$$

energiafüggvény deriváltja

$$\dot{E}(t) = -\frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\dot{x}^2(t) \ ,$$

amelyről leolvasható, hogy számunkra csak a $\dot{q}(t)\geq 0$ eset a kedvező (ugyanis általában csak ekkor tudjuk az $x(t)$ megoldások korlátosságát biztositani $[0,\infty)$-n).

Az is nyilvánvaló, hogy a $\lim_{t\to\infty} q(t)=\infty$ feltétel szükséges az összes megoldás 0-hoz tartásához. De nem elegendő, mint ahogyan azt De Kleine [8] példája is mutatja. Sőt 1966-ban Willett [25] bebizonyitotta, hogy minden pozitiv nem-csökkenő $b(t)$ függvényhez létezik olyan $q(t)$, hogy $\dot{q}(t) \geq b(t)$ és az (ElL) egyenletnek van 0-hoz nem tartó megoldása.

Milloux 1949-ben megmutatta [12], hogy a $\lim_{t\to\infty} q(t)=\infty$ feltétel, ha minden megoldásra nem is, de legalább egyre biztositja $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ teljesülését. Ezt a tételt a 2.4 fejezetben általánositjuk az (E) egyenletre.

Willett tételéből sejthető, hogy a megoldások 0-hoz tartása szempontjából nem a $q(t)$ növekedése sebességének, hanem szabályosságának van jelentősége. A hires Armellini-Sansone-Tonelli tételben ez a szabályosság a $\log q(t)$ "reguláris növekedése" [23].

Lazer [16] 1965-ben bebizonyitotta, hogy ha $q(t)$ ugy tart monoton nőve a végtelenbe, hogy közben

$\int_0^t \left|\left(q^{-1}\right)\cdots\right|$ korlátos $[0,\infty)$-en, akkor is biz-

tositott (ElL) minden megoldására $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$

teljesülése.

1966-ban Mc Shane gyengitette a reguláris növekedés feltételét [18] .

A nem-lineáris (E1) ill. (E2) egyenletek vizsgálatánál a lineáris esetben bevált módszerek többségét nem lehetett alkalmazni. Az uj módszerek segitségével számos eredmény született, melyek sokszor a lineáris egyenletekre is többet mondtak a már ismerteknél (Meir, Willett és Wong [19,26] , Burton és Grimmer [5], Hatvani [14], Scott [20,21]) . Ezen egyenleteket a 3.4 fejezetben tárgyaljuk.

A $g(t,x,\dot{x})\dot{x}$ fékezés a vizsgálatokban az 50-es években jelenik meg. Az

$$E(t) = \dot{x}^2(t) + x^2(t)$$

energia deriváltja az

$$\ddot{x} + g(t)\dot{x} + x = 0 \qquad (g(t) \geq 0)$$

egyenlet megoldásai mentén

$$\dot{E}(t) = -2g(t)\dot{x}^2(t) \quad .$$

Azonnal látható, hogy ha $\int_0^\infty g < \infty$, akkor (E3L) egy megoldása se tart 0-hoz [3]. Az (E1L) egyenlethez hasonlóan igaz azonban, hogy az $\int_0^\infty g = \infty$ feltétel

csupán 0-hoz tartó megoldás létezését biztositja (Hartman [12]). Most tehát a $g(t)$ integráljának kell eléggé szabályosan növekedni. Ha a növekedés tul gyors, egy uj jelenséggel találkozunk. Ekkor létezhet olyan megoldás, amely nem jut el az $x=0$ egyensulyi helyzetig. Például az

$$\ddot{x} + \left(t^2 + t + \frac{2}{t}\right)\dot{x} + x = 0$$

egyenletnek az $x(t) = 1 + \frac{1}{t}$ függvény megoldása. Ezek szerint minden megoldás csak akkor tarthat 0-hoz, ha $g(t)$ elegendően, de nem tulságosan gyorsan növekszik.

1960-ban I.J. Levin és J.A. Nohel [17] bebizonyitották, hogy (E3L) minden megoldására $\lim_{t\to\infty}(x(t),\dot{x}(t)) = (0,0)$ teljesül, ha

$$0 < c_1 \leq g(t) \leq c_2 \quad .$$

R.A. Smith alábbi két eredménye (1961, [22]) lényegében egészen a mai napig nem tulhaladott, és jól jellemzi a vizsgálatok korlátait. Abban a két elkülönülő esetben tudta biztositani a megoldások 0-hoz tartását, mikor $g(t)$ mindig pozitiv konstans fölött, illetve alatt marad. Nevezetesen bebizonyitotta, hogy ha

vagy

1) $0 < a(t) \leq g(t) \leq c_1$, $a(t) \searrow [0,\infty)$-en és $\int_0^\infty a = \infty$;

vagy

2) $0 < c_2 \leq g(t) \leq b(t)$, $b(t) \nearrow [0,\infty)$-en és $\int_0^\infty \frac{1}{b} = \infty$,

akkor az (E3L) egyenlet triviális megoldása globálisan aszimptotikusan stabilis.

R.J. Ballieu és K. Peiffer 1977-ben [3] általánositották Smith eredményeit a nem-lineáris (E3) egyenletre. Hatvani L. [13] a nagy fékezés esetén gyengitette a $g(t) \geq c_2$ feltételt az

$$\ddot{x} + g(t)\varphi(x,\dot{x})\dot{x} + f(x) = 0$$

egyenletre nyert eredményében, helyettesitve a

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_t^{t+\delta} g > 0 \qquad (\forall \delta > 0 \text{ számra})$$

feltétellel, melyet az "integrálisan" konstansnál nagyobb függvények elégitenek ki (pl. $\sin^2 t$, 1, t). A 3.3 fejezetben olyan tételt bizonyitunk, amely a homogén egyenletek esetén nem kivánja meg a nagy ill. a kis csillapitás megkülönböztetését. Speciálisan

nyerjük, hogy az (E3L) egyenlet minden megoldására $\lim_{t\to-\infty}(x(t),\dot{x}(t))=(0,0)$ teljesül, ha a $g(t)$ csillapitási együttható "integrálisan" egy pozitiv nem-növő $a(t)$ és egy nem-csökkenő $b(t)$ függvény között változik, melyekre $\int_0^\infty a = \int_0^\infty 1/b = \infty$. Megjegyezzük, hogy az inhomogén egyenletek esetén a "nagy" és "kis" fékezés megkülönböztetése továbbra is szükséges (3.2 fejezet) .

A dolgozatban vizsgált egyenleteket jelölésükkel együtt az 1. függelékben felsoroljuk.

2. DEFINICIÓK, ALAPLEMMÁK

2.1. Jelölések, általános feltételek, definiciók

A dolgozatban $\underline{R}$ a valós számok, R_+ a nem-negativ valós számok halmazát jelöli és $R^2 = RxR$. Valamely $a \in R$ esetén $[a]^+$ a szám pozitiv, $[a]^-$ a szám negativ része, vagyis $[a]^+ = \max(0,a)$, $[a]^- = \max(0,-a)$. $C^i[a,b)$-vel jelöljük az $[a,b)$-n értelmezett $\underline{i}$-szer folytonosan differenciálható valós értékü függvények halmazát.

Az (E) és (E') egyenletekben szereplő függvények alábbi tulajdonságai közül bizonyosak teljesülését tételeink feltételezik (ezeket a tulajdonságokat a 2. függelékben is összefoglaljuk) :

(I) $p,q \in C^1[t_0,\infty)$; $p(t),q(t) > 0$ ha $t > t_0$;

(II) $f(x) \in C(-\infty,\infty)$; $xf(x) > 0$ $(x \neq 0)$;

$$F(x) := 2\int_0^x f \to \infty \quad (x \to \infty);$$

(III) $$0 \leq a(t)\varphi(x,y) \leq g\left(t,x,\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} y\right) \leq b(t)\Psi(x,y) ,$$

ahol $\underline{a},\underline{b},\varphi,\psi$ nem-negativ folytonos függvények és $\varphi(x,y) \neq 0$ ha $y \neq 0$;

(IV) $|e(t,x,y)| = r_1(t) + r_2(t)|y|^{\ell}$

$0 \leq \ell \leq 1$; $r_1, r_2 \in C[t_0,\infty)$; $r_1(t), r_2(t) \geq 0$;

(V) $$\int_{t_0}^{\infty} \frac{r_1}{(pq)^{\frac{1}{2}}} < \infty; \quad \int_{t_0}^{\infty} \frac{r_2}{(pq)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\ell}{2}} < \infty \quad ;$$

(VI) $$\int_{t_0}^{\infty} \left[2k \frac{a(t)}{p(t)} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t) \right]^{-} dt < \infty \ ,$$

ahol $k = \inf_{x,y \in R} \varphi(x,y)$.

Azt mondjuk, hogy az (E) egyenlet triviális megoldása

(i) <u>stabilis</u>, ha bármely t_0-hoz és pozitiv ε számhoz van olyan pozitiv $\delta(\varepsilon,t_0)$, hogy ha $|x(t_0)| + |\dot{x}(t_0)| < \delta$, akkor $|x(t)| + |\dot{x}(t)| < \varepsilon$ teljesül, hacsak $t > t_0$;

(ii) <u>stabilis x-ben</u>, ha bármely t_0-hoz és pozitiv ε számhoz van olyan pozitiv $\delta(\varepsilon,t_0)$, hogy ha $|x(t_0)| + |\dot{x}(t_0)| < \delta$, akkor $|x(t)| < \varepsilon$ hacsak $t > t_0$;

(iii) <u>globálisan aszimptotikusan stabilis</u> (g.a.s.), ha stabilis és minden $x(t)$ megoldásra $\lim_{t \to \infty} (x(t),\dot{x}(t)) = (0,0)$;

(iv) <u>globálisan aszimptotikusan stabilis</u> <u>x-ben</u>, ha stabilis <u>x</u>-ben és minden $x(t)$ megoldásra $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Ljapunov függvényként az

$$E(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) + F(x(t))$$

energiafüggvényt használjuk, ahol $F(x) := 2\int_0^x f$.

A megoldások viselkedésére az $E(t)$ viselkedéséből következtetünk. A (II) feltétel miatt az $x(t)$ megoldás korlátossága azonnal adódik. Attraktivitási tételeinkben azt fogjuk bebizonyitani, hogy ha $x(t)$ az (E') megoldása, akkor $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$. Ebből a (II) feltétel alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) = \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 .$$

Megjegyezzük, hogy a $\lim_{|x|\to\infty} F(x) < \infty$, teljesülne, akkor állitásaink csak a korlátos megoldásokra vonatkoznának.

2.2. A megoldások korlátossága, néhány tulajdonsága

Az aszimptotikus viselkedés vizsgálatának csak olyan megoldások esetén van értelme, melyek léteznek valamely $[t_0,\infty)$ intervallumon. Attraktivitási tételeink általában minden megoldásra vonatkoznak, ezért szükségünk van egy az összes megoldás valamely $[t_0,\infty)$-en való létezését biztositó lemmára.

2.1. LEMMA. *Tegyük fel, hogy az* (E') *egyenletben szereplő függvények rendelkeznek az* (I) - (VI) *tulajdonságokkal. Ekkor az* (E') *egyenlet minden megoldása létezik, az* $E(t)$ *függvény korlátos változásu* $[t_0,\infty)$*-en. Emiatt létezik a* $\lim_{t\to\infty} E(t) = \lambda$ *véges határérték, az egyenlet minden* $x(t)$ *megoldása és a* $\frac{p(t)}{q(t)}\dot{x}^2(t)$ *függvény korlátosak* $[t_0,\infty)$ *-en.*

B i z o n y i t á s. Legyen $x(t)$ az (E') egyenlet megoldása. Tegyük fel, hogy $x(t)$ létezik a $[t_0,t_1)$ intervallumon. Az $E(t)$ deriváltjára az alábbi összefüggés nyerhető:

$$(2.1)\qquad \dot{E}(t) = -2\frac{g(t,x(t),\dot{x}(t))}{q(t)}\dot{x}^2(t) - \frac{(pq)^{\cdot}}{q^2}(t)\dot{x}^2(t) +$$

$$2e(t,x(t),\dot{x}(t))\,\frac{1}{q(t)}\,\dot{x}(t) \le \left[2k\,\frac{a(t)}{p(t)} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t)\right]^{-}\frac{p(t)}{q(t)}\,\dot{x}^{2}(t) +$$

$$2\left(\frac{r_1}{(pq)^{1/2}}(t) + \frac{r_2}{(pq)^{1/2}}(t)\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\ell}{2}}(t)\right)\left(\frac{p(t)}{q(t)}\,\dot{x}^{2}(t) + 1\right) \le$$

$$\left[2k\,\frac{a(t)}{p(t)} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t)\right]^{-} E(t) + 2\left(\frac{r_1}{(pq)^{1/2}}(t) + \frac{r_2}{(pq)^{1/2}}(t)\right) \times$$

$$\times\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\ell}{2}}(t)\Big)\Big(E(t) + 1\Big) \quad ,$$

ahol $k = \inf_{[t_0,t_1)} \varphi(x(t),\dot{x}(t))$.

Az általánositott Bellman lemma segitségével (Halanay [11], 1.3 fejezet, 1.6 lemma) kapjuk, hogy $E(t)$ és igy $x(t),\dot{x}(t)$ is korlátos $[t_0,t_1)$ -en ha $t_1<\infty$, ami lehetetlen. Ezért szükségképpen $t_1=\infty$.

A pozitiv rész definicióját felhasználva, mivel (2.1) jobboldala nem negativ, kapjuk:

$$[\dot{E}(t)]^{+} \le \left[2k\,\frac{a(t)}{p(t)} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t)\right]^{-} E(t) + 2\left(\frac{r_1}{(pq)^{1/2}}(t) +\right.$$

$$+ \frac{r_2}{(pq)^{1/2}}(t)\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\ell}{2}}(t)\Big)\big(E(t)+1\big) \quad ;$$

$E(t) > 0$ miatt pedig

$$\int_{t_0}^{t} \big[\dot{E}(\tau)\big]^{-} d\tau \leq E(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big[\dot{E}(\tau)\big]^{+} d\tau$$

adódik. Az (V) és (VI) feltételek biztositják a fentiek alapján, hogy $E(t)$ korlátos változásu $[t_0,\infty)$-en.

Az $x(t)$ és $\frac{p(t)}{q(t)}\cdot 2x(t)$ függvények korlátossága $\lim_{x\to\infty} F(x)=\infty$ alapján nyilvánvaló.

<u>Megjegyzés</u>. Ha az $e(t,x,y)$ függvény (IV) becslésében $\ell \equiv 1$, akkor a (VI) és

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{r_2}{(pq)^{1/2}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\ell}{2}} < \infty$$

feltételek helyett az

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[2k\frac{a(t)}{p(t)} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t) - \frac{r_2(t)}{p(t)}\right]^{-} dt < \infty \quad \left(k = \inf_{x,y\in R} \varphi(x,y)\right)$$

feltételt elegendő megkövetelni.

Az (E) és (E') egyenletek megoldásainak jelváltásuk, monotonitási tulajdonságaik szerinti osztályozása nagymértékben megkönnyiti aszimptotikus viselkedésük vizsgálatát. Ennek lehetőségét teremti meg az alábbi három lemma.

2.2. LEMMA. Teljesülnek az (I)-(III) feltételek. Legyen $x(t)$ a homogén (E) egyenlet nem-triviális megoldása. Ha t_1, t_2 az $\dot{x}(t)$ szomszédos zérohelyei, akkor létezik olyan $\bar{t} \in (t_1,t_2)$, hogy $x(\bar{t}) = 0$.

B i z o n y t á s. Helyettesitsünk az (E) egyenletbe t helyére t_1-et, t_2-t:

$$p(t_i)\ddot{x}(t_i) + q(t_i) f(x(t_i)) = 0 \qquad (i = 1,2).$$

Mivel t_1,t_2 az $\dot{x}(t)$ szomszédos zérohelyei és $f(x(t_i)) = 0$ $(i = 1,2)$, kapjuk hogy $\operatorname{sign}(\ddot{x}(t_1)) \neq \operatorname{sign}(\ddot{x}(t_2))$. Szükségképpen $\operatorname{sign}(x(t_1)) \neq \operatorname{sign}(x(t_2))$. Ezek után $\bar{t}$ az $x(t)$ folytonossága miatt létezik.

2.3. LEMMA. Teljesülnek az (I)-(VI) feltételek, és tegyük fel, hogy $\lim_{t\to\infty} \frac{r_1(t)}{q(t)} = 0$.

Legyen $x(t)$ az (E') egyenlet olyan megoldása, melyre $\lim_{t\to\infty} E(t) > 0$. Ha t_1,t_2 az $\dot{x}(t)$ elegendően

nagy szomszédos zéróhelyei, akkor létezik olyan

$\bar{t} \in (t_1, t_2)$, hogy $x(\bar{t}) = 0$.

A 2.2 Lemma szerint minden megoldás, a 2.3 Lemma szerint minden 0-hoz nem tartó megoldás vagy oszcillál $[t_0, \infty)$-en, vagy t elég nagy értékeire monoton.

B i z o n y i t á s. Legyen $x(t)$ az (E') egyenlet $\lim_{t \to \infty} E(t) > 0$ tulajdonságu megoldása. Legyenek t_1, t_2 az $\dot{x}(t)$ olyan szomszédos zéróhelyei, hogy ha $t_1 \leq \tau$, akkor

$$\frac{r_1(\tau)}{q(\tau)} < f(x(\tau))$$

teljesüljön. Ha ilyen t_1, t_2 nem létezik, akkor kész a bizonyitás. Az egyenletbe t_i-t $(i = 1,2)$ helyettesitve kapjuk:

$$-r_1(t_i) < p(t_i)\ddot{x}(t_i) + q(t_i) f(x(t_i)) =$$

$$e(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i)) < r_1(t_i) .$$

t_1, t_2 megválasztásából adódik, hogy $\operatorname{sign}(\ddot{x}(t_1)) \neq \operatorname{sign}(\ddot{x}(t_2))$, amiből $\operatorname{sign}(x(t_1)) \neq \operatorname{sign}(x(t_2))$ és $\bar{t}$ létezése következik.

2.4. LEMMA. Teljesülnek az (I) -(VI) feltételek. Legyen $x(t)$ az (E') egyenlet olyan megoldása, melyre $\lim_{t\to\infty} E(t) = \lambda > 0$ létezik.

Ekkor :

a) ha $x(t)$-nek végtelen sok zéróhelye létezik bármely $[t_1,\infty)$-en $(t_1 \geq t_0)$, akkor oszcillál is $[t_0,\infty)$-en;

b) ha $[t_n^1,t_n^2]$ olyan intervallumsorozat, hogy $t_n^1 \nearrow \infty$ $(n\to\infty)$, $t_{n+1}^1 > t_n^2$, $\dot{x}(t_n^1) = \dot{x}(t_n^2) = 0$ és minden n-re $|x(t)| > 0$ $[t_n^1,t_n^2]$-n, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \left|x(t_n^2) - x(t_n^1)\right| = 0 \text{ és}$$

$$\lim_{t\to\infty,\ t\in \bigcup_{n=1}^{\infty}[t_n^1,t_n^2]} \frac{p(t)}{q(t)}\dot{x}^2(t) = 0 ;$$

c) ha $|x(t)| > 0$ valamely $[t_1,\infty)$ intervallumon, és $\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} = \infty$, akkor $\lim_{t\to\infty} F(x(t)) = \lambda$.

A feltételek még nem biztositják a megoldások 2.3 Lemmában leirt tulajdonságát. Vizsgálatainkban azonban gyakran elegendő lesz erre a lemmára hivatkoznunk.

B i z o n y i t á s. a) Legyen $\{t_n\}$ az $x(t)$ zéróhelyeinek olyan sorozata, hogy $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \frac{p(t_n)}{q(t_n)} \dot{x}^2(t_n) = \lambda$, amiből adódik, hogy $\dot{x}^2(t_n) > 0$, ha n elég nagy, vagyis $x(t)$ nem lehet jeltartó.

b) Az állitás azonnal adódik abból, hogy ha $\{t_n\}$ az $\dot{x}(t)$ zéróhelyeinek egy sorozata $(\lim_{n\to\infty} t_n = \infty)$, akkor $\lim_{n\to\infty} F(x(t_n)) = \lambda$, továbbá ha t^1 és t^2 az $\dot{x}(t)$ olyan szomszédos zéróhelyei, hogy $[t^1, t^2]$-n $x(t)$ jeltartó, akkor $F(x(t^1)) \leq F(x(t)) \leq F(x(t^2))$ vagy $F(x(t^1)) \geq F(x(t)) \geq F(x(t^2))$ ha $t \in [t^1, t^2]$.

c) Ha $\dot{x}(t)$ -nek van zéróhelye bármely $[t_2, \infty)$ -en $(t_2 \geq t_1)$, akkor az állitás b)-ből következik. Ha nincs, akkor $x(t)$ monoton az elég nagy t értékekre, ezért létezik a $\lim_{t\to\infty} F(x(t)) = \mu$ határérték. Ha $\mu < \lambda$, akkor létezik olyan $\sigma > 0$, hogy $|\dot{x}(t)| > \sigma \left(\frac{g}{p}\right)^{1/2}(t)$ ha t elég nagy. De integrálás után ellentmondásba kerülünk $x(t)$ korlátosságával. A lemmát teljesen bebizonyitottuk.

Vizsgálatainkban ki fogjuk használni a megoldások oszcillációs viselkedésének szabályosságát. Ezért most a 0 -hoz nem tartó oszcilláló megoldások zéró- illetve szélsőérték-helyeinek elhelyezkedésére vonatkozóan bizonyitunk be néhány állitást.

2.5. LEMMA. *Tegyük fel, hogy az* (E') *egyenlet rendelkezik az* (I) - (VI) *tulajdonságokkal. Legyen* $x(t)$ *az* (E') *egyenlet olyan oszcilláló megoldása, melyre* $\lim_{t\to\infty} E(t) = \lambda > 0$. *Legyen* $0 \le \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \lambda$. *Ekkor létezik* $\delta_2 > \delta_1 > 0$, *hogy ha* $t_2 > t_1$, $F(x(t_1)) = \varepsilon_1$, $F(x(t_2)) = \varepsilon_2$, $|\dot{x}(t)| > 0$ $[t_1, t_2]$*-n, akkor*

$$\delta_2 > \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} > \delta_1 \quad .$$

Az állitásból azonnal látszik, hogy ha $\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} < \infty$, akkor nincs 0-hoz nem tartó oszcilláló megoldás, mert csak véges sok lemmabeli tulajdonságu $[t_1, t_2]$ intervallum létezik. Ha pedig $\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} = \infty$, akkor a zéróhelyek távolságára kapunk alsó becslést.

Speciálisan adódik, hogy az ilyen megoldások zérőhelyei véges $\underline{T}$ pontban nem torlódhatnak, ugyanis akkor

$$\infty > \int_{t_0}^{T} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \delta_1 \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

lenne, ami ellentmond (I) -nek.

B i z o n y i t á s. Nyilván

$$\lambda - \varepsilon_2 < \frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) = E(t) - F(x(t)) \leq K \quad (t_1 \leq t \leq t_2),$$

ahol $K = \sup_{[t_0,\infty)} E(t)$. Feltehetjük, hogy $\dot{x}(t)>0$ $[t_1,t_2]$-n. Integrálással a

$$\sqrt{\lambda - \varepsilon_2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \leq x(t_2) - x(t_1) \leq \sqrt{K} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Most már δ_1 és δ_2 létezése azonnal adódik $F(x)$ folytonosságából és $x(t)$ korlátosságából.

A szélsőérték-helyek távolságára felső becslés is adható. Az összefüggések bonyolultsága miatt a becs-

lést csak két speciális esetben végezzük el.

2.6. LEMMA. Tegyük fel, hogy (E') rendelkezik az (I) - (IV), (VI) tulajdonságokkal, $b(t) \equiv 1$, $0 < q_1 \leq q(t) \leq q_2$, $0 < p_1 \leq p(t) \leq p_2$ $[t_0, \infty)$-en és $\int_{t_0}^{\infty} r_i < \infty$ $(i = 1,2)$. Legyen $x(t)$ az (E') olyan oszcilláló megoldása, melyre $\lim_{t \to \infty} E(t) = \lambda > 0$. Ekkor léteznek olyan δ, Δ pozitiv számok, hogy ha t_1, t_2 az $x(t)$ szomszédos zéróhelyei, akkor

$$\delta < |t_2 - t_1| < \Delta .$$

B i z o n y i t á s. Tegyük fel először, hogy $\lim_{t \to \infty} r_1(t) = 0$. Legyen T_0 olyan, hogy ha $t > T_0$, akkor $|E(t) - \lambda| < \frac{\lambda}{3}$. Legyenek t_1, t_2 az $\dot{x}(t)$ T_0-nál nagyobb szomszédos zéróhelyei. A 2.3 Lemma miatt $\dot{x}(t)$ jeltartó, feltehetjük, hogy pozitiv, ezen a szakaszon. A $\tau_1 < \tau_2$ számokat válasszuk meg ugy (t_1, t_2)-ben, hogy $F(x(\tau_1)) = F(x(\tau_2)) = \frac{\lambda}{3}$ teljesüljön. A 2.5 Lemma miatt léteznek olyan $\delta_1, \delta_2 > 0$ számok, hogy $\delta_2 > \tau_2 - \tau_1 > \delta_1 > 0$. Most becsüljük felülről $[\tau_2, t_2]$ hosszát. $[\tau_2, t_2]$-n $\dot{x}(t) \geq 0$, $k < x(t) < K$, $k < f(x(t)) < K$ valamely csak λ-tól függő k, K számokkal. Ezért

$$(p(t)\dot{x}(t))^{\cdot} \leq e(t,x(t),\dot{x}(t)) - q(t)k \leq$$

$$-q_1 k + r_1(t) + (L^2 + 1)r_2(t) ,$$

ahol $L = \sup_{[t_0,\infty)} |\dot{x}(t)|$. Innen $[\tau_2,t_2]$-n való integrálással kapjuk, hogy

$$q_1 k(t_2 - \tau_2) = p_2 L + \int_{\tau_2}^{t_2} r_1 + (L^2 + 1) \int_{\tau_2}^{t_2} r_2 \quad .$$

Az $r_1$és r_2 függvények $[t_0,\infty)$-en való integrálhatósága miatt $(t_2 - \tau_2)$ egy csak $x(t)$ -től függő korlát alatt marad. Ha ugyanezt belátjuk $(\tau_1 - t_1)$-re is, akkor kész a bizonyitás, ugyanis az $x(t)$ szomszédos zéróhelyei távolságának korlátossága innen már következik.

$[t_1,\tau_1]$-en $0 < k_1 < -x(t) < K_1$, $k_1 < -f(x(t)) < K_1$ valamely t_1-től független k_1,K_1 pozitiv számokkal. Legyen $R = \sup_{[t_0,\infty)} \Psi(x(t),\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2}(t)\dot{x}(t))$. Ekkor

$$(p(t)\dot{x}(t))^{\cdot} = -g(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{x}(t) - q(t)f(x(t)) +$$

$$e(t,x(t),\dot{x}(t)) \quad .$$

Integráljunk $[t_1, t]$-n $(t < \tau_1)$:

$$p(t)\dot{x}(t) = -\exp\left\{-\int_{t_1}^{t} \frac{g}{p}\right\} \int_{t_1}^{t} q(\tau) f(x(\tau)) \exp\left\{\int_{t_1}^{\tau} \frac{g}{p}\right\} d\tau +$$

$$\exp\left\{-\int_{t_1}^{t} \frac{g}{p}\right\} \int_{t_1}^{t} e(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \exp\left\{\int_{t_1}^{\tau} \frac{g}{p}\right\} d\tau \ .$$

Innen rutin számolással:

$$\dot{x}(t) \geq \frac{k_1 q_1}{p_2} \exp\left\{-\int_{t_1}^{t} \frac{R}{p_1}\right\} \int_{t_1}^{t} \exp\left\{\int_{t_1}^{\tau} \frac{R}{p_1}\right\} d\tau -$$

$$\frac{1}{p_2} \int_{t_1}^{t} \left(r_1(\tau) + (L^2 + 1) r_2(\tau)\right) d\tau \geq \frac{p_1 q_1 k_1}{p_2 R} \left(1 - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{-\frac{R}{p_1}(t - t_1)\right\}\right) - \frac{1}{p_2} \int_{t_1}^{t} \left(r_1(\tau) + (L^2 + 1) r_2(\tau)\right) d\tau \ .$$

Ha t_1 eléggé nagy, a második integrál tetszőlegesen adott pozitiv ε-nál kisebbé válik. Legyen $\varepsilon < \frac{p_1 q_1 k_1}{p_2 R}$.

$[t_1, \tau_1]$-en integráljuk a fenti egyenlőtlenséget:

$$K_1 > x(\tau_1) - x(t_1) \geq \left(\frac{p_1 q_1 k_1}{p_2 R} - \varepsilon\right)(\tau_1 - t_1) - \frac{p_1^2 q_1 k_1}{p_2 R}$$

adódik, ahonnan már látható, hogy $(\tau_1 - t_1)$ t_1-től és τ_1-től független korlát alatt marad.

Ha a $\lim_{t \to -\infty} r_1(t) = 0$ feltételt elhagyjuk, akkor legyenek $\sigma_0 < \sigma_1$ az $x(t)$ szomszédos zéróhelyei. t_1 legyen az $\dot{x}(t)$ σ_0 utáni, t_2 pedig a σ_1 utáni első zéróhelye. Most ugyanis nem tudjuk, hogy $x(t)$ szélsőérték-helyei közt jelet vált. Ha σ_1 elég nagy, (t_1, t_2)-ben létezik pontosan egy τ_1 és τ_2 az $F(x(\tau_1)) = F(x(\tau_2)) = \frac{\lambda}{3}$ tulajdonsággal (2.4 Lemma b) része). Nyilván $[\tau_1, t_2]$-n $\dot{x}(t)$ jeltartó, ezért a $[\tau_1, \tau_2]$-re és $[\tau_2, t_2]$-re vonatkozó becslések elvégezhetők. A $[t_1, \tau_1]$-en alkalmazott eljárás akkor is végrehajtható, ha ott $\dot{x}(t)$ jelet vált.

A lemmát bebizonyitottuk.

2.7. LEMMA. Tegyük fel, hogy az (E2) egyenletre teljesülnek az (I), (II), (VI) feltételek. Legyen $x(t)$ az (E2) olyan oszcilláló megoldása, melyre

$\lim_{t\to\infty} E(t) = \lambda > 0$. Ekkor léteznek olyan $\vartheta_1, \Theta_1, \vartheta_2, \Theta_2, \vartheta_3, \Theta_3$, pozitiv számok, hogy $\dot{x}(t)$ bármely két szomszédos t_1, t_2 zéróhelyére és a τ_1, τ_2 helyekre $\left(t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2,\ F(x(\tau_1)) = F(x(\tau_2)) = \frac{\lambda}{3}\right)$ teljesülnek az alábbiak:

$$\vartheta_1 < \int_{t_1}^{\tau_1} \frac{1}{p(t)} \int_{t_1}^{t} q(\tau)\, d\tau\, dt < \Theta_1 ,$$

$$\vartheta_2 < \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} < \Theta_2 ,$$

$$\vartheta_3 < \int_{\tau_2}^{t_2} \frac{1}{p(t)} \int_{t}^{t_2} q(\tau)\, d\tau\, dt < \Theta_3 .$$

A bizonyitás a 2.6 Lemma bizonyitásának ismeretében könnyen elvégezhető.

A fenti állitás a lineáris

$$\ddot{x} + q(t)x = 0$$

egyenletre ismert (Coppel [7] 50. oldal, Atkinson [2])

$$\lim_{n\to\infty}\left(\pi - \int_{t_n}^{t_{n+1}} q^{1/2}\right) = 0$$

összefüggés (E2)-re vonatkozó általánositásának tekinthető ($\{t_n\}$ az $x(t)$ megoldás szélsőérték-helyeinek a sorozata), amely a $\dot{q}(t) = o\left(q^{3/2}(t)\right)$ feltétel mellett teljesül $(t \to \infty)$.

2.3. A megoldások 0-hoz tartásának szükséges feltételei

A bevezetőben vázlatosan szóltunk azokról a feltételekről, melyek szükségesek minden megoldás 0-hoz tartásához. Ezt a kérdéskört részletesen megvizsgáljuk az (E) illetve az (E') egyenletek esetén.

Ha az

$$(E)\quad (p(t)\dot{x})^{\cdot} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + q(t)f(x) = 0$$

egyenletben $g(t,x,\dot{x})$ "kicsi" és $p(t), q(t)$ "megköze-

litően konstans", akkor az egyenlet a csillapitatlan rezgést leiró

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

egyenletre emlékeztet. Azt várjuk ekkor, hogy a megoldások csillapitatlanul oszcillálnak $[t_0, \infty)$-en. Ezt a sejtésünket igazolja az alábbi tétel.

2.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy (I) - (III), (VI) teljesülnek. Ha $\int_{t_0}^{\infty} \frac{b}{p} < \infty$, $\int_{t_0}^{\infty} \frac{|(pq)^{\cdot}|}{pq} < \infty$, akkor (E) minden megoldására $\lim_{t\to\infty} E(t) > 0$, és ha $\int_{t_0}^{\infty} q = \infty$, akkor a megoldások oszcillálnak is.

B i z o n y i t á s. Legyen $x(t)$ az (E) megoldása. A (2.1) képlet alapján a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\dot{E}(t) \geq -\left(K \frac{b(t)}{p(t)} + \frac{|(pq)^{\cdot}|}{pq}(t)\right) E(t)$$

ahol $K = \sup_{[t_0,\infty)} \Psi\left(x(t), \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}(t)\, \dot{x}(t)\right)$.

Ezt integrálva adódik, hogy $\lim_{t\to\infty} E(t) > 0$.

Most bizonyitsuk be a második állitást! Az egyenlet kétszeri integrálása után a

$$(2.2)\quad x(t) = x(t_0) + p(t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{x(t_0)}{p(\tau)} \exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau} \frac{g}{p}\right\} d\tau -$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{p(\tau)} \exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau} \frac{g}{p}\right\} \int_{t_0}^{\tau} f(x(s))\, q(s) \exp\left\{\int_{t_0}^{s} \frac{g}{p}\right\} ds\, d\tau$$

egyenlőséghez jutunk. Tegyük fel, hogy $x(t)$ jeltartó, például pozitiv $[t_0,\infty)$-en. Mivel $\lim_{t\to\infty} E(t) > 0$, van olyan pozitiv δ szám, hogy $f(x(t)) > \delta$ $[t_0,\infty)$-en. $x(t)$ felülről becsülhető:

$$x(t) < x(t_0) + L\int_{t_0}^{t} \frac{1}{p(\tau)}\, d\tau - \delta\int_{t_0}^{t} \frac{1}{p(\tau)} \int_{t_0}^{\tau} q(s)\, ds\, d\tau .$$

A $\int_{t_0}^{\infty} \frac{|(pq)'|}{pq}$ tulajdonság miatt léteznek olyan k_1, k_2 pozitiv számok, hogy ha $t > t_0$ akkor

$$k_1 < p(t)\, q(t) < k_2 .$$

$x(t)$ -t igy tovább becsülhetjük:

$$x(t) < x(t_0) + \frac{L}{k_1}\int_{t_0}^{t} q - \frac{1}{k_2}\left(\int_{t_0}^{t} q\right)^2 .$$

$\int_{t_0}^{\infty} q = \infty$ miatt ha t elég nagy akkor a jobboldal negativvá válik, ami ellentmond annak, hogy $x(t)$ jeltartó. Következésképpen (E) minden megoldása oszcillál $[t_0,\infty)$-en.

Megjegyezzük, hogy a $\lim_{t\to\infty} E(t) > 0$ reláció ugyanigy bizonyitható az (E') egyenletre is, ha teljesülnek a (IV) és (V) feltételek.

Ha a $g(t,x,\dot{x})$ vagy a $p(t)q(t)$ függvény tul gyorsan nő, az ellenkező eset valósul meg. A megoldások "beragadnak", vagyis nem oszcillálnak és létezik a $\lim_{t\to\infty}|x(t)| > 0$ határérték. Ezt az esetet irja le a

2.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy (I) - (III), (VI) teljesülnek, és $\varphi(x,y) \equiv 1$. Ha

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{p(t)} \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \frac{a}{p}\right\} \int_{t_0}^{t} q(\tau) \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} \frac{a}{p}\right\} d\tau\, dt < \infty,$$

<u>akkor az</u> (E) <u>egyenletnek van olyan nem-oszcilláló megoldása, melyre</u> $\lim_{t\to\infty} |x(t)| > 0$.

<u>B i z o n y i t á s.</u> Legyen $x(t)$ olyan megoldás, amelyre a t_1 pillanatban $x(t_1) = 1$, $\dot{x}(t_1) = 0$ teljesül. A (2.2) képlet szerint ha $t > t_1$, akkor

$$x(t) = 1 - \int_{t_1}^{t} \frac{1}{p(\tau)} \exp\left\{-\int_{t_1}^{\tau} \frac{g}{p}\right\} \int_{t_1}^{\tau} f(x(s))\, q(s) \times$$

$$\times \exp\left\{\int_{t_1}^{s} \frac{g}{p}\right\} ds\, d\tau \quad .$$

Az $|f(x(t))|$ függvény kisebb valamely K számnál, amely nem függ t_1-től, csupán az $x(t_1)$, $\dot{x}(t_1)$ értékektől (lásd a 2.1 Lemma bizonyitásában $E(t)$ felső becslését) . Ezért

$$x(t) > 1 - K\int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{p(\tau)} \exp\left\{-\int_{t_1}^{\tau} \frac{a}{p}\right\} \int_{t_1}^{\tau} q(s) \exp\left\{\int_{t_1}^{s} \frac{a}{p}\right\} ds d\tau .$$

Ha most t_1 -et ugy választjuk, hogy a jobboldalon levő integrál $\frac{1}{2K}$ -nál kisebb legyen, akkor $x(t) > \frac{1}{2}$ adódik, ami állitásunkat igazolja.

A bizonyitás egyszerüen átvihető az (E') egyenletre, ha az $e(t,x,\dot{x})$ (IV) becslésében szereplő r_1, r_2 függvényekre az

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(r_1 + r_2\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\ell}{2}}\right) < \infty$$

feltétel teljesül.

A tétel elég bonyolultnak tünő feltétele teljesül például akkor, ha $\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} < \infty$, vagy a $0 < m \leq \frac{q(t)}{p(t)} \leq M \quad (t > t_0)$ esetben, ha $a(t)$ monoton nem-csökkenő és $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a} < \infty$ [24] .

A fenti két tétel alapján ésszerü tehát feltennünk vizsgálataink során, hogy (E) és (E') rendelkezzenek az alábbi tulajdonságokkal:

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(2\frac{a}{p}+\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}\right)=\infty \ ;$$

$$(M)\qquad \int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{p(t)}\exp\left\{-R^{*}\int_{t_0}^{t}\frac{b}{p}\right\}\int_{t_0}^{t}q(\tau)\exp\left\{R^{*}\int_{t_0}^{\tau}\frac{b}{p}\right\}d\tau\,dt=\infty ,$$

ahol $0<R^{*}<\sup_{x,y\in R}\Psi(x,y)$.

Mint ahogyan a bevezetőben érzékeltettük, ezek a feltételek még nem garantálják minden megoldásra $\lim_{t\to\infty}E(t)=0$ teljesülését. A következő két részben azt vizsgáljuk meg, mit tudunk mondani a megoldásokról ezek ismeretében.

2.4. Az $\int_{t_0}^{\infty}\left(2\frac{a}{p}+\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}\right)=\infty$ feltétel nem elegendő

Az előző pontban megmutattuk, hogy az

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(2\frac{a}{p}+\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}\right)=\infty$$

teljesülése szükséges ahhoz, hogy (E) minden megoldása 0-hoz tartson ha $t \to \infty$. Most egy uj bizonyitást adunk az

$$(EL)\quad (p(t)\dot{x})^{\cdot} + a(t)\dot{x} + q(t)x = 0$$

egyenlet esetén Hartman ismert tételére [12], amely 0-hoz tartó megoldás létezését biztositja.

2.3. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek az (I), (VI) feltételek. Ha

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(2\frac{a}{p} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq} \right) = \infty,$$

akkor létezik az (EL) egyenletnek olyan megoldása, melyre $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$.

B i z o n y i t á s. Transzformáljuk az (EL) egyenletet az

$$(EL^{*})\qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(t)\, y \\ \dot{y} &= -\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(t)x - \left(\frac{a(t)}{p(t)} + \frac{1}{2}\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t)\right)y \end{aligned}$$

rendszerré. Az $E(t)$ függvény most

$$E(t) = y^2(t) + x^2(t)$$

alaku lesz.

Legyen $H_0 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, S_0 a határa, H_t pedig legyen H_0-nak az (EL^*) megoldásai mentén vett képe a t pillanatban. Tekintsük a $\varphi: S_0 \to R_+$ függvényt, amely az (x_0, y_0) kezdeti értékekhez a $\lim_{t\to\infty} E(t)$ számot rendeli. Belátjuk, hogy φ folytonos S_0-on. Ehhez elegendő bebizonyitani, hogy minden pozitiv ε-hoz van olyan pozitiv δ, hogy ha $|x_0' - x_0''| < \delta$ és $|y_0' - y_0''| < \delta$, akkor minden $t > t_0$ esetén $|x(t;t_0, x_0', y_0') - x(t; t_0, x_0'', y_0'')| < \varepsilon$ és $|y(t; t_0, x_0', y_0') - y(t; t_0, x_0'', y_0'')| < \varepsilon$, vagyis hogy (EL^*) minden megoldása stabilis. Ez pedig (EL^*) linearitása és a (VI) feltétel miatt teljesül, ugyanis (EL^*) triviális megoldása stabilis, ekkor pedig minden megoldás stabilis ([9], II, fejezet, 6§, 1.Tétel).

Ha S_0 minden pontjára $\varphi(x_0, y_0) > 0$ (vagyis minden megoldásra $\lim_{t\to\infty} E(t) > 0$) teljesül, akkor φ folytonossága miatt létezik egy $\sigma > 0$ szám, hogy $\varphi(x_0, y_0) > \sigma$ minden pontban. Ez azt jelenti,

hogy H_t minden $\underline{t}$ esetén tartalmazza az $\{x^2 + y^2 \leq 6\}$ halmazt.

Ugyanakkor Liuville tétele szerint ([9], II.fejezet 3.§)

$$\mu(t) := \int_{H_t} dxdy = \int_{H_0} \exp\left\{ - \int_{t_0}^{t} \frac{a}{p} + \frac{1}{2}\frac{(pq)^{\cdot}}{pq} \right\} dx_0 dy_0 =$$

$$= \prod \exp\left\{ - \int_{t_0}^{t} \left(\frac{a}{p} + \frac{1}{2}\frac{(pq)^{\cdot}}{pq} \right) \right\} .$$

ahol $\mu(t)$ a H_t területe. A tétel feltétele szerint $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = 0$, amiből következik, hogy $\bigcap_{t>t_0} H_t$ nem tartalmazhat pozitiv sugaru gömböt. Következésképpen létezni kell olyan (x_0, y_0) pontnak S_0 -on, hogy a belőle induló $(x(t), y(t))$ megoldásra $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$ teljesül. A tételt bebizonyitottuk.

A fenti bizonyitás változtatás nélkül végigvihető általános lineáris rendszerek esetén is, csupán $E(t)$ helyett kell a megfelelő Ljapunov függvényt használni.

Most egy olyan példát ismertetünk, amely azt igazolja, hogy a fenti tételben többet nem állithatunk.

Az

(E3L) $\ddot{x} + g(t)\dot{x} + x = 0$

egyenletben $g(t)$ -t ugy definiáljuk, hogy $\int_{t_0}^{\infty} g = \infty$ teljesül, de lesz 0 -hoz nem tartó megoldása.

Legyen

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \in [0,t_1] \text{ vagy } t_n + \frac{1}{n+1} \leq t \leq t_{n+1} \\ 1 & \text{ha } t_n < t < t_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

ahol a $\{t_n\}$ sorozatot az alábbiak szerint határozzuk meg.

Tekintsük az

$$\ddot{x} + x = 0$$

egyenlet $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételekhez tartozó $x_1(t)$ megoldását. Legyen t_1 az $x_1(t)$ 0 utáni első szélsőértékhelye. A $[t_1, t_1 + \frac{1}{2}]$ intervallumon folytassuk $x_1(t)$ -t differenciálható módon az

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

egyenlet megoldásával, majd a $[t_1 + \frac{1}{2}, t_2]$ -n ujra az

$$\ddot{x} + x = 0$$

megoldásával, ahol t_2 a $t_1 + \frac{1}{2}$ utáni első szélsőértékhely, és igy tovább a kétféle folytatás váltakozzon, és t_n legyen a $t_{n-1} + \frac{1}{n}$ utáni első szélsőértékhely.

Nyilván az igy nyert függvény megoldása lesz az (E3L) egyenletnek.

Most bebizonyitjuk, hogy a megkonstruált megoldásra

$\lim_{t\to\infty} E(t) > 0$.

Végezzük el az (E3L) egyenletben az

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$$
$$\dot{x}(t) = -r(t)\sin\varphi(t)$$

transzformációt. Az alábbi rendszert kapjuk:

$$\dot{\varphi} = 1 - \tfrac{1}{2}g(t)\sin 2\varphi$$
$$\dot{r} = -g(t)\sin^2\varphi\, r \ .$$

ahol $r^2(t) = E(t)$ és $r(\infty) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} -\int_{t_n}^{t_n+\frac{1}{n+1}} \sin^2\varphi\right\}$.

A $\left[t_n, t_n+\frac{1}{n+1}\right]$ intervallumon kapjuk, hogy

$$\sin^2\varphi(t) < (\varphi(t) - \varphi(t_n))^2 = \left(\int_{t_n}^{t}\left(1-\tfrac{1}{2}g(\tau)\sin 2\varphi(\tau)\right)d\tau\right)^2 <$$

$$< \tfrac{9}{4}(t - t_n)^2$$

Innen

$$r(\infty) > \exp\left\{-\tfrac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\right\} > 0.$$

Ugyanakkor

$$\int_0^\infty g = \sum_{n=2} \frac{1}{n} = \infty .$$

Megjegyezzük, hogy a $g(t)$ függvény egy $[0,\infty)$ -en integrálható függvénnyel kisimitható, ez azonban az egyenlet fent bizonyitott tulajdonságát nem befolyásolja (lásd Bellmann [4] 6. fejezet).

2.5. Az (E') egyenlet nem-oszcilláló megoldásainak 0 -hoz tartása

A 2.3 pontban feltételét adtuk annak, hogy az (E') egyenletnek legyen 0 -hoz nem tartó nem-oszcilláló megoldása. Meg fogjuk mutatni, hogy ha ennek pontosan az ellentettje, nevezetesen az (M) feltétel teljesül, akkor a nem-oszcilláló megoldások , amennyiben léteznek, mind 0 -hoz tartanak, ha $t \to \infty$. Az állitást az egyszerüség kedvéért csak az (E) egyenletre fogalmazzuk meg. A bizonyitás az (E') egyenletre egyszerüen átvihető, ha az $e(t,x,y)$ függvény (IV)

becslésében szereplő r_1, r_2 -re $\int_{t_0}^{\infty} r_1 < \infty$ és

$\int_{t_0}^{\infty} r_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\ell}{2}} < \infty$ teljesül.

2.4. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek az

(I) - (III), (VI) feltételek és $\int_{t_0}^{\infty} q = \infty$. Ha minden $0 < R^* < \sup_{x,y \in R} \Psi(x,y)$ számra

$$(M) \quad \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{p(t)} \exp\left\{-R^* \int_{t_0}^{t} \frac{b}{p}\right\} \int_{t_0}^{t} q(\tau) \exp\left\{R^* \int_{t_0}^{\tau} \frac{b}{p}\right\} d\tau dt = \infty ,$$

akkor az (E) egyenlet minden nem-oszcilláló megoldására $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $x(t)$ az (E) egyenletnek nem-oszcilláló megoldása. Tegyük fel, hogy $\lim_{t \to \infty} |x(t)| > 0$. Feltehető, hogy $x(t)$ pozitiv. Ekkor $\lim_{t \to \infty} f(x(t)) > k > 0$.

A (2.2) egyenlőség alapján

$$0<x(t)\le x(t_0)+K\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(\tau)}\exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau}\frac{g}{p}\right\}d\tau -$$

$$-k\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(\tau)}\exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau}\frac{g}{p}\right\}\int_{t_0}^{\tau}q(s)\exp\left\{\int_{t_0}^{s}\frac{g}{p}\right\}dsd\tau .$$

ahol $g = g(t,x(t),\dot{x}(t))$. Az (M) feltétel miatt

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(\tau)}\exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau}\frac{g}{p}\right\}\int_{t_0}^{\tau}q(s)\exp\left\{\int_{t_0}^{s}\frac{g}{p}\right\}dsd\tau=\infty .$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala $-\infty$ -be tart, ha $t\to\infty$, ami ellentmond $x(t)>0$ -nak. Az ellentmondást a $\lim_{t\to\infty}x(t)\neq 0$ feltételezés okozta. A tételt bebizonyitottuk.

Az (E2) egyenletre a 2.2 és 2.3 tételek alapján mondhatjuk [14] , hogy a nem-oszcilláló megoldások az (I), (II) és (VI) feltételek teljesülése mellett akkor és csak akkor tartanak 0 -hoz, ha

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{p(t)}\int_{t_0}^{t}q(\tau)\,d\tau dt=\infty .$$

Az $\int_{t_0}^{\infty} q = \infty$ reláció most a feltételből adódik.

Most tegyük fel, hogy $\frac{b(t)}{p(t)q(t)}$ nem-csökkenő $[t_0, \infty)$ -en. Ekkor

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{p(t)} \exp\left\{-R^* \int_{t_0}^{\tau} \frac{b}{p}\right\} \int_{t_0}^{\tau} q(s) \exp\left\{R^* \int_{t_0}^{s} \frac{b}{p}\right\} ds d\tau \geq$$

$$\geq \frac{1}{R^*} \int_{t_0}^{t} \frac{q(\tau)}{b(\tau)} \left(1 - \exp\left\{-R^* \int_{t_0}^{\tau} \frac{b}{p}\right\}\right) d\tau,$$

ahol a jobboldal ∞ -be tart $(t \to \infty)$ ha

$\int_{t_0}^{\infty} \frac{q}{b} = \infty$. Speciálisan az (E3) egyenletre adódik R.J Ballieu és K. Peiffer eredménye [3] , mely szerint a nem-oszcilláló megoldások 0 -hoz tartanak, ha a $g(t,x,y) \leq b(t)\Psi(x,y)$ becslésben $b(t)$ nem-csökkenő és $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{b} = \infty$.

3. ATTRAKTIVITÁSI TÉTELEK

3.1. Bevezetés

A dolgozat fő fejezetében olyan tételeket bizonyitunk, melyek biztositják, hogy az (E) illetve az (E') egyenletek minden megoldására $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$ teljesüljön.

Mindenekelőtt emlékeztetünk rá, hogy az (I) - (VI) feltételek teljesüléséből következik, hogy az (E') megoldásai léteznek valamely $[t_0,\infty)$ intervallumon és létezik a

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) + F(x(t)) \right)$$

véges határérték (2.1 Lemma). Az (M) feltétel biztositja a nem-oszcilláló megoldások 0-hoz tartását (2.3 Tétel). A bizonyitásokban ki fogjuk használni, hogy ha $\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} = \infty$, akkor a 0-hoz nem tartó oszcilláló megoldások zéróhelyei nem torlódhatnak véges értékhez (2.5 Lemma). Belátható, hogy a $\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} = \infty$ reláció (M)-ből

következik.

Attraktivitási tételeinket három külön részben fogalmazzuk meg. Először az (E') olyan eseteit vizsgáljuk, melyekben vagy a $-g(t,x,\dot{x})\dot{x}$ csillapitás befolyásolja döntően a megoldások viselkedését, vagy a $-g(t,x,\dot{x})\dot{x}$ és a $p(t),q(t)$ hatása egyaránt lényeges (3.2 pont). Ugyanezekben az esetekben fogalmazunk meg globális aszimptotikus stabilitási tételeket a homogén (E) egyenletre (3.3 pont), melyek a homogenitást kihasználva lényegesen gyengitik az inhomogén esetre megfogalmazott tételek feltételeit. A $-g(t,x,\dot{x})\dot{x}$ csillapitás $p(t),q(t)$ hatásához viszonyitott elhanyagolhatósága egy más irányu fejlesztást tesz lehetővé (3.4 pont). Eredményeinket összehasonlitjuk egymással.

3.2. Attraktivitási tételek az (E') egyenletre

Eredményeink megfogalmazásához szükségünk lesz az alábbi definiciókra.

3.1. DEFINICIÓ [14]. Az $\underline{a} : [t_0,\infty) \to R_+$ függvény integrálisan pozitiv, ha

$$\int_H a = \infty$$

minden olyan $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n^1, \tau_n^2]$ halmazon, ahol $\tau_n^1 < \tau_n^2 < \tau_{n+1}^1$, $\lim_{n\to\infty} \tau_n^1 = \infty$ és létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\tau_n^2 - \tau_n^1 > \delta$.

Belátható [14], hogy egy $a(t)$ függvény akkor és csak akkor integrálisan pozitiv, ha minden $\varepsilon > 0$ számra

$$\varliminf_{t\to\infty} \int_t^{t+\varepsilon} a > 0.$$

3.2. DEFINICIÓ. Az $\underline{a} : [t_0, \infty) \to R_+$ függvény gyengén integrálisan pozitiv, ha

$$\int_H a = \infty$$

minden olyan $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n^1, \tau_n^2]$ halmazon, ahol $\tau_n^1 < \tau_n^2 < \tau_{n+1}^1$, $\lim_{n\to\infty} \tau_n^1 = \infty$ és léteznek olyan δ, $\Delta > 0$ számok, hogy $\tau_n^2 - \tau_n^1 > \delta$ és $\tau_{n+1}^1 - \tau_n^1 < \Delta$.

Könnyü belátni, hogy a definició tartalma nem változik, ha $\tau^1_{n+1} - \tau^1_n < \Delta$ helyett a $\tau^1_{n+1} - \tau^2_n < \Delta$ tulajdonságot követeljük meg a $\underline{H}$ halmaztól.

Egy $a(t)$ függvény gyengén integrálisan pozitiv, ha létezik olyan $\alpha(t)$ pozitiv nem-növő függvény, melyre $\int_{t_0}^{\infty} \alpha = \infty$, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{\alpha(t)} \int_t^{t+\varepsilon} a > 0.$$

Valóban. Legyen $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau^1_n, \tau^2_n] = H$ egy a definicióban szereplő halmaz $(\delta, \Delta$ -val$)$. Ekkor

$$\int_H a = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau^1_n}^{\tau^2_n} a > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau^1_n}^{\tau^1_n + \delta} a > \sum_{n=1}^{\infty} \Theta \alpha(t^1_n) = \infty,$$

ahol $\Theta > 0$ a feltétel miatt létezik.

Például a $\sin^2 t$ integrálisan pozitiv, az $\frac{1}{t}\sin^2 t$ gyengén integrálisan pozitiv, de nem integrálisan pozitiv.

3.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek az (I) - (VI) feltételek és $\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} = \infty$. Ha a

$$\left[2k \frac{a}{(pq)^{1/2}} (Q^{-1}(\tau)) + \frac{(pq)'}{pq} (Q^{-1}(\tau)) \right]^{+}$$

függvény integrálisan pozitiv $\left(Q(t) = \int \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} , \right.$ $(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}$, $0 < k < \sup_{x,y \in R} \varphi(x,y) \Big)$, akkor az (E') egyenlet minden oszcilláló megoldására $\lim_{t \to \infty} E(t) = 0$.

B i z o n y i t á s. Tegyük fel, hogy $x(t)$ olyan oszcilláló megoldás, melyre $\lim_{t \to \infty} E(t) = \lambda > 0$.

A (2.1) összefüggés miatt

$$\dot{E}\, t \leq - \left[2 \varphi \left(x(t), \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} (t)\, \dot{x}(t) \right) \frac{a(t)}{p(t)} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t) \right]^{+} \times$$

$$\times \frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) + \left[2 \varphi \left(x(t), \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} (t)\, \dot{x}(t) \right) \frac{a(t)}{p(t)} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t) \right]^{-} K$$

$$+ \frac{2}{(pq)^{1/2}(t)} \left(r_1(t) + r_2(t) \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\ell}{2}} (t) \right) (K + 1) ,$$

ahol K az $E(t)$ egy felső korlátja. Az (V) és (VI)

feltételek miatt a jobboldali második és harmadik tag integrálja korlátos $[t_0, \infty)$-en.

Legyen $H = \left\{ t : F(x(t)) \leq \frac{\lambda}{3} \right\}$. A 2.5 Lemma miatt $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n^1, \tau_n^2]$, ahol $\tau_n^1 < \tau_n^2 < \tau_{n+1}^1$, $\lim_{n\to\infty} \tau_n^1 = \infty$ és $\int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} > \delta$ valamely pozitiv δ-val. Nyilván

$$\inf_H \frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) \geq \frac{\lambda}{3} \quad \text{és} \quad \inf_H \varphi\left(x(t), \left(\frac{p(t)}{q(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \dot{x}(t)\right) = k > 0.$$

A fentiek alapján egy megfelelő $L > 0$ szám mellet

$$E(t) < L - \frac{\lambda}{3} \int_{H \cap [t_0, t]} \left[2k \frac{a}{p} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq} \right]^{+} ,$$

ahol a jobboldal $-\infty$-be tart ha $t \to \infty$ a tétel feltétele szerint. Ez ellentmondannak, hogy $E(t)$ minden t esetén pozitiv. Az ellentmondást a $\lambda > 0$ feltételezés okozta. A tételt bebizonyitottuk.

A fenti tétel általánositja Hatvani L. [13] egy a $p(t) \equiv q(t) \equiv 1$, $e(t,x,\dot{x}) \equiv 0$ esetre vonatkozó eredményét.

A bizonyitásban nem használtuk ki (H halmaz), hogy az $x(t)$ zéróhelyeinek távolsága felülről is be-

csülhető. A 2.6 Lemma alkalmazásával a fentihez hasonlóan bizonyitható a

3.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek az (I) – (VI) feltételek, $b(t) \equiv 1$, $0 < q_1 \leq q(t) \leq q_2$, és $0 < p_1 \leq p(t) \leq p_2$ $[t_0, \infty)$ -en. Ha az $a(t)$ függvény gyengén integrálisan pozitiv, akkor az (E') egyenlet minden megoldására $\lim_{t\to\infty}(x(t), \dot{x}(t)) = (0,0)$, az $e(t,x,\dot{x}) \equiv 0$ esetben a triviális megoldás g.a.s..

Tételeink szerint az

$$(E3L') \qquad \ddot{x} + g(t)\dot{x} + x = e(t)$$

egyenlet minden megoldására $\lim_{t\to\infty}(x(t), \dot{x}(t)) = (0,0)$, ha $\int_{t_0}^{\infty} |e| < \infty$ és az alábbi feltételek egyike teljesül:

a) $$\varliminf_{t\to\infty} \int_t^{t+\varepsilon} g > 0 \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad \text{és} \quad 0 \leq g(t) \leq ct \ ;$$

b) $$\varliminf_{t\to\infty} t \int_t^{t+\varepsilon} g > 0 \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad \text{és} \quad 0 \leq g(t) \leq C \ .$$

Látható, hogy az inhomogén esetben megmaradt a nagy és kis csillapitás Smith-től [22] származó

megkülönböztetése (lásd 1. fejezet) .

A következő részben megmutatjuk, hogy az a) és b) -szerü esetek szétválasztására az (E3) homogén egyenletnél nincs szükség.

3.3. Az (E) egyenlet triviális megoldásának globális aszimptotikus stabilitása

A fejezet fő tétele a következő:

3.3. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek az (I) - - (III) és (VI) feltételek, $\varphi(x,y)>0$ $(x,y\in R)$. Ha létezik egy $\alpha : [t_0,\infty)\to R_+$ függvény amely kielégiti az alábbiakat:

(o) $$\int_{t_0}^{\infty}\alpha = \infty ;$$

(i) minden $U \subset R^2$ kompakt halmaz esetén a

$$\left(2\frac{b(t)}{p(t)}\psi(x,y) + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t)\right)\frac{p(t)}{q(t)}\alpha(t)$$

függvény felülről korlátos $U\times[t_0,\infty)$-en;

(ii) az $\alpha(t)\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}(t)$ függvény nem-növő $[t_0,\infty)$-en;

(iii) létezik egy $0<\sigma\leq 1$ szám, úgy hogy minden k,ν $\left(0<\nu<\sup_{R\setminus\{0\}} F(x)/xf(x),\right.$

$\left.k>\inf_{x,y\in R}\varphi(x,y)\right)$ számra

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left\{\left(\int_{t_0}^{t}\alpha\right)^{-1}\int_{t_0}^{t}\left[\left(k\frac{a(\tau)}{p(\tau)}+\frac{1}{2}\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(\tau)\right)\left(\int_{t_0}^{\tau}\alpha\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1+\nu)\alpha(\tau)\right]^{-}d\tau\right\}=\mu(k,\nu)<1-\sigma\,,$$

akkor az (E) egyenlet triviális megoldása g.a.s. x-ben.

A tételt először az önmagában is érdekes

$$\text{(E3)}\qquad \ddot{x}+g(t,x,\dot{x})\dot{x}+f(x)=0$$

egyenletre bizonyitjuk be.

3.4. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek a (II), (III) feltételek. Ha létezik egy $\alpha:[t_0,\infty)\to R_+$ nem-növő függvény, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

$$\text{(o)}\qquad \int_{t_0}^{\infty}\alpha=\infty\,;$$

(i) $\alpha(t)b(t)$ <u>korlátos</u> $[t_0,\infty)$ <u>-en;</u>

(ii) <u>létezik egy</u> σ $(0<\sigma\leq 1)$ <u>szám ugy, hogy minden</u> k,γ $(0<\gamma<\sup_{R\setminus\{0\}} F(x)/xf(x)$, $k>\inf_{x,y\in R}\varphi(x,y))$ <u>számra</u>

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left\{\left(\int_{t_0}^{t}\alpha\right)^{-1}\int_{t_0}^{t}\left[ka(\tau)\left(\int_{t_0}^{\tau}\alpha\right)-(1+\gamma)\alpha(\tau)\right]^{-}d\tau\right\}=$$

$$=\mu(k,\gamma)<1-\sigma\ ,$$

<u>akkor az</u> (E3) <u>egyenlet triviális megoldása g.a.s..</u>

<u>B i z o n y i t á s.</u> A 2.3 Tétel alapján elegendő azt bebizonyitanunk, hogy (E3) minden oszcilláló megoldására $\lim_{t\to\infty} E(t)=\lambda=0$.

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét. Legyen $x(t)$ olyan oszcilláló megoldás melyre $\lambda>0$. F.J. Scott [20] észrevette azt az egyszerü tényt, hogy $x(t)$ korlátossága miatt, adott pozitiv ε-hoz található olyan γ $(0<\gamma<\sup_{R\setminus\{0\}} F(x)/xf(x)$ szám, ugy, hogy

$$F(x(t))-\gamma x(t)f(x(t))<\varepsilon \quad (t>t_0)\ .$$

Emiatt

$$E(t) = \dot{x}^2(t) + (F(x(t)) = (1+\nu)\dot{x}^2(t) - \nu g(t,x(t),\dot{x}(t)) \times$$

$$\times x(t)\dot{x}(t) - \nu(x\dot{x})^{\cdot}(t) + F(x(t)) - \nu x(t) f(x(t)) <$$

$$(1+\nu)\dot{x}^2(t) - \nu g(t,x(t),\dot{x}(t)) x(t)\dot{x}(t) - \nu(x\dot{x})^{\cdot}(t) + \varepsilon .$$

A $W(t) := E(t) \int_{t_0}^{t} \alpha$ függvény deriváltjára igaz az alábbi becslés:

$$(3.1) \quad \dot{W}(t) \leq -2g(t,x(t),\dot{x}(t))\,\dot{x}^2(t) \int_{t_0}^{t} \alpha \; +$$

$$(1+\nu)\alpha(t)\dot{x}^2(t) - \nu\alpha(t)(x\dot{x})^{\cdot}(t) -$$

$$\nu g(t,x(t),\dot{x}(t))\alpha(t)x(t)\dot{x}(t) + \varepsilon\alpha(t) \quad .$$

Legyen $\{t_n\}$ az $x(t)$ zéróhelyeinek a sorozata ($t_n \nearrow \infty$ ha $n \to \infty$, $0 < E(t_1) - \lambda < \varepsilon$). (3.1) $[t_1, t_n]$-en való integrálásával kapjuk:

$$(3.2) \quad W(t_n) < W(t_1) + \varepsilon \int_{t_1}^{t_n} \alpha \; - \nu \int_{t_1}^{t_n} \alpha (x\dot{x})^{\cdot} \; +$$

$$\int_{t_1}^{t_n} \dot{x}^2(\tau) \left[g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right) - (1+\nu)\alpha(\tau) \right] d\tau -$$

$$\int_{t_1}^{t_n} \dot{x}(\tau) g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right) \left(\nu \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right)^{-1} \alpha(\tau) x(\tau) + \dot{x}(\tau) \right) d\tau =$$

$$= W(t_1) + \varepsilon\int_{t_1}^{t_n}\alpha - \nu\int_{t_1}^{t_n}\alpha(x\dot{x})^{\cdot} + I(t_1,t_n) + J(t_1,t_n).$$

t_1 megválasztásából adódóan

$$I(t_1,t_n) < (\lambda+\varepsilon)\int_{t_1}^{t_n}\left[k\,a(\tau)\left(\int_{t_0}^{\tau}\alpha\right) - (1+\nu)\alpha(\tau)\right]^{-} d\tau,$$

ahol $k = \inf_{t>t_0}\varphi(x(t),\dot{x}(t)) > 0$, $x(t)$ és $\dot{x}(t)$ korlátossága miatt. Parciális integrálással nyerjük

$$-\nu\int_{t_1}^{t_n}\alpha(x\dot{x})^{\cdot} = \nu\int_{t_1}^{t_n} x\dot{x}\,d\alpha < \nu K I V,$$

ahol $K = \sup_{[t_0,\infty)}|x(t)|$, $I = \sup_{[t_0,\infty)}|\dot{x}(t)|$, V pedig az α teljes változása $[t_0,\infty)$-en.

Ha megmutatjuk, hogy $[J(t_1,t_n)]^{+} = o\left(\int_{t_1}^{t_n}\alpha\right)$ $(n\longrightarrow\infty)$, akkor (3.2) -t $\int_{t_1}^{t_n}\alpha$ -val osztva, és az $n\longrightarrow\infty$ határátmenetet végrehajtva a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\lambda < \varepsilon + \mu(k,\nu)(\lambda+\varepsilon) < \varepsilon + (1-\sigma)(\lambda+\varepsilon) \quad .$$

Ha ε elegendően kicsi, akkor a baloldal nagyobb a jobboldalnál, ami ellentmondás. Ezt a $\lambda > 0$ feltevés okozta.

Be kell még bizonyitanunk, hogy $[J(t_1,t_n)]^+ = o\left(\int_{t_1}^{t_n}\alpha\right)$ $(n \to \infty)$. Legyen $\{\sigma_n\}$ az $\dot{x}(t)$ zéróhelyeinek a sorozata $(\sigma_n < t_n < \sigma_{n+1})$. A 2.2 Lemma szerint $x(t)\dot{x}(t) \leq 0$ $[\sigma_n, t_n]$-en és $x(t)\dot{x}(t) \geq 0$ $[t_n, \sigma_{n+1}]$-en. Ezért

$$J(t_1,t_n) < \sum_{k=1}^{n} J(\sigma_k, t_k) \quad .$$

Mivel $\alpha(t)$, $E(t)$ korlátosak és $\dot{x}(\sigma_k) = 0$, $\dot{x}^2(t_k) = \lambda$, $\int^{\infty}\alpha = \infty$, létezik egy $\{\tau_k\}$ sorozat $(\sigma_k < \tau_k < t_k)$ és egy δ szám $(0 < \delta < \lambda)$ ugy, hogy

$$-\dot{x}(t)\left(\gamma\left(\int_{t_0}^{t}\alpha\right)^{-1} x(t)\alpha(t) + \dot{x}(t)\right) < 0 \qquad t \in [\tau_k, t_k],$$

és $\min_{t\in[\sigma_k,\tau_k]} |f(x(t))| = \delta$.

Ezért $J(t_1,t_n) < \sum_{k=1}^{n} J(\sigma_k, \tau_k)$.

Most vizsgáljuk meg a $J(\sigma_k, \tau_k)$ $(k = 1,2 \dots)$ integrálok viselkedését! Feltehető, hogy $[\sigma_k, \tau_k]$-n $\dot{x}(t) \geq 0$, $x(t) < 0$. A forditott eset hasonlóan kezelhető.

Az (E3) egyenlet integrálásával $\dot{x}(t)$-re $[\sigma_k, \tau_k]$-n az alábbi egyenlőség adódik:

$$(3.3)\quad \dot{x}(t) = -\exp\left\{-\int_{\sigma_k}^{t} g(s,x(s),\dot{x}(s))\,ds\right\}\int_{\sigma_k}^{t} f(x(\tau)) \times$$

$$\times \exp\left\{\int_{\sigma_k}^{\tau} g(s,x(s),\dot{x}(s))\,ds\right\} d\tau \quad .$$

Definiáljuk az M,N számokat ugy, hogy $M > b(t)\alpha(t)$ és $N > \psi(x(t),\dot{x}(t))$ legyen $[t_1,\infty)$-en . Ekkor $t \in [\sigma_k, \tau_k]$ -ra

$$\dot{x}(t) > \delta \exp\left\{-\int_{\sigma_k}^{t} \frac{MN}{\alpha}\right\}\int_{\sigma_k}^{t} \exp\left\{\int_{\sigma_k}^{\tau} \frac{MN}{\alpha}\right\} d\tau =$$

$$= \frac{\delta}{MN}\alpha(t)\left(1 - \exp\left\{-\int_{\sigma_k}^{t} \frac{MN}{\alpha}\right\}\right).$$

Most majorálhatjuk $J(\sigma_k, \tau_k)$ -t:

$$(3.4)\quad J(\sigma_k, \tau_k) \leq \frac{\delta}{MN} \int_{\sigma_k}^{\tau_k} \dot{x}(\tau)\, g(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\, \alpha(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\gamma_{KMN}}{\delta} \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right)^{-1} - \left(1 - \exp\left\{ - \int_{\sigma_k}^{\tau} \frac{MN}{\alpha} \right\} \right) \right) d\tau \ .$$

τ_k megválasztása miatt a 2.5 Lemma biztositja olyan $\delta_1 > 0$ létezését melyre

$$1 - \exp\left\{ - \int_{\sigma_k}^{\tau_k} \frac{MN}{\alpha} \right\} > \delta_1 \qquad (k = 1, 2 \ldots)$$

teljesül. Ezért ha k elég nagy, akkor létezik olyan $\tau_k' \in (\sigma_k, \tau_k)$, mely kielégiti az alábbiakat:

$$\frac{\gamma_{KMN}}{\delta} \left(\int_{t_0}^{\tau_k'} \alpha \right)^{-1} = 1 - \exp\left\{ - \int_{\sigma_k}^{\tau_k'} \frac{MN}{\alpha} \right\}, \text{ és}$$

$$1 - \exp\left\{ - \int_{\sigma_k}^{\tau} \frac{MN}{\alpha} \right\} > \frac{\gamma_{KMN}}{\delta} \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right)^{-1} \qquad (\tau_k' < \tau < \tau_k) .$$

τ'_k definíciójából következik, hogy

$$(3.5)\qquad \int_{\sigma_k}^{\tau'_k} \frac{1}{\alpha} < R\left(\int_{t_0}^{\tau'_k} \alpha\right)^{-1} \quad \text{és igy} \quad \tau'_k - \sigma_k < R\,\alpha(\sigma_k)\left(\int_{t_0}^{\sigma_k} \alpha\right)^{-1}$$

egy megfelelően választott $\underline{R}$ számmal.

Majoráljuk $J(\sigma_k, \tau_k)$-t, ha csak $[\sigma_k, \tau'_k]$-n integrálunk:

$$J(\sigma_k, \tau_k) < \gamma_{KLN} \int_{\sigma_k}^{\tau'_k} b(\tau)\alpha(\tau)\,d\tau < \gamma_{KLMN}(\tau'_k - \sigma_k) .$$

(3.5) felhasználásával nyerjük

$$J(t_1, t_n) < \gamma_{KLMN} \sum_{k=1}^{n} (\tau'_k - \sigma_k) \le \gamma_{KLMNR} \sum_{k=1}^{n} \alpha(\sigma_k)\left(\int_{t_0}^{\sigma_k} \alpha\right)^{-1} ,$$

ahol a jobboldal $o\left(\int_{t_0}^{t_n} \alpha\right)$ $(n \to \infty)$. A tételt bebizonyitottuk.

A 3.3. Tétel b i z o n y i t á s a. Az (i) feltételből következik (M) teljesülése. Ennek bizonyitása analóg a 2.3 Tételt követő meggondolásokkal. (M)-ből pedig $\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} = \infty$ adódik. A $\tau = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}$ transzformáció végrehajtása után az egyenlet (E3) alakuvá válik. Teljesülnek a 3.4 Tétel feltételei és ezzel a bizonyitás kész.

Most tekintsük az (E3) egyenletet. Legyen $\alpha(t) = \min\left(a(t), 1/b(t)\right)$. A (II) és (III) feltételek mellett ha $a(t)$ nem-növő, $b(t)$ nem-csökkenő és $\int_{t_0}^{\infty} a = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{b} = \infty$, akkor a 3.4 Tétel feltételei teljesülnek. Nyilván $\alpha(t)$ nem-növő, $\int_{t_0}^{\infty}\alpha = \infty$ és $\alpha(t)b(t)$ korlátos. A (ii) feltétel következik az alábbiakból:

$$k\,a(\tau)\left(\int_{t_0}^{\tau}\alpha\right) - (1+\gamma)\alpha(\tau) \geq \alpha(\tau)\left(k\left(\int_{t_0}^{\tau}\alpha\right) - (1+\gamma)\right),$$

ami elég nagy τ-ra már pozitiv, ezért a feltételben levő határérték 0. Ezzel Smith tételeinek [22] közös általánositását kaptuk (lásd 1. fejezet).

Eredményeink lehetőségei még nem merültek ki. Megmutatjuk, hogy a korlátozó feltételek mellett $\left(e(t,x,y) \equiv 0\ ,\ \varphi(x,y) > 0 \text{ ha } x,y \in R\right)$ többet "tudnak" a 3.1 és 3.2 Tételeknél.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és definiáljuk az (E3L) egyenletben $g(t)$ -t a következőképpen:

$$(3.6)\quad g(t) := \begin{cases} 1 & t \in [2n-1+\varepsilon(n-1),\, n(2+\varepsilon)] \\ 0 & t \in \left[n(2+\varepsilon)+\frac{1}{n+3},\, n(2+\varepsilon)+1-\frac{1}{n+3}\right] \end{cases}$$

R_+ kimaradó részén g -t definiáljuk lineárisan, hogy folytonos legyen. Láthatóan $g(t)$ nem gyengén integrálisan pozitiv , azonban a 3.4 Tétel alkalmazható. Valóban. Legyen $\alpha(t) = \frac{1}{t}$. Az (i) feltétel triviálisan teljesül, a (ii) pedig az alábbiak miatt igaz:

$$\int_{t_0}^{t} \left[g(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{1}{s}\, ds \right) - \frac{2}{\tau} \right]^{-} d\tau < 2 \int_{H_t} \frac{1}{\tau}\, d\tau \ ,$$

ahol $H_t = \bigcup_{n(2+\varepsilon)<t} [n(2+\varepsilon),\, n(2+\varepsilon)+1]$,

továbbá

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} \, d\tau \right)^{-1} 2 \int_{H_t} \frac{1}{\tau} \, d\tau < \frac{2}{2+\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \, .$$

A fenti levezetést $\frac{1}{t}$ helyett $\frac{1}{b(t)}$ -vel megismételve adódik a

3.5. KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy teljesülnek a (II), (III) feltételek, $\varphi(x,y)>0$ $(x,y \in R)$, $b(t)$ nem-csökkenő és $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{b} = \infty$. Ha

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{1}{b} \right)^{-1} \int_{H_t} \frac{1}{b} < \frac{1}{1+\nu}$$

minden $0 < \nu < \sup_{R\setminus\{0\}} F(x)/xf(x)$ számra

$\left(H_t := \left\{\tau \in [t_0,t] : a(\tau) < 1/b(\tau)\right\}\right)$, akkor az (E3) egyenlet triviális megoldása g.a.s..

Hasonló alaku következmény a 3.3 Tételből is nyerhető.

A 3.3 tétel bizonyitása az általánosabb φ esetére $\left(\varphi(x,y) > 0 \text{ ha } y \neq 0\right)$ csak a $b(t) \equiv 1$ megkötés mellett vihető át (kis csillapitás esete) .

Még igy is érdemes az állitást megfogalmazni, hiszen mint láttuk, az alsó becslére vonatkozó feltétel kevesebbet követel, mint a gyengén integrális pozitivitás feltétele.

3.6. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek az (I) - - (III) feltételek, $0 < q_1 \leq q(t) \leq q_2$, $0 < p_1 \leq p(t) \leq p_2$. Ha létezik olyan nem-növő, pozitiv $\alpha(t)$ függvény, melyre $\int_{t_0}^{\infty} \alpha = \infty$ és kielégiti a 3.3 Tétel (iii) feltételét, akkor az (E) egyenlet triviális megoldása g.a.s..

B i z o n y i t á s. Csak az (E3) egyenletre bizonyitunk, az állitás (E) -re ugyanugy adódik, mint a 3.3 Tétel esetén.

A 3.4 tétel bizonyitását finomitjuk. Először megmutatjuk, hogy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $\Omega \subset [t_1, \infty)$ halmaz és $\varepsilon_1 > 0$ szám ugy, hogy

$$(3.7) \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\int_{\Omega \cap [t_1, t_n]} 2\lambda(1 + \nu)\alpha \right) \left(\int_{t_1}^{t_n} \alpha \right)^{-1} < \varepsilon$$

és $\varphi(x(t), \dot{x}(t)) > \varepsilon_1$ $[t_1, \infty)$ -n. Valóban. $b(t) \equiv 1$ miatt a $\{\sigma_{k+1} - \sigma_k\}$ sorozat korlátos (2.6 Lemma).

Ezért létezik a (3.7) tulajdonságu Ω halmaz, amely $\bigcup_{k=1}^{\infty} [\tau_k^1, \tau_k^2]$ alaku $(t_{k-1} < \tau_k^1 < \sigma_k < \tau_k^2 < t_k)$.

Sőt olyan választás is lehetséges, hogy valamely δ számmal $|\tau_k^i - \sigma_k| > \delta > 0$ és $|f(x(\tau_k^i))| > \delta$ $(i = 1,2 ;$ $k = 1,2 \ldots)$ teljesüljön. Ekkor (3.3)-ból következik olyan δ_1 létezése, melyre $|\dot{x}(\tau_k^i)| > \delta_1$ $(i = 1,2 ;$ $k = 1,2 \ldots)$. $\varphi(x,y)$ tulajdonságai alapján ε_1 létezése ezek után következik.

Most tekintsük az $I(t_1, t_n)$ integrált $W(t)$ becslésében:

$$I(t_1, t_n) < (\lambda+\varepsilon) \int_{t_1}^{t_n} \left[a(\tau)\, \varphi(x(\tau), \dot{x}(\tau)) \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right) - (1+\gamma)\alpha(\tau) \right]^{-} d\tau <$$

$$< (\lambda+\varepsilon)(1+\gamma) \int_{\Omega \cap [t_1, t_n]} \alpha +$$

$$+ (\lambda+\varepsilon) \int_{t_1}^{t_n} \left[a(\tau)\, \varepsilon_1 \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right) - (1+\gamma)\alpha(\tau) \right]^{-} d\tau .$$

A bizonyitás a 3.4 Tétel bizonyitásához hasonlóan folytatható.

Nem nehéz belátni, hogy az

$$\ddot{x} + g(t)\dot{x}^3 + x = 0$$

egyenletre, melyben $g(t)$ (3.6) szerint van definiálva, nem alkalmazható a 3.2 Tétel, de triviális megoldása legutóbbi eredményünk szerint g.a.s..

Láttuk, hogy a 3.3 Tétel (iii) feltétele az $a(t)$ és $\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t)$ függvényektől milyen keveset követel. Felmerül a kérdés, hogy ez, vagy egyilyen jellegü feltevés átmenthető-e az inhomogén (E') egyenletre. Egy választ a következő részben adunk meg, ahol a most tárgyalt módszer egy más irányu fejlesztését kapjuk.

3.4. A kis $g(t,x,\dot{x})$ esete

Ebben a részben az inhomogén (E') egyenlet azon eseteire fogalmazunk meg attraktivitási tételeket, melyekben a $-g(t,x,\dot{x})\dot{x}$ csillapitás hatása elhanyagolható a $p(t), q(t)$ hatásához képest, vagyis az (E') egyenlet a megoldások 0-hoz tartása szempontjából helyettesithető az

(E2') $(p(t)\dot{x})^{\cdot} + q(t)f(x) = e(t,x,\dot{x})$

egyenlettel. Tekintettel kiemelt jelentőségükre, állításokat fogalmazunk meg az (E2') és az

(E1') $\ddot{x} + q(t)f(x) = e(t)$

egyenletekre is.

Eredményeink alapja a

3.7. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek az (I) - (VI) feltételek és $\lim_{t\to\infty} \frac{b(t)}{(pq)^{1/2}(t)} = 0$. Ha létezik olyan abszolut folytonos, nem-negativ $\alpha(t)$ függvény, melyre az alábbiak teljesülnek:

(o) $\int_{t_0}^{\infty} \alpha = \infty$;

(i) $\alpha(t)\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}(t) = o\left(\int_{t_0}^{t} \alpha\right) \quad (t\to\infty)$;

(ii) $\int_{t_0}^{t} \left|\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot}\right| (pq)^{\frac{1}{2}} = o\left(\int_{t_0}^{t} \alpha\right) \quad (t\to\infty)$;

(iii) <u>van olyan</u> $0 < \sigma \leq 1$ <u>szám, hogy minden</u>

$$0 < \gamma < \sup_{R \setminus \{0\}} F(x)/xf(x)$$ <u>szám esetén</u>

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \left(\int_{t_0}^{t} \alpha \right)^{-1} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right) - (1+\gamma)\alpha(\tau) \right]^{-} d\tau = \mu(\gamma) < 1 - \sigma,$$

<u>akkor az</u> (E') <u>egyenlet minden megoldására</u> $\lim_{t \to \infty} E(t) = 0$.

<u>B i z o n y i t á s.</u> A bizonyitás ugyanugy kezdődik mint a 3.4 Tételé. Tegyük fel, hogy $x(t)$ olyan megoldás, melyre $\lim_{t \to \infty} E(t) = \lambda > 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Létezik olyan $\gamma > 0$, hogy

$$F(x(t)) - \gamma\, x(t) f(x(t)) < \varepsilon,$$

ha $t > t_0$. Az $E(t)$ függvény most igy majorálható:

$$E(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) + F(x(t)) = (1+\gamma)\frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) -$$

$$- \gamma \frac{1}{q(t)} (p(t)\, x(t)\, \dot{x}(t))^{\cdot} + F(x(t)) = (1+\gamma)\frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) -$$

$$- \gamma x(t) \dot{x}(t) \frac{g(t, x(t), \dot{x}(t))}{q(t)} + \frac{\gamma}{q(t)} e(t, x(t), \dot{x}(t)) -$$

$$-\gamma x(t) f(x(t)) + F(x(t)) - \frac{\gamma}{q(t)} (p(t) x(t) \dot{x}(t))^{\cdot} \leq$$

$$\leq (1+\gamma) \frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) - \frac{\gamma}{q(t)} (p(t) x(t) \dot{x}(t))^{\cdot} + \gamma KLR \frac{b(t)}{(pq)^{1/2}(t)} +$$

$$+ \frac{\gamma}{q(t)} \left(r_1(t) + r_2(t) \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{\ell}{2}} (t) L^{\ell} \right) + \varepsilon ,$$

ahol $K = \sup_{[t_0, \infty)} |x(t)|$, $L = \sup_{[t_0, \infty)} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{2}} (t) |\dot{x}(t)|$,

$R = \sup_{[t_0, \infty)} \Psi(x(t), \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{2}} (t) \dot{x}(t))$. Ha $W(t) := E(t) \int_{t_0}^{t} \alpha$,

akkor a fentiek és a (2.1) összefüggés alapján

$$(3.8) \quad \dot{W}(t) \leq (1+\gamma) \frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) \alpha(t) - \gamma \frac{\alpha(t)}{q(t)} (p(t) x(t) \dot{x}(t))^{\cdot} +$$

$$\gamma KLR \frac{b(t) \alpha(t)}{(pq)^{1/2}(t)} + \gamma \frac{\alpha(t)}{q(t)} \left(r_1(t) + r_2(t) \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{\ell}{2}} (t) L^{\ell} \right) +$$

$$\varepsilon \alpha(t) - \frac{p(t)}{q(t)} \dot{x}^2(t) \left(\int_{t_0}^{t} \alpha \right) \frac{(pq)^{\cdot}}{pq} (t) +$$

$$L \left(r_1(t) + r_2(t) \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{\ell}{2}} (t) L^{\ell} \right) (pq)^{-\frac{1}{2}} (t) \int_{t_0}^{t} \alpha .$$

Válasszuk meg a T számot ugy, hogy ha $t > T$, akkor

$$\int_T^t \frac{r_1}{(pq)^{1/2}} < \varepsilon \quad , \quad \int_T^t \frac{r_2}{(pq)^{1/2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{l}{2}} < \varepsilon ,$$

$$\frac{b(t)}{(pq)^{1/2}(t)} < \varepsilon \quad \text{és} \quad |E(t) - \lambda| < \varepsilon$$

teljesüljenek. Integráljuk (3.8)-at $[T,t]$-n:

$$W(t) \leq W(T) - \gamma \frac{\alpha(t)\, p(t)}{q(t)} \dot{x}(t) \dot{x}(t) + \gamma \int_T^t \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot} p \dot{x} \dot{x} +$$

$$\gamma K L R \varepsilon \int_T^t \alpha + \gamma \int_T^t \frac{\alpha}{q} \left(r_1 + r_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{l}{2}} L^l \right) +$$

$$\varepsilon \int_T^t \alpha + L(1 + L^l) \varepsilon \int_T^t \alpha +$$

$$(\lambda + \varepsilon) \int_T^t \left[\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha \right) - (1 + \gamma)\alpha(\tau) \right]^{-} d\tau \leq$$

$$\leq W(T) + \gamma_{KL}\alpha(t)\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}(t) + \gamma_{KL}\int_T^t \left|\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot}\right|(pq)^{1/2} +$$

$$\sup_{[T,t]}\left\{\alpha\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\gamma(1+L^{\ell})\varepsilon + (\gamma_{KLR} + L + L^{\ell+1} + 1)\varepsilon\int_T^t \alpha +$$

$$(\lambda+\varepsilon)\int_T^t \left[\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(\tau)\left(\int_{t_0}^{\tau}\alpha\right) - (1+\gamma)\alpha(\tau)\right]^{-} d\tau \ .$$

Most $\int_{t_0}^t \alpha$ -val osztva és a $t \to \infty$ határátmenetet végrehajtva kapjuk, hogy

$$\lambda < (\gamma_{KLR} + L + L^{\ell+1} + 1)\varepsilon + (1-\sigma)(\lambda+\varepsilon) \ .$$

Ha ε elegendően kicsi, akkor a jobboldal kisebb mint a bal, ami lehetetlen. Az ellentmondást a $\lambda > 0$ feltétel okozta. A tételt bebizonyitottuk.

1978-ban F.J. Scott két tételt bizonyitott a

$$(p(t)\dot{x})^{\cdot} + q(t)f(x) = e(t)$$

egyenletre, melyek a $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$ tulajdonságot biztositják. Az egyikben [21] a 3.7 Tétel (iii)

feltételénél többet kivánó

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t)\frac{1}{\alpha(t)} > 0$$

feltétel szerepelt. A másikban [20] pedig az

$$\alpha(t)\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}(t) \quad , \quad \int_{t_0}^{t}\left|\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot}\right|(pq)^{1/2}$$

függvények korlátosságára volt szüksége. Igy a 3.7 Tétel ezen eredmények közös általánositása.

Megjegyzés. Ha az α és q függvényre további differenciálhatósági feltételek teljesülnek, akkor a

$$\gamma\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot}(t)\,(px\dot{x})(t)$$

kifejezést parciálisan integrálhatjuk. Ezért a 3.7 Tétel (ii) feltétele az alábbiakkal helyettesithető:

$$(ii)' \qquad \int_{t_0}^{t}\left[\left(\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot}p\right)^{\cdot}\right]^{-} = o\left(\int_{t_0}^{t}\alpha\right) \qquad (t\to\infty);$$

$$(ii)'' \qquad \left|\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot}p\right|(t) = o\left(\int_{t_0}^{t}\alpha\right)(t\to\infty) \ .$$

Megjegyzés. Ha a tétel állitása csak az oszcilláló megoldásokra vonatkozik, akkor a (ii)'' és az $e(t,x,\dot{x}) \equiv 0$ esetben az (i) feltétel elengedhető. Valóban, ha $x(t)$ oszcilláló megoldás, akkor legyen $\{t_n\}$ a zéróhelyek sorozata ($t_n \to \infty$ ha $n \to \infty$). Elegendő a $[T,t]$ helyett a $[t_1,t_n]$ intervallumon integrálni. De ekkor

$$\gamma\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot} p\frac{x^2}{2}\Bigg|_{t_1}^{t_n} = 0 \qquad \text{és} \qquad \gamma\frac{\alpha}{q}p\dot{x}x\Bigg|_{t_1}^{t_n} = 0 \ .$$

Most vizsgáljuk meg, hogy eredményünk az (E3') egyenlet mely eseteire alkalmazható hatásosan. Legyen $p(t) = q^k(t)$ $(k \in R)$ és tegyük fel, hogy $\lim_{t\to\infty} q(t) = \infty$. Feltehető továbbá, hogy $\alpha(t)$ korlátos $[t_0,\infty)$-en. Az

$$\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot}(t)\, q^{\frac{k+1}{2}}(t) = \dot{\alpha}(t)\, q^{\frac{k-1}{2}}(t) - \alpha(t)\,\dot{q}(t)\, q^{\frac{k-3}{2}}(t)$$

azonosság alapján látható, hogy (ii) akkor és csak akkor teljesül, ha $k<1$. Azt kaptuk, hogy $p(t)$ növekedése lassubb kell hogy legyen mint a $q(t)$ növekedése.

Tekintsük a speciális (E1') egyenletet. Némi számolással adódik a

3.8. KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy teljesül az (I), (II) feltétel, $q(t) \nearrow \infty$ $(t \to \infty)$, $\int_{t_0}^{\infty} e / q^{1/2} < \infty$ és létezik olyan abszolut folytonos függvény $\alpha(t)$, melyre $\int_{t_0}^{\infty} \alpha = \infty$, $\alpha(t) \geq 0$ és a 3.7 Tétel (iii) feltétele teljesül. Ha vagy

a) létezik $\beta < \frac{1}{2}$ szám, hogy

$$\int_{t_0}^{t} \left| \left(\frac{\alpha}{q^{\beta}} \right)^{\cdot} \right| = o\left(\int_{t_0}^{t} \alpha \right) \qquad (t \to \infty) \ ;$$

vagy

b) $$\alpha(t) = o\left(\int_{t_0}^{t} \alpha \right) \ , \quad \int_{t_0}^{t} \left| \left(\frac{\alpha}{q^{1/2}} \right)^{\cdot} \right| = o\left(\int_{t_0}^{t} \alpha \right) \qquad (t \to \infty) \ ,$$

akkor az (E1') egyenlet minden megoldására $\lim_{t \to \infty} E(t) = 0$.

B i z o n y i t á s. A 3.7 Tétel (i) feltétele triviálisan teljesül. (ii)-t bizonyitandó, az a)

esetben

$$\int_{t_0}^{t} \left|\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot}\right| q^{1/2} \leq \int_{t_0}^{t} \left|\left(\frac{\alpha}{q^{\beta}}\right)^{\cdot}\right| q^{\beta-\frac{1}{2}} + (1-\beta) \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha}{q^{\beta}} \frac{\dot{q}}{q^{-\beta+3/2}}$$

miatt elegendő belátni, hogy a jobboldali második integrál $o\left(\int_{t_0}^{t} \alpha\right)$ ha $t \to \infty$. Növeljük ezt az integrált az alábbi módon:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\alpha}{q^{\beta}} \frac{\dot{q}}{q^{-\beta+3/2}} < \sup_{[t_0,t]} \left(\frac{\alpha}{q^{\beta}}\right) \frac{2}{1-2\beta} \left(q^{\beta-1/2}(t_0) - q^{\beta-1/2}(t)\right).$$

Innen (ii) teljesülése azonnal adódik.

A b) esetben (ii) az

$$\int_{t_0}^{t} \left|\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\cdot}\right| q^{1/2} \leq \int_{t_0}^{t} \left|\left(\frac{\alpha}{q^{1/2}}\right)^{\cdot}\right| + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \alpha \frac{\dot{q}}{q^{3/2}}$$

egyenlőtlenségből következik.

Az állitást bebizonyitottuk.

A $\beta = 0$ esetet érdemes kiemelnünk. Ugyanis itt látszik leginkább, hogy a megoldások akkor tartanak 0-hoz, ha $\frac{\dot{q}}{q}(t)$ egy $[t_0,\infty)$ -en nem integrálható, de ott korlátos változásu függvénynél "nagyobb" ha $t\to\infty$. A (iii) feltétel nyilván teljesül, ha $\frac{\dot{q}}{q}(t)>\alpha(t)$ (Burton, Grimmer [6]). A 3.2 és 3.3 pontok tételeivel ellentétben a $\frac{\dot{q}}{q}(t)$ függvényt felülről nem kell korlátoznunk, hiszen most az (M) feltétel triviálisan teljesül.

A 3.8 Következményből $\alpha(t)$ konkrét választásával további állitások nyerhetők.

A 2.1 Tétel bizonyitásában használt meggondolásokhoz hasonlóan belátható, hogy az (E1) egyenlet megoldásai oszcillálnak $[t_0,\infty)$ -en. Ezt a tényt és a 3.7 Tétel utáni megjegyzéseket használjuk az alábbiakban.

3.9. KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy $f(x)$ kielégiti a (II) feltételt, $q(t)\nearrow\infty$ ha $t\to\infty$ és $\ddot{q}(t)$ abszolut folytonos. Ha

$$\int_{t_0}^{t}\left[\left(q^{-1}\right)\cdots\right]^{+} = o\left(\log q(t)\right) \quad (t\to\infty),$$

akkor (E1) minden megoldására $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$.

3.10. KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy $f(x)$ kielégiti a (II) feltételt, $F(x) \leq \gamma x f(x)$ $(x \in R)$, $q(t) \nearrow \infty$ ha $t \to \infty$, és $\ddot{q}(t)$ abszolut folytonos $[t_0, \infty)$-en. Ha

$$\int_{t_0}^{t} \left[\left(q^{-\gamma/(\gamma+1)} \right)^{\cdots} \right]^{+} = o\left(q^{1/(\gamma+1)}(t) \right) \quad (t \to \infty),$$

akkor az (E1) egyenlet minden megoldására $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$.

B i z o n y i t á s. Elegendő észrevennünk, hogy feltételeink mellett az $\alpha(t) = \dot{q}(t)\, q^{-\gamma/(\gamma+1)}(t)$ helyettesités alkalmazható.

A fenti állitás általánositja és egyben élesiti A.C. Lazer [16] $f(x) \equiv x$ esetre vonatkozó eredményét, melyben az

$$\int_{t_0}^{t} \left| \left(q^{-1/2} \right)^{\cdots} \right|$$

korlátossága biztositja a megoldások 0-hoz tartását, hacsak $q(t)$ nem-csökkenő.

Azt már korábban láttuk, hogy a 3.1 és 3.3 Tételek is hasznosak az (E2') és (E2) egyenletek vizsgálatában. A különbségeket már érzékeltettük, ezeket most néhány példával szemléltetjük.

1) Legyen $a(t) = \frac{1}{t}\sin^2 t$. Az

$$\left(\exp\left\{\int_1^t a\right\}\dot{x}\right)^{\cdot} + \exp\left\{\int_1^t a\right\} x = 0$$

egyenletre $\alpha(t) = \frac{1}{t}$ -vel a 3.3 Tétel feltételei teljesülnek, de a 3.7 Tétel (ii) feltétele nem teljesül egyetlen (0), (i), (iii) feltételeket kielégítő α-val sem.

2) Most legyen

$$a(t) = \begin{cases} n^3 & t \in \left[n, n+\frac{1}{n^4}\right] \\ 0 & t \in \left(n+\frac{1}{n^4}, n+\frac{1}{3}\right) \\ 1 & t \in \left[n+\frac{1}{3}, n+1\right) \end{cases}$$

Az $\ddot{x} + \exp\left\{\int_1^t a\right\} x = 0$ egyenletre a 3.3 Tétel (i) feltétele nem teljesül egyetlen nem-növő, $\int_1^\infty \alpha = \infty$ tulajdonságu α-val sem, de a megoldások a 3.8 Követ-

kezmény szerint 0-hoz tartanak ha $t \to \infty$.

Ez a két példa jellemzi a 3.1 és 3.7 Tételek kapcsolatát is. Csak most az egyenletek inhomogének is lehetnek. Például az 1) példában $e(t) = \frac{1}{t \log t}$, a másodikban $e(t) = 1$ megengedhető.

A 3.1 és 3.3 Tételek kapcsolatáról a 3.3 pontban mondottak az (E2) egyenlet esetén is helytállóak.

1. FÜGGELÉK

A dolgozatban vizsgált egyenletek

(E) $(p(t)\dot{x})\dot{} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + q(t)f(x) = 0$

(EL) $p(t)\ddot{x} + a(t)\dot{x} + q(t)x = 0$

(E') $(p(t)\dot{x})\dot{} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + q(t)f(x) = e(t,x,\dot{x})$

(E1) $\ddot{x} + q(t)f(x) = 0$

(E1L) $\ddot{x} + q(t)x = 0$

(E1') $\ddot{x} + q(t)f(x) = e(t)$

(E2) $(p(t)\dot{x})\dot{} + q(t)f(x) = 0$

(E2') $(p(t)\dot{x})\dot{} + q(t)f(x) = e(t,x,\dot{x})$

(E3) $\ddot{x} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + f(x) = 0$

(E3L) $\ddot{x} + g(t)\dot{x} + x = 0$

(E3') $\ddot{x} + g(t,x,\dot{x})\dot{x} + f(x) = e(t,x,\dot{x})$

(E3L') $\ddot{x} + g(t)\dot{x} + x = e(t)$

2. FÜGGELÉK

Általános feltételek

(I) $p,q \in C^1[t_0,\infty)$; $p(t),q(t) > 0$ ha $t > t_0$;

(II) $f(x) \in C(-\infty,\infty)$; $xf(x) > 0 \quad (x \neq 0)$;

$$F(x) := 2\int_0^x f \to \infty \quad (x \to \infty);$$

(III) $$0 \leq a(t)\varphi(x,y) \leq g\left(t,x,\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(t)\,y\right) \leq b(t)\psi(x,y) ,$$

ahol a,b,φ,ψ nem-negativ folytonos függvények és $\varphi(x,y) \neq 0$ ha $y \neq 0$;

(IV) $|e(t;x,y)| \leq r_1(t) + r_2(t)|y|^{\ell}$,

$0 \leq \ell \leq 1$; $r_1,r_2 \in C[t_0,\infty)$; $r_1(t),r_2(t) \geq 0$;

(V) $$\int_{t_0}^{\infty} \frac{r_1}{(pq)^{1/2}} < \infty ; \quad \int_{t_0}^{\infty} \frac{r_2}{(pq)^{1/2}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\ell}{2}} < \infty \quad ;$$

(VI) $$\int_{t_0}^{\infty} \left[2k \frac{a(t)}{p(t)} + \frac{(pq)^{\cdot}}{pq}(t) \right]^{-} dt < \infty ,$$

ahol $k = \inf_{x,y \in R} \varphi(x,y)$;

(M) minden $0 < R^* < \sup_{x,y \in R} \psi(x,y)$ számra

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{p(t)} \exp\left\{ -R^* \int_{t_0}^{t} \frac{b}{p} \right\} \int_{t_0}^{t} q(\tau) \exp\left\{ R^* \int_{t_0}^{\tau} \frac{b}{p} \right\} d\tau \, dt = \infty$$

IRODALOM

[1] ARTSTEIN,Z. - INFANTE,E.F.: On the asymptotic stability of oscillators with unbounded damping, Quart. of Appl. Math., july 1976, 195-199.

[2] ATKINSON,F.V.: A stability problem with algebraic aspects, Proc. Royal Soc. Edinburgh 78A(1978), 299-314.

[3] BALLIEU,R.J. - PEIFFER,K.: Attractivity of the origin for the equation $\ddot{x} + f(t,x,\dot{x})|\dot{x}|^{\alpha}\dot{x} + g(x) = 0$, J. Math. Anal. Appl., 65 (1978), 321-332.

[4] БЕЛЛМАН,Р.: Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, Изд. Иностранной Литературы, Москва, I954.

[5] BURTON,T. - GRIMMER,R.: On the asymptotic behaviour of solutions of $x'' + a(t)f(x) = 0$ Proc. Cambrigde Philos. Soc., 70(1971), 77-88 .

[6] BURTON,T. - GRIMMER,R.: On the asymptotic behaviour of solutions of $\ddot{x} + a(t)f(x) = e(t)$, Pac. J. Math., 41(1972), 43-55.

[7] COPPEL,W.A.: Stability and asymptotic behaviour of differential equations, D.C. Heath and Company, Boston, 1965.

[8] DE KLEINE,H.A.: A counterexample to a conjecture in second-order linear equations, Michigan Math. J., 17(1970),29-32.

[9] ДЕМИДОВИЧ,Б.П.: Лекции по математической теории устойчивости,
Изд. "Наука", Москва, 1967.

[10] ГУСАРОВ,Л.А.: О стремлении к нулю решений линейного дифференциального уравнения второго порядка
Докл. Акад. Наук СССР , 7 (1950), 9-12.

[11] HALANAY,A.: Differential equations, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1966.

[12] HARTMAN,P.: On the theorem of Milloux, Amer. J. Math., 70(1948), 395-399.

[13] HATVANI,L.: On the stability of the zero solution of certain second order nonlinear differential equations, Acta Sci. Math., 32(1971), 1-9 .

[14] HATVANI,L.: On the asymptotic behaviour of the solutions of $(p(t)x')' + q(t)f(x) = 0$, Pub. Math., 19(1972), 225-237 .

[15] KARSAI,J.: Attractivity theorems for second order nonlinear differential equations, Pub. Math., megjelenés alatt .

[16] LAZER,A.C.: A stability condition for the differential equation $y'' + p(x)y = 0$, Michigan Math. J., 12(1965), 193-196 .

[17] LEVIN,J.J. - NOHEL,J.A.: Global asymptotic stability for nonlinear systems of differential equations, Arch. Rational Mech. Anal., 5(1960), 194-211 .

[18] MC SHANE,E.J.: On the solutions of the differential equation $y'' + p^2y = 0$, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 55-61 .

[19] MEIR, A. - WILLETT, D. - WONG, J.S.W.: On the asymptotic behaviour of the solutions of $x'' + a(t)x = 0$, Michigan Math. J., 14(1967), 47-52.

[20] SCOTT, F.J.: New partial asymptotic stability results for nonlinear ordinary differential equations, Pacific J. Math., 72(1977), 523-535.

[21] SCOTT, F.J.: On a partial asymptotic stability theorem of Willett and Wong, J. Math. Anal. Appl., 63(1978), 416-420.

[22] SMITH, R.A.: Asymptotic stability of $x'' + a(t)x' + x = 0$, Quart. J. Math. Oxford(2), 12(1961), 123-126.

[23] САНСОНЕ, Дж.: Обыкновенные дифференциальные уравнения том 2, Изд. Иностранной Литературы, Москва, I954.

[24] THRUSTON, L.H. - WONG, J.S.W.: On global asymptotic stability of certain second order differential equations with integrable forcing terms, SIAM J. Appl. Math., 24(1979), 50-61.

[25] WILLETT,D.: On an example in second-order linear ordinary differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 1263-1266.

[26] WILLETT,D. - WONG,S.S.: Some properties of the solutions of $(p(t)\dot{x})^{\cdot} + q(t)f(x) = 0$, J. Math. Anal. Appl., 23(1968), 15-24 .

Köszönetet mondok Dr. Hatvani László docens urnak dolgozatom elkészitése közben nyujtott állandó támogatásáért.

TARTALOM