AZ E_n n-DIMENZIÓS EUKLIDESZI TEREK SZABÁLYOS POLITÓPJAI

doktori értekezés

irta: Péntek Kálmán

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára
SZEGED
B 17810

Köszönetet mondok Dr. NAGY PÉTER tanszékvezető egyetemi docensnek e munka elkészitésében nyujtott segitségéért és ösztönzéséért.

Szombathely,1985.május hó

B e v e z e t é s

A geometriai vizsgálatok nagy része olyan terekre vonatkozik, amelyeknek dimenziója háromnál nagyobb is lehet.E magasabb dimenziós geometriák közül természetes módon az áll legközelebb hozzánk,amelyet a klasszikus euklideszi tér geometriájának általánositásaként nyerhetünk.
A 2- vagy 3- dimenziós euklideszi geometria "előnye",hogy fogalmait,eredményeit könnyen modellezhetjük,szemléletessé tehetjük a minket körülvevő fizikai térben is.Igy olyan képességünk fejlődhet ki,amely segitségünkre lehet ujabb összefüggések megértésekor illetve megsejtésekor.E képességet térszemléletnek szokták nevezni.
Hasonló képességgel magasabb dimenziós geometriákkal kapcsolatban nem rendelkezünk,igy természetes igényként vetődhet fel olyan eljárások kidolgozása,amelyek ha áttételesen is,de képesek az alapvető illeszkedési illetve metrikus viszonyokat tükrözni, s e viszonyokat számunkra láthatóvá tenni,modellezni a 2- vagy 3-dimenziós térben.Hasonló tehát az igény,mint amelyet az ábrázoló geometriával kapcsolatban fogalmazhatunk meg.
E dolgozat a legegyszerübbnek tekinthető magasabb dimenziós terek, az euklideszi terek geometriai viszonyait szemléltető ábrázoló geometriai és számitógépes módszerekkel,eljárásokkal foglalkozik, amelyek segitségével e terek szabályos politópjait ábrázolhatjuk.
A szabályos politópok a klasszikus euklideszi sik szabályos sokszögei illetve a klasszikus euklideszi tér platoni szabályos testjei általánositásának tekinthetők.
Ennek megfelelően a feldolgozott anyag fő témakörei a következők:

- a magasabb dimenziós euklideszi geometria vázlatos megalapozása,
- e terek szabályos politópjainak áttekintése,
- a klasszikus ábrázoló geometria néhány módszerének általánositása magasabb dimenziós alakzatok ábrázolására,
- magasabb dimenziós szabályos politópok ábrázolása,
- politópok ábrázolása személyi számitógéppel.

TARTALOMJEGYZÉK:

I. Az E_n tér geometriájának elemei

1.1 Az E_n tér . . . . . 1.old.
1.2 Az érintőtér . . . . . 1.old.
1.3 k- sikok az E_n térben . . . . . 2.old.
1.4 Párhuzamosság és merőlegesség az E_n térben . . . 3.old.
1.5 Távolság, szakasz, k-félsikok az E_n térben . . . 4.old.
1.6 Konvex halmazok az E_n térben . . . . . 5.old.

II. Politópok az E_n térben

2.1 E_n politópjainak elemi tulajdonságai . . . . . 7.old.
2.2 Szabályos politópok az E_n térben . . . . . 8.old.
2.3 A Schläfli-féle $\Delta_{pqr\ldots uvw}$ függvény . . . . . 9.old.
2.4 A $\Delta_{pqr\ldots uvw}$ kiszámitása néhány egyszerü esetben .11.old.
2.5 A $\Delta_{pqr\ldots uvw}$ függvény néhány alapvető tulajdonsága . . . . . 12.old.
2.6 Lehetséges szabályos politópok az E_n térben $(0 \leq n \leq 5)$ . . . . . 14.old.
2.7 Lehetséges szabályos politópok az E_n térben $(n > 5)$ . . . . . 15.old.

III. A szabályos politópok modelljeinek megszerkesztése

3.1 A szabályos politópok megkonstruálása az E_2 térben . . . . . 17.old.
3.2 A szabályos politópok megkonstruálása az E_3 térben . . . . . 17.old.
3.3 A szabályos politópok megkonstruálása az E_4 térben . . . . . 19.old.
3.4 A szabályos politópok megkonstruálása az E_n $(n \geq 5)$ térben . . . . . 23.old.

IV. Koordináták

4.1 Koordináták bevezetése az E_n térben . . . . . 27.old.
4.2 A koordináták transzformációja uj bázisra való áttéréskor . . . . . 28.old.
4.3 Az E_n szabályos politópjainak koordinátái . . . 30.old.

V. Projekciók az E_n térben

5.1 Ortogonális projekció az E_n térben . . . . . 32.old.
5.2 Paralel projekció az E_n térben . . . . . 34.old.
5.3 Centrális projekció az E_n térben . . . . . 37.old.

VI. Ábrázoló geometria az E_n térben

6.1 Monge-projekciók az E_n térben . . . . . 39.old.
6.2 Axonometrikus projekciók az E_n térben . . . . . 42.old.
6.3 Perspektivikus projekció az E_n térben . . . . . 47.old.

VII. A szabályos politópok ábrázolásai

7.1 A szabályos $\pi_n=\{3^{n-1}\}$ politópok ábrázolása E_2 sikban 50.old.
7.2 A szabályos $\pi_n=\{3^{n-2},4\}$ politópok ábrázolása E_2 sikban 51.old.
7.3 A szabályos $\pi_n=\{4,3^{n-2}\}$ politópok ábrázolása E_2 sikban 52.old.
7.4 Szabályos π_3 és π_4 politópok ábrázolása E_2 sikban 53.old.
7.5 A szabályos π_n politópok hálózatai és Schlegel-féle diagramjai . . . . . 54.old.

VIII. Az E_3 és E_4 szabályos politópjainak ábrázolása személyi számitógéppel

8.1 Bevezetés . . . . . 56.old.
8.2 Az ábrázoló program általános ismertetése . . . 57.old.
8.3 Az ábrázoló program munka-moduljainak első csoportja . . . . . 59.old.
8.4 Az ábrázoló program munka-moduljainak második csoportja . . . . . 62.old.
8.5 Az ábrázoló program munka-moduljainak harmadik csoportja . . . . . 63.old.
8.6 Megjegyzések . . . . . 63.old.

Befejezés . . . . . 64.old.
Felhasznált irodalom . . . . . 65.old.

Ábrák a dolgozathoz . . . . . 66-93.old.
A számitógépes ábrázoló program folyamat ábrái és teljes listája . . . . . .94-113.old.
A számitógépes program segitségével készitett ábrák . . . . . 114-136.old.

I. AZ $\mathbf{E}_n$ TÉR GEOMETRIÁJÁNAK ELEMEI

1.1 Az $\mathbf{E}_n$ tér

Legyen $\mathcal{P}$ egy nem üres halmaz, amelynek elemeit pontoknak nevezzük, s legyen $\mathcal{V}_n$ egy n-dimenziós valós euklideszi vektortér. Ha $\varphi: \mathcal{P}\times\mathcal{P} \to \mathcal{V}_n$ leképezés, akkor n-dimenziós valós euklideszi térnek nevezzük az $\mathbf{E}_n = \{\mathcal{P}, \mathcal{V}_n, \varphi\}$ strukturát az alábbi axiómák teljesülése esetén:

E.1. Bármely $P \in \mathcal{P}$ pont és bármely $v \in \mathcal{V}_n$ vektor esetén létezik egy és csakis egy olyan $Q \in \mathcal{P}$ pont, amelyre teljesül:

$$\varphi(PQ) = v,$$

E.2. Bármely $P, Q, R \in \mathcal{P}$ pontok esetén érvényes:

$$\varphi(PQ) + \varphi(QR) = \varphi(PR)$$

1.2 Az érintőtér

Tekintsük most $\mathcal{P}$ egy tetszőleges, de rögzitett pontját, s legyen $\varphi_0: \{O\}\times\mathcal{P} \to \mathcal{V}_n$, $(O,P) \mapsto p$; ahol $p = \varphi(OP) \in \mathcal{V}_n$, amely φ_0 leképzés tulajdonképpen φ megszoritása az $\{O\}\times\mathcal{P}$ halmazra. Az E.1. axiómából közvetlenül adódik, hogy φ_0 bijekció, s igy segitségével vektortér struktura értelmezhető az $\{O\}\times\mathcal{P}$ halmazban:

összeadás: $(O,P)+(O,Q)=(O,R) \Leftrightarrow \varphi_0(OP)+\varphi_0(OQ)=\varphi_0(OR)$

skalárral való szorzás: $\lambda\cdot(O,P)=(O,S) \Leftrightarrow \lambda\cdot\varphi_0(OP)=\varphi_0(OS)$

skaláris szorzat: $(O,P)\cdot(O,Q)=\mu \Leftrightarrow \varphi_0(OP)\cdot\varphi_0(OQ)=\mu$,

ahol $O, P, Q, R, S \in \mathcal{P}$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

Megmutatható, hogy $\{O\} \times \mathbb{P}$ a fenti müveletekkel a $\mathfrak{V}_n$ vektortérrel izomorf n-dimenziós valós euklideszi vektorteret alkot, amelyet $T_o(\mathbb{P})$ jelöl, s amelyet az $\mathbb{E}_n$ O pontjához illeszkedő érintő terének nevezzük. A $T_o(\mathbb{P})$ elemeit helyvektoroknak nevezzük és $\vec{p} = \overrightarrow{OP} := (O,P)$ szimbolummal jelöljük, az O pontot pedig $T_o(\mathbb{P})$ origójának nevezzük.

Az O pont kiválasztása és $T_o(\mathbb{P})$ megalkotása után analitikus módszerekkel, $T_o(\mathbb{P})$ tulajdonságainak felhasználásával tárgyalható $\mathbb{E}_n$ geometriája. Fogalmakat vezethetünk be, tételeket igazolhatunk $T_o(\mathbb{P})$ segitségével, amelyeket azonban csakis akkor tekinthetünk geometriai tulajdonságoknak, ha azok érvényessége az O pont, s ezen keresztül a $T_o(\mathbb{P})$ választásától függetlenek.

Ennek szem előtt tartásával alapozzuk meg vázlatosan $\mathbb{E}_n$ geometriáját.

1.3 k - sikok az $\mathbb{E}_n$ térben

Mivel $T_o(\mathbb{P})$ és $\mathfrak{V}_n$ izomorf vektorterek, igy $\dim\{T_o(\mathbb{P})\} = n$. Legyen $\mathcal{U}$ a $T_o(\mathbb{P})$ egy k-dimenziós altere $(0 \leq k \leq n)$, továbbá tekintsük $\mathbb{E}_n$ egy tetszőleges X_o pontját. Ekkor a

$$h_k = \{X \mid X \in \mathbb{E}_n,\ \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OX_o} \in \mathcal{U}\}$$

ponthalmazt az $\mathbb{E}_n$ tér egy k-dimenziós sikjának vagy röviden k-sikjának nevezzük. Jelölje H az $\mathbb{E}_n$ összes $0 \leq k \leq n$ k-sikjának halmazát, s H_i az $\mathbb{E}_n$ i-dimenziós sikjainak halmazát $(0 \leq i \leq n)$. Ekkor nyilván $H = \bigcup_{i=0}^{n} H_i$. A H_i elemeit rendre pontoknak, egyeneseknek, sikoknak illetve hipersikoknak nevezzük, ha $i = 0, 1, 2, n-1$. Ha h_k a fenti módon adott, akkor az $\mathcal{U}$ alteret h_k irányterének nevezzük, s h_k dimenzióját a $\dim\{h_k\} := \dim\{\mathcal{U}\}$ összefüggéssel értelmezhetjük összhangban elnevezésével.

Ha h_k és h_e H-beli elemek, továbbá $h_k \subseteq h_e$, akkor azt mondjuk, hogy h_k illeszkedik a h_e-hez, s ekkor nyilván $\dim\{h_k\} = k \leq l = \dim\{h_e\}$ összefüggés is érvényes.

1.4 Párhuzamosság és merőlegesség az E_n térben

Legyen $\mathcal{U}_k$ a h_k és $\mathcal{U}_e$ a h_e $(h_k, h_e \in H)$ iránytere, akkor a h_k és h_e sikokat párhuzamosoknak mondjuk és $h_k \parallel h_e$ szimbolummal jelöljük akkor és csakis akkor, ha $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_e$ vagy $\mathcal{U}_e \subseteq \mathcal{U}_k$.

Az értelmezésből könnyen belátható, hogy a $\parallel$ reláció reflexiv és szimmetrikus, azonban nem tranzitiv.

Ha a fentieken kivül az $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_e$ élesebb feltétel teljesül, akkor a h_k és h_e sikokat szigoruan párhuzamosaknak nevezzük és $h_k \parallel\!\!\parallel h_e$ szimbólummal jelöljük.

Látható ekkor, hogy $\dim\{h_k\} = k = \ell = \dim\{h_e\}$ és a $\parallel\!\!\parallel$ reláció ekvivalencia reláció. Minden $0 \leq i \leq n$ esetén a $\parallel\!\!\parallel$ reláció ekvivalencia osztályokra bontja a H_i halmazt, amely osztályokat i-dimenziós nyalábоknak nevezünk. Speciálisan H_1 osztályait szokás az E_n irányainak is nevezni.

Az E_n tér bármely X_0 pontjához és h_k k-dimenziós sikjához található egy és csakis egy olyan h_e sik, hogy $\dim\{h_k\} = \dim\{h_e\}$, $h_k \parallel\!\!\parallel h_e$ és $X_0 \in h_e$. Továbbá mindazon h_m sik, amelyre $X_0 \in h_m$, $h_k \parallel h_m$ teljesül, következik $h_m \subseteq h_e$, ha $\dim\{h_m\} \leq \dim\{h_e\}$.

Legyen a $h_k \in H$ iránytere $\mathcal{U} < \mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}$ ortogonális kiegészitő alterét jelölje $\mathcal{U}^\perp := \{x \in \mathcal{V}_n \mid \forall u \in \mathcal{U} : x \perp u\}$, ahol $x \perp u \Leftrightarrow x \cdot u = 0$. Az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{U}^\perp$ alterekre érvényes $\dim\{\mathcal{U}\} + \dim\{\mathcal{U}^\perp\} = n$ és $[\mathcal{U}^\perp]^\perp = \mathcal{U}$ összefüggések.

A fentiek felhasználásával a $h_k, h_e \in H$ sikokat ortogonálisaknak vagy merőlegeseknek nevezzük és $h_k \perp h_e$ szimbólummal jelöljük akkor és csakis akkor, ha $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_e^\perp$ vagy $\mathcal{U}_k \supseteq \mathcal{U}_e^\perp$.

Az ortogonalitás értelmezését felhasználva igazolható, hogy ha $h_k \perp h_e$, akkor $h_e \perp h_k$ is igaz. Igaz továbbá, hogy ha $h_k \perp h_e$, $h_m \subseteq h_k$ és $\dim\{h_k\} + \dim\{h_e\} \leq n$, akkor $h_m \perp h_e$, továbbá ha $h_k \perp h_e$, $h_k \subseteq h_m$ és $\dim\{h_k\} + \dim\{h_e\} \geq n$, akkor $h_m \perp h_e$ is érvényes.

Ha a h_k és h_e sikokra a fentinél élesebb $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_e^\perp$ feltétel teljesül, akkor a $h_k, h_e \in H$ sikokat szigoruan ortogonálisaknak vagy szigoruan merőlegeseknek mondjuk és $h_k \perp\!\!\!\perp h_e$ szimbólummal jelöljük.

Az értelmezésből következik, hogy $h_k \parallel h_e \Rightarrow h_e \parallel h_k$ továbbá $\dim\{h_k\} + \dim\{h_e\} = n$.

Az $\mathbb{E}_n$ néhány illeszkedési tétele:

Az $\mathbb{E}_n$ tér bármely k számu $(2 \leq k \leq n)$, nem ugyanazon $(k-2)$-dimenziós síkhoz illeszkedő pontjaihoz illeszkedik egy és csakis egy $(k-1)$ - dimenziós sik.

Legyen $h_1 \in H_1$, $h_{n-1} \in H_{n-1}$, ekkor az alábbi állitások közül pontosan egy érvényes: $h_1 \cap h_{n-1} = h_1$ a két térelem illeszkedő, $h_1 \cap h_{n-1} = P \in \mathbb{P}$, a két térelem metsző, $h_1 \cap h_{n-1} = \emptyset$ a két térelem párhuzamos.

Ha $h_1 \in H_1$, $h_{n-1} \in H_{n-1}$ és $h_1 \cap h_{n-1} = P \in \mathbb{P}$, akkor bármely $h_1^* \in H_1$: $h_1^* \parallel\parallel h_1$ esetén $h_1^* \cap h_{n-1} = Q \in \mathbb{P}$ egyértelmüen meghatározott pont.

1.5. Távolság, szakasz, k - félsikok az $\mathbb{E}_n$ térben

Az $\mathbb{E}_n$ térben értelmezzük pontpárok távolságát az alábbi összefüggéssel:

$$d : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}_0^+ \quad , \quad (X,Y) \mapsto d(XY) \; ;$$

ahol $d(XY) = \|\vec{OY} - \vec{OX}\| \in \mathbb{R}_0^+$. A d távolságfüggvényről igazolhatók az alábbi alapvető tulajdonságok:

1. Bármely $X, Y \in \mathbb{P}$ esetén
   $d(XY) \geq 0$ és $d(XY) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.
2. Bármely $X, Y \in \mathbb{P}$ esetén
   $d(XY) = d(YX)$.
3. Bármely $X, Y, Z \in \mathbb{P}$ esetén
   $d(XZ) \leq d(XY) + d(YZ)$.

Tekintsük most $P, Q \in \mathbb{P}$, $P \neq Q$ pontpárt, s definiáljuk az alábbi ponthalmazt:

$$[PQ] := \{ X \mid X \in \mathbb{E}_n \; ; \; d(PX) + d(XQ) = d(PQ) \}$$

A $[PQ]$ ponthalmazt P és Q végpontu zárt szakasznak nevezzük.Ha $P,Q \in h_k$ $(1 \leq k \leq n)$,akkor $[PQ] \subseteq h_k$.
Tekintsük most az $E_n$tér egy $h_k \in H$ k - dimenziós síkját,s $h_{k-1} \subseteq h_k$ hozzá illeszkedő $(k-1)$ - dimenziós sikot $(1 \leq k \leq n)$! A $h_k \setminus h_{k-1}$ ponthalmazon értelmezzük az alábbi relációt:

$$X \sim Y \Leftrightarrow [XY] \cap h_{n-1} = \emptyset.$$

Megmutatható,hogy a $\sim$ reláció olyan ekvivalencia reláció, amelynek pontosan két ekvivalencia osztálya van,s ezen ekvivalencia osztályokat a h_k h_{k-1} sikja által generált k - dimenziós félsikoknak nevezzük és h_k^1 illetve h_k^2 szimbólummal jelöljük.Értelmezéséből adódóan:

$$h_k^1 \cup h_{k-1} \cup h_k^2 = h_k, \quad h_k^1 \cap h_k^2 = \emptyset.$$

A $k=1$ esetben az egyenes egy pontja által generált félegyeneseiről, a $k=2$ esetben a sik egy egyenese által generált félsikjairól,a $k=n$ esetben az E_n tér egy hipersikja által generált féltereiről beszélünk.A $h_k^1 \cup h_{k-1} = \bar{h}_k^1$, $h_k^2 \cup h_{k-1} = \bar{h}_k^2$ ponthalmazokat k - dimenziós zárt félsikoknak nevezzük.

1.6 Konvex halmazok az $E_n$térben

Az $A \subseteq E_n$ ponthalmazt k - dimenziósnak nevezzük akkor és csakis akkor,ha létezik olyan $h_k \in H_k$ k- dimenziós sik,hogy $A \subseteq h_k$,de nem létezik egyetlen olyan $h_\ell \in H_\ell$ ℓ-dimenziós sik,hogy $\ell < k$ és $A \subseteq h_\ell$ teljesül.
Az $A \subseteq E_n$ ponthalmazt konvexnek nevezzük akkor és csakis akkor,ha bármely $X,Y \in A \Rightarrow [XY] \subseteq A$ teljesül.
Az értelmezésből világos,hogy a k - dimenziós sikok, k - dimenziós félsikok k - dimenziós konvex halmazok $(0 \leq k \leq n)$,a zárt szakaszok pedig 1 - dimenziós konvex halmazok.
A $G\{C,r\} := \{X \mid X \in E_n, d(XC) < r\}$ ponthalmazt n-dimenziós nyitott gömbnek nevezzük,amely n - dimenziós konvex halmaz. A C pontot a gömb centrumának,az $r \in \mathbb{R}^+$ számot a gömb sugarának nevezzük.
A ponthalmazok konvexitásának definiciójából következik,hogy tetszőleges számu konvex ponthalmaz metszete is konvex ponthalmaz.

Igy bármely $\mathcal{B} \subseteq E_n$ ponthalmazhoz hozzárendelhetünk egy olyan $\Delta(\mathcal{B})$ ponthalmazt, amely metszete az összes olyan konvex halmaznak, amelyek tartalmazzák a $\mathcal{B}$ ponthalmazt. Igy $\mathcal{B} \subseteq \Delta(\mathcal{B})$, maga is konvex ponthalmaz a $\Delta(\mathcal{B})$, sőt a legszükebb, s ezért a $\mathcal{B}$ ponthalmaz konvex burkolójának nevezzük.

Legyen $\mathcal{A} \subseteq E_n$ egy ponthalmaz. Valamely $P \in \mathcal{A}$ pontot az $\mathcal{A}$ belső pontjának nevezzük akkor és csakis akkor, ha létezik oly P centrumu pozitiv r sugaru $G\{P,r\}$ gömb, hogy $G\{P,r\} \subseteq \mathcal{A}$ teljesül. Ha a $Q \in \mathcal{A}$ nem belsőpont, akkor őt az $\mathcal{A}$ egy határpontjának nevezzük. Az $\mathcal{A}$ belső pontjainak halmazát az $\mathcal{A}$ belsejének nevezzük és $\mathfrak{B}\{\mathcal{A}\}$ szimbolummal jelöljük, az $\mathcal{A}$ határpontjainak halmazát pedig az $\mathcal{A}$ határának nevezzük és $\mathfrak{H}\{\mathcal{A}\}$ szimbólummal jelöljük. Érvényes nyilván $\mathfrak{H}\{\mathcal{A}\} \cup \mathfrak{B}\{\mathcal{A}\} = \mathcal{A}$ és $\mathfrak{H}\{\mathcal{A}\} \cap \mathfrak{B}\{\mathcal{A}\} = \emptyset$ összefüggés. Igaz továbbá $\mathcal{A}_i \subseteq E_n$ $(1 \le i \le m)$ véges sok ponthalmazra, hogy $\mathfrak{B}\{\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i\} = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{B}\{\mathcal{A}_i\}$.

Ha $h_k \in H_k$ egy tetszőleges k - dimenziós sik, $h_{k-1} \subset h_k$ annak egy tetszőleges, ám rögzitett $(k-1)$ - dimenziós sikja, az általa egyértelmüen meghatározott k - dimenziós nyitott illetve zárt félsikok pedig h_k^1, h_k^2 illetve $\bar{h}_k^1, \bar{h}_k^2$, akkor $\bar{h}_k^i$ $(i=1,2)$ belseje h_k^i és határa h_{k-1}, továbbá h_k^i $(i=1,2)$ minden pontja belső pont.

Az $\mathcal{A} \subseteq E_n$ ponthalmazt korlátosnak nevezzük akkor és csakis akkor, ha létezik olyan $R \in R^+$ szám, hogy bármely $X, Y \in \mathcal{A}$ esetén $d(XY) \le R$ teljesül.

A $\Pi_n \subset E_n$ halmazt n - dimenziós politópnak nevezzük akkor és csakis akkor, ha Π_n korlátos ponthalmaz, továbbá Π_n halmazelméleti metszete véges számu zárt n - dimenziós féltérnek, végül Π_n n - dimenziós ponthalmaz.

A Π_n definiciójából közvetlenül következik, hogy ő konvex ponthalmaz. Mivel minden $h_k \in H$ maga is E_k k - dimenziós euklideszi tér, igy beszélhetünk az E_n k - dimenziós Π_k $(0 \le k \le n)$ politópjairól is. Bármely $\Pi_k \subset E_n$ k - dimenziós politóp azonban egyértelmüen meghatározza h_k tartó k - dimenziós sikját.

II. POLITÓPOK AZ E_n TÉRBEN

2.1 E_n politópjainak elemi tulajdonságai

Legyen tehát a Π_n n- dimenziós politóp olyan n-dimenziós, korlátos ponthalmaz, amelyet előállithatunk:

$$\Pi_n = \bigcap_{i=1}^{\ell} \bar{h}_n(i)$$

alakban, ahol $\{\bar{h}_n(i)\}_{i=1}^{\ell}$ az E_n bizonyos zárt félterei, s Π_n korlátossága folytán nyilván $\ell > n$ teljesül. Ha $\bar{h}_n(i)$ határoló hipersikját $h_{n-1}(i)$ jelöli, továbbá $h_n(i) = \bar{h}_n(i) \setminus h_{n-1}(i)$, akkor $\mathcal{B}\{\Pi_n\} = \bigcap_{i=1}^{\ell} \mathcal{B}\{\bar{h}_n(i)\} = \bigcap_{i=1}^{\ell} h_n(i)$ és $\mathcal{H}\{\Pi_n\} = \Pi_n \setminus \mathcal{B}\{\Pi_n\}$.

Az $h_{n-1}(i) \cap \Pi_n = \Pi_{n-1}(i)$ $(1 \le i \le \ell)$ $(n-1)$- dimenziós ponthalmazt a Π_n politóp egy $(n-1)$-dimenziós cellájának nevezzük, amely maga is egy $(n-1)$ - dimenziós politóp, továbbá $\bigcup_{i=1}^{\ell} \Pi_{n-1}(i) = \mathcal{H}\{\Pi_n\}$. Megismételve a fenti gondolatot Π_n egy Π_{n-1} cellájára azt kapjuk, hogy őt Π_{n-2} $(n-2)$- dimenziós cellák határolják, s azok maguk is $(n-2)$ - dimenziós politópok, amelyek mind pontosan egy-egy további Π_{n-1} cellához is illeszkednek. Folytatva az iménti eljárást megkaphatjuk a Π_n politópot alkotó $\left\{\{\Pi_j(i)\}_{i=1}^{N_j}\right\}_{j=0}^{n}$ cellák rendszerét, ahol a $\{\Pi_0(i)\}_{i=1}^{N_0}$ 0 - dimenziós cellákat a Π_n csucsainak, a $\{\Pi_1(i)\}_{i=1}^{N_1}$ 1- dimenziós cellákat a Π_n éleinek, a $\{\Pi_2(i)\}_{i=1}^{N_2}$ 2 - dimenziós cellákat a Π_n lapjainak nevezzük, s Π_n is felfogható, mint önmaga egyetlen n - dimenziós alkotó cellája, vagyis $N_n = 1$. A j -dimenziós alkotó cellák N_j számára vonatkozóan érvényes Euler tételének Poincarétól származó általánositása:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot N_j = 1 .$$

$\mathcal{H}_n$ értelmezése alapján belátható, hogy $\Pi_n = \Delta\{\Pi_0(i)\}_{i=1}^{N_0}$ vagyis Π_n csucsainak konvex burkolója.

Ha a Π_n egy adott Π_0 csucsából kiinduló élek középpontjai egy hipersikban fekszenek, akkor ezen pontok konvex burkolója által meghatározott $(n-1)$ - dimenziós politópot a Π_n Π_0 csucsánál levő csucsalakzatának nevezzük. A csucsalakzat cellái nyilvánvalóan Π_n Π_0 -hoz illeszkedő celláinak a Π_0 csucsnál levő csucsalakzatai.

2.2 Szabályos politópok az E_n térben

Az E_0 tér egyetlen pontból áll, amely egy Π_0 politópnak is tekinthető, s megállapodás szerint a Π_0 politópot szabályosnak mondjuk. Az E_1 tér egyetlen egyenes pontjaiból áll, s $\{\Pi_1\}$ politópjai az egyenes különböző végpontu zárt szakaszai, s megállapodás szerint a $\{\Pi_1\}$ politópokat is azabályosnak mondjuk. Az E_2 tér egyetlen sik pontjaiból áll, s $\{\Pi_2\}$ politópjai a zárt konvex sokszög /poligon/ tartományok. Mivel ekkor $N_0 = N_1 = p$, igy konvex p-szög tartománynak is nevezhetjük $\{\Pi_2\}$ elemeit $(p>2)$. Ha Π_2 politóp p-számu éle izometrikus, továbbá p-számu csucsánál levő p-számu belső szöge izometrikus, akkor a politópot szabályosnak nevezzük és $\{p\}$ szimbólummal jelöljük. Az értelmezésből látható, hogy E_2 $\{p\}$ szabályos p-szög lapjai/ $p>2$, rögzitett/ E_2-beli homotécia erejéig egyértelmüen meghatározottak.

Az E_n $(n>2)$ tér egy Π_n politópját a fentiek alapján induktiv módon szabályosnak nevezzük akkor és csakis akkor, ha $(n-1)$-dimenziós alkotó cellái szabályosak és minden csucsnál szabályos csucsalakzata van. Belátható ekkor, hogy ekkor Π_n minden $(n-1)$-dimenziós cellája izometrikus, hasonlóan csucsalakzatai is izometrikusak.

Ha E_3 egy Π_3 szabályos politópja cellái $\{p\}$ poligonok, csucsalakzatai $\{q\}$ poligonok, akkor bevezethetjük a $\Pi_3 = \{p, q\}$ szimbólumot Π_3 jelölésére. Ha E_4 egy Π_4 szabályos politópja cellái $\{p, q\}$ poliédernek, akkor csucsalakzatai $\{q, r\}$ poliéderek kell, hogy legyenek, mivel a csucsalakzatok cellái a cellák csucsalakzatai.

Végül általánosan E_n egy Π_n szabályos politópja cellái $\{p, q, \ldots, v\}$ $(n-1)$-dimenziós szabályos politópok, akkor csucsalakzatai $\{q, r, \ldots, v, w\}$ $(n-1)$-dimenziós szabályos politópok, s ekkor $\Pi_n = \{p, q, r, \ldots, u, v, w\}$ szimbólummal jelölhető.

Minden $\Pi_n = \{p, q, \ldots, v, w\}$ szabályos politóphoz található a Π_n belsejében egy olyan O_n pont, amelyet Π_n centrumának vagy középpontjának nevezünk, s amely Π_n minden Π_j j-dimenziós cellájától azonos R_j távolságra van $(0 \le j \le n-1)$. Igy megkonstruálhatunk n számu $G_j\{O_n, R_j\}$ koncentrikus n-dimenziós gömböt, amely minden Π_j j-dimenziós cellát annak centrumában érint. A G_0 gömböt Π_n körülirt gömbjének, mig a G_{n-1} gömböt Π_n beirt gömbjének nevezzük.

2.3 A SCHLÄFLI - féle $\Delta_{pq\ldots vw}$ függvény

Legyen $\Pi_n=\{p,q,r,\ldots,u,v,w\}$ az E_n tér egy n-dimenziós szabályos politópja. Jelölje O_k a Π_n egy k-dimenziós Π_k cellájának centrumát, O_{k+1} pedig a Π_n egy olyan $(k+1)$-dimenziós Π_{k+1} cellájának centrumát, amelyre $\Pi_k \subset \Pi_{k+1}$ teljesül $(0\leq k\leq n-1)$. Másként fogalmazva O_n jelöli Π_n centrumát, O_{n-1} a Π_n egy Π_{n-1} cellájának centrumát, ..., O_1 egy bizonyos élének középpontját, végül O_0 ezen él egyik végpontját, amely egyben Π_n egy csucsa is. Az $\Delta\{O_0,O_1,\ldots,O_n\}$ n - dimenziós politópot a Π_n egy ortoszkémájának vagy más elnevezéssel karakterisztikus szimplexének nevezzük. Ha Π_n éleinek hossza 2ℓ, akkor a $\Delta\{O_0,\ldots,O_n\}$ politópot az alábbi összefüggések jellemzik:

$$d(O_0O_1)=\ell\ ,\quad d(O_kO_n)=R_k\quad (0\leq k\leq n-1);$$

$\{\ell(O_iO_{i+1})\}_{i=0}^{n-1}$ egyenesek páronként merőlegesek egymásra, az $[O_0O_1],[O_1O_2],[O_2O_3],\ldots[O_{n-2}O_{n-1}]$ élekkel szemben fekvő cellaszögek: rendre $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}, \ldots, \frac{\pi}{w}$ nagyságuak.

Vezessük most be a $\phi=O_0O_nO_1\sphericalangle$, $\chi=O_0O_nO_{n-1}\sphericalangle$, $\Psi=O_{n-2}O_nO_{n-1}\sphericalangle$ jelöléseket. Belátható, hogy 2ϕ szög alatt "látható" az O_n centrumból Π_n minden éle, χ szög alatt "látható" Π_n minden Π_{n-1} cellája körülirt $(n-1)$ - dimenziós gömbjének sugara, s végül Π_n bármely két szomszédos cellájának $(\Pi_{n-1}^1,\Pi_{n-1}^2)\sphericalangle$ hajlásszöge $\pi-2\Psi$. (1. ábra)

Jelölje most a $\Pi_n=\{p,q,r,\ldots,u,v,w\}$ szabályos politóp R_0,ℓ és ϕ mennyiségeinek egy csucsnál levő $\{q,r,\ldots,u,v,w\}$ csucsalakzatán megfelelő mennyiségeket R_0',ℓ' és ϕ'. Ekkor:

$R_0\cdot\sin\phi=d(O_0O_1)=\ell$; $R_0'\cdot\sin\phi'=d(O_0'O_1')=\ell'$; $R_0'=\ell\cdot\cos\phi$; és

$$\ell'=\ell\cdot\cos\frac{\pi}{p}$$

Ezek felhasználásával: $\ell\cdot\cos\phi\cdot\sin\phi'=\ell\cdot\cos\frac{\pi}{p}$ adódik, amiből pedig:

$$\sin^2\phi=1-\frac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{\sin^2\phi'}$$

A fenti gondolatsor $\{q,r,\ldots,u,v,w\}$ politópra és $\{r,\ldots,u,v,w\}$ csucsalakzatára való megismétlésével kapjuk:

$$\sin^2\phi' = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{q}}{\sin^2\phi''}$$

Folytatva az eljárást összesen $n-2$ formulát nyerhetünk:

$$\sin^2\phi = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{\sin^2\phi'}\,;\quad \sin^2\phi' = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{q}}{\sin^2\phi''}\,;\ldots;\quad \sin^2\phi^{(n-3)} = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{r}}{\sin^2\phi^{(n-2)}}\,.$$

Vegyük észre azonban, hogy $\phi^{(n-2)} \equiv \frac{\pi}{s}$, s ennek felhasználásával:

$$\sin^2\phi = 1 - \cfrac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{1 - \cfrac{\cos^2\frac{\pi}{q}}{1 - \cfrac{\cos^2\frac{\pi}{r}}{\ddots \cfrac{}{1 - \cfrac{\cos^2\frac{\pi}{s}}{\sin^2\frac{\pi}{s}}}}}}$$

összefüggést nyerhetjük. Nézzük most a $\phi, \phi', \ldots, \phi^{(n-3)}$ formuláinak kapcsolatát:

$$\sin^2\phi^{(n-3)} = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{r}}{\sin^2\frac{\pi}{s}} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{s} - \cos^2\frac{\pi}{r}}{\sin^2\frac{\pi}{s}} \equiv \frac{\Delta_w - \Delta\cdot\cos^2\frac{\pi}{r}}{\Delta_w} \equiv \frac{\Delta_{rw}}{\Delta_w}\,,$$

ahol $\Delta_w \equiv \sin^2\frac{\pi}{s}$, $\Delta \equiv 1$, $\Delta_{rw} \equiv \Delta_w - \Delta\cdot\cos^2\frac{\pi}{r}$;

$$\sin^2\phi^{(n-4)} = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{q}}{\sin^2\phi^{(n-3)}} = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{q}}{\frac{\Delta_{rw}}{\Delta_w}} = \frac{\Delta_{rw} - \Delta_w\cdot\cos^2\frac{\pi}{q}}{\Delta_{rw}} \equiv \frac{\Delta_{qrw}}{\Delta_{rw}}\,,$$

ahol $\Delta_{qrw} \equiv \Delta_{rw} - \Delta_w\cdot\cos^2\frac{\pi}{q}$; ... végül

$$\sin^2\phi = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{\sin^2\phi'} = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{\frac{\Delta_{qr\ldots uvw}}{\Delta_{r\ldots uvw}}} = \frac{\Delta_{qr\ldots uvw} - \Delta_{r\ldots uvw}\cdot\cos^2\frac{\pi}{p}}{\Delta_{qr\ldots uvw}} \equiv$$

$$\equiv \frac{\Delta_{pqr\ldots uvw}}{\Delta_{qr\ldots uvw}}\,,\quad \text{ahol}\quad \Delta_{pqr\ldots uvw} \equiv \Delta_{qr\ldots uvw} - \Delta_{r\ldots uvw}\cdot\cos^2\frac{\pi}{p}\,,$$

a fenti rekurziós formulával meghatározott $\Delta_{pqr\ldots uvw}$ függvényt a $\Pi_n = \{p, q, r, \ldots, u, v, w\}$ szabályos politóp Schläfli-féle függvényének nevezzük.

2.4 A $\Delta_{pqr\ldots uvw}$ kiszámitása néhány egyszerü esetben

1. Ha $\Pi_2=\{p\}\subset E_2$,akkor $\phi=\frac{\pi}{p}$,s ezért $\sin^2\phi=\sin^2\frac{\pi}{p}=\frac{\Delta_p}{\Delta}$, ahol $\Delta=1$, vagyis

$$\Delta_p=\sin^2\frac{\pi}{p}\ .$$

2. Ha $\Pi_3=\{p,q\}\subset E_3$,akkor $\phi'=\frac{\pi}{q}$,s ezért

$\sin^2\phi=1-\frac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{\sin^2\frac{\pi}{q}}=\frac{\Delta_q-\Delta\cdot\cos^2\frac{\pi}{p}}{\Delta_q}$, ahol $\Delta_q=\sin^2\frac{\pi}{q}$, $\Delta=1$ végül

$\Delta_{pq}=\Delta_q-\Delta\cdot\cos^2\frac{\pi}{p}$,aminek felhasználásával:

$$\Delta_{pq}=\sin^2\frac{\pi}{q}-\cos^2\frac{\pi}{p}\ .$$

3. Ha $\Pi_4=\{p,q,r\}\subset E_4$, akkor $\phi''=\frac{\pi}{r}$, s ezért

$$\sin^2\phi=1-\frac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{1-\frac{\cos^2\frac{\pi}{q}}{\sin^2\frac{\pi}{r}}}=\frac{\Delta_{qr}-\Delta_r\cdot\cos^2\frac{\pi}{p}}{\Delta_{qr}}\ ,\text{ahol }\Delta_r=\sin^2\frac{\pi}{r}\ ,$$

$\Delta_{qr}=\sin^2\frac{\pi}{r}-\cos^2\frac{\pi}{q}$, $\Delta_{pqr}=\Delta_{qr}-\Delta_r\cdot\cos^2\frac{\pi}{p}$,amiből pedig

$$\Delta_{pqr}=\sin^2\frac{\pi}{p}\cdot\sin^2\frac{\pi}{r}-\cos^2\frac{\pi}{q}\ .$$

4. Ha $\Pi_5=\{p,q,r,s\}\subset E_5$, akkor $\phi'''=\frac{\pi}{s}$,s ezért

$$\sin^2\phi=1-\frac{\cos^2\frac{\pi}{p}}{1-\frac{\cos^2\frac{\pi}{q}}{1-\frac{\cos^2\frac{\pi}{r}}{\sin^2\frac{\pi}{s}}}}=\frac{\Delta_{qrs}-\Delta_{rs}\cdot\cos^2\frac{\pi}{p}}{\Delta_{qrs}}\ ,\text{ahol}$$

$\Delta_s=\sin^2\frac{\pi}{s}$, $\Delta_{rs}=\sin^2\frac{\pi}{s}-\cos^2\frac{\pi}{r}$, $\Delta_{qrs}=\sin^2\frac{\pi}{q}\cdot\sin^2\frac{\pi}{s}-\cos^2\frac{\pi}{r}$,

végül $\Delta_{pqrs}=\Delta_{qrs}-\Delta_{rs}\cdot\cos^2\frac{\pi}{p}$,aminek felhasználásával:

$$\Delta_{pqrs}=\sin^2\frac{\pi}{p}\cdot\sin^2\frac{\pi}{q}\cdot\sin^2\frac{\pi}{s}-\sin^2\frac{\pi}{p}\cdot\cos^2\frac{\pi}{r}-\sin^2\frac{\pi}{q}\cdot\cos^2\frac{\pi}{p}\ .$$

2.5 A $\Delta_{pqr\dots uvw}$ függvény néhány alapvető tulajdonsága

Ha $c_1=\cos\frac{\pi}{p}$, $c_2=\cos\frac{\pi}{q}$, $c_3=\cos\frac{\pi}{r}$, … $c_{n-2}=\cos\frac{\pi}{v}$, $c_{n-1}=\cos\frac{\pi}{w}$, akkor a $\Delta_{pqr\dots uvw}$ függvény előállítható a következő alakban:

$$\Delta_{pqr\dots uvw}=\begin{vmatrix} 1 & c_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ c_1 & 1 & c_2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & c_2 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

Ha $n=1$, akkor a $\Delta=1=|1|$ megállapodás szerint érvényes az állitás.

Ha $n=2$, akkor a $\Delta_{pq}=1-c_1^2=1-\cos^2\frac{\pi}{p}=\sin^2\frac{\pi}{p}$, igaz az állitás.

Ha $n=3$, akkor a $\Delta_{pqr}=1-(c_1^2+c_2^2)=1-\left(\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}\right)=\sin^2\frac{\pi}{q}-\cos^2\frac{\pi}{p}$, tehát most is érvényes az állitás.

Tegyük fel ezután, hogy a fenti determináns előállitás érvényes minden $k\leq n-1$ természetes számra, s ennek felhasználásával igazoljuk állitásunk n esetén is!

$$\begin{vmatrix} 1 & c_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ c_1 & 1 & c_2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & c_2 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & c_2 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ c_2 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot c_1 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & c_3 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & c_3 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix} =$$

Itt az n esethez tartozó determinánst fejtettük ki első sora szerint, majd ezután alkalmazhatjuk az indukciós feltevésünket.

$$= \begin{vmatrix} 1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 1 & c_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_3 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix} - (-1)^{1+1} \cdot c_1^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & c_3 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{qr\ldots uvw} - c_1^2 \cdot \Delta_{r\ldots uvw} =$$

$= \Delta_{qr\ldots uvw} - \Delta_{r\ldots uvw} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{p} \equiv \Delta_{pqr\ldots uvw}$, s ezzel a tételt beláttuk.

Az imént bizonyitott determináns előállitás segitségével azonnal belátható, hogy a $\Delta_{pqr\ldots uvw}$ függvény szimmetrikus:

$$\Delta_{pqr\ldots uvw} = \Delta_{wvu\ldots rqp} ,$$

aminek megfelelően a $\Pi_n^* = \{w, v, u, \ldots, r, q, p\}$ n-dimenziós szabályos politópot a $\Pi_n = \{p, q, r, \ldots, u, v, w\}$ politóp duális, vagy reciprok politópjának nevezzük.

Érvényes továbbá az alábbi alapvető eredmény:

$$\Delta_{pqr\ldots uvw} > 0 .$$

Bizonyitás: Mivel

$$\sin^2\phi = \frac{\Delta_{pqr\ldots uvw}}{\Delta_{qr\ldots uvw}} , \quad \sin^2\phi' = \frac{\Delta_{qr\ldots uvw}}{\Delta_{r\ldots uvw}} , \ldots , \sin^2\phi^{(n-4)} = \frac{\Delta_{uvw}}{\Delta_{vw}} ,$$

$$\sin^2\phi^{(n-3)} = \frac{\Delta_{vw}}{\Delta_w} , \quad \sin^2\phi^{(n-2)} = \frac{\Delta_w}{\Delta} , \text{ ahol } \Delta \equiv 1 , \text{ igy azonban:}$$

$$\sin^2\phi \cdot \sin^2\phi' \cdot \ldots \cdot \sin^2\phi^{(n-4)} \cdot \sin^2\phi^{(n-3)} \cdot \sin^2\phi^{(n-2)} =$$

$$= \frac{\Delta_{pqr\ldots uvw}}{\Delta_{qr\ldots uvw}} \cdot \frac{\Delta_{qr\ldots uvw}}{\Delta_{r\ldots uvw}} \cdot \ldots \cdot \frac{\Delta_{uvw}}{\Delta_{vw}} \cdot \frac{\Delta_{vw}}{\Delta_w} \cdot \frac{\Delta_w}{\Delta} = \Delta_{pqr\ldots uvw} .$$

Ebből pedig $\Delta_{pqr\ldots uvw} \geq 0$ következik. Ha azonban $\Delta_{pqr\ldots uvw} = 0$, akkor az első kiindulási összefüggés miatt $\sin\phi = 0$, vagyis $\frac{\ell}{R_0} = \sin\phi$ alapján $R_0 = \infty$, ám ekkor $\Pi_n = \{p, q, r, \ldots, u, v, w\}$ nem lehet korlátos ponthalmaz /hanem méhlép lesz /, igy sikerült belátni a tétel állitását.

2.6 Lehetséges szabályos politópok az $\mathbb{E}_n$ térben $(0 \le n \le 5)$

Vizsgáljuk most meg, hogy a $\Pi_n = \{p, q, r, \dots, u, v, w\}$ definiciója és a $\Delta_{pqr\dots uvw} > 0$ Schläfli-feltétel milyen szabályos politópokat engedélyez az egyes $\mathbb{E}_n$ terekben !

Az $\mathbb{E}_0$ tér egyetlen pontból áll, amelyet szabályos politópnak is tekinthetünk, s ez létezik is az $\mathbb{E}_0$ térben.

Az $\mathbb{E}_1$ tér egy euklideszi egyenes, amelynek szabályos politópjai az egyenes zárt szakaszai, s ezek léteznek is az $\mathbb{E}_1$ térben.

Az $\mathbb{E}_2$ térben, vagyis a klasszikus euklideszi síkon azon $\Pi_2\{p\}$ szabályos politópok lehetségesek, amelyek eleget tesznek a $p \ge 3$, $p \in \mathbb{N}$, másrészt a $\Delta_p = \sin^2 \frac{\pi}{p} > 0$ feltételeknek. Látható, hogy a $\Delta_p > 0$ nem jelent külön megkötést, igy a lehetséges zárt konvex szabályos poligonlapok szimbólumai:

$$\Pi_2 = \{p\}, \quad p \ge 3, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Az $\mathbb{E}_3$ térben, vagyis a klasszikus euklideszi térben azon $\Pi_3 = \{p, q\}$ szabályos politópok lehetségesek, amelyekre $\{p\}$ és $\{q\}$ lehetséges $\mathbb{E}_2$-beli szabályos politóp, másfelől $\Delta_{pq} = \sin^2 \frac{\pi}{q} - \cos^2 \frac{\pi}{p} > 0$ feltétel is teljesül, amely egyenértékü a $\sin^2 \frac{\pi}{p} + \sin^2 \frac{\pi}{q} > 1$ feltétellel. Könnyen belátható, hogy ez felülről korlátozza p és q értékét, sőt egyszerü közvetlen számitással igazolható, hogy csak az alábbi öt $\Pi_3 = \{p, q\}$ szimbólummal rendelkező szabályos politóp lehetséges:

$$\{3,3\}; \quad \{3,4\}; \quad \{4,3\}; \quad \{3,5\}; \quad \{5,3\}.$$

Az $\mathbb{E}_4$ térben csak olyan $\Pi_4 = \{p, q, r\}$ szabályos politópok lehetségesek, amelyekre $\{p, q\}$ és $\{q, r\}$ is lehetséges $\mathbb{E}_3$-beli szabályos politóp, másfelől $\Delta_{pqr} = \sin^2 \frac{\pi}{p} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{r} - \cos^2 \frac{\pi}{q} > 0$ feltétel is teljesül, amely jelen esetben egyenértékü a $\sin \frac{\pi}{p} \cdot \sin \frac{\pi}{r} > \cos \frac{\pi}{q}$ feltétellel. Egyszerü számitással belátható, hogy a fenti feltételeknek eleget tevő lehetséges $\Pi_4 = \{p, q, r\}$ szabályos politópok csakis az alábbiak lehetnek:

$$\{3,3,3\}; \quad \{3,3,4\}; \quad \{4,3,3\}; \quad \{3,4,3\}; \quad \{3,3,5\}; \quad \{5,3,3\}.$$

Az E_5 térben csak olyan $\Pi_5=\{p,q,r,s\}$ szabályos politópok lehetségesek, amelyekre $\{p,q,r\}$ és $\{q,r,s\}$ E_4- beli lehetséges szabályos politópok, másrészt $\Delta_{pqrs}=\sin^2\frac{\pi}{p}\cdot\sin^2\frac{\pi}{s}-$ $-\sin^2\frac{\pi}{p}\cdot\cos^2\frac{\pi}{r}-\sin^2\frac{\pi}{s}\cdot\cos^2\frac{\pi}{q}>0$ feltétel is teljesül, ami jelen esetben egyenértékü a

$$\frac{\cos^2\frac{\pi}{q}}{\sin^2\frac{\pi}{p}}+\frac{\cos^2\frac{\pi}{r}}{\sin^2\frac{\pi}{s}}<1$$

feltétellel. Könnyen belátható ekkor, hogy az alábbi szimbólumokkal rendelkező $\Pi_5=\{p,q,r,s\}$ szabályos politópok lehetségesek csak:

$$\{3,3,3,3\};\ \{3,3,3,4\};\ \{4,3,3,3\}.$$

2.7 Lehetséges szabályos politópok az E_n térben $(n>5)$

Kimutatjuk, hogy $n\geq 5$ esetén az E_n tér lehetséges szabályos $\Pi_n=\{p,q,r,\dots,u,v,w\}$ politópjai az alábbiak:

$$\Pi_n^1=\{3,3,\dots,3\}=\{3^{n-1}\};\ \Pi_n^2=\{3,3,\dots,3,4\}=\{3^{n-2},4\};\ \Pi_n^3=\{4,3,\dots,3\}=\{4,3^{n-2}\}.$$

Ennek igazolásához használjuk fel az alábbi eredményt és következményeit:

$$\Delta_{3^{n-1}}=\frac{n+1}{2^n}.$$

A bizonyitás az n dimenziószám szerinti teljes indukcióval történik:

$n=2$ esetén:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=1-\frac{1}{4}=\frac{2+1}{2^2},$$ igaz az állitás;

$n=3$ esetén:

$$\Delta_{33}=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3+1}{2^3},$$ igaz az állitás.

Tegyük most fel, hogy minden $k\leq n-1$ esetén igaz az állitás, s lássuk be ennek felhasználásával, hogy a tétel n esetén is igaz !

$$\Delta_{3^{n-1}} = \Delta_{3^{n-2}} - \Delta_{3^{n-3}} \cdot \cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{(n-1)+1}{2^{n-1}} - \frac{(n-2)+1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{n+1}{2^n} .$$

következmények:

$$\Delta_{3^{n-2}4} = \Delta_{4\,3^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \; ; \quad \Delta_{4\,3^{n-3}\,4} = 0 .$$

Bizonyitás:

$$\Delta_{3^{n-2}4} = \Delta_{4\,3^{n-2}} = \Delta_{3^{n-2}} - \Delta_{3^{n-3}} \cdot \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{(n-1)+1}{2^{n-1}} - \frac{(n-2)+1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-1}} ;$$

$$\Delta_{4\,3^{n-3}4} = \Delta_{3^{n-3}4} - \Delta_{3^{n-4}4} \cdot \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^{(n-1)-1}} - \frac{1}{2^{(n-2)-1}} \cdot \frac{1}{2} = 0 .$$

Ezután az n dimenziószám szerinti teljes indukcióval igazoljuk e rész elején tett állitásunkat.

Az $n=5$ esetben az előző rész eredménye alapján igaz az állitás.

Tegyük fel, hogy minden $k \leq n-1$ esetben igaz a tétel, s bizonyitsuk ebből n esetén is állitásunk helyességét !

Feltételünk szerint $\mathbb{E}_{n-1}$ térben csak az alábbi szabályos politópok lehetségesek:

$$\pi^1_{n-1} = \{3^{n-2}\} \; ; \quad \pi^2_{n-1} = \{3^{n-3}, 4\} \; ; \quad \pi^3_{n-1} = \{4, 3^{n-3}\} .$$

Ezért $\mathbb{E}_n$ szabályos politópjai csak olyan $\pi_n = \{p, q, r, \ldots, u, v, w\}$ szimbólummal rendelkezhetnek, amelynek $\{p, q, r, \ldots, u, v\}$ celláit és $\{q, r, \ldots, u, v, w\}$ csucsalakzatait is $\{\pi^i_{n-1}\}_{i=1}^3$ közül választottuk ki.

Ennek megfelelően csak az alábbi lehetőségek vannak:

$$\pi^1_n = \{3^{n-1}\} \; ; \quad \pi^2_n = \{3^{n-2}, 4\} \; ; \quad \pi^3_n = \{4, 3^{n-2}\} \; ; \quad \pi^4_n = \{4, 3^{n-3}, 4\} .$$

E szimbólumok viszont csak akkor lehetnek π_n szabályos politóp szimbólumai, ha $\Delta_{pqr\ldots uvw} > 0$ feltétel is teljesül. Az imént láttuk be viszont, hogy $\Delta_{3^{n-1}} = \frac{n+1}{2^n}$, $\Delta_{3^{n-2}4} = \Delta_{4\,3^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-1}} > 0$ és $\Delta_{4\,3^{n-3}\,4} = 0$, aminek megfelelően a $\{\pi^i_n\}_{i=1}^3$ a három lehetséges $\mathbb{E}_n$-beli szabályos politóp szimbóluma, s π^4_n nem jelölhet korlátos ponthalmazt, ezzel a tétel állitását igazoltuk.

III. SZABÁLYOS POLITÓPOK MODELLJEINEK MEGSZERKESZTÉSE

3.1 Szabályos politópok megkonstruálása az E_2 térben

Az E_0 és E_1 tér lehetséges szabályos politópjai léteznek is, amint azt már korábban láttuk, igy most vizsgáljuk meg, hogy az E_2 tér lehetséges $\Pi_2=\{p\}$, $(p\geq 3,\ p\in\mathbb{N})$ szabályos politópjai megszerkeszthetők-e?

Tekintsük ezért az E_2 tér egy tetszőleges O pontját, s legyen $G_2(O,r)$ az O középpontu, r sugaru kör. Az O pontnál levő teljes szöget osszuk fel p egyenlő részre az O pontból kiinduló félegyenesek segitségével, s jelöljük e félegyeneseket $\{h_1(i)\}_{i=1}^{p}$ alakkal, akkor tekintsük a $P_i = G_2 \cap h_1(i)$ $(1\leq i\leq p)$ pontok $\triangle\{P_i\}_{i=1}^{p}$ konvex burkát, amely az E_2 tér $\Pi_2=\{p\}$ politópjának egy modelljét szolgáltatja. E konstrukcióval tehát $\{p\}$ létezését igazoltuk minden $p\geq 3$, $p\in\mathbb{N}$ esetén.

Természetesen a fenti elvi konstrukcióban nem vettük figyelembe, hogy milyen p esetén adható meg algoritmus $\{p\}$ modelljének megszerkesztéséhez az euklideszi szerkesztés szabályai szerint, mivel ez most számunkra mellékes az egzisztencia szempontjából. (2. ábra)

3.2 Szabályos politópok megkonstruálása az E_3 térben

Tekintsük az E_3 tér egy tetszőleges sikját, s ezen a $\{4\}$ négyzet egy modelljét. Toljuk el a $\{4\}$ politópot sikjára merőleges irányba élhosszával megegyező távolságba. Az eltolás közben a $\{4\}$ minden éle surol egy-egy $\{4\}$, a kiinduló politóppal egybevágó négyzetet. Igy tehát nyertünk az E_3 térben egy olyan Π_3 politópot, amelynek $N_0=2\cdot 4=8$ csucsa, $N_1=2\cdot 4+1\cdot 4=12$ éle, s $N_2=2\cdot 1+1\cdot 4=6$ lapja van, ahol Π_3 a kiinduló $\{4\}$ és az eltolás végén nyert $\{4\}$ négyzetek összesen nyolc csucsának konvex burkolója. A Π_3 minden csucsához három él illetve három lap illeszkedik, s minden lapja $\{4\}$, igy szükségképpen $\Pi_3=\{4,3\}$ politóp modellje, tehát $\{4,3\}$ politóp létezik, s e politópot KOCKÁnak nevezzük. Legyen P_1 a $\Pi_3=\{4,3\}$ kocka egy csucsa, s tükrözzük e csucsot a hozzá illeszkedő élek továbbá a hozzá illeszkedő testátló középpontjára.

Igy négy pontot nyerünk,amelyek a $\pi_3=\{4,3\}$ kocka négy csucsát alkotják.E négy csucs konvex burkolója egy olyan π_3 politóp, amelynek $N_0=4$ csucsa, $N_1=6$ egybevágó éle,s $N_2=4$ egybevágó $\{3\}$ szabályos háromszög lapja van.A politóp minden csucsához három él,illetve három lap illeszkedik,amelyek $\{3\}$ szimbólummal rendelkeznek,s igy a politóp szimbóluma szükségképpen $\pi_3=\{3,3\}$, amely tehát a fentiek alapján létezik,s e politópot szabályos TETRAÉDERnek nevezzük.

Tekintsük most a $\pi_3=\{4,3\}$ kocka $\{4\}$ lapjainak középpontjai által meghatározott politópot.Ez a politóp,amely tehát a kocka lapközéppontjainak konvex burka,nyilván $N_0=6$ csuccsal, $N_1=12$ egybevágó éllel,s $N_2=8$ egybevágó $\{3\}$ szabályos háromszög lappal rendelkezik.A politóp minden csucsához négy él illetve négy lap illeszkedik,s igy a kapott politóp a $\pi_3=\{3,4\}$ szimbólummal kell,hogy rendelkezzen,e politópot OKTAÉDERnek nevezzük.

Figyeljük meg,hogy a $\pi_3=\{3,4\}$ oktaéder lapjait kiszinezhetjük váltakozva fekete és fehér szinekre.Ez azt jelenti,hogy minden lapnak megadható egyértelmü körüljárási iránya,miután egy lap körüljárati irányát rögzitettük.Ezen eljárás a $\{3,4\}$ élvázának is ad egy irányitást.Osszuk fel ezután az irányitott éleket azonos $a:b$ arányban,s tekintsük az osztópontok konvex burkát.A kapott π_3 politóp azon lapjai,amelyeket a $\{3,4\}$ oktaéder lapjaiba irtunk bele, $\{3\}$ szabályos háromszögek,a további lapok szintén háromszögek,de "csak" egyenlőszáruak.Kérdés,hogy alkalmas $a:b=\tau$ arány választásával e háromszögek is szabályosakká tehetők-e?

Felismerve azt,hogy a $\{3,4\}$ olyan,a centrumon átmenő metszete,amelyhez négy csucs is illeszkedik $\{4\}$ négyzet,továbbá alkalmazva a cosinus tételt:

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\frac{\pi}{3}=a^2+b^2-ab\ ;\quad y^2=b^2+b^2=2b^2$$

Szabályos háromszög lapok akkor alakulnak ki,ha x=y vagyis:

$$a^2-ab-b^2=0 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)-1=0 \quad (b\neq 0);\ \left(\frac{a}{b}>0\right)$$

A megfelelő $\tau=a:b$ arány tehát az $x^2-x-1=0$ egyenlet pozitiv gyöke:

$$\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

s mivel $x^2-x-1=0 \iff \frac{1}{x}=\frac{x}{1+x}$,igy az osztópontok a $\{3,4\}$ éleit az aranymetszés arányában bontják,s ekkor a π_3 politóp minden éle egybevágó,s minden lapja $\{3\}$ egybevágó szabályos háromszög lap. (4. ábra)

Π_3 minden csucsánál továbbá öt él illetve öt lap illeszkedik, igy a megkonstruált szabályos politóp szükségképpen a $\{3,5\}$ szimbólummal rendelkezik,s neve IKOZAÉDER.A $\Pi_3=\{3,5\}$ ikozaéder konstrukciója folytán $N_0=12$ csuccsal, $N_1=30$ éllel és $N_2=20$ lappal rendelkezik,s ezzel a $\Pi_3=\{3,5\}$ létezését igazoltuk.
Tekintsük végül a $\Pi_3=\{3,5\}$ ikozaéder lapközéppontjainak konvex burkát.E Π_3 politóp nyilván $N_0=20$ csuccsal, $N_1=30$ egybevágó éllel,s $N_2=12$ egybevágó $\{5\}$ lapokkal rendelkezik,továbbá minden csucsban három él illetve három lap illeszkedik. Igy a kapott politóp szabályos,s szükségképpen a $\Pi_3=\{5,3\}$ szimbólummal kell rendelkeznie.Az ismertetett eljárásokkal pedig megkonstruáltuk az E_3 tér mind az öt lehetséges szabályos politópját,s ezzel igazoltuk azok létezését.Figyeljük meg végül,hogy $\{4,3\}$; $\{3,4\}$ továbbá $\{5,3\}$; $\{3,5\}$ duális politóp párok,mig a $\{3,3\}$ autoduális politóp. (3.ábra); (5.ábra).

3.3 Szabályos politópok megkonstruálása az E_4 térben

Tekintsük az E_4 tér egy tetszőleges h_3 hipersikját,s e hipersikon egy $\{3,3\}$ tetraéder modellt.Található ekkor az $E_4 \setminus h_3$ ponthalmazban elyan pont /szám szerint kettő is/,amely a tetraéder minden csucsától a tetraéder élhosszával megegyező távolságra van.A $\{3,3\}$ négy csucsa,s az imént kapott pont alkotta öt elemü ponthalmaz konvex burkolója olyan Π_4 politóp,amely $N_0=5$ csuccsal, $N_1=10$ egybevágó éllel, $N_2=10$ egybevágó $\{3\}$ lappal,s $N_3=5$ egybevágó $\{3,3\}$ tetraéder cellával rendelkezik. Minden élhez pontosan három tetraéder cella illeszkedik,igy a Π_4 politóp szabályos s szükségszerüen a $\{3,3,3\}$ szimbólummal kell rendelkeznie.A $\Pi_4=\{3,3,3\}\equiv\alpha_4$ politóp neve 4-dimenziós szabályos SZIMPLEX,mivel ez a legegyszerübb E_4-beli 4-dimenziós szabályos politóp.
Tekintsük az E_4 tér egy tetszőleges h_3 hipersikját,s e hipersikon egy $\{4,3\}$ kocka modellt.Toljuk el a kockát a kockaélhossz nagyságu,s h_3 -ra teljesen ortogonális irányu eltolással /ez pontosan két féle képpen lehetséges/.Tekintsük azt a Π_4 politópot,amely az eredeti $\{4,3\}$ és az eltolt $\{4,3\}$ összesen 16 csucsának konvex burka.A Π_4 politóp ennélfogva $N_0=16$ csuccsal, $N_1=2\cdot12+8=32$ egybevágó éllel, $N_2=2\cdot6+12=24$ egybevágó $\{4\}$ lappal,s $N_3=2\cdot1+6=8$ egybevágó $\{4,3\}$

kocka cellával rendelkezik,továbbá minden él körül pontosan három kocka cella illeszkedik.Igy a Π_4 szabályos és szükségképpen $\{4,3,3\}$ szimbólummal kell rendelkeznie,neve 4-dimenziós HIPERKOCKA vagy MÉRTÉK POLITÓP.

Tekintsük ezután a $\{4,3,3\}$ hiperkocka egy modelljét,s vegyük a hiperkocka kocka cellái középpontjainak konvex burkát.A kapott Π_4 politóp a konstrukció folytán $N_0=8$ csuccsal, $N_1=24$ egybevágó éllel, $N_2=32$ egybevágó $\{3\}$ lappal,s $N_3=16$ egybevágó $\{3,3\}$ cellával rendelkezik. Π_4 minden éléhez pontosan négy tetraéder cella illeszkedik,igy a Π_4 szabályos,s kell,hogy $\{3,3,4\}$ szimbólummal rendelkezzen.Neve 4-dimenziós KERESZT politóp.

Legyen adott a $\{3,3,4\}$ keresztpolitóp egy modellje,s tekintsük 24 élének középpontját.E 24 pont konvex burka az $\mathbb{E}_4$ tér olyan Π_4 politópja,amelyet egyrészt a $\{3,3,4\}$ 16 $\{3,3\}$ tetraéder cellájának élközéppontjai által meghatározott konvex burok,másrészt a $\{3,3,4\}$ 8 $\{3,4\}$ oktaéder csucsalakzata által meghatározott konvex burok határol.Mivel a $\{3,3\}$ élközéppontjainak konvex burka $\{3,4\}$, továbbá a $\{3,4\}$ csucsalakzatok,mint a Π_4 cellái egybevágóak,továbbá a csucsok,élek,lapok illeszkedés szempontjából ekvivalensek,igy Π_4 szabályos politóp.A konstrukció alapján azonban $\Pi_4=\{3,4,3\}$ lehet csak,mivel minden élhez pontosan három $\{3,4\}$ cella illeszkedik. A $\{3,3,4\}$ 16 $\{3,3\}$ cellával és 8 csucsalakzattal rendelkezik,igy $\{3,4,3\}$ $N_3=16+8=24$ számu $\{3,4\}$ cellával rendelkezik.Minden $\{3,4\}$ cellának 8 $\{3\}$ lapja van,amely pontosan két oktaéder cellához illeszkedik,igy $N_2=24\cdot\frac{8}{2}$ .Minden $\{3,4\}$ oktaéder cellának 12 éle van, amely élek viszont pontosan három cellához is illeszkednek,igy $N_1=24\cdot\frac{12}{3}$. Végül pedig $N_0=24$ a konstrukció folytán,s ezzel a $\{3,4,3\}$ politóp létezését is bebizonyitottuk. (6.ábra); (8.ábra).

Észrevehetjük,hogy $\{3,4,3\}$ előállitható két,egybevágó $\{4,3,3\}$ hiperkocka segitségével is,ha felbontjuk az egyik hiperkockát 8 olyan egybevágó kocka "alapu" gulára,amelynek csucsa a hiperkocka középpontja.Helyezzük most a gulákat alapjukkal a másik hiperkocka celláira,akkor a kapott Π_4 politóp éppen egy $\{3,4,3\}$ lesz.Ezzel analóg eljárással $\mathbb{E}_2$ térben két $\{4\}$ négyzetből egy ujabb $\{4\}$ négyzetet,mig az $\mathbb{E}_3$ térben két $\{4,3\}$ kockából az un. rombuszdodekaédert nyerjük. (7.ábra).

Megmutatjuk ezután,hogy a $\{3,4,3\}$ politóp $\{3,4\}$ celláinak lapjai ugy szinezhetők váltakozva fekete és fehér szinekre,hogy a $\{3,4,3\}$ politóp összeállitásakor fehér lap mindig fekete lephoz illeszkedik és megforditva.

Ez másként ugy is mondható,hogy a $\{3,4,3\}$ minden $\{3\}$ lapjának megadható egyértelmü körüljárási iránya,miután ezt a körüljárást egy lapnál rögzitettük.Ezen eljárás nyilván $\{3,4,3\}$ élhálózatának is ad egyértelmü irányitást.
Tekintsük ezért a $\{3,3,4\}$ kereszt politóp $\{3,3\}$ cellaközéppontjainak konvex burkát,amely a korábbiak szerint nyilván egy $\{4,3,3\}$ hiperkocka lesz.E $\{4,3,3\}$ csucsait váltakozva könnyedén beszinezhetjük fekete és fehér szinekre.Ha most a $\{3,3,4\}$ politóp $\{3,3\}$ celláit beszinezzük a középpontjaikban levő szinezett hiperkocka csucs szinére,akkor ezzel a $\{3,3,4\}$ politóp $\{3,3\}$ celláit sikerült váltakozva kiszinezni fekete illetve fehér szinekre.
Ezután a $\{3,3,4\}$ politóp fehér $\{3,3\}$ celláinak felületét szinezzük feketére,fekete $\{3,3\}$ celláinak felületét pedig fehérre,majd pedig vágjuk le minden $\{3,3\}$ cella "Sarkait" csucsalakzatuk mentém.Ezzel 16 darab $\{3,4\}$ oktaédert kapunk,amelyek váltakozva rendelkeznek fekete és fehér lapokkal és a kivánt módon csatlakoznak.Most azonban a $\{3,3,4\}$ "felületén" még 8 $\{3,4\}$ alaku "lyuk" marad,amely nem más,mint a $\{3,3,4\}$ 8 csucsalakzata.E csucsalakzatok a fenti eljárással automatikusan váltakozó fekete és fehér lapokkal határolt "üregek",s ha beléjük olyan $\{3,4\}$ hézagmentesen betöltő oktaédereket helyezünk,amelyeknek váltakozva szinezett lapjai az üreg ellentétesen szinezett lapjaival kerülnek illeszkedésbe,akkor a $\{3,4,3\}$ lapjainak éppen kivánt szinezése tárul elénk.
Bontsuk fel ezután a $\{3,4,3\}$ fenti eljárással irányitott éleit az aranymetszés arányában,s tekintsük a 96 osztópont konvex burkát. Az igy nyert Π_4 politóp 3-dimenziós celláit vizsgálva találhatunk a $\{3,4,3\}$ 24 $\{3,4\}$ cellájába beirt 24 $\{3,5\}$ ikozaéder cellát,amelyek a konstrukció folytán egybevágóak. A Π_4 további 3- dimenziós cellájának megkeresésséhez vizsgáljuk meg a $\{3,4,3\}$ egy tetszőleges V csucsának környezetét.A korábbiak szerint a V csucshoz 8 irányitott él illeszkedik, 4 a V csucs "felé",4 a V csucstól "kifelé" irányitva.A négy kiinduló,illetve a négy befutó él osztópontjai egy-egy tetraéder csucsait alkotják.Jelölje Δ_{ABCD} azon tetraédert,amelynek csucspontjait a V -hez közelebbi osztópontok határozzák meg,s amely a Π_4 egy cellája is lesz.A Δ_{ABCD} $\{3,3\}$ cella $\{3\}$ lapjai a Π_4 `további celláihoz is tartoznak.

A V csucshoz illeszkedő további négy élen levő távolabbi osztópontok megbetüzhetők ugy,hogy a Δ_{ABCD} lapjaihoz lapjaikkal csatlakozó további $\{3,3\}$ cellák: $\Delta_{ABCD'}$; $\Delta_{ABC'D}$; $\Delta_{AB'CD}$; $\Delta_{A'BCD}$ ezek az Δ_{ABCD} cellával egybevágóak és "hézagmentesen" kitöltik a Π_4 politóp "felületének" $\{3,5\}$ ikozaéder cellái közti "réseket".Ennek megfelelően a Δ_{ABCD} cellához illeszkedő 4 $\{3,3\}$ cella azon lapjai,amelyek nem illeszkednek Δ_{ABCD} valamelyik lapjához, $\{3,5\}$ cellákhoz illeszkedik; számszerint összesen 6 $\{3,5\}$ cellához kapcsolódik a fenti 5 $\{3,3\}$ cellából álló alakzat. (9. 9/A. 9/B és 10. ábrák).
Mivel a $\{3,4,3\}$ 24 csuccsal rendelkezik,s ezek mindegyikének környezetében 5 $\{3,3\}$ cella van,igy a Π_4 politóp 24.5=120 $\{3,3\}$ cellával és 24 $\{3,5\}$ cellával bir.E politóp csucsai illeszkedés szempontjából ekvivalensek,élei egybevágóak,lapjai egybevágó $\{3\}$ lapok,ám a 3-dimenziós cellák két különböző tipusa miatt a Π_4 nem szabályos.Illeszkedés szempontjából két különböző tipusu éle van:az egyikhez 3 $\{3,3\}$ és 1 $\{3,5\}$;a másikhoz 1 $\{3,3\}$ és 2 $\{3,5\}$ illeszkedik.A kapott politópot $S\{3,4,3\}$ szimbólummal jelöljük. (11. ábra)
Mivel egy $\{3,5\}$ körülirt gömbjének sugara kisebb,mint élhossza, igy az E_4 térben megalkotható olyan ikozaéder alapu gula,amelynek 20 $\{3,3\}$ oldal cellája van.Cseréljük most ki az $S\{3,4,3\}$ politóp 24 $\{3,5\}$ celláját a fenti $\{3,5\}$alapu gulákra,s ha e gulák csucsai nem $S\{3,4,3\}$ centruma felé mutatnak,hanem "kifelé", akkor az igy módositott $S\{3,4,3\}$ politóp már szabályos lesz, minden csucsa illeszkedés szempontjából ekvivalens,minden éle egybevágó,lapjai egybevágó $\{3\}$ lapok,cellái egybevágó $\{3,3\}$ tetraéderek.Mivel pedig minden élhez pontosan 2+3=1+2.2=5 $\{3,3\}$ cella illeszkedik / a kétféle kiszámitást $S\{3,4,3\}$ két tipusu éle indokolja/,igy a megkonstruált politóp szükségképpen $\{3,3,5\}$ szimbólummal kell,hogy rendelkezzen.A $\{3,3,5\}$politóp 24.20=480 gulákból származó és 24.5=120 további,vagyis összesen $N_3=600$ $\{3,3\}$cellával rendelkezik.Minden $\{3,3\}$ cellához illeszkedik 4 $\{3\}$ lap,s minden lap pontosan két $\{3,3\}$ cellához illeszkedik,igy $N_2=600\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=1200$. Minden tetraéder $\{3,3\}$ cellához 6 él illeszkedik,s minden él pontosan öt$\{3,3\}$cellához illeszkedik,s ezért $N_1=600\cdot 6\cdot\frac{1}{5}=720$ .Mivel $S\{3,4,3\}$ 96 csuccsal rendelkezik,s ehhez még 24 csuccsal járulnak az $\{3,5\}$ alapu gulák,igy

$N_0 = 96 + 24 = 120$,amiből visszafelé az is következik,hogy minden $\{3,3\}$ cellához 4 csucs illeszkedvén egy csucshoz $\{3,3,5\}$ politópnak 20 $\{3,3\}$ illeszkedik.S ezzel a konstrukcióval $\{3,3,5\}$ létezését bebizonyitottuk.

Tekintsük a $\{3,3,5\}$ egy modelljének $\{3,3\}$ celláit,s e cellák középpontjainak konvex burkát.Könnyen látható,hogy a kapott politóp $N_0 = 600$ csuccsal rendelkezik,továbbá pontosan annyi éle van,ahány lapja van a $\{3,3,5\}$ politópnak,mivel kölcsönösen egyértelmü leképzés létesithető a konstruált politóp élei és $\{3,3,5\}$ lapjai között: $\{3,3,5\}$ egy szomszédos $\{3,3\}$ cellapárjához rendeljük hozzá a konstruált politóp azon élét,amely a cellapár középpontjait köti össze.Mivel a $\{3,3,5\}$ minden éléhez pontosan öt $\{3,3\}$ cella illeszkedik,ezért a konstruált politóp lapjai $\{5\}$ lapok.Világos továbbá az $\{5\}$ lapok száma azonos $\{3,3,5\}$ éleinek számával,hiszen köztük kölcsönösen egyértelmü leképzés létesithető: $\{3,3,5\}$ minden éléhez rendeljük hozzá a vele illeszkedő 5 $\{3,3\}$ cella központjai által meghatározott $\{5\}$ lapot.

A fentiek alapján azonban a konstruált politópnak csak $\{5,3\}$ celláli lehetnek,s számuk megegyezik $\{3,3,5\}$ csucsainak számával.Mivel a megkonstuált politóp minden éléhez 3 $\{5,3\}$ cella illeszkedik,s csucsai,élei,lapjai és celláli illeszkedés szempontjából ekvivalensek,igy a megalkotott politóp szabályos és szükségképpen $\{5,3,3\}$ szimbólummal kell rendelkeznie,s ezzel az $\{5,3,3\}$ politóp létezését is bebizonyitottuk.

Figyeljük meg végül,hogy a $\{4,3,3\}$; $\{3,3,4\}$ továbbá $\{5,3,3\}$; $\{3,3,5\}$ duális politóp párok,mig $\{3,3,3\}$ és $\{3,4,3\}$ autoduális politópok!

A fentiekben ismertetett eljárásokkal az E_4 tér mind a hat lehetséges szabályos politópját megkonstruáltuk,s ezzel létezésüket bebizonyitottuk.

3.4 Szabályos politópok megkonstruálása az E_n $(n \geq 5)$ térben

Az E_0 tér egyetlen alakzata a π_0 pont.Az E_1 térben több pont is létezik, π_1 két különböző pont által meghatározott egyenes szakasz. π_1 előállitható még,mint két végpontjának konvex burkolója az E_1 térben.Az E_2 térben vegyünk egy olyan pontot, amely nem illeszkedik a π_1 egyeneséhez,akkor a pont és π_1 végpontjai alkotta három elemü ponthalmaz konvex burkolója lesz

E_2 legegyszerübb T_2 alakzata, a háromszög-lap. Tekintsük az E_3 tér egy olyan pontját, amely nem illeszkedik a T_2 háromszög-lap sikjához, akkor a pont és a háromszög három csucspontjának konvex burka a legegyszerübb alakzat az E_3 térben, ez pedig a T_3 általános tetraéder. Az általános eljárás most már nyilvánvaló: tekintsük az E_n tér tetszőleges $n+1$ pontját, amelyek nem illeszkednek egy hipersikhoz, ekkor az $n+1$ általános helyzetünek nevezett pont konvex burkolója az E_n tér legegyszerübb T_n politópját alkotja, amelyet n-dimenziós SZIMPLEXnek nevezünk. Az értelmezés folytán az n-dimenziós szimplex k-dimenziós cellái $(0 \le k \le n)$ maguk is k-dimenziós szimplexek, s minden k-dimenziós szimplex cella azonositható az n-dimenziós szimplex csucsiból kiválasztható $k+1$ elemü részhalmazokkal, ezért:

$$N_k = \binom{n+1}{k+1} \qquad (0 \le k \le n)$$

Az olyan n-dimenziós szimplexet, amelynek minden éle azonos hosszuságu, vagyis bármely csucspárjának távolsága egyenlő, n-dimenziós szabályos szimplexnek nevezzük és α_n szimbólummal jelöljük. A fentiek szerint α_n rendelkezik $N_0 = n+1$ csuccsal, $N_1 = \binom{n+1}{2}$ egybevágó éllel, $N_2 = \binom{n+1}{3}$ egybevágó $\{3\}$ lappal, $N_3 = \binom{n+1}{4}$ egybevágó $\{3,3\}$ cellával..., igy szimbóluma szükségképpen $\alpha_n = \{3,3,\dots,3,3\} = \{3^{n-1}\}$, s ezzel $T_n^1 = \alpha_n$ tipusu politóp létezését az E_n térben igazoltuk. (12. ábra)

Az E_n tér egy másik alapvető alakzatát konstruálhatjuk meg az $O \in E_n$ ponthoz illeszkedő, páronként egymásra merőleges n számu egyenes segitségével. Vegyük az n számu, páronként egymásra merőleges egyeneshez illeszkedő azon $2n$ pontot, amelyeknek távolsága az egyenesek közös O pontjától egy rögzitett pozitiv érték. Ekkor e $2n$ számu pont konvex burkolóját β_n szimbólummal jelöljük és KERESZT politópnak nevezzük. A β_2 politóp a $\beta_1 = T_1$ zárt szakasz alapon nyugvó kettős háromszög lap, amely pontok elhelyezkedése folytán egy $\{4\}$ négyzet. A β_3 politóp a $\beta_2 = \{4\}$ alapon nyugvó kettős gula, s a pontok elhelyezkedése folytán egy $\{3,4\}$ oktaéder. Folytatva az eljárást, β_n kereszt politóp egy β_{n-1} politóp "alapon" nyugvó kettős gula α_{n-1} alaku cellákkal, igy a β_n szabályos politóp s szükségszerüen $\beta_n = \{3,3,\dots,3,4\} = \{3^{n-2},4\}$ szimbólummal kell, hogy rendelkezzen. A β_n k-dimenziós celláinak számára

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

$(0 \le k \le n-1)$ érvényes az alábbi összefüggés:

$$N_k = 2^{k+1} \cdot \binom{n}{k+1} \qquad (0 \le k \le n-1,\ n \ge 1)$$

Az igazolást az n dimenzió-szám szerinti teljes indukcióval végezzük.

Ha $n=1$,akkor $N_0 = 2 \cdot \binom{1}{1} = 2$,vagyis az állitás igaz.

Ha $n=2$,akkor $N_0 = 2 \cdot \binom{2}{1} = 4$, $N_1 = 2^2 \cdot \binom{2}{2} = 4$,tehát az állitás most is érvényes.

Tegyük most fel,hogy $n \le n-1$ esetén a tétel állitása igaz,s igazoljuk ebből,hogy n esetén is igaz az állitás! β_n konstrukciója folytán:

$$N_k^{(n)} = N_k^{(n-1)} + 2 \cdot N_{k-1}^{(n-1)}$$

s igy $N_k^{(n)} = 2^{k+1} \cdot \binom{n-1}{k+1} + 2 \cdot 2^k \cdot \binom{n-1}{k} = 2^{k+1} \cdot \left[\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} \right] = 2^{k+1} \cdot \binom{n}{k+1}$,

s ezzel az állitást igazoltuk,igy pedig $\beta_n = \{3^{n-2}, 4\}$ keresztpolitóp létezését bebizonyitottuk. (13.ábra)

Az E_n tér politópjainak egy harmadik tipusát a következő képpen konstruálhatjuk meg:ha a T_0 pontot eltoljuk,akkor kezdő és véghelyzetének konvex burka a T_1 egyenes szakasz;ha a T_1 szakaszt eltoljuk, /nem saját egyenese mentén/,akkor kezdő és véghelyzetének konvex burka egy T_2 paralelogramma.Hasonló eljárással a T_2 paralelogrammából nyerhetjük a T_3 paralelepipedont,s folytatva eljuthatunk az E_n tér n-dim. paralelotópjához.Ezen alakzatnak nyilván 2^n csucsa van,s k-dimenziós cellái $(0 \le k \le n-1)$ k-dimenziós paralelotópok.Figyeljük meg,hogy az $(n-1)$-dimenziós paralelotópot ugy kaptuk meg,hogy az $(n-1)$-dimenziós paralelotópot ugy toljuk el,hogy az eltolás egyenese nem illeszkedik az $(n-1)$-dimenziós paralelotóp tartó hipersikhához.Az n-dimenziós paralelotóp k-dimenziós celláinak számára $(0 \le k \le n)$ érvényes az alábbi összefüggés:

$$N_k = 2^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \qquad (0 \le k \le n,\ n \ge 1)$$

A bizonyitást az n dimenziószám szerinti teljes indukcióval végezzük.

Ha $n=1$,akkor $N_0 = 2^1 \cdot \binom{1}{0} = 2$, $N_1 = 2^0 \cdot \binom{1}{1} = 1$,tehát igaz az állitás.

Ha $n=2$,akkor $N_0 = 2^2 \cdot \binom{2}{0} = 4$, $N_1 = 2^1 \binom{2}{1} = 4$, $N_2 = 2^0 \cdot \binom{2}{2} = 1$, tehát most is igaz az állitás.

Tegyük most fel,hogy $n \le n-1$ esetén igaz a tétel állitása,s igazoljuk ebből,hogy n esetén is igaz az állitás!

A paralelotóp konstrukciója folytán:

$$N_k^{(n)} = 2 \cdot N_k^{(n-1)} + N_{k-1}^{(n-1)} \quad , \text{ és így}$$

$$N_k^{(n)} = 2 \cdot N_k^{(n-1)} + N_{k-1}^{(n-1)} = 2 \cdot 2^{(n-1)-k} \cdot \binom{n-1}{k} + 2^{(n-1)-(k-1)} \cdot \binom{n-1}{k-1} =$$

$$= 2^{n-k} \cdot \binom{n-1}{k} + 2^{n-k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-k} \cdot \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] = 2^{n-k} \cdot \binom{n}{k},$$

s ezzel az állitást igazoltuk.

Ha a Π_n paralelotópot generáló n eltolás iránya páronként egymásra merőleges, akkor az ilyen politópot ortotópnak nevezzük, amely $n=2$ esetén a téglalap, $n=3$ esetén a téglatest fogalmának felel meg. Ha a merőlegességen felül még minden eltolás nagysága is azonos, akkor az ortotópot MÉRTÉK-politópnak, vagy n -dimenziós HIPER KOCKÁnak nevezzük és γ_n szimbólummal jelöljük. Ekkor azonban $\gamma_0 = \Pi_0$, $\gamma_1 = \Pi_1$, $\gamma_2 = \{4\}$, $\gamma_3 = \{4,3\}$, ... általában $\gamma_n = \{4,3,\dots,3\} = \{4, 3^{n-2}\}$ szimbólummal rendelkezik, s ezzel a fent ismertetett eljárással igazoltuk a γ_n mérték-politóp létezését. (14-15-16. ábra)

Ezzel az eljárással befejeztük annak vizsgálatát, hogy az E_n térben a $\Delta_{pqr\dots uvw} > 0$ feltétellel engedélyezett szabályos politópok mind léteznek is.

Az E_3 és E_4 tér szabályos politópjainak táblázata:

$\Pi_3 = \{p,q\}$ neve	SCHLÄFLI szimbóluma	N_0	N_1	N_2
TETRAÉDER	$\{3,3\}$	4	6	4
KOCKA } D	$\{4,3\}$	8	12	6
OKTAÉDER }	$\{3,4\}$	6	12	8
DODEKAÉDER } D	$\{5,3\}$	20	30	12
IKOZAÉDER }	$\{3,5\}$	12	30	20

$\Pi_4 = \{p,q,r\}$ neve	SCHLÄFLI szimbóluma	N_0	N_1	N_2	N_3
α_4 SZIMPLEX	$\{3,3,3\}$	5	10	10	5
γ_4 HIPERKOCKA } D	$\{4,3,3\}$	16	32	24	8
β_4 KERESZT }	$\{3,3,4\}$	8	24	32	16
24-CELLA	$\{3,4,3\}$	24	96	96	24
120-CELLA } D	$\{5,3,3\}$	600	1200	720	120
600-CELLA }	$\{3,3,5\}$	120	720	1200	600

IV. K O O R D I N Á T Á K

4.1 Koordináták bevezetése az $\mathbb{E}_n$ térben

Jelölje $\mathbb{R}_n$ a valós számokból képzett rendezett n-esek halmazát, vagyis legyen

$$\mathbb{R}_n = \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \xi_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n \right\}.$$

Az $\mathbb{R}_n$ halmazon vektortér struktura értelmezhető az alábbi módon:

összeadás: $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \xi_1+\eta_1 \\ \xi_2+\eta_2 \\ \vdots \\ \xi_n+\eta_n \end{bmatrix}$, valós számmal való szorzás $\lambda \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \lambda \cdot \xi_1 \\ \lambda \cdot \xi_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot \xi_n \end{bmatrix}$,

skaláris szorzat: $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \eta_i$.

A kapott n-dimenziós valós euklideszi vektorteret n-dimenziós valós koordináta térnek nevezzük.
Legyen $O \in \mathbb{E}_n$ tetszőleges, de rögzitett pont, s $T_o(\mathbb{P})$ pedig az O ponthoz illeszkedő érintőtér. Ha $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ a $T_o(\mathbb{P})$ egy tetszőleges, de rögzitett olyan bázisa, amely eleget tesz az

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } i=j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases} \qquad (1 \le i, j \le n)$$

feltételnek, akkor az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ bázist ortonormáltnak nevezzük. Ha ezután $X \in \mathbb{E}_n$ egy tetszőleges pont, akkor az $\vec{x} = \overrightarrow{OX} \equiv (O,X)$ vektor egyértelmüen állitható elő az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ ortonormált bázis vektorainak lineáris kombinációjaként:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{e}_i ,$$

ahol a $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ valós számokat az X pont vagy az $\vec{x}$ vektor $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Figyeljük meg, hogy az O pont, majd $T_o(\mathbb{P})$ egy ortonormált $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ bázisának rögzitése után az $\vec{x} \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$

leképzés izomorfizmust létesit a $T_0(\mathbb{P})$ és $\mathbb{R}_n$ vektorterek között.
A fenti eljárással az $\mathbb{E}_n$ tér minden X pontja egyértelmüen jellemezhető egy valós szám n -essel. Ki kell hangsulyozni azonban, hogy a koordináták függnek az O pont helyzetétől, s az O kezdőpontu $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ ortonormált bázis kiválasztásától is.

4.2 A koordináták transzformációja uj bázisra való áttéréskor

1. Legyen $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ és $\{\vec{f}_i\}_{i=1}^n$ a $T_0(\mathbb{P})$ két tetszőleges ortonormált bázisa! Keressünk kapcsolatot egy tetszőleges $X \in \mathbb{E}_n$ pont fenti két bázisra vonatkozó koordinátái között! Kiterjesztve a mátrixalgebra szorzás müveletét bázisvektorok alkotta "sorvektorokra" is, az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ és $\{\vec{f}_i\}_{i=1}^n$ bázisok kapcsolatát az alábbi összefüggés fejezi ki:

$$[\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots \vec{f}_n] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n] \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots & c_{2n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

ahol $[c_{ij}]_{n \times n}$ egy ortogonális mátrix. Ha $\vec{x} = \vec{OX} = \sum_{i=1}^n \xi_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \xi'_i \vec{f}_i$, akkor az X pont két bázisban vett koordinátái közötti kapcsolat:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots & c_{2n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix}$$

2. Legyen $O \neq O'$ az $\mathbb{E}_n$ két különböző pontja s $T_0(\mathbb{P})$ illetve $T_0(\mathbb{P})$ az O illetve O' ponthoz illeszkedő érintőtér! Ha $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ a $T_0(\mathbb{P})$, $\{\vec{g}_i\}_{i=1}^n$ a $T_{O'}(\mathbb{P})$ egy-egy ortonormált bázisa, akkor keressünk kapcsolatot egy tetszőleges $X \in \mathbb{E}_n$ pont fenti két bázisra vonatkozó koordinátái között! Ha $\tau: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ az $\mathbb{E}_n$ tér azon egyetlen eltolása, amelyre $O' = \tau(O)$ teljesül, akkor legyen $\vec{f}_i = \tau(\vec{e}_i)$. Az $\{\vec{f}_i\}_{i=1}^n$ a $T_{O'}(\mathbb{P})$ ortonormált bázisát alkotják. Ha most $\vec{OX} = \sum_{i=1}^n \xi_i \vec{e}_i$, $\vec{OO'} = \sum_{i=1}^n \tau_i \vec{e}_i$ és $\vec{OX} = \sum_{i=1}^n \eta_i \vec{f}_i$, akkor az X pont $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ és $\{\vec{f}_i\}_{i=1}^n$ bázisokban vett koordinátái közti kapcsolat:

$$\eta_i = \xi_i - \tau_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Ha pedig $\{\vec{f}_i\}_{i=1}^{m}$ és $\{\vec{g}_i\}_{i=1}^{m}$ $T_{O'}(\mathbb{P})$ -beli bázisok kapcsolata az 1.résznek megfelelően:

$$\left[\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots \vec{g}_m\right] = \left[\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots \vec{f}_m\right] \cdot \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1m} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2m} \\ \vdots \\ c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm} \end{bmatrix},$$

akkor $\vec{O'X} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i' \cdot \vec{g}_i$ felhasználásával az X pont $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{m}$ és $\{\vec{g}_i\}_{i=1}^{m}$ bázisokban vett koordinátáinak kapcsolata:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1m} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2m} \\ \vdots \\ c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_m' \end{bmatrix},$$ amiből pedig:

$$\begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1m} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2m} \\ \vdots \\ c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 - \tau_1 \\ \xi_2 - \tau_2 \\ \vdots \\ \xi_m - \tau_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1m} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2m} \\ \vdots \\ c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1m} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2m} \\ \vdots \\ c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix}.$$

Bevezetve végül a

$$\begin{bmatrix} \tau_1^* \\ \tau_2^* \\ \vdots \\ \tau_m^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1m} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2m} \\ \vdots \\ c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix}$$

jelölést az X koordináta transzformációját az alábbi inhomogén mátrix egyenlet adja:

$$\begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1m} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2m} \\ \vdots \\ c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1^* \\ \tau_2^* \\ \vdots \\ \tau_m^* \end{bmatrix}.$$

4.3 Az E_n szabályos politópjainak koordinátái

A továbbiakban rögzitsük az E_n tér egy O pontját, s a $T_0(\mathcal{P})$ egy $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ ortonormált bázisát! A $\Pi_n = \{p, q, r, \ldots, u, v, w\}$ szabályos politópot analitikusan jellemezhetjük, mint azon pontok halmazát, amelyeknek koordinátái eleget tesznek az alábbi N_{n-1} számu, független lineáris egyenlőtlenségből álló rendszernek:

$$a_{1k} \cdot x_1 + a_{2k} \cdot x_2 + \ldots + a_{nk} \cdot x_n \leq b_k \quad (1 \leq k \leq N_{n-1})$$

Az alábbi táblázatokban összefoglaljuk az alkalmas helyzetü és méretü O centrumu Π_n politópok csucspontjainak koordinátáit az alapvető fontosságu esetekben:

$n=2$

Π_2 SCHLÄFLI SZIMBÓLUMA	Π_2 CSÚCSPONTJAINAK KOORDINÁTÁI	N_0	Π_2 ÉLHOSSZA
$\{p\}$ $(p \geq 3, p \in \mathbb{N})$	$\begin{bmatrix} R_0 \cdot \cos \frac{2k\pi}{p} \\ R_0 \cdot \sin \frac{2k\pi}{p} \end{bmatrix}$ $(0 \leq k \leq p-1)$	p	$2R_0 \cdot \sin \frac{\pi}{p}$

$n=3$

Π_3 SCHLÄFLI SZIMBÓLUMA	Π_3 CSÚCSPONTJAINAK KOORDINÁTÁI	N_0	Π_3 ÉLHOSSZA
$\{3,3\}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	4	$2\sqrt{2}$
$\{3,4\}$	$\begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$	6	$\sqrt{2}$
$\{4,3\}$	$\begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$	8	2
$\{3,5\}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\tau \\ \pm 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \pm\tau \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm\tau \end{bmatrix}$	12	2
$\{5,3\}$	$\begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\tau^{-1} \\ \pm\tau \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \pm\tau \\ 0 \\ \pm\tau^{-1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \pm\tau^{-1} \\ \pm\tau \\ 0 \end{bmatrix}$	20	$2 \cdot \tau^{-1}$

$n=4$

Π_4 SCHLÄFLI SZIMBÓLUMA	Π_4 CSÚCSPONTJAINAK KOORDINÁTÁI	N_0	Π_4 ÉLHOSSZA
$\{3,3,3\}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \subset \mathbb{R}_5$ az $\mathbb{E}_5$ tér $\sum_{i=1}^{5} x_i = 1$ hipersíkján	5	$\sqrt{2}$
$\{3,3,4\}$	$\begin{bmatrix}\pm1\\0\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\\pm1\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\\pm1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\pm1\end{bmatrix}$	8	$\sqrt{2}$
$\{4,3,3\}$	$\begin{bmatrix}\pm1\\\pm1\\\pm1\\\pm1\end{bmatrix}$	16	2
$\{3,4,3\}$	$\begin{bmatrix}\pm1\\\pm1\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm1\\0\\\pm1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm1\\0\\0\\\pm1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\\pm1\\\pm1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\\pm1\\0\\\pm1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\\pm1\\\pm1\end{bmatrix}$	24	$\sqrt{2}$
$\{3,3,5\}$	$\begin{bmatrix}\pm1\\\pm1\\\pm1\\\pm1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm2\\0\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\\pm2\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\\pm2\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\pm2\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm\tau\\\pm1\\\pm\tau^{-1}\\0\end{bmatrix}$ P	120	$2\cdot\tau^{-1}$
$\{5,3,3\}$	$\begin{bmatrix}\pm2\\\pm2\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm\sqrt{5}\\\pm1\\\pm1\\\pm1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm\tau\\\pm\tau\\\pm\tau\\\pm\tau^{-2}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm\tau^{-1}\\\pm\tau^{-1}\\\pm\tau^{-1}\\\pm\tau^{-1}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm\tau^{2}\\\pm\tau^{-2}\\\pm1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm\sqrt{5}\\\pm\tau^{-1}\\\pm\tau\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\pm2\\\pm1\\\pm\tau\\\pm\tau^{-1}\end{bmatrix}$ M M M M P P P	600	$2\cdot\tau^{-2}$

M: a koordináták minden permutációja
P: a koordináták páros permutációi

$n\geq 5$

Π_n SCHLÄFLI SZIMBÓLUMA	Π_n CSÚCSPONTJAINAK KOORDINÁTÁI	N_0	Π_n ÉLHOSSZA
$\{3,3,\dots,3\}=\{3^{n-1}\}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix};\dots;\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} \subset \mathbb{R}_{n+1}$ az $\mathbb{E}_{n+1}$ tér $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ hipersíkján	$n+1$	$\sqrt{2}$
$\{3,3,\dots,3,4\}=\{3^{n-2},4\}$	$\begin{bmatrix}\pm1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\\pm1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix};\dots;\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\\pm1\end{bmatrix} \subset \mathbb{R}_n$	$2n$	$\sqrt{2}$
$\{4,3,\dots,3\}=\{4,3^{n-2}\}$	$\begin{bmatrix}\pm1\\\pm1\\\vdots\\\pm1\end{bmatrix} \subset \mathbb{R}_n$	2^n	2

V. PROJEKCIÓK AZ E_n TÉRBEN

5.1 Ortogonális projekció az E_n térben

Legyen O az E_n tér egy tetszőleges, de rögzitett pontja, s legyen $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ a $T_0(P)$ egy rögzitett ortonormált bázisa. Ekkor a korábbiakkal megegyezésben az O ponthoz illeszkedő tetszőleges k-sikot $(1 \le k \le n-1)$ az alábbi összefüggéssel jellemezhetjük:

$$h_k = \{X \mid X \in E_n,\ \vec{x} = \vec{OX} = \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{b}_i\},$$

ahol $\{\vec{b}_i\}_{i=1}^{k}$ a h_k sikot kifeszitő egy ortonormált vektorrendszer, a $\{t_i\}_{i=1}^{k}$ paraméterek pedig egymástól függetlenül végigfutnak a valós számokon.

Tetszőleges $X \in E_n$ ponthoz rendeljük hozzá azon $X_0 \in h_k$ jól meghatározott pontot, amelyre $\ell(XX_0) \perp h_k$ teljesül. Ha $\vec{x} = \vec{OX}$ és $\vec{x}_0 = \vec{OX}_0$, akkor a fenti feltétel szerint:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{b}_i = 0 \qquad (1 \le i \le k)$$

összefüggéseket kielégitő $\vec{x}_0$ vektort keresünk. Mivel $X_0 \in h_k$, igy $\vec{x}_0$ egyértelmüen előállitható $\vec{x}_0 = \sum_{j=1}^{k} t_j \cdot \vec{b}_j$ alakban, s igy a fenti összefüggés a következő alakot ölti:

$$(\vec{x} - \sum_{j=1}^{k} t_j \vec{b}_j) \cdot \vec{b}_i = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{b}_i = \sum_{j=1}^{k} t_j (\vec{b}_j \cdot \vec{b}_i) \qquad (1 \le i \le k).$$

Mivel pedig $\{\vec{b}_i\}_{i=1}^{k}$ ortonormált, ezért $\vec{x} \cdot \vec{b}_i = t_i$ $(1 \le i \le k)$, amely $\{t_i\}_{i=1}^{k}$ mennyiségekkel lineárisan kombinálható a $\{\vec{b}_i\}_{i=1}^{k}$ bázisból h_k-ban az $\vec{x}_0$ vetületi vektor. A fentiekben meghatározott:

$$\mathfrak{O}_k : E_n \to h_k,\ X \mapsto X_0$$

leképzést az E_n tér h_k sikjára vonatkozó ortogonális projekciójának nevezzük, ha $X_0 \in h_k$ olyan pont, amelyre $\vec{x}_0 = \vec{OX}_0 = \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} \cdot \vec{b}_i) \cdot \vec{b}_i$ teljesül. A fenti leképzés jól definiált, hiszen mind a t_i mennyiségeket előállitó skaláris szorzatok, mind pedig a lineáris kombinációval meghatározott vetületi vektor egyértelmü. Vizsgáljuk meg az $\mathfrak{O}_k : E_n \to h_k$ ortogonális projekció hatását $T_0(P)$ vektoraira!

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

Mivel bármely $\vec{x},\vec{y}\in T_0(\mathbb{P})$ és bármely $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén:

$$\mathbb{O}_k(\vec{x}+\vec{y})=\sum_{i=1}^{k}[(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{b}_i]\vec{b}_i=\sum_{i=1}^{k}[\vec{x}\cdot\vec{b}_i+\vec{y}\cdot\vec{b}_i]\vec{b}_i=\sum_{i=1}^{k}[\vec{x}\cdot\vec{b}_i]\vec{b}_i+\sum_{i=1}^{k}[\vec{y}\cdot\vec{b}_i]\cdot\vec{b}_i=\mathbb{O}_k(\vec{x})+\mathbb{O}_k(\vec{y});$$

$$\mathbb{O}_k(\lambda\vec{x})=\sum_{i=1}^{k}[(\lambda\vec{x})\cdot\vec{b}_i]\cdot\vec{b}_i=\sum_{i=1}^{k}[\lambda\cdot(\vec{x}\cdot\vec{b}_i)]\cdot\vec{b}_i=\lambda\cdot\sum_{i=1}^{k}[\vec{x}\cdot\vec{b}_i]\cdot\vec{b}_i=\lambda\cdot\mathbb{O}_k(\vec{x});$$

érvényes, ezért $\mathbb{O}_k$ a $T_0(\mathbb{P})$ vektorainak egy lineáris transzformációja, igy kereshetjük az $\mathbb{O}_k$ transzformáció mátrixát $T_0(\mathbb{P})$ $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ ortonormált bázisában. Az $\mathbb{O}_k$ transzformáció $[\mathbb{O}_k]$ mátrixának oszlopai az $\vec{e}_{io}=\mathbb{O}_k(\vec{e}_i)$ $(1\le i\le n)$ vetületi vektorok $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ bázisra vonatkozó koordináta vektorai lesznek. Mivel $\vec{e}_i\cdot\vec{b}_j=t_j\Rightarrow b_{ji}=t_j\Rightarrow\vec{e}_{io}=\sum_{j=1}^{k}b_{ji}\cdot\vec{b}_j$, ahol $\vec{b}_j=\sum_{l=1}^{n}b_{jl}\cdot\vec{e}_l$ $(1\le i\le n,\ 1\le j\le k)$, igy

$$i\to\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbb{O}_k}\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{k}b_{ji}b_{j1}\\\vdots\\\sum_{j=1}^{k}b_{ji}b_{jn}\end{bmatrix},$$

aminek segitségével már felirhatjuk az $[\mathbb{O}_k]_{n\times n}$ mátrixot:

$$[\mathbb{O}_k]=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{k}b_{j1}b_{j1} & \sum_{j=1}^{k}b_{j2}b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{k}b_{jn}b_{j1}\\ \sum_{j=1}^{k}b_{j1}b_{j2} & \sum_{j=1}^{k}b_{j2}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{k}b_{jn}b_{j2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum_{j=1}^{k}b_{j1}b_{jn} & \sum_{j=1}^{k}b_{j2}b_{jn} & \cdots & \sum_{j=1}^{k}b_{jn}b_{jn}\end{bmatrix}$$

Felhasználva a $\{\vec{b}_i\}_{i=1}^{k}$ vektorok ortonormált voltát könnyen beláthatók az $[\mathbb{O}_k]$ mátrix alábbi tulajdonságai:

1. $[\mathbb{O}_k]\cdot[\mathbb{O}_k]=[\mathbb{O}_k]^2=[\mathbb{O}_k]$, vagyis a mátrix projektormátrix, s e tulajdonság független $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ választásától,
2. $\operatorname{rang}\{[\mathbb{O}_k]\}=k$, vagyis a mátrix rangja egyenlő az $\mathbb{O}_k:\mathbb{E}_n\to\mathbb{L}_k$ kép- k -sik dimenziójával,
3. $[\mathbb{O}_k]^T=[\mathbb{O}_k]$, vagyis a mátrix szimmetrikus.

Vizsgáljuk most meg $[\mathcal{O}_k]$ alakját két különleges esetben!

a./Legyen $\vec{b}_i = \vec{e}_i$ $(1 \le i \le k)$, vagyis legyen h_k az első k számu egységvektor által kifeszitett k-dimenziós sik! Ekkor az ortogonális projekció mátrixa:

$$[\mathcal{O}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow k \qquad \uparrow k$$

b./Legyen $\vec{b}_1 = \vec{e}_1$ és $\vec{b}_2 = \vec{e}_j$, vagyis $k=2$ és $2 \le j \le n$. Ekkor h_2 2-dimenziós sikra való ortogonális projekció mátrixa:

$$[\mathcal{O}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \\ & & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow j \qquad \uparrow j$$

Mindkét esetben a mátrix alakjából látszik $[\mathcal{O}_k]$ mátrix említett mindhárom tulajdonsága.

Az $\mathcal{O}_k$ analitikus előállitásából könnyen belátható, hogy $\mathcal{O}_k : H \to H$, vagyis a k-sikok $(0 \le k \le n)$ halmazát önmagába képezi le, másrészt ha $h_i, h_e \in H$ és $h_i \le h_e$, akkor $\mathcal{O}_k(h_i) \le \mathcal{O}_k(h_e)$, vagyis az $\mathcal{O}_k$ ortogonális projekció illeszkedéstartó leképzés.

5.2 Paralel projekció az $\mathbb{E}_n$ térben

Tekintsük ismét az $\mathbb{E}_n$ tér egy tetszőleges, de rögzitett O pontját, s legyen $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ a $T_o(\mathbb{P})$ egy rögzitett ortonormált bázisa. Ekkor az O ponthoz illeszkedő tetszőleges hipersikot az alábbi összefüggéssel jellemezhetünk:

$$h_{n-1} = \{X \mid X \in E_n ,\ \vec{n} \cdot \vec{OX} = 0\},$$

ahol $\vec{n}$ a hipersik egy normálvektora. Rögzitsünk egy $\vec{v}$ vetitési irányt, s tegyük fel, hogy $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$ vagyis ha $\vec{v} = \vec{0}$, akkor $1 \notin h_{n-1}$. Tetszőleges $X \in E_n$ ponthoz rendeljük hozzá azon $X_0 \in h_{n-1}$ pontot, amelyre $\vec{XX_0} = \lambda \cdot \vec{v}$ teljesül, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ egy alkalmasan választott valós szám. Az $X \mapsto X_0$ hozzárendelés minden $X \in E_n$ ponthoz egyetlen $X_0 \in h_{n-1}$ pontot rendel, ha ugyanis létezne olyan X pont, hogy annak két különböző X_0^1 és X_0^2 képe is lenne, akkor $\vec{XX_0^i} = \lambda_i \cdot \vec{v}$ $(i = 1,2)$ teljesülne $\lambda_1 \neq \lambda_2$ mellett, amelyből $\vec{X_0^2 X_0^1} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ következne, de ez ellentmond $\vec{v}$ választásának.
Ha $\vec{x} = \vec{OX}$, $\vec{x_0} = \vec{OX_0}$, akkor

$$\vec{x_0} = \vec{x} + \vec{XX_0} = \vec{x} + \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{és} \quad \vec{n} \cdot \vec{x_0} = 0, \text{ igy}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} + \lambda \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\vec{n} \cdot \vec{v}}, \text{ amiből pedig}$$

$$\vec{x_0} = \vec{x} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} \quad \text{adódik.}$$

Ennek megfelelően a fentiekben meghatározott:

$$P_{n-1} : E_n \to h_{n-1},\ X \mapsto X_0$$

leképzést az E_n tér h_{n-1} hipersikjára vonatkozó $\vec{v}$ irányu paralel projekciójának nevezzük, ha $X_0 \in h_{n-1}$ olyan pont, amelyre

$$\vec{x_0} = \vec{OX_0} = \vec{x} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

teljesül. Vizsgáljuk meg a $P_{n-1} : E_n \to h_{n-1}$ paralel projekció hatását $T_0(P)$ vektoraira! Mivel bármely $\vec{x}, \vec{y} \in T_0(P)$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén:

$$P_{n-1}(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y}) - \frac{\vec{n} \cdot (\vec{x} + \vec{y})}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = \left(\vec{x} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v}\right) + \left(\vec{y} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v}\right) = P_{n-1}(\vec{x}) + P_{n-1}(\vec{y});$$

$$P_{n-1}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} - \frac{\vec{n} \cdot (\lambda \cdot \vec{x})}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \left(\vec{x} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v}\right) = \lambda \cdot P_{n-1}(\vec{x})$$

érvényes, ezért P_{n-1} a $T_0(P)$ vektorainak egy lineáris transzformációja, igy kereshetjük P_{n-1} mátrixát a $T_0(P)$ $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ ortonormált bázisában.

A $\mathbb{P}_{n-1}$ transzformáció $[\mathbb{P}_{n-1}]$ mátrixának oszlopai az $\vec{e}_{i0}=\mathbb{P}_{n-1}(\vec{e}_i)$ $(1\le i\le n)$ vetületi vektorok $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ bázisaira vonatkozó koordináta vektorai lesznek. Mivel $\vec{u}\cdot\vec{e}_i=u_i$, ha $\vec{u}=\sum_{k=1}^{n}u_k\vec{e}_k$ és $\vec{v}=\sum_{k=1}^{n}v_k\vec{e}_k$, ezért $(1\le i\le n)$ esetén:

$$\vec{v}\to\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbb{P}_{n-1}}\begin{bmatrix}-\frac{u_1v_i}{\vec{u}\cdot\vec{v}}\\\vdots\\1-\frac{u_iv_i}{\vec{u}\cdot\vec{v}}\\\vdots\\-\frac{u_nv_i}{\vec{u}\cdot\vec{v}}\end{bmatrix},$$

aminek felhasználásával már felirhatjuk az $[\mathbb{P}_{n-1}]_{n\times n}$ mátrixot:

$$[\mathbb{P}_{n-1}]=\begin{bmatrix}1-\frac{u_1v_1}{\vec{u}\cdot\vec{v}} & -\frac{u_2v_1}{\vec{u}\cdot\vec{v}} & \dots & -\frac{u_nv_1}{\vec{u}\cdot\vec{v}}\\ -\frac{u_1v_2}{\vec{u}\cdot\vec{v}} & 1-\frac{u_2v_2}{\vec{u}\cdot\vec{v}} & \dots & -\frac{u_nv_2}{\vec{u}\cdot\vec{v}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\frac{u_1v_n}{\vec{u}\cdot\vec{v}} & -\frac{u_2v_n}{\vec{u}\cdot\vec{v}} & \dots & 1-\frac{u_nv_n}{\vec{u}\cdot\vec{v}}\end{bmatrix}$$

A $[\mathbb{P}_{n-1}]$ mátrix alábbi tulajdonságai könnyen kimutathatók egyszerü számitással:

1. $[\mathbb{P}_{n-1}]\cdot[\mathbb{P}_{n-1}]=[\mathbb{P}_{n-1}]^2=[\mathbb{P}_{n-1}]$, vagyis a mátrix projektormátrix, s e tulajdonság független $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ választásától,

2. $\operatorname{rang}\{[\mathbb{P}_{n-1}]\}=n-1$, vagyis a mátrix rangja egyenlő a h_{n-1} képhipersik dimenziójával.

Vizsgáljuk most meg $[\mathbb{P}_{n-1}]$ alakját két különleges esetben!

a./ Legyen $\vec{u}=\vec{e}_n$, tehát h_{n-1} az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n-1}$ vektorok által kifeszitett hipersik, $\vec{v}$ pedig egy tetszőleges vetitési irány, feltéve persze, hogy $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq0$. Ekkor a paralel projekció mátrixa:

$$[\mathbb{P}_{n-1}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{v_1}{v_n}\\ 0 & 1 & & 0 & -\frac{v_2}{v_n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & 0 & \vdots\\ & & & 1 & -\frac{v_{n-1}}{v_n}\\ 0 & \dots & & 0 & 0\end{bmatrix}$$

b./Az a./ eset feltételein kivül teljesüljön még $\vec{i} = \vec{e}_m$ feltétel is,igy tehát az előző speciális eseteként a paralel projekció mátrixa:

$$[\mathbb{P}_{m-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mindkét esetben a mátrix alakjából látszik $[\mathbb{P}_{m-1}]$ mátrix emlitett két tulajdonsága.
A $\mathbb{P}_{m-1}$ analitikus előállitásából látható be,hogy $\mathbb{P}_{m-1}: H \to H$, vagyis a k -sikok $(0 \le k \le m)$ halmazát önmagába képezi le, másrészt ha $h_i, h_e \in H$, továbbá $h_i \subseteq h_e$, akkor $\mathbb{P}_{m-1}(h_i) \subseteq \mathbb{P}_{m-1}(h_e)$ vagyis a $\mathbb{P}_{m-1}$ paralel projekció illeszkedéstartó leképezés.

5.3 Centrális projekció az $\mathbb{E}_m$ térben

Tekintsük az $\mathbb{E}_m$ tér egy tetszőleges,de rögzitett O pontját, s legyen $T_o(\mathbb{P})$ egy ortonormált bázisa $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^m$! Ekkor az O ponthoz illeszkedő tetszőleges hipersikot az alábbi összefüggéssel jellemezhetjük:

$$h_{m-1} = \{X \mid X \in \mathbb{E}_m \ , \ \vec{n} \cdot \vec{OX} = 0\},$$

ahol $\vec{n}$ a h_{m-1} egy normálvektora.Legyen továbbá $C \in \mathbb{E}_m$ olyan rögzitett pontja,hogy $C \notin h_{m-1}$ teljesüljön.Jelölje h_{m-1}^C a C ponthoz illeszkedő h_{m-1} hipersikkal szigoruan párhuzamos hipersikot!Tetszőleges $X \in \mathbb{E}_m \setminus h_{m-1}^C$ ponthoz rendeljük hozzá azt az $X_o \in h_{m-1}$ pontot,amelyre $X_o = \ell(CX) \cap h_{m-1}$. A fenti hozzárendelés minden megengedett X ponthoz egyértelmüen meghatározott X_o pontot rendel,ellenkező esetben ugyanis lenne olyan $Y \in \mathbb{E}_m \setminus h_{m-1}^C$ pont,hogy $Y_o^1 \neq Y_o^2$ képe is lenne,ekkor azonban C, Y, Y_o^1 és C, Y, Y_o^2 kollinearitásából C, Y_o^1, Y_o^2 kollinearitása is következik,s igy $C \in \ell(Y_o^1 Y_o^2) \subset h_{m-1} \Rightarrow C \in h_{m-1}$, ami viszont ellentmond C választásának.

Ha $\vec{x}=\overrightarrow{0X}$ és $\vec{x}_0=\overrightarrow{0X}_0$,akkor minden $X\in E_n\setminus h_{n-1}^C$ ponthoz található olyan $\lambda\in\mathbb{R}$,amelynek felhasználásával az alábbi összefüggéseket nyerhetjük:

$$\vec{x}_0=\vec{x}+\lambda\cdot\vec{CX}=\vec{x}+\lambda\cdot(\vec{x}-\vec{c}) \quad \text{és} \quad \vec{n}\cdot\vec{x}_0=0 \quad ,\text{igy}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{x}+\lambda\cdot(\vec{x}-\vec{c}))=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{c})} \quad ,\text{amiből pedig}$$

$$\vec{x}_0=\vec{x}-\frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{c})}\cdot(\vec{x}-\vec{c})$$

adódik.Ennek megfelelően a fentiekben meghatározott

$$C_{n-1}: E_n\setminus h_{n-1}^C \to h_{n-1}, \quad X\mapsto X_0$$

leképzést az $E_n\setminus h_{n-1}^C$ ponthalmaz h_{n-1} hipersikjára vonatkozó C centrumu centrális projekciójának nevezzük,ha $X_0\in h_{n-1}$ olyan pont,amelyre

$$\vec{x}_0=\overrightarrow{0X}_0=\vec{x}-\frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{c})}\cdot(\vec{x}-\vec{c})$$

teljesül,ahol $\vec{c}=\overrightarrow{0C}$ .A $C_{n-1}: E_n\setminus h_{n-1}^C \to h_{n-1}$ centrális projekció $T_0(\mathbb{P})$ vektorainak nem lineáris transzformációját hozza létra,amint arról könnyen meggyőződhetünk,ám bizonyos speciális esetekben a leképzés koordináták segitségével is egyszerüen jellemezhető.

Vizsgáljuk meg két különleges esetben C_{n-1} alakját!

a/ Legyen $\vec{n}=\vec{e}_n$,akkor h_{n-1} azonos az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n-1}$ által kifeszitett hipersikkal,s ekkor a C_{n-1} leképzés alakja koordinátákkal:

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}\mapsto\frac{1}{c_n-\xi_n}\cdot\begin{bmatrix}c_n\xi_1-c_1\xi_n\\ c_n\xi_2-c_2\xi_n\\ \vdots\\ c_n\xi_{n-1}-c_{n-1}\xi_n\\ 0\end{bmatrix}, \text{ha} \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}=\vec{x}=\overrightarrow{0X}\in T_0(\mathbb{P}) \text{ és} \begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\vec{c}=\overrightarrow{0C}\in T_0(\mathbb{P}),$$

és $c_n\neq\xi_n$

b/Az előbbi esetet tovább specializáljuk a $\vec{c}=\vec{e}_n$ feltétellel. Ekkor a leképzés alakja koordinátákkal az alábbi lesz:

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbb{C}_{n-1}} \frac{1}{1-\xi_n}\cdot\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_{n-1}\\ 0\end{bmatrix}, \text{ ha } \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} = \vec{x} = \overrightarrow{OX} \in T_0(\mathbb{P}) \text{ és } \vec{c} = \vec{e}_n .$$

Az $\mathbb{C}_{n-1}$ leképezés értelmezése folytán a $\tilde{H} = \{h_k \mid h_k \in H, h_k \cap h_{n-1}^c = \phi\}$ halmazt önmagába képezi le, s ha $h_k, h_e \in \tilde{H}$ és $h_k \subseteq h_e$, akkor $\mathbb{C}_{n-1}(h_k) \subseteq \mathbb{C}_{n-1}(h_e)$, vagyis a centrális projekció a fenti feltétel mellett illeszkedéstartó.

VI. ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA AZ $\mathbb{E}_n$ TÉRBEN

6.1 MONGE - projekciók az $\mathbb{E}_n$ térben

Legyen O az $\mathbb{E}_n$ egy tetszőleges, de rögzitett pontja, s $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ a $T_0(\mathbb{P})$ egy rögzitett ám tetszőleges ortonormált bázisa! Jelölje h_{n-1}^i $(i=1,2)$ azt a két hipersikot, amelyet $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \dots, \vec{e}_n\}$, illetve $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \dots, \vec{e}_n\}$ vektorok feszitenek ki! Ekkor ha $\mathbb{O}_{n-1}^i$ jelöli a h_{n-1}^i hipersikra való ortogonális projekciókat, továbbá $\varphi: \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ az $\vec{e}_1 \mapsto \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \mapsto -\vec{e}_1$, $\vec{e}_j \mapsto \vec{e}_j$ $(3 \le j \le n)$ tulajdonságu forgatást, akkor a leképzések mátrixai az alábbiak lesznek:

$$[\mathbb{O}_{n-1}^1] = \begin{bmatrix}1&0&\dots&\dots&0\\ 0&0&\ddots&&\vdots\\ \vdots&\ddots&1&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ 0&\dots&\dots&0&1\end{bmatrix}, [\mathbb{O}_{n-1}^2] = \begin{bmatrix}0&0&\dots&\dots&0\\ 0&1&\ddots&&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ 0&\dots&\dots&0&1\end{bmatrix}, [\varphi] = \begin{bmatrix}0&-1&0&\dots&0\\ 1&0&0&\ddots&\vdots\\ 0&0&1&\ddots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\ 0&\dots&\dots&0&1\end{bmatrix}.$$

Mivel φ a h_{n-1}^2 hipersikot beleforgatja h_{n-1}^1 hipersikba a $h_{n-1}^1 \cap h_{n-1}^2 = h_{n-2}$ $(n-2)$-dimenziós sik körül, ezért a $\varphi \circ \mathbb{O}_{n-1}^2$ leképezés $\mathbb{E}_n \to h_{n-1}^1$ tulajdonságu. Most már definiálhatjuk az A) tipusu Monge-projekciót:

$$M_n^A : \mathbb{E}_n \to h_{n-1}^1 \times h_{n-1}^1, \; P \mapsto \{\mathbb{O}_{n-1}^1(P), \varphi \circ \mathbb{O}_{n-1}^2(P)\},$$

amely $n=3$ esetén megegyezik a klasszikus Monge-projekcióval. Mivel $[\varphi \circ \mathbb{O}_{n-1}^2] = [\varphi] \cdot [\mathbb{O}_{n-1}^2]$, ezért a fenti leképezés koordinátákkal az alábbi módon fejezhető ki:

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} \overset{M_n^A}{\longmapsto} \left\{ \begin{bmatrix}\xi_1\\ 0\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\xi_2\\ 0\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} \right\} ; \quad \text{ahol} \quad \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} = \vec{x} = \vec{OX} \in T_0(\mathbb{P}) .$$

Legyen $X' = \mathcal{O}_{n-1}^1(X)$; $X'' = \mathcal{O}_{n-1}^2(X)$ és $X_0 = \mathcal{O}_{n-2}(X)$, ha $\mathcal{O}_{n-2}$ jelöli a $h_{n-1}^1 \cap h_{n-1}^2 = h_{n-2}$ $(n-2)$-dimenziós sikra való ortogonális projekciót. Tehát $\mathcal{O}_{n-2}$ mátrixa:

$$[\mathcal{O}_{n-2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ bázisban, mivel h_{n-2} sikot $\{\vec{e}_i\}_{i=3}^n$ vektorok feszitik ki. Igy

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} \overset{\mathcal{O}_{n-2}}{\longmapsto} \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}, \text{ahol} \quad \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} = \vec{x} = \vec{OX} \in T_0(\mathbb{P}) .$$

Mivel pedig

$$\vec{OX} = \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}, \quad \vec{OX'} = \begin{bmatrix}\xi_1\\ 0\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}, \quad \vec{OX''} = \begin{bmatrix}0\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} \text{ és} \quad \vec{OX_0} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix},$$

ezért X, X', X'', X_0 olyan téglalap, amelynek h_2 sikja szigoruan ortogonális a $h_{n-2} = h_{n-1}^1 \cap h_{n-1}^2$ sikra. Ebből azonnal következik, hogy $\varphi \circ \mathcal{O}_{n-1}^2(X) = (X'')$, $\mathcal{O}_{n-2}(X) = X_0$, $\mathcal{O}_{n-1}(X) = X'$ kollineáris pontok a h_{n-1}^1 hipersikban és egyenesük szigoruan ortogonális $h_{n-1}^1 = \mathbb{E}_{n-1}$ térben a h_{n-2} sikra. A fenti konstrukcióból látszik továbbá, hogy

1. $X \in h_{n-1}^1 \iff X = X'$, s ekkor $X_0 = X''$ is fennáll,
2. $X \in h_{n-1}^2 \iff X = X''$, s ekkor $X_0 = X'$ is fennáll,
3. $X \in h_{n-2} \iff X = X' = X'' = X_0$ összefüggés érvényes.

(17. ábra); (17/A ábra).

Legyen másodszor h_2^i $(2 \le i \le n)$ azon $n-1$ számú 2-dimenziós sík, amelyet az $\{\vec{e}_1, \vec{e}_i\}$ vektorok feszítenek ki! Jelöljük ekkor $\mathbb{O}_2^i$ szimbólummal a h_2^i sikra vonatkozó ortogonális projekciót, legyen továbbá $\varphi_j : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ az $\vec{e}_i \mapsto \vec{e}_i$ $(1 \le i \le n, i \ne 2, i \ne j)$, $\vec{e}_2 \mapsto \vec{e}_j, \vec{e}_j \mapsto -\vec{e}_2$ tulajdonságú elforgatás. Ekkor a leképzések mátrixai az alábbiak lesznek:

$$[\varphi_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & 0 & & & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & 0 & & & & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 2 \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \uparrow \\ j \end{matrix}$$

$$[\mathbb{O}_2^j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ j \end{matrix}$$

A φ_j forgatás a h_2^i sikot leforgatja h_2^2 sikba a $h_2^j \cap h_2^2 = h_1$ egyenes "körül", ezért $\varphi_j \circ \mathbb{O}_2^i$ $(3 \le j \le n)$ leképzések $\mathbb{E}_n \to h_2^2$ tulajdonságuak. Most már definiálhatjuk a B) tipusu Monge-projekciót:

$$M_n^B : \mathbb{E}_n \to \underbrace{h_2^2 \times h_2^2 \times \ldots \times h_2^2}_{n-1}, \quad P \mapsto \left\{ \mathbb{O}_2^2(P), \varphi_3 \circ \mathbb{O}_2^3(P), \ldots, \varphi_n \circ \mathbb{O}_2^n(P) \right\},$$

amely $n=3$ esetén szintén megegyezik a klasszikus Monge-projekcióval. Mivel $[\varphi_j \circ \mathbb{O}_2^i] = [\varphi_j] \cdot [\mathbb{O}_2^i]$, ezért a M_n^B leképezés koordinátákkal az alábbi módon fejezhető ki:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \xrightarrow{M_n^B} \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ -\xi_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ -\xi_4 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ -\xi_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \text{ ahol } \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \vec{x} = \vec{OX} \in T_0(P).$$

Legyen $X^{(j)} = \mathbb{O}_2^j(X)$ $(2 \le j \le n)$ és $X_0 = \mathbb{O}_1(X)$, ha $\mathbb{O}_1$ jelöli $\bigcap_{j=2}^{n} h_2^j = h_1$ egyenesre való ortogonális projekciót. Mivel $\mathbb{O}_1$ mátrixa:

$$[\mathbb{D}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ bázisban, hiszen a h_1 egyenest $\vec{e}_1$ feszíti ki, igy

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbb{D}_1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ahol } \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \vec{x} = \vec{OX} \in T_0(\mathbb{P}).$$

Az $\{\vec{X_0X^{(j)}}\}_{j=2}^{n}$ vektorok páronként egymásra merőlegesek, s egy $(n-1)$ -dimenziós ortotópot feszitenek ki, ha $X \notin h_2^i \; (2 \le i \le n)$. Az ortotóp hipersikja szigoruan ortogonális a h_1 egyenesre, amelyből következik, hogy az $\mathbb{D}_2^2(X); \{\varphi_j \circ \mathbb{D}_2^j(X)\}_{j=3}^{n}$ pontok kollineárisak, s egyenesük merőleges a h_2^2 sikban a h_1 egyenesre. Ha az X pont minden koordinátája pozitiv, akkor az alkalmazott φ_j forgatások miatt a h_2^2 sik h_1 egyenese által generált két félsik egyikéhez illeszkedik $\mathbb{D}_2^2(X)$, mig másikához a $\{\varphi_j \circ \mathbb{D}_2^j(X)\}_{j=3}^{n}$ pontok mindegyike. (18. ábra); (18/A ábra).

6.2 AXONOMETRIKUS projekciók az $\mathbb{E}_n$ térben

Ha O az $\mathbb{E}_n$ tér egy tetszőleges, de rögzitett pontja, akkor legyen $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ a $T_0(\mathbb{P})$ egy rögzitett ortonormált bázisa. Legyen $h_{n-1} \not\ni O$ egy hipersik és $\vec{i}$ olyan vetitési irány, hogy $\vec{n} \cdot \vec{i} \neq 0$, ahol $\vec{n}$ a h_{n-1} egy normálvektora, ekkor az $\mathbb{E}_n$ tér h_{n-1} hipersikra való paralel projekciója a korábbi eset természetes általánositásaként:

$$\mathbb{P}_{n-1}^{i} : \mathbb{E}_n \to h_{n-1}, \; X \mapsto X_0,$$

ahol $\vec{x}_0 = \vec{OX_0} = \vec{x} - \frac{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{r}_0)}{\vec{n} \cdot \vec{i}} \cdot \vec{i}$ és $\vec{r}_0 \in T_0(\mathbb{P})$ a h_{n-1} egy tetszőleges pontjának helyvektora. A $\mathbb{P}_{n-1}^{i}$ a $T_0(\mathbb{P})$ vektorainak olyan inhomogén transzformációját hozza létre, amelynek mátrix egyenlete:

$$\begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \vdots \\ \xi_m^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{n_1 i_1}{\vec{n}\cdot\vec{i}} & -\frac{n_2 i_1}{\vec{n}\cdot\vec{i}} & \cdots & -\frac{n_m i_1}{\vec{n}\cdot\vec{i}} \\ -\frac{n_1 i_2}{\vec{n}\cdot\vec{i}} & 1-\frac{n_2 i_2}{\vec{n}\cdot\vec{i}} & \cdots & -\frac{n_m i_2}{\vec{n}\cdot\vec{i}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{n_1 i_m}{\vec{n}\cdot\vec{i}} & -\frac{n_2 i_m}{\vec{n}\cdot\vec{i}} & & 1-\frac{n_m i_m}{\vec{n}\cdot\vec{i}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}_0}{\vec{n}\cdot\vec{i}} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix}, \text{ahol}$$

$\vec{x}=\vec{OX}=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\vec{e}_i$, $\vec{x}_0=\vec{OK}_0=\sum_{i=1}^{m}\xi_i^0\vec{e}_i$, $\vec{i}=\sum_{j=1}^{m}i_j\vec{e}_j$. Legyen speciálisan h_{m-1} az $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ pont által egyértelműen meghatározott hipersik, ha az $\vec{OA}_i=a_i\vec{e}_i$ $(1\le i\le m, a_i>0)$. Ekkor a h_{m-1} egy normálvektora lehet az $\vec{n}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}\vec{e}_i$, legyen $\vec{n}=\vec{i}$ és $\vec{r}_0=a_1\vec{e}_1$. Bevezetve a $h=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i^2}$ jelölést a leképzést leiró mátrix egyenlet:

$$\begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \vdots \\ \xi_m^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{h}\cdot\left\{\begin{bmatrix} h-\frac{1}{a_1^2} & -\frac{1}{a_1a_2} & \cdots & -\frac{1}{a_1a_m} \\ -\frac{1}{a_2a_1} & h-\frac{1}{a_2^2} & \cdots & -\frac{1}{a_2a_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{a_ma_1} & -\frac{1}{a_ma_2} & \cdots & h-\frac{1}{a_m^2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_m} \end{bmatrix}\right\},$$

s ekkor a $P_{m-1}^{\vec{i}}$ leképezést $\mathbb{A}_m: \mathbb{E}_m \to h_{m-1}$ szimbólummal jelöljük, s az $\mathbb{E}_m$ tér h_{m-1} hipersikjára vonatkozó ortogonális axonometrikus projekciójának nevezzük. (19. ábra)

Vizsgáljuk meg az $\mathbb{A}_m: \mathbb{E}_m \to h_{m-1}$ ortogonális axonometria alapvető tulajdonságait!

A h_{m-1} hipersikot meghatározó $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ pontok olyan $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{m} \subset h_{m-1}$ szimplex csucsai, amelyet analitikusan az alábbi összefüggések irnak le:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{a_i}=1\,,\quad x_i>0 \qquad (1\le i\le m)\,.$$

Mivel $O'=\mathbb{A}_m(O)=\frac{1}{h}\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}\cdot\vec{e}_i$, ezért $O'\in\Delta\{A_i\}_{i=1}^{m}$, vagyis az O pont axonometrikus képe a szóbanforgó szimplex belső pontja. Legyen A_j $(1\le j\le m)$ a szimplex csucsainak egyike, akkor közvetlen számolással igazolható: $\vec{O'A_j}\cdot\vec{A_kA_i}=0$, ha $1\le i,k\le m$, $i\neq k$ és $i\neq j\neq k$.

Ez azt jelenti, hogy az $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ $(n-1)$-dimenziós szimplex minden $(n-2)$-dimenziós $\Delta\{A_i \mid 1\le i\le n, i\neq j\}$ cellájára érvényes $\ell(O'A_j)\perp\Delta\{A_i \mid 1\le i\le n, i\neq j\}$. Ezért jogos az $O'=\mathbb{A}_n(O)$ pontot a $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ szimplex ortocentrumának, vagy magasságpontjának nevezni.

Összegezve: a $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ nyomszimplexnek létezik ortocentruma, amely az O pont axonometrikus képével azonos, s amely O' pont a nyomszimplex belső pontja.

Vizsgáljuk meg a $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ nyomszimplex szögekkel kapcsolatos tulajdonságait!

Mivel $\ell(O'A_j)\perp\Delta\{A_i \mid 1\le i\le n, i\neq j\}$, igy $\ell(O'A_j)\perp\ell(O^*A_k)$, ahol $1\le k\le n$, $k\neq j$ és $O^*=\ell(O'A_j)\cap\Delta\{A_i \mid 1\le i\le n, i\neq j\}$. Az O' a $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ belső pontja, ezért O' az A_j és O^* között van, másrészt $A_jO^*A_k\Delta$ olyan derékszögü háromszög, amelynek derékszöge O^* -nál van, következésképpen $\{\ell(O'A_j),\ell(O'A_k)\}\not\propto$ tompa szög. Másként fogalmazva: $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ szimplex O' ortocentrumából a szimplex minden éle tompa szögben "látszik".

Ha A_i az $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ egy tetszőleges csucsa, akkor az $\{\ell(A_iA_j),\ell(A_iA_k)\}\not\propto$ élszögre nézve: $\vec{A_iA_j}\cdot\vec{A_iA_k}=(\vec{OA_j}-\vec{OA_i})\cdot\vec{A_iA_k}=\vec{OA_j}\cdot\vec{A_iA_k}+\vec{A_iO'}\cdot\vec{A_iA_k}>0$, hiszen az első tag O' ortocentrum lévén zérus, mig a második tag pozitiv, hiszen $A_iO'A_k\not\propto$ tompa szög, igy $O'A_iA_k\not\propto$ hegyesszög, következésképpen a nyomszimplex bármely két, közös csucsból kiinduló éle hegyesszöget alkot.

Legyen ezután h_{n-1} az E_n tér egy tetszőleges hipersikja, s $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ a h_{n-1} hipersik egy O' ortocentrummal rendelkező szimplexe, továbbá az ortocentrum legyen a szimplex belső pontja! Ha $O\in h_1\perp h_{n-1}$ és $O'\in h_1$, akkor $\vec{OA_i}\cdot\vec{OA_j}=\vec{O'A_i}\cdot\vec{O'A_j}+\vec{OO'}\cdot\vec{O'O}$, s mivel $A_iO'A_j\not\propto$ tompaszög, következésképpen $\vec{O'A_i}\cdot\vec{O'A_j}<0$, igy létezik olyan $O\in h_1$, hogy $\vec{OA_i}\cdot\vec{OA_j}=0$ legyen! Könnyü belátni, hogy E_n h_{n-1} hipersikja által generált egyik félterét rögzitve, abban az O pont egyértelmüen meghatározott bármelyik $1\le i,j\le n$ $(i\neq j)$; A_i és A_j csucspárból indultunk is ki. Ebből adódik, hogy $\{\ell(OA_i)\}_{i=1}^{n}$ az E_n tér páronként egymásra merőleges egyenesei, s normálva az $\vec{OA_i}$ vektorokat az E_n tér egy ortonormált bázisát nyerjük.

Összegezve: ha adott az E_n tér egy $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ $(n-1)$-dimenziós, belső O' ortocentrummal rendelkező szimplexe, akkor létezik az E_n térnek egy olyan $\mathbb{A}_n$ ortogonális axono-

metrikus projekciója, amelynek nyomszimplexe éppen $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ és $O' = \mathbb{A}_n(O)$.

Legyen ezután $E_i : \vec{e}_i = \overrightarrow{OE}_i$, és $E_i' = \mathbb{A}_n(E_i)$ az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ ortonormált bázis egységpontjai $(1 \le i \le n)$, s azok axonometrikus képei! Mivel ekkor

$$\mathbb{A}_n(O) = O' = \frac{1}{h} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A}_n(E_i) = E_i' = \frac{1}{h} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1 a_i} \\ \vdots \\ -\frac{1}{a_{i-1} a_i} \\ h - \frac{1}{a_i^2} \\ -\frac{1}{a_{i+1} a_i} \\ \vdots \\ -\frac{1}{a_n a_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \right\}, \Rightarrow \frac{1}{h} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1 a_i} \\ \vdots \\ -\frac{1}{a_{i-1} a_i} \\ h - \frac{1}{a_i^2} \\ -\frac{1}{a_{i+1} a_i} \\ \vdots \\ -\frac{1}{a_n a_i} \end{bmatrix} = \overrightarrow{O'E_i'},$$

ezért $\|\overrightarrow{O'E_i'}\|^2 = \frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{1}{a_1 a_i}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{a_{i-1} a_i}\right)^2 + \left(h - \frac{1}{a_i^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{a_{i+1} a_i}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{a_n a_i}\right)^2\right]$. Számítsuk ki ezután a $\sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{O'E_i'}\|^2$ mennyiséget, amely az $\vec{e}_i' = \mathbb{A}_n(\vec{e}_i)$ vektorok normanégyzeteinek összege!

$$\sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{O'E_i'}\|^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{a_1 a_i}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{a_{i-1} a_i}\right)^2 + \left(h - \frac{1}{a_i^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{a_{i+1} a_i}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{a_n a_i}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2} \cdot \left[n \cdot h^2 - 2h \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} + \left(\left(\frac{1}{a_1^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{a_n^2}\right)^2 + 2 \cdot \left\{\left(\frac{1}{a_1 a_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{a_{n-1} a_n}\right)^2\right\}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2} \cdot \left[n \cdot h^2 - 2 \cdot h \cdot h + h^2\right] = \frac{1}{h^2} \cdot (n-1) \cdot h^2 = n - 1 .$$

Ha h_{n-1} jelöli a $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ tartó hipersikját, akkor bevezetve az

$$\{l(OE_i), h_{n-1}\}\sphericalangle = \beta_i \quad (1 \le i \le n), \quad \cos\beta_i = \frac{d(O'A_i)}{d(OA_i)} = \frac{d(O'E_i')}{d(OE_i)} = q_i \quad (1 \le i \le n)$$

jelöléseket, fenti eredményünk a következő alakot ölti:

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\beta_i = \sum_{i=1}^{n} q_i^2 = n - 1 \qquad (n \ge 2),$$

amely az $n = 3$ eset rövidülésekre megismert tételének természetes általánositása.

Legyen ezután $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset h_{n-1}$ az axonometrikus ábrázolás alapjául szolgáló nyomszimplex, s foglalkozzunk azzal a szerkesztéssel, amellyel az $\{l(O'A_i)\}_{i=1}^{n}$ "tengelykereszt" $\{E_i'\}_{i=1}^{n}$ egységpontjait meghatározhatjuk. Tekintsük az $\Delta\{O, A_1, \ldots, A_{n-1}\} \subset \hat{h}_{n-1}$ hipersikban az $\mathbb{A}_{n-1} : \hat{h}_{n-1} \to h_{n-2}$ ortogonális axonometrikus projekciót, ahol $h_{n-2} = h_{n-1} \cap \hat{h}_{n-1}$. Ha $O^* = \mathbb{A}_{n-1}(O)$ és $O' = \mathbb{A}_n(O)$, akkor

$$O' = \frac{1}{h}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}\\ \frac{1}{a_2}\\ \vdots\\ \frac{1}{a_n}\end{bmatrix},\qquad O^* = \frac{1}{h-\frac{1}{a_n^2}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}\\ \frac{1}{a_2}\\ \vdots\\ \frac{1}{a_{n-1}}\\ 0\end{bmatrix},\qquad A_n = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ a_n\end{bmatrix}$$

igy egyszerü számitással kimutatható, hogy O^*, O', A_n kollineárisak, s persze $\ell(A_nO^*) \perp\!\!\!\perp h_{n-2}$ a $h_{n-1}=E_{n-1}$ térben. Másfelől $\ell(OO^*) \perp\!\!\!\perp h_{n-2}$ a $\hat{h}_{n-1}=E'_{n-1}$ térben, igy létezik olyan $\varphi: E_n \to E_n$, h_{n-2} sik körüli forgatás, amely $\hat{h}_{n-1} \mapsto h_{n-1}$, továbbá $\varphi(O)$ és $O' = A_n(O)$ a h_{n-1} képhipersik h_{n-2} sikra nézve ellentétes félhipersikjában lesz. Mivel a φ szögtartó leképezés, igy $\ell(\varphi(O), O^*) \perp\!\!\!\perp h_{n-2}$ ezért $\varphi(O), O^*, O'$ kollineárisak.

Teljesen hasonló okoskodással belátható, ha E_i $(1 \le i \le n-1)$ az $\ell(OA_i)$ tengely egységpontja, $A_{n-1}(E_i) = E_i^*$, $A_n(E_i) = E_i'$, akkor $\ell(E_i^* E_i') \perp\!\!\!\perp h_{n-2} = h_{n-1} \cap \hat{h}_{n-1}$, azaz $\ell(E_i^* E_i') \parallel\!\!\!\parallel \ell(O^* O)$. Másfelől $\ell(E_i E_i^*) \perp\!\!\!\perp h_{n-2}$ az $\hat{h}_{n-1}$ térben, igy az iménti $\varphi: E_n \to E_n$ forgatással $\ell(\varphi(E_i) E_i^*) \perp\!\!\!\perp h_{n-2}$, ezért $\varphi(E_i), E_i^*, E_i'$ kollineárisak. A fenti relációk ismeretében az h_{n-1} képhipersikban elvégezhető az $\ell(O'A_i)$ $(1 \le i \le n-1)$ egységpontjainak kijelölése, mégpedig a $\varphi\{\Delta\{O, A_1, \dots, A_{n-1}\}\}$ alakzat segitségével, s látható az is, hogy olyan ortogonális affinitás létezik az h_{n-1} térben a $\varphi\{\{\vec{OE}_i\}_{i=1}^{n-1}\}$ és $\{\vec{O'E}_i'\}_{i=1}^{n-1}$ alakzatok között, amelynek $(n-2)$-dimenziós "tengelye" azonos a $h_{n-2} = h_{n-1} \cap \hat{h}_{n-1}$ sikkal.

A tárgyalt konstrukciónak egy másik, például $\Delta\{O, A_2, \dots, A_n\} \subset h_{n-1}^2$ alakzatra való megismétlésével az $\{\ell(O'A_i)\}_{i=2}^{n}$ tengelyeken szerkeszthető meg az $\{E_i'\}_{i=2}^{n}$ egységpont, s nyilván a két eljárás "közös tengelyeire" $\{\ell(O'A_i)\}_{i=2}^{n-1}$ a két eljárás ugyanazokat az $\{E_i'\}_{i=2}^{n-1}$ egységpontokat szolgáltatja. (20. ábra)

Ezzel tehát minden $\{E_i'\}_{i=1}^{n}$ egységpontot megszerkesztettünk az h_{n-1} képhipersikban, s ezzel lehetővé vált bármely n-dimenziós, koordinátáival adott alakzat ortogonális axonometrikus projekcióval történő ábrázolása a $h_{n-1} \subset E_n$ hipersikhoz illeszkedő $\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n}$ nyomszimplex segitségével. (19/A. ábra)

Az általános paralel projekcióval létesitett axonometrikus projekció másik különleges esetéhez juthatunk el, ha h_{n-1} képhipersiknak az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n-1}$ vektorok által kifeszitett hipersikot tekintjük,s az $\vec{\iota}$ vetitési iránynak pedig az $\vec{\iota}=\vec{e}_n$ miatt $\vec{e}_n\cdot\vec{\iota}\neq 0$ és $\vec{\iota}\neq\vec{e}_n$ feltételeknek eleget tevő irányt választjuk,ha $\|\vec{\iota}\|=1$.
Ekkor a paralel projekció tárgyalásánál vizsgált egyik speciális eset szerint értelmezhetjük a KAVALIER axonometrikus projekciót:

$$K_n : E_n \to h_{n-1},\quad X \mapsto X_0 \qquad \text{,ahol}$$

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} \xrightarrow{K_n} \begin{bmatrix}\xi_1-\frac{\iota_1}{\iota_n}\cdot\xi_n\\ \vdots\\ \xi_{n-1}-\frac{\iota_{n-1}}{\iota_n}\cdot\xi_n\\ 0\end{bmatrix}, \text{ és } \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}=\vec{x}=\vec{OX}\in T_0(\mathbb{P});\quad \begin{bmatrix}\xi_1-\frac{\iota_1}{\iota_n}\cdot\xi_n\\ \vdots\\ \xi_{n-1}-\frac{\iota_{n-1}}{\iota_n}\cdot\xi_n\\ 0\end{bmatrix}=\vec{x}_0=\vec{OX}_0\in T_0(\mathbb{P}).$$

Ekkor a tengelykereszt $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n-1}$ vektorai által meghatározott tengelyeinek képei önmaguk, s csupán csak $\vec{e}_n'=K_n(\vec{e}_n)$ kerül olyan helyzetbe,hogy $l(\vec{e}_n)\subset h_{n-1}$.

6.3 PERSPEKTIVIKUS projekció az E_n térben

Legyen O az E_n tér egy tetszőleges,de rögzitett pontja, s $T_0(\mathbb{P})$ az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ egy rögzitett bázissal az érintőtér,s tegyük fel,hogy $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ ortonormált bázis is.
Legyen h_{n-1} az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n-1}$ által kifeszitett képhipersik, h_{n-1}^{A} az $\{\vec{e}_i\}_{i=2}^{n}$ által kifeszitett alaphipersik,s válaszszuk a centrális projekció centrumának azt a $C\in E_n$ pontot,amelyre $\vec{c}=\vec{OC}=c_1\cdot\vec{e}_1+(-c_n)\cdot\vec{e}_n$ és $c_1,c_n>0$ teljesül.
Célunk az,hogy az alaphipersikon nyugvó n-dimenziós alakzatokat a h_{n-1} hipersikra képezzük le.
A centrális projekció analitikus előállitását felhasználva a leképzés koordinátákkal:

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} \overset{\mathbb{C}}{\longmapsto} \frac{1}{\xi_n+c_n}\cdot\begin{bmatrix}c_n\xi_1+c_1\xi_n\\ c_n\xi_2\\ \vdots\\ c_n\xi_{n-1}\\ 0\end{bmatrix}, \text{ahol } \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} = \vec{x}=\vec{0X}\in T_0(\mathbb{P}).$$

Jelen esetben a h^C_{n-1} hipersik egyenlete $\xi_n=-c_n$,amelyet eltünési hipersiknak nevezünk.Látható,hogy ekkor minden $X\in\mathbb{E}_n\setminus h^C_{n-1}$ pontnak egyetlen jól meghatározott $X_0=\mathbb{C}(X)$ képe van.A fentiekben leirt $\mathbb{C}:\mathbb{E}_n\to h_{n-1}$ leképezést gyakorlati perspektivának vagy perspektivikus projekciónak nevezzük. Vizsgáljuk meg most,hogy milyen szerkesztéssel lehet meghatározni egy tetszőleges $X\in\mathbb{E}_n\setminus h^C_{n-1}$ pont $X_0\in h_{n-1}$ képét! Ha $X\in h_{n-1}$,akkor $X_0=\mathbb{C}(X)=X$,igy legyen $X\notin h_{n-1}$,de $X\in\mathbb{E}_n\setminus h^C_{n-1}$ egyébként tetszőleges pont.Legyen $\{\varphi\}$ az $\mathbb{E}_n$ tér egy olyan iránya,amely párhuzamos a h^A_{n-1} hipersikkal, viszont minden egyenese metszi a h_{n-1} képhipersikot!Jelölje $\varphi_x,\varphi_0,\varphi_c$ a $\{\varphi\}$ irány azon egyeneseit,amelyek illeszkednek rendre az X,X_A,C pontokhoz,ahol $X_A=\mathbb{O}_{n-1}(X)$ és $\mathbb{O}_{n-1}:\mathbb{E}_n\to h^A_{n-1}$ az alaphipersikra vonatkozó ortogonális projekció. Ha $Q=\varphi_x\cap h_{n-1}$, $R=\varphi_0\cap h_{n-1}$, $H=\varphi_c\cap h_{n-1}$, $X_0=\mathbb{C}(X)$, $X_{A0}=\mathbb{C}(X_A)$ akkor könnyen kimutatható,hogy a H,X_0,Q és a H,X_{A0},R kollineáris ponthármasok,továbbá $\ell(XX_A)\parallel\ell(QR)\parallel\ell(X_0X_{A0})$, sőt ezen egyenesek mind szigoruan merőlegesek is az $\mathbb{E}_n$ térben a h^A_{n-1} hipersikra. (21.ábra)

Legyen most $\varphi:\mathbb{E}_n\to\mathbb{E}_n$ az $\vec{e}_1\mapsto\vec{e}_n$, $\vec{e}_n\mapsto-\vec{e}_1$, $\vec{e}_i\mapsto\vec{e}_i$ $(2\le i\le n-1)$ tulajdonságu elforgatás,akkor $\varphi(h^A_{n-1})=h_{n-1}$, s $h_{n-1}\cap h^A_{n-1}=h^A_{n-2}$ $(n-2)$-dimenziós sik a forgatás "tengelye"!Jelölje h^H_{n-1} azt a C ponthoz illeszkedő jól meghatározott hipersikot,amelyre $h^H_{n-1}\parallel\parallel h^A_{n-1}$ teljesül.Legyen $\Psi:\mathbb{E}_n\to\mathbb{E}_n$ az $\mathbb{E}_n$ tér olyan elforgatása,amelynek "tengelye" $h^H_{n-1}\cap h_{n-1}=h^H_{n-2}$ $(n-2)$-dimenziós sik,s $\Psi(h^H_{n-1})=h_{n-1}$, sőt teljesül $\overrightarrow{O\Psi(C)}=(c_1+c_n)\vec{e}_1$ is.A h^H_{n-1} hipersikot horizont hipersiknak,a h^H_{n-2} sikot horizont "vonal"nak,a h^A_{n-2} sikot alap"vonal"nak nevezzük.Ekkor a φ és Ψ együttes alkalmazását a centrum és az alaphipersik képhipersikba forgatásának nevezzük. (22.ábra)

Egyszerüen belátható most, hogy $\psi(C), X_0, \varphi(X)$ kollineáris ponthármas mindazon $X \in E_n \setminus h^C_{n-1}$ pontra, amelyre ráadásul $X \in h^A_{n-1}$, vagyis illeszkedik az alaphipersikhoz. Érvényes továbbá $\psi(p_c) \parallel \varphi(p_0)$ összefüggés bármely $X \in E_n \setminus h^C_{n-1}$ pontra.

Az imént ismertetett eredmények felhasználásával szerkesztési eljárás adható az $X_0 = \mathbb{C}(X)$ pont meghatározásához. Először legyen $X \in h^A_{n-1}$, vagyis $X = X_A$. Ekkor $X_0 = X_{A0} = \ell(\psi(C)\varphi(X_A)) \cap \ell(HR)$. Ilyen $X_0 = X_{A0}$ pont valóban létezik a h_{n-1} képhipersikban, hiszen $X_0 = X_{A0}$ illeszkedik a $\psi(p_c) \parallel \varphi(p_0)$ egyenespár sikjához, továbbá két egymással nem párhuzamos egyenes metszéspontjaként egyértelmüen meghatározott.

Hasonlóan az $n=3$ eset kalasszikus eljárásához a felhasznált $\{p\}$ irány tetszőleges, az eredmény azonos képpont, ha $\{p\}$ a kirótt feltételeknek egyébként megfelel. Ez a h_{n-1} képhipersikban azt jelenti, hogy a szerkesztéshez alkalmazott $\psi(p_c) \parallel \varphi(p_0)$ egyenesek helyzete tetszőleges, csak a $\psi(p_c) \neq \ell(\psi(C)\varphi(P))$ feltételt kell figyelembe venni, ekkor ugyanis $\psi(p_c) = \varphi(p_0)$ eset áll elő.

Másodszor legyen $X \notin h^A_{n-1}$ vagyis $X \neq X_A$. Ekkor először a fent ismertetett módon meghatározzuk az $X_{A0} = \mathbb{C}(X_A)$ pontot, majd az R pontból kiindulva felmérjük a $d(XX_A)$ távolságot h^A_{n-2} -ra szigoruan merőleges irányban /előjelesen / a h_{n-1} képhipersikban, s igy a $Q = p_X \cap h_{n-1}$ ponthoz jutunk. Most $X_0 = \ell(HQ) \cap \ell(X_{A0})$ ahol $\ell(X_{A0})$ jelöli azt a jól meghatározott X_{A0} ponthoz illeszkedő egyenest, amelyre $\ell(X_{A0}) \parallel \ell(QR)$ teljesül. Igy X_0 most is két egysiku, nem párhuzamos egyenes metszéspontjaként áll elő egyértelmüen meghatározott módon. (23. ábra)

Az ismertetett szerkesztési eljárás végrehajtható a h_{n-1} képhipersikban, ha rögzitjük benne $h^A_{n-2} \parallel h^H_{n-2}$, $\psi(C)$ elemeket, s ismert egy $X \in E_n \setminus h^C_{n-1}$ pont $X_A = \Omega_{n-1}(X)$ ortogonális vetülete h^A_{n-1} alaphipersikon, pontosabban $\varphi(X_A)$ adott és tudjuk az X pont $d(XX_A)$ előjeles távolságát az h^A_{n-1} alaphipersiktól. (24. ábra); (25. ábra).

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

VII. A SZABÁLYOS POLITÓPOK ÁBRÁZOLÁSAI

7.1 A szabályos $\Pi_n=\{3,3,\dots,3\}=\{3^{n-1}\}$ politópok ábrázolása $\mathbb{E}_2$ sikban

Legyen $O\in\mathbb{E}_{n+1}$ egy tetszőleges, de rögzitett pont, s $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n+1}$ a $T_0(P)$ egy rögzitett ortonormált bázisa! Tekintsük az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{2}$ vektorok által kifeszitett $\mathbb{E}_2$ sik azon $\Pi_2=\{n+1\}$ szabályos politópját, amelynek centruma az O pont, s csucsainak koordinátái az $\mathbb{E}_2$ térben annak $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{2}$ bázisára vonatkozóan:

$$A_{k+1}=\left(\cos\frac{2\pi}{n+1}k,\ \sin\frac{2\pi}{n+1}k\right)\quad(0\le k\le n).$$

Definiáljuk ekkor az $\mathbb{E}_{n+1}$ térnek az $\mathbb{E}_2$ sikra való leképezését az alábbi módon:

$$\alpha:\mathbb{E}_{n+1}\to\mathbb{E}_2,\ X\mapsto X_0,$$

ahol $X\in\mathbb{E}_{n+1}$ tetszőleges ponthoz, amelyre $\vec{x}=\vec{OX}=\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i\cdot\vec{e}_i$ érvényes, hozzárendeljük azon $X_0\in\mathbb{E}_2$ pontot, amelyre felirható az $\vec{x}_0=\vec{OX}_0=\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i\cdot\vec{OA}_i$ összefüggés.

Az $\alpha:\mathbb{E}_{n+1}\to\mathbb{E}_2$ leképezés a $T_0(P)$ vektorainak egy lineáris transzformációját hozza létre, amint az könnyen belátható, ezért az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n+1}$ bázisban megkereshető transzformáció mátrixa:

$$[\alpha]=\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{n+1}\cdot0 & \cos\frac{2\pi}{n+1}\cdot1 & \dots & \cos\frac{2\pi}{n+1}\cdot n\\ \sin\frac{2\pi}{n+1}\cdot0 & \sin\frac{2\pi}{n+1}\cdot1 & \dots & \sin\frac{2\pi}{n+1}\cdot n\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

A α leképezés a fentiek szerint illeszkedéstartó, vagyis ha $h_k\subseteq h_e$; $h_k,h_e\in H^{(n+1)}$; akkor $\alpha(h_k)\subseteq\alpha(h_e)$ is teljesül. Legyen $\{P_i\}_{i=1}^{3}$ az $\mathbb{E}_{n+1}$ tér három különböző pontja, s tegyük fel, hogy $\{\alpha(P_i)\}_{i=1}^{3}$ pontok is különbözőek. Ekkor ha a $\{P_i\}_{i=1}^{3}$ pontok kollineárisak, akkor az $\{\alpha(P_i)\}_{i=1}^{3}$ pontok is azok. Ezen értelemben pedig az α leképezést egyenestartónak nevezzük. Ha $\{P_i\}_{i=1}^{3}$ pontok olyanok, mint az iméntiek, akkor érvényes

$$(P_1P_2,P_3)=(\alpha(P_1)\alpha(P_2),\alpha(P_3))$$

összefüggés is, vagyis az α leképezés osztóviszonytartó

ebben az értelemben.
A korábbi eredményeinkből tudjuk, hogy a $\pi_n=\{3^{n-1}\}$ szabályos n-dimenziós szimplex egy modelljét megkaphatjuk az $\mathbb{E}_{n+1}$ térben ugy, ha tekintjük a $\Delta\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ ponthalmazt, ahol $E_i\in\mathbb{E}_{n+1}\ (1\le i\le n+1)$ olyan, hogy $\overrightarrow{OE_i}=\vec{e}_i$. Az imént értelmezett leképzéssel pedig

$$\alpha:\Delta\{E_i\}_{i=1}^{n+1}\mapsto\Delta\{A_i\}_{i=1}^{n+1}\subset\mathbb{E}_2,$$

sőt $\alpha:E_i\mapsto A_i$. Ennek megfelelően figyelembe véve $\pi_n=\{3^{n-1}\}$ celláinak illeszkedési viszonyait könnyen elkészithető a politóp un. élvázának α melletti képe. (12. ábra)

7.2 A szabályos $\pi_n=\{3,3,..,3,4\}=\{3^{n-2},4\}$ politópok ábrázolása $\mathbb{E}_2$ sikban

Legyen $O\in\mathbb{E}_n$ egy tetszőleges, de rögzitett pont, s $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ a $T_0(\mathbb{P})$ egy rögzitett ortonormált bázisa! Tekintsük az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{2}$ vektorok által kifeszitett $\mathbb{E}_2$ sik azon $\pi_2=\{2n\}$ szabályos politópját, amelynek centruma az O pont, s csucsainak koordinátái az $\mathbb{E}_2$ térben annak $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{2}$ bázisára vonatkozóan:

$$A_{k+1}=\left(\cos\frac{2\pi}{2n}\cdot k,\ \sin\frac{2\pi}{2n}\cdot k\right)\quad(0\le k\le 2n-1).$$

Definiáljuk ekkor az $\mathbb{E}_n$ térnek az $\mathbb{E}_2$ sikra való leképezését az alábbi módon:

$$\beta:\mathbb{E}_n\to\mathbb{E}_2,\quad X\mapsto X_0,$$

ahol $X\in\mathbb{E}_n$ tetszőleges ponthoz, amelyre $\vec{x}=\overrightarrow{OX}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\vec{e}_i$ érvényes, hozzárendeljük azon $X_0\in\mathbb{E}_2$ pontot, amelyre felirható az $\vec{x}_0=\overrightarrow{OX_0}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\overrightarrow{OA_i}$ összefüggés.
A $\beta:\mathbb{E}_n\to\mathbb{E}_2$ leképezés a $T_0(\mathbb{P})$ vektorainak egy lineáris transzformációját hozza létra, amint az könnyen belátható, ezért kereshető a transzformáció mátrixa az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ bázisban:

$$[\beta]=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{n}\cdot 0 & \cos\frac{\pi}{n}\cdot 1 \dots & \cos\frac{\pi}{n}\cdot(n-1) \\ \sin\frac{\pi}{n}\cdot 0 & \sin\frac{\pi}{n}\cdot 1 \dots & \sin\frac{\pi}{n}\cdot(n-1) \\ 0 & 0 \quad \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \quad \dots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

A β leképezés az eddigiek alapján illeszkedéstartó, vagyis ha $h_k \subseteq h_e$; $h_k, h_e \in H$, akkor $\beta(h_k) \subseteq \beta(h_e)$ továbbá egyenestartó és osztóviszony tartó abban az értelemben, ahogyan azt az α leképezésnél már láttuk. Korábbi eredményeinkből tudjuk, hogy a $\Pi_n=\{3^{n-2},4\}$ szabályos n -dimenziós kereszt politóp egy modelljét megkaphatjuk az E_n térben ugy, ha tekintjük a $\Delta\{\pm E_i\}_{i=1}^{n}$ ponthalmazt, ahol $\pm E_i \in E_n$ $(1\le i\le n)$ olyan, hogy $\overrightarrow{OE_i}=\vec{e}_i$ és $\overrightarrow{O(-E_i)}=-\vec{e}_i$. Az imént értelmezett leképezéssel pedig

$$\beta : \Delta\{\pm E_i\}_{i=1}^{n} \longmapsto \Delta\{A_i\}_{i=1}^{2n} \subset E_2 .$$

Figyelembe véve $\Pi_n=\{3^{n-2},4\}$ celláinak illeszkedési viszonyait könnyen elkészithető a politóp élvázának β melletti képe. (13. ábra)

7.3 A szabályos $\Pi_n=\{4,3,\dots,3\}=\{4,3^{n-2}\}$ politópok ábrázolása E_2 sikban

Legyen $O\in E_n$ egy tetszőleges, ám rögzitett pont, s $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ a $T_o(\mathbb{P})$ egy rögzitett ortonormált bázisa! Képezzük az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ elemeinek összes lehetséges részhalmazát s vegyük e részhalmazokat alkotó vektorok összegét. Igy $T_o(\mathbb{P})$ vektorai közül kiválasztottunk $\{\overrightarrow{OC_k}\}_{k=1}^{2^n}$ olyan vektorokat, amelyek egy n -dimenziós hiperkocka csucsaiba mutatnak, azaz $\Pi_n=\Delta\{C_k\}_{k=1}^{2^n}$. E hiperkocka élhossza egységnyi, s alkalmazzuk e hiperkockára az előző részben megkonstruált $\beta : E_n \to E_2$ leképezést, amelynek eredményeként a "felső" félsikban nyerünk egy olyan $\Pi_2=\{2n\}$ egységnyi élhosszuságu politópot, amelynek két szomszédos csucsa $O(0,0)$ és $E_1(1,0)$. Figyelembe véve a $\Pi_n=\{4,3^{n-2}\}$ illeszkedési tulajdonságait, továbbá a β leképezés $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ bázisban vett mátrixát könnyen elkészithető a politóp élvázának β melletti képe. (14-16. ábra)

7.4 A szabályos π_3 és π_4 politópok ábrázolása az E_2 sikban

Az E_3 tér öt szabályos politópja: $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,3\}$, $\{3,5\}$, $\{5,3\}$, amelyek közül az $\alpha: E_4 \to E_2$ leképezéssel a $\{3,3\}$, a $\beta: E_3 \to E_2$ leképezéssel pedig a $\{3,4\}$ és $\{4,3\}$ politópokat már ábrázoltuk.

A $\{3,5\}$ és $\{5,3\}$ politópok ábrázolásánál követhetjük azt az elvi konstrukciót, amelynek segitségével e politópok egzisztenciáját igazoltuk. Tekintsük ezért a $\{3,4\}$ politóp $\beta: E_3 \to E_2$ leképezéssel előállitott képét! Az ábra éleit koherens módon irányitva bontsuk szét őket az aranymetszés arányában. A nyert osztópontok a $\{3,5\}$ egy E_2 -beli ábrája csucspontjainak tekinthető, felhasználva a β leképezés egyenes-illeszkedés- és osztóviszony tartó voltát.

A $\{3,5\}$ imént megszerkesztett ábráját, a β leképezés tulajdonságait, továbbá $\{3,5\}$ és $\{5,3\}$ duális pár voltát felhasználva könnyen előállithatjuk az $\{5,3\}$ egy E_2 -beli ábráját. Tekintsük ugyanis a $\{3,5\}$ ábráján a politóp lap háromszögeinek sulypontjait, e pontok $\{5,3\}$ ábrája csucsainak tekinthető.

Az E_4 tér hat szabályos politópja: $\{3,3,3\}$; $\{3,3,4\}$; $\{4,3,3\}$; $\{3,4,3\}$; $\{3,3,5\}$; $\{5,3,3\}$, amelyek közül az $\alpha: E_5 \to E_2$ leképezéssel a $\{3,3,3\}$, a $\beta: E_4 \to E_2$ leképezéssel pedig a $\{3,3,4\}$ és $\{4,3,3\}$ politópokat már ábrázoltuk.

Hasonlóan az előzőekhez a $\{3,4,3\}$; $\{3,3,5\}$ és $\{5,3,3\}$ politópok ábrázolásánál követhetjük azt az elvi konstrukciót, amelynek segitségével e politópok egzisztenciáját beláttuk.

Ezért tekintsük először a $\{3,3,4\}$ politóp $\beta: E_4 \to E_2$ leképezéssel előállitott ábráját! Vegyük az ábra éleinek felezőpontjait, s a kapott osztópontok a $\{3,4,3\}$ ábrája csucspontjainak tekinthető a CESARO-féle szerkesztés szerint.

Tekintsük most a $\{3,4,3\}$ nyert ábrájának éleit, s koherens módon irányitva bontsuk szét őket az aranymetszés arányában, a β leképezés tulajdonságainak ismeretében a kapott osztás pontokat az $s\{3,4,3\}$ GOSSET-féle féligszabályos politóp E_2-beli ábrája csucspontjainak vehetjük. Tovább követve az elvi szerkesztést megkaphatjuk az $s\{3,4,3\}$ ikozaéder celláihoz illesztett 4-dimenziós gulák csucspontjainak képeit, s ezzel előállitottuk a $\{3,3,5\}$ csucspontjainak képeit.

Végül az $\{5,3,3\}$ politóp E_2- beli ábráját a $\{3,3,5\}$ ábrájának felhasználásával ugy szerkeszthetjük meg, ahogyan az $\{5,3\}$ politópot a $\{3,5\}$ felhasználásával tettük.

7.5 A szabályos $\Pi_n = \{p,q,r,\dots,u,v,w\}$ politópok hálózatai és Schlegel - féle diagramjai

Legyen $\Pi_n = \{p,q,r,\dots,u,v,w\}$ az E_n tér egy szabályos politópja, s szemeljük ki a politóp egy Π^o_{n-1} celláját, továbbá jelöljük h_{n-1} szimbólummal a cella tartó hipersikját. Mivel az E_n tér tetszőleges h_{n-2} $(n-2)$-dimenziós sikja körül elforgatható, igy a Π_n politópot alkalmasan kiválasztott $(n-2)$ -dimenziós cellái mentén felmetszve, további alkalmasan választott $(n-2)$-dimenziós celláinak tartó $(n-2)$ -sikjai körül alkalmasan elforgatva a metszéssel szabaddá tett $\{\Pi_{n-1}\}$ cellákat elérhetjük véges számu lépésben, hogy minden Π_{n-1} cella belefordul Π^o_{n-1} hipersikjába. A h_{n-1} hipersikban előállitott $\{\Pi_{n-1}\}$ cellák rendszerét a Π_n politóp egy hálózatának nevezzük. A fenti konstrukció nyilván nem egyértelmü, igy egy adott Π_n szabályos politópnak több, egymással nem izometrikus hálózata is lehetséges. A Π_n alkalmasan elkészitett hálózatán a $h_{n-1} = E_{n-1}$ térben jól megfigyelhetők a cellák illeszkedési viszonyai.

A Π_n $(n \geq 3)$ szabályos politópok ábrázolásánál eredménnyel alkalmazható az a SCHLEGEL-től származó gondolat, hogy vetitsük centrálisan a politópot egy kiszemelt Π^o_{n-1} cellájára alkalmasan választott centrumból ugy, hogy a Π_n vetülete teljesen Π^o_{n-1} belsejét kitöltse.

A gondolat jobb megértése érdekében tekintsük például az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ ortonormált bázisvektorok által kifeszitett $\{4,3^{n-2}\}$ mérték politópot! Legyen a kiválasztott "lap" az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n-1}$ vektorok által kifeszitett Π^o_{n-1} cella, s tartó hipersikján $x_n = 0$ összefüggés jellemzi! Válasszuk centrumnak ekkor azt a C pontot, amelyre:

$$\vec{c} = \vec{OC} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \\ -a \end{bmatrix}, \text{ és } a \in \mathbb{R}^+.$$

Ekkor a centrális projekciót leiró összefüggést felhasználva a leképezés az alábbi módon irható le:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \longmapsto \frac{1}{a+\xi_n} \cdot \begin{bmatrix} a\cdot\xi_1 + \frac{1}{2}\cdot\xi_n \\ a\cdot\xi_2 + \frac{1}{2}\cdot\xi_n \\ \vdots \\ a\cdot\xi_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\xi_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

Az előállitott $(n-1)$-dimenziós alakzatot a Π_n egy Schlegel diagramjának nevezzük. Speciálisan $n=4$ esetén a hiperkocka diagramjának csucsai két, egymással koncentrikus kocka csucsai lesznek. (26-27. ábra)

VIII.Az E_3 és E_4 SZABÁLYOS POLITÓPJAINAK ÁBRÁZOLÁSA SZEMÉLYI SZÁMITÓGÉPPEL

8.1 Bevezetés

Ebben a fejezetben ismertetünk egy számitógépes programot, amelynek segitségével sikban ábrázolhatók többek között a 3- és 4- dimenziós szabályos politópok élvázai.
Az ábrázoló program BASIC programozási nyelven készült COMMODORE 64 személyi számitógépre,de csekély változtatással bármely,finom grafikai perifériával rendelkező számitógépre adaptálható.Felhasználjuk segéd programként a SUPERGRAPHIK 64 cimü programot,amelynek segitségével könnyen kezelhetjük a 320.200 "pontból" álló ugynevezett nagyfelbontásu képernyőt.E grafikai segédlet részletes ismertetése megtalálható pl. Dr.Ury László:COMMODORE 64 cimü munkája második kötetében.
A program elkészitését az alábbiak indokolták:
Hazánkban a finom grafikával rendelkező személyi számitógépek közül legjobban a COMMODORE 64 géptipus terjedt el, igy e program oktatásban való alkalmazása szélesebb körü lehet.Az E_3 tér geometriai viszonyait jól modellezhetjük a minket körülvevő fizikai térben.Igy tapasztalati uton mindnyájunkban kifejlődött a térbeli alakzatok viszonyait felfogó,megértő képességünk,amit röviden térszemléletnek nevezünk.Bár az E_n $(n \geq 4)$ terek geometriai viszonyait egzaktul jellemzi akár az axiomatikus-szintétikus,akár az axiomatikus-analitikus tárgyalás,mégis természetes igényként merül fel ezen terek geometriai viszonyainak grafikus szemléltetése,ábrázolása.Alkalmas eljárásokkal készitett ábrázolások ugyanis bizonyos értelemben képesek hozzásegiteni bennünket magasabb dimenziós szemlélethez,amelynek komoly heurisztikus erejéről nem mondhatunk le.Ebben a megvilágitásban tehát ugy tekinthetjük a személyi számitógépre irt ábrázoló programot,mint valamely vizuális ingereket felvevő magasabb dimenziós euklideszi terekben is látó szemet.
A dolgozat előző fejezeteiben ismertetett ábrázoló geometriai eljárások lehetővé tesznek több különböző ábrázolást,szerkesztést.

Látnunk kell azonban,hogy e szerkesztések bizonyos esetekben rendkivül hosszadalmas eljárások,amelyekben könnyen "eltévedhetünk" a sok meghuzott vonal miatt.Igy járunk például az E_4 tér $\{3,3,5\}$ vagy $\{5,3,3\}$ alakzatának megszerkesztésekor,mivel e politópok nagy számu csuccsal illetve éllel rendelkeznek.

A program jelenlegi formájának kisebb módositásaival több irányban is általánosithatjuk alkalmazhatóságát.

Az első,természetesen kinálkozó általánositási irány,hogy ne csak $n \leq 4$ esetében legyen képes E_n -beli szabályos politópot ábrázolni,hanem magasabb dimenziók esetén is. Általánositható továbbá az E_n terek szabályos politópjának definiciója is, s igy vizsgálataink körébe bevonhatjuk az ugynevezett csillagpolitópokat is.További általánositással pedig félig szabályos politópokkal is foglalkozhatunk.Ez számos uj kérdést vethet fel,amelyek heurisztikus megközelitéséhez nagy segitséget adhat a program.

Végül pedig ujabb lehetőséget kinál az ábrázolás azon megközelitése,amellyel a kép egyes részletei tetszés szerint kinagyithatók,igy a részletek is tanulmányozhatókká válnak, továbbá az ábrázolt politópok forgatásával,mozgatásával még elevenebbé válhat "magasabb dimenziós térszemléletünk".

8.2 Az ábrázoló program általános ismertetése

Az ábrázoló program moduláris szerkezetü,amely modulok meghivása a vezérlő modulon keresztül lehetséges, s a programot felhasználó utasitása szerint tér rá egyik vagy másik modul végrehajtására.Ha olyan modult kivánunk felélesztени, amelynek müködéséhez más modulok munkájának eredménye szükséges,akkor a megfelelő üzenet figyelmezteti a programozót mulasztásának pótlására.

Az ábrázoló progam munka-moduljai három csoportra bonthatók.

Az első csoportba azok a modulok tartoznak,amelyek előállitják és tárolják az ábrázolni kivánt szabályos politóp,továbbá az ábrázoló eljárás jellemző paramétereit.

E csoportba az alábbi modulok tartoznak:

MUNKA-MODUL NEVE	ELÉRÉSE A VEZÉR-MODULBÓL A ☐ GOMB LENYOMÁSÁVAL	VISSZATÉRÉS A VEZÉR-MODULHOZ A ☐ GOMB LENYOMÁSÁVAL
1. CSÚCSOK BEADÁSA	M ; B	automatikus
2. CSÚCSOK GENERÁLÁSA	M ; G	automatikus
3. DIREKT SZORZAT KÉPZÉSE	M ; D	automatikus
4. CSÚCSOK LISTÁZÁSA	M ; C	Sp
5. CSÚCSOK MÓDOSÍTÁSA	M ; M	automatikus
6. CSÚCSOK TÖRLÉSE	M ; T	automatikus
7. TRANSZFORMÁCIÓS MÁTRIX BEADÁSA	T	automatikus
8. NAGYÍTÁS BEÁLLÍTÁSA	N	automatikus
9. GRAFIKA SZÍNVÁLASZTÁSA	G	automatikus

A második csoportba azok a modulok tartoznak, amelyek a beadott szabályos politópot ábrázolják. Ezek a következők:

MUNKA-MODUL NEVE	ELÉRÉSE A VEZÉR-MODULBÓL A ☐ GOMB LENYOMÁSÁVAL	VISSZATÉRÉS A VEZÉR-MODULHOZ A ☐ GOMB LENYOMÁSÁVAL
10. ÁBRÁZOLÁS	A	Sp
11. ÁBRA ÚJRA RAJZOLÁSA	U	Sp
12. UTOLSÓ KÉP TERÍTÉSE	K	Sp
13. TENGELYEK FELRAJZOLÁSA	R	Sp

Végül a harmadik csoportba azok a modulok tartoznak, amelyek az elkészitett ábrát kezelik, perifériák felé továbbitják, illetve onnan szükség esetén visszahivják.

Ezek pedig:

MUNKA - MODUL NEVE	ELÉRÉSE A VEZÉR MODULBÓL A ☐ GOMB LENYOMÁSÁVAL	VISSZATÉRÉS A VEZÉR-MODULHOZ A ☐ GOMB LENYOMÁSÁVAL
14. ÁBRA KIMENTÉSE MÁGNESLEMEZRE	S	automatikus
15. ÁBRA KINYOMTATÁSA SORNYOMTATÓN	P	automatikus
16. ÁBRA BETÖLTÉSE MÁGNESLEMEZRÖL	L	automatikus

A program moduljainak szerkezetét, s az egyes modulok kapcsolatát szemlélteti az 1. folyamat ábra.

8.3 Az ábrázoló program munka-moduljainak első csoportja

Minden szabályos politópot egyértelmüen jellemezhetünk csucsainak koordinátái segitségével.Első feladat tehát a csucsok koordinátáinak betöltése a számitógépbe,amely két különböző módszerrel is történhet.
Az egyik módszer a csucsok koordináta négyeseinek direkt beolvasása /1."csucsok beadása": 2.folyamat ábra /, mig a másik a csucsok koordinátáinak géppel történő meghatározása / 2."csucsok generálása" és 3."direkt sorozat képzése": 2 - 5 folyamat ábrák /.Ez utóbbi felhasználja azt a felismerést,hogy alkalmas koordinátarendszerben a szabályos politóp csucsainak koordinátái bizonyos mintákból kiindulva generálhatók a koordináták permutációinak segitségével,illetve megfelelő előjelekkel való ellátással.Például a $\{3,3,5\}$ politóp csucsait generáló minták:

$$(1):\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (2):\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad (3):\begin{bmatrix}\tau\\1\\\tau^{-1}\\0\end{bmatrix}, \text{ahol } \tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Az (1) és (2) minták minden permutációjával,a (3) minta páros permutációival,végül az összes lehetséges előjel sorozattal való ellátást elvégezve / 3."direkt sorozat képzése": 5.folyamat ábra / megkaphatjuk a szabályos politóp 120 csucsát. Elegendő tehát a minták beadása,a koordináták szükséges páros illetve minden permutációját és a megfelelő előjelekkel való ellátást maga a program végzi el.
A csucsok beadása után megadjuk a szabályos politóp adott modelljére jellemző élhosszat,amelynek felhasználásával történik később az ábrázolási eljárás végrehajtása.
A program lehetőséget ad egy vagy több csucs koordinátáinak módositására /5."csucsok módositása": 7.folyamat ábra /,esetleg hibásan bevitt adatok javitására,továbbá csucsok részleges,illetve teljes törlésére /6."csucsok törlése": 8.folyamat ábra /.
Végül az ábrázolni kivánt politóp beadott csucsait ellenőrzés és számbavétel céljából ki is listáztathatjuk /4."csucsok listázása": 6. folyamat ábra /.
Vizsgáljuk most meg az ábrázoló transzformációt!
Legyen O az E_4 tér egy tetszőleges,de rögzitett pontja, s $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{4}$ a $T_0(\mathcal{P})$ érintőtér egy rögzitett ortonormált bázisa. Legyen az E_2 képtér / vagyis a képernyő vagy a sornyomtató sikja / az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{2}$ bázisvektorok által kifeszitett 2-sik.Legyen továbbá $\{\vec{q}_i\}_{i=1}^{4}$ olyan 2 rangu vektorrendszer az E_2 térben, amelynek egyik tagja sem zérus vektor.Ekkor létezik egy és csakis egy olyan T lineáris transzformáció,amelyre $T(\vec{e}_i)=\vec{q}_i$ $(1\le i\le 4)$ teljesül, s amely a $T_0(\mathcal{P})$ érintőteret képezi le az O ponthoz feltételek szerint illeszkedő E_2 tér megfelelő $T_0(\mathcal{P}')$ érintőterébe,ahol $\mathcal{P}'$ az E_2 pontjainak halmaza.
E lineáris transzformáció speciális eseteként magába foglalja az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{3}$ vektorok által kifeszitett E_3 3-sik E_2 térre való leképezését is.

Az $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{2}$ bázisban könnyen meghatározhatjuk T lineáris transzformáció mátrixát:

$$[\mathbb{T}]=\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ahol } \vec{g}_i = E_i \cdot \vec{e}_1 + F_i \cdot \vec{e}_2 \quad (1 \le i \le 4)$$

Mivel $\mathbb{T}$ egyenes - és illeszkedéstartó leképezés, ezért válaszszuk ezt az $\mathbb{E}_4$ illetve $\mathbb{E}_3$ szabályos politópjai élvázának $\mathbb{E}_2$ térben való ábrázolását megvalósitó eljárásunk alapjául. Ennek megfelelően, ha $X \in \mathbb{E}_4$ és $\vec{x} = \vec{OX} = \sum_{i=1}^{4} \xi_i \vec{e}_i$, akkor $X' = \mathbb{T}(X) \in \mathbb{E}_2$ és $\vec{x}' = \vec{OX}' = \sum_{i=1}^{4} \xi_i' \cdot \vec{e}_i$, ahol

$$\begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \\ \xi_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix},$$

nyilván $\xi_3' = \xi_4' = 0$, továbbá $X \in \mathbb{E}_3$ esetén $\xi_4 = 0$ teljesül.

A fentieknek megfelelően tehát be kell olvasni az ábrázoláshoz felhasználni kivánt mátrix első két sorát, s ezenkivül a gép már tárolja az egyik leggyakrabban alkalmazott $\mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_2$ és $\mathbb{E}_4 \to \mathbb{E}_2$ leképezés mátrixát, amelyek a következők:

$$[\mathbb{T}_{3\to 2}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\mathbb{T}_{4\to 2}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

s a / 7."transzformációs mátrix beadása" / a 9. folyamat ábrán tanulmányozható részleteiben.

A leképezés során a koordinátarendszer origója a képernyő közepére kerül,s lehetőség van a politóp élvázának készitendő ábráját olyan méretünek választani,hogy az optimálisan töltse ki a képernyőt /8."nagyitás beállitása": 10.folyamat ábra /.Megválaszthatjuk végül a képernyő alapszinét,s a politóp élvázának vonalszinét is a 16 szinből álló szinskálán / 9."Grafika szinválasztása": 11.folyamat ábra/.

8.4 Az ábrázoló program munka-moduljainak második csoportja

A tulajdonképpeni ábrázoló modul megvizsgálja az összes képezhető csucspár távolságát,s ha az / a kerekitések, s közelitő megadások miatt / hibahatáron belül megegyezik a korábban betáplált élhosszal,akkor a csucspárt leképezi a $\mathbb{T}$ transzformációval,azután pedig összeköti a "vetületi" pontokat egyenes szakasszal.A képernyőn kialakuló ábra ekkor a szabályos politóp élvázának $\mathbb{E}_2$ -beli affin képe lesz. /10."ábrázolás": 12.folyamat ábra /.

A transzformációs mátrix módositásával ujabb és ujabb "nézetei" tárulnak fel az ábrázolni kivánt szabályos politópnak.

Külön regiszterekben tárolva az élváz képének felépitő szakaszait,mint végpontjainak párjait,megnövelt sebességgel ujra rajzoltathatjuk a képet, s igy annak felépülése jobban nyomon követhető /11."ábra ujrarajzolása": 13.folyamat ábra/.

Mivel a gép két nagyfelbontásu képernyőt kezel váltakozva, igy több ábra készitésekor az utolsóként készitett ábra teritése is megvalósitható /12."utolsó kép teritése": 14. folyamat ábra /.

Végül lehetőség van a már elkészitett ábrába a koordináta tengelyek egységszakaszait is szaggatott vonallal berajzoltatni,ha az ábrázolási transzformáció $\mathbb{E}_4 \to \mathbb{E}_2$ tipusu, s mátrixa $[\mathbb{T}_{4\to 2}]$,/13."tengelyek felrajzolása": 15.folyamat ábra./.

8.5 Az ábrázoló program munka-moduljainek harmadik csoportja

Ha megfelelő perifériás egységek / mágneslemezes háttértároló, sornyomtató / állnak rendelkezésre,akkor az elkészitett és képernyőn megjelenitett ábrák további elemzés illetve tárolás céljából kimenthetők /14."ábra kimentése mágneslemezre": 16.folyamat ábra / és /15."ábra kinyomtatása sornyomtatón": 17. folyamat ábra /. Természetesen a mágneslemez befogadó képességétől függően több ábra is tárolható és ezek tetszésszerinti időben a lemezről visszahivhatók, s ujra tanulmányozhatók / 16."ábra betöltése mágneslemezről": 18.folyamat ábra./.

8.6 Megjegyzések

Az ismertetett program segitségével ábrázoltuk a 3- és 4-dimenziós szabályos politópokat,továbbá olyan konfigurációkat,amelyek szabályos mintázattal rendelkeznek,s amelyeket a program kipróbálása közben nyerhetünk.Kiszámitva,adott csucsrendszer esetén a szóbajövő lehetséges élhosszakat más és más alakzatokat nyerhetünk,amelyek természetesen nem tekinthetők minden esetben valamely 3- vagy 4- dimenziós test élvázának.Programunk segitségével megkereshetjük az elméleti módszerekkel meghatározott 3- és 4- dimenziós terek félig szabályos- és csillagpolitópjainak sikbeli ábráit,illetve teljesen általános politópikus alakzatok ábrázolhatók a program egyszerü általánositásával.Az ábrázoló programmal készitett rajzokon kivül a program müködésének részletes tanulmányozásához megtalálható annak teljes listája is.

(MELLÉKLET: 66-136. OLDAL)

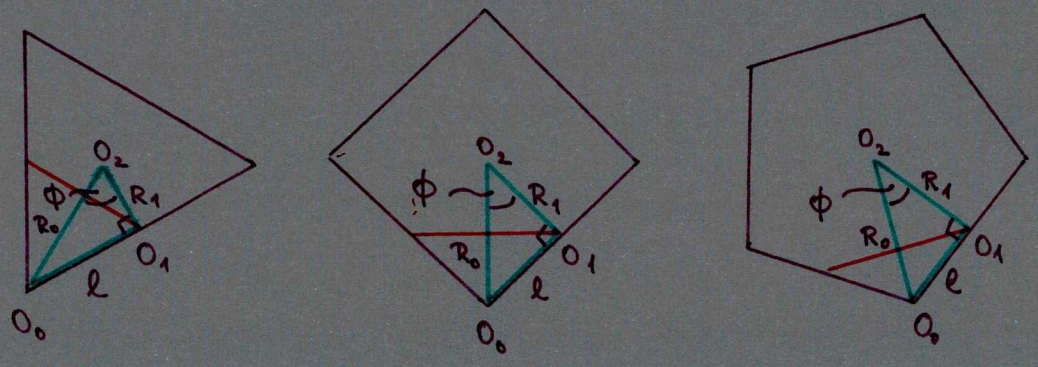
B e f e j e z é s

A dolgozatban az E_n n-dimenziós terek szabályos politópjai elméletének fő vonalakban való ismertetése után azokat a klasszszikus ábrázoló geometriai transzformációk természetes általánositásaiként nyert leképezések segitségével ábrázoltuk.
A szabályos politópok megkonstruálásával és vizsgálatával elsősorban az volt a célunk,hogy olyan eljárásokhoz,grafikus vagy számitógépes módszerekhez jussunk el,amelyek elősegitik a 3-dimenziós térben már meglevő térszemlélethez hasonló "többdimenziós térszemlélet" kialakulását.
Számos,további vizsgálódásra is alkalmas kérdés vethető még fel e témával kapcsolatban.Ilyen kérdések például a magasabb dimenziós elliptikus és hiperbolikus terek alakzatainak ábrázolásai, a magasabb dimenziós euklideszi terek csillagpolitópjainak és félig szabályos politópjainak ábrázolásai,szemléltetései,modellezései az E_2 illetve E_3 terekben.
A dolgozat befejező részét képező számitógépes ábrázoló program a kinálkozó lehetőségek egyike.
A számitógépes adaptáció természetesen kiterjeszthető az általunk ismertetett magasabb dimenziós ábrázoló geometriai eljárások mindegyikére,továbbá a magasabb dimenziókban megfogalmazható más ábrázolási módszerekre is.
E kérdésekkel a jövőben szeretnénk foglalkozni.

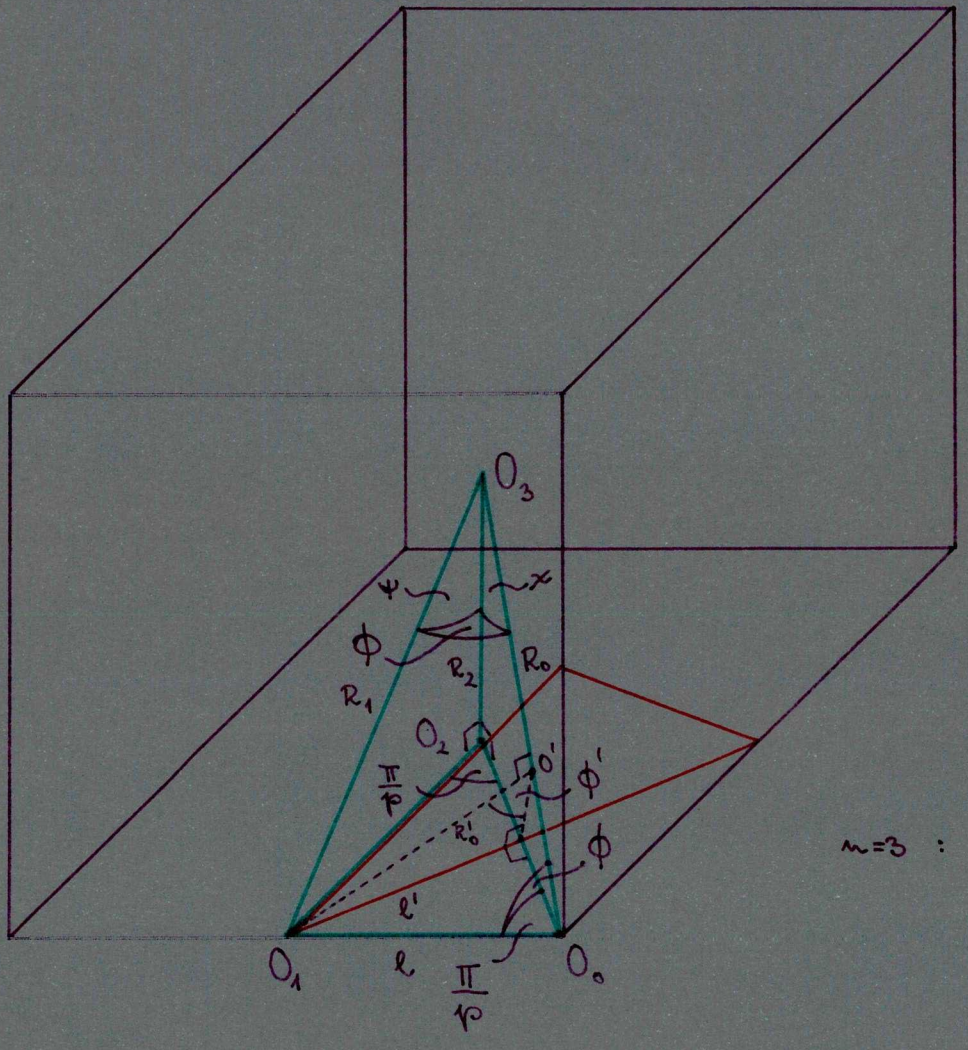
FELHASZNÁLT IRODALOM:

1. K. BORSUK: Multidimensional analytic geometry
/ Warszava,1969 /
2. H.S.M.COXETER: A geometriák alapjai
/ Müszaki Könyvkiadó, 1973 /
3. H.S.M.COXETER: Regular Polytopes
/ Methuen, London, 1947 /
4. FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Regulare Figuren
/ Akadémiai Könyvkiadó,1965 /
5. FRIED ERVIN: Klasszikus és lineáris algebra
/ Tankönyvkiadó, 1977 /
6. P.R.HALMOS: Véges dimenziós vektorterek
/ Müszaki Könyvkiadó, 1984 /
7. KÁRTESZI FERENC: Ábrázoló geometria
/ Tankönyvkiadó, 1962 /
8. KERÉKJÁRTÓ BÉLA: Les fondements de la géométrie
tome deux Géométrie Projective
/ Akadémiai Könyvkiadó, 1966 /
9. RADÓ FERENC-ORBÁN BÉLA: A geometria mai szemmel
/ Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár,1981 /
10. B.A.ROZENFELD: Mnogomernüje prosztransztva
/ "Nauka", 1966 /
11. RÓZSA PÁL: Lineáris algebra és alkalmazásai
/ Müszaki Könyvkiadó, 1976 /

ÁBRÁK A DOLGOZATHOZ

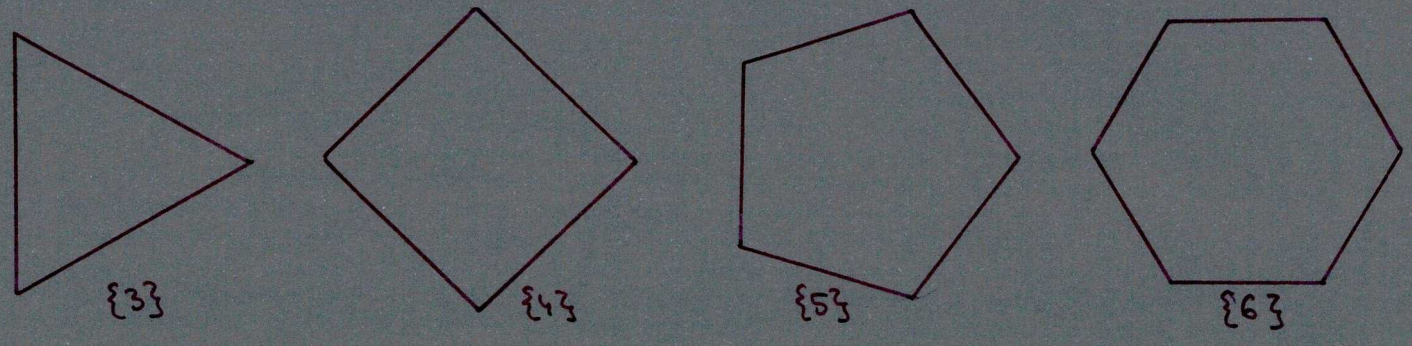


$n=2$: $\{3\}$ $\{4\}$ $\{5\}$

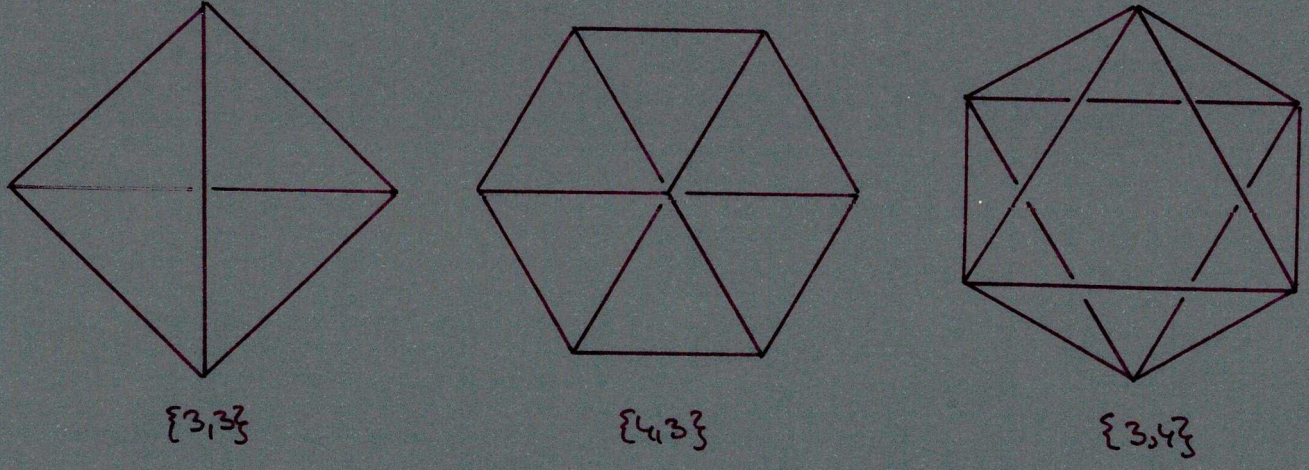


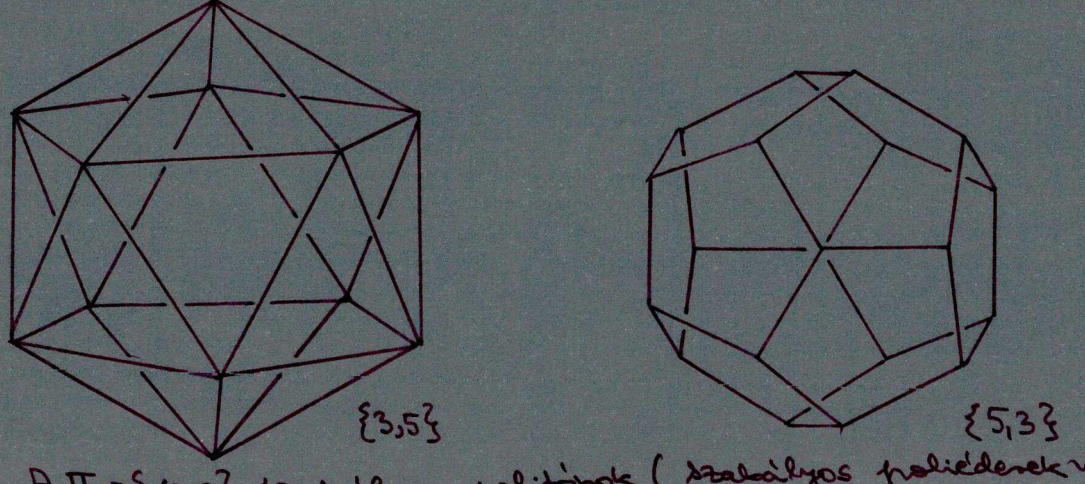
$n=3$: $\{4,3\}$

1. ábra: A $\Pi_n=\{p,q,\dots,v,w\}$ szabályos politóp egy karakterisztikus szimplexe

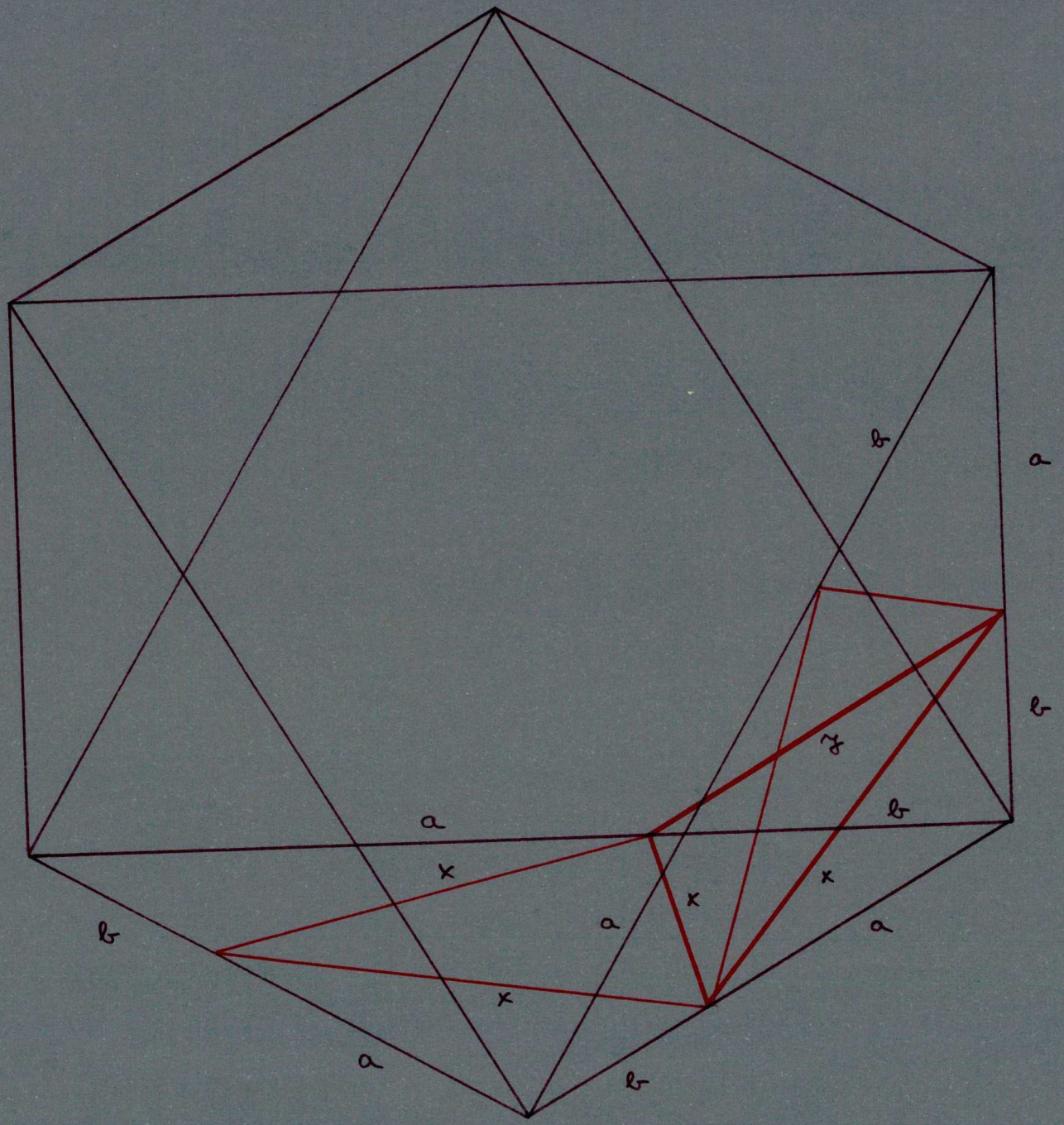


2.ábra: A $\Pi_2=\{p\}$ szabályos politópok (szabályos p-szögek) ábrázolása néhány egyszerűbb esetben.



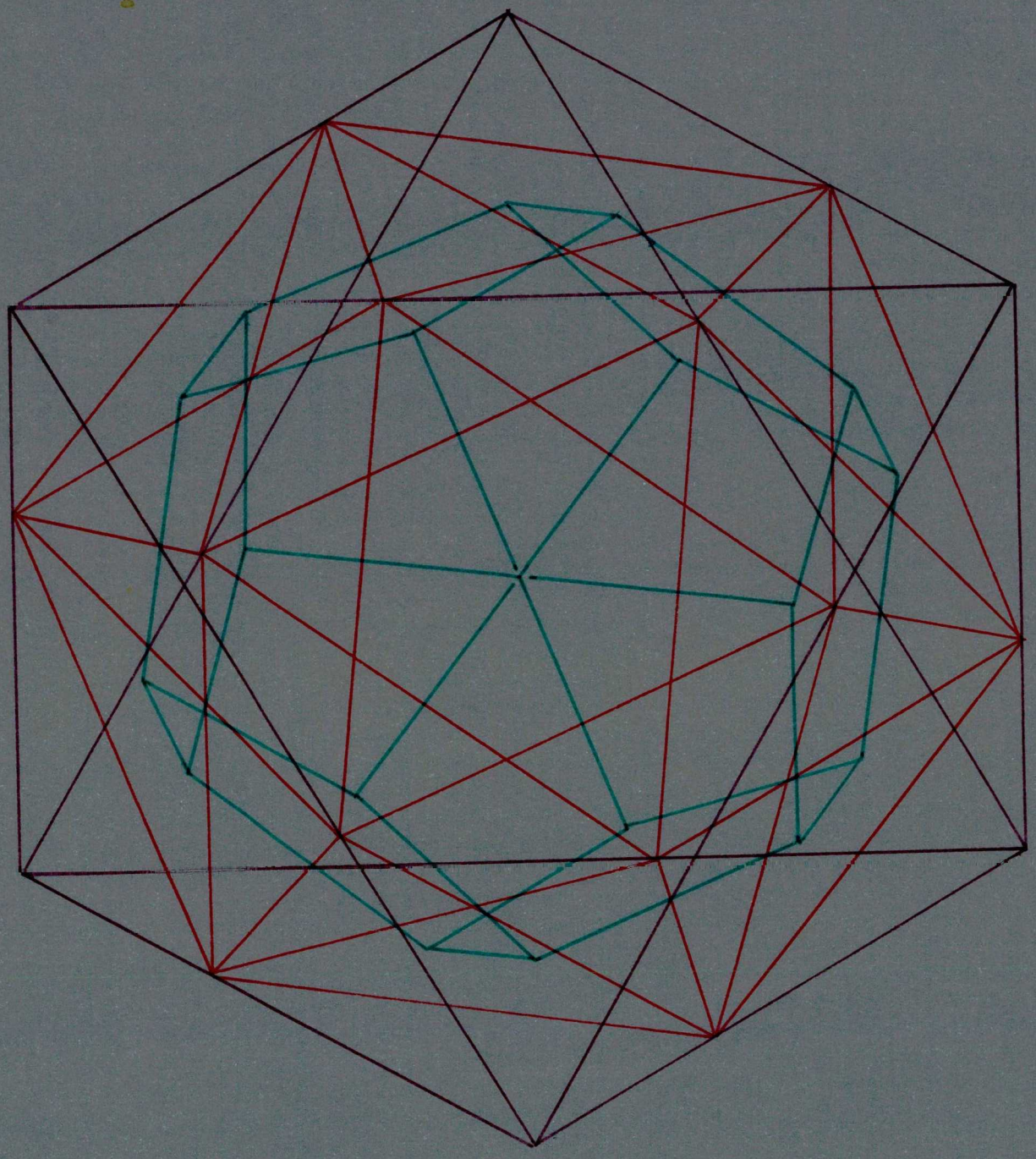


3.ábra: A $\Pi_3=\{p,q\}$ szabályos politópok (szabályos poliéderek v. platoni szabályos testek) ábrázolása

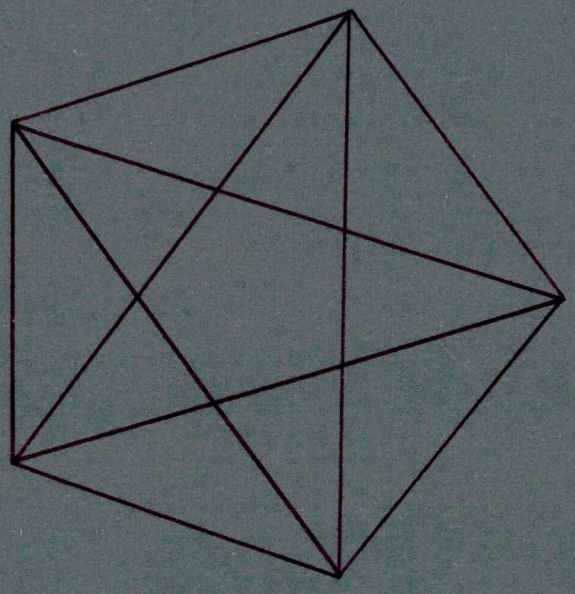


4. ábra: A {3,5} konstrukciója {3,4} felhasználásával

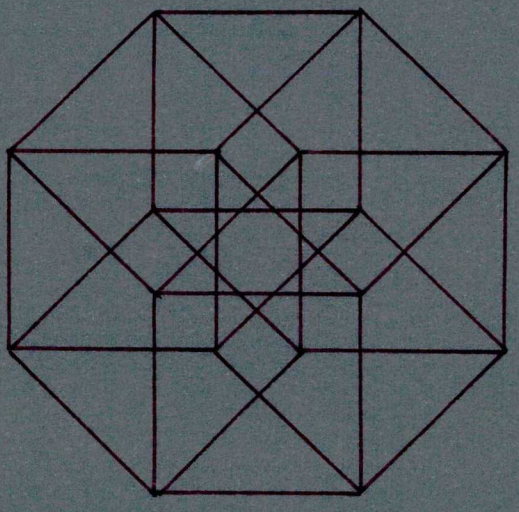
$a : b = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



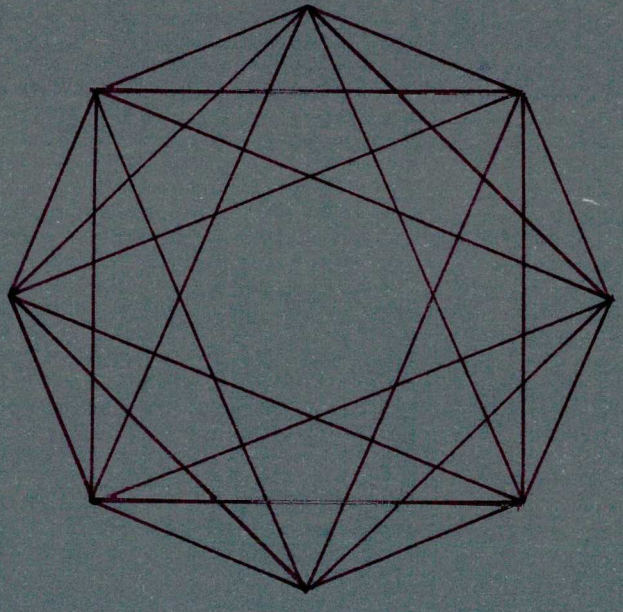
5. ábra: A $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{5,3\}$ politópok ábrázolása konstrukciójuk alapján



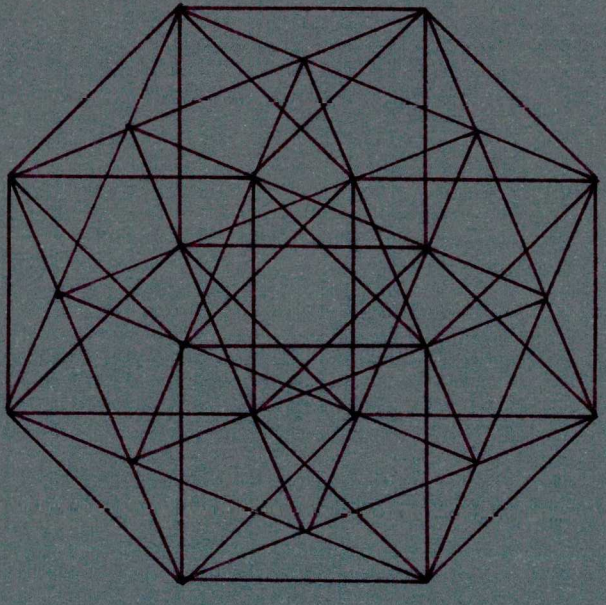
{3,3,3}



{4,3,3}



{3,3,4}



{3,4,3}

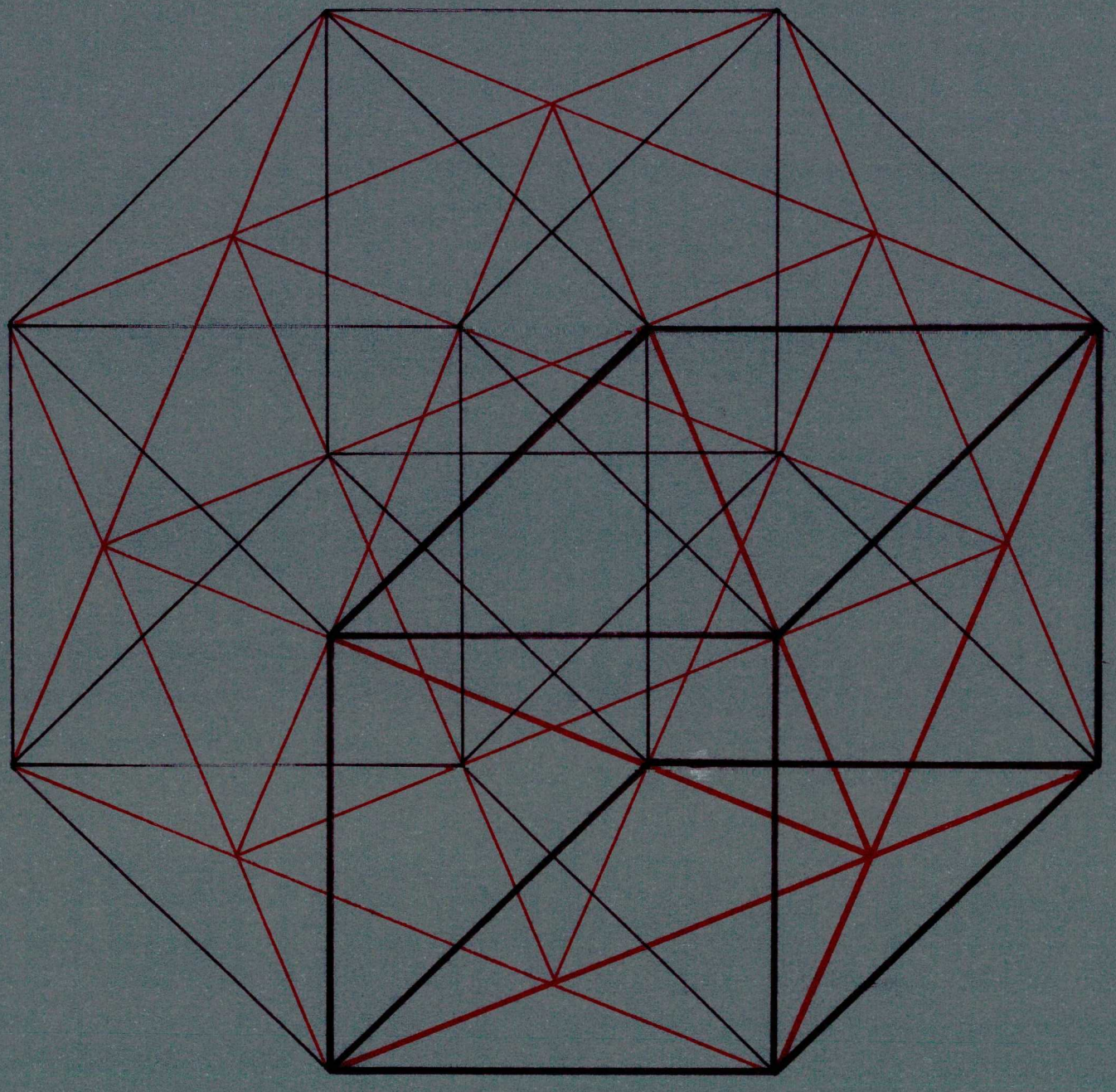
6. ábra: 4-dimenziós $\Pi_4 = \{p,q,r\}$ szabályos politópok ábrázolása

$\{3,3,3\}$ α_4 szimplex v. pentatóp

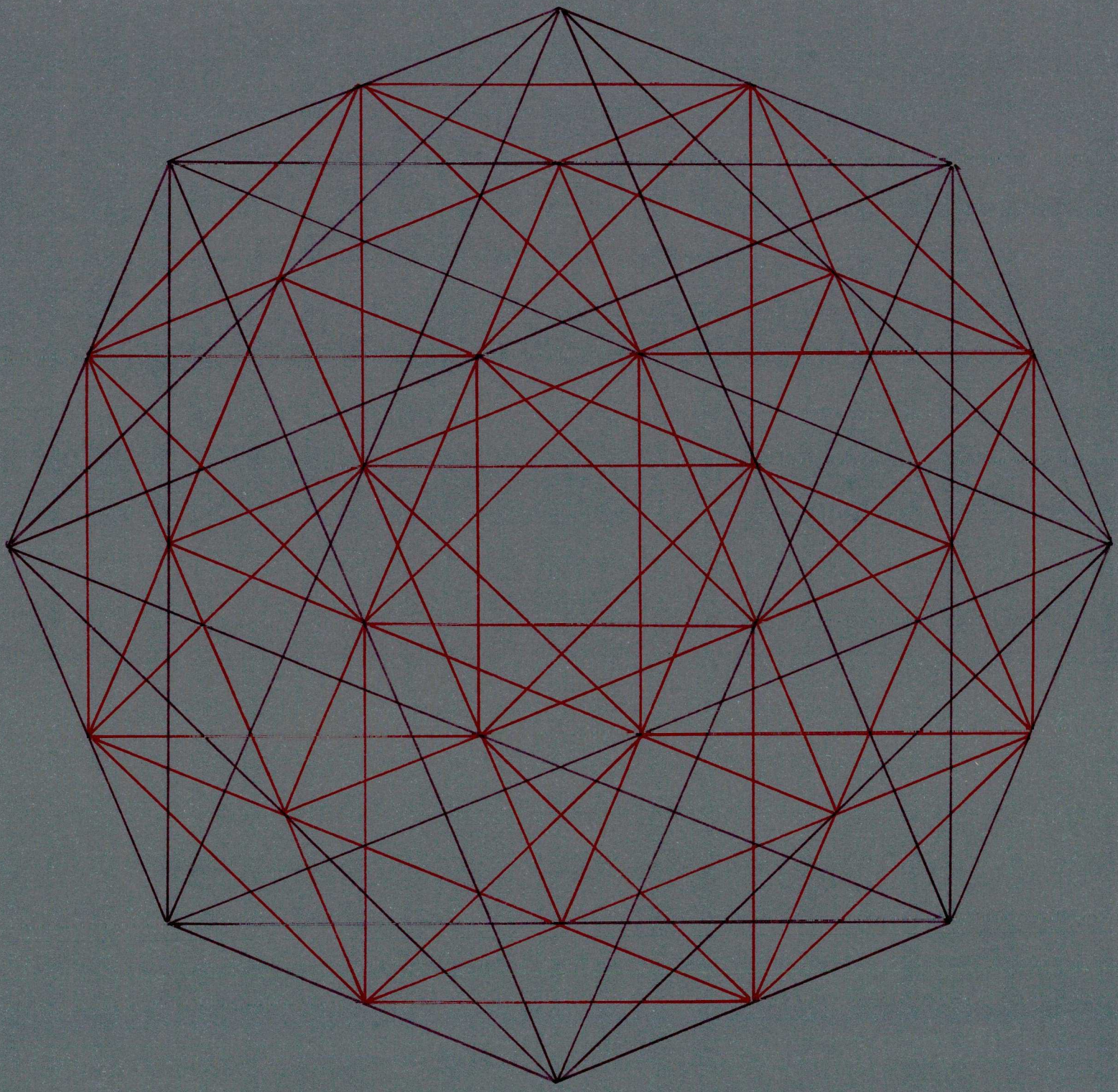
$\{4,3,3\}$ γ_4 mértékpolitóp v. hiperkocka

$\{3,3,4\}$ β_4 keresztpolitóp

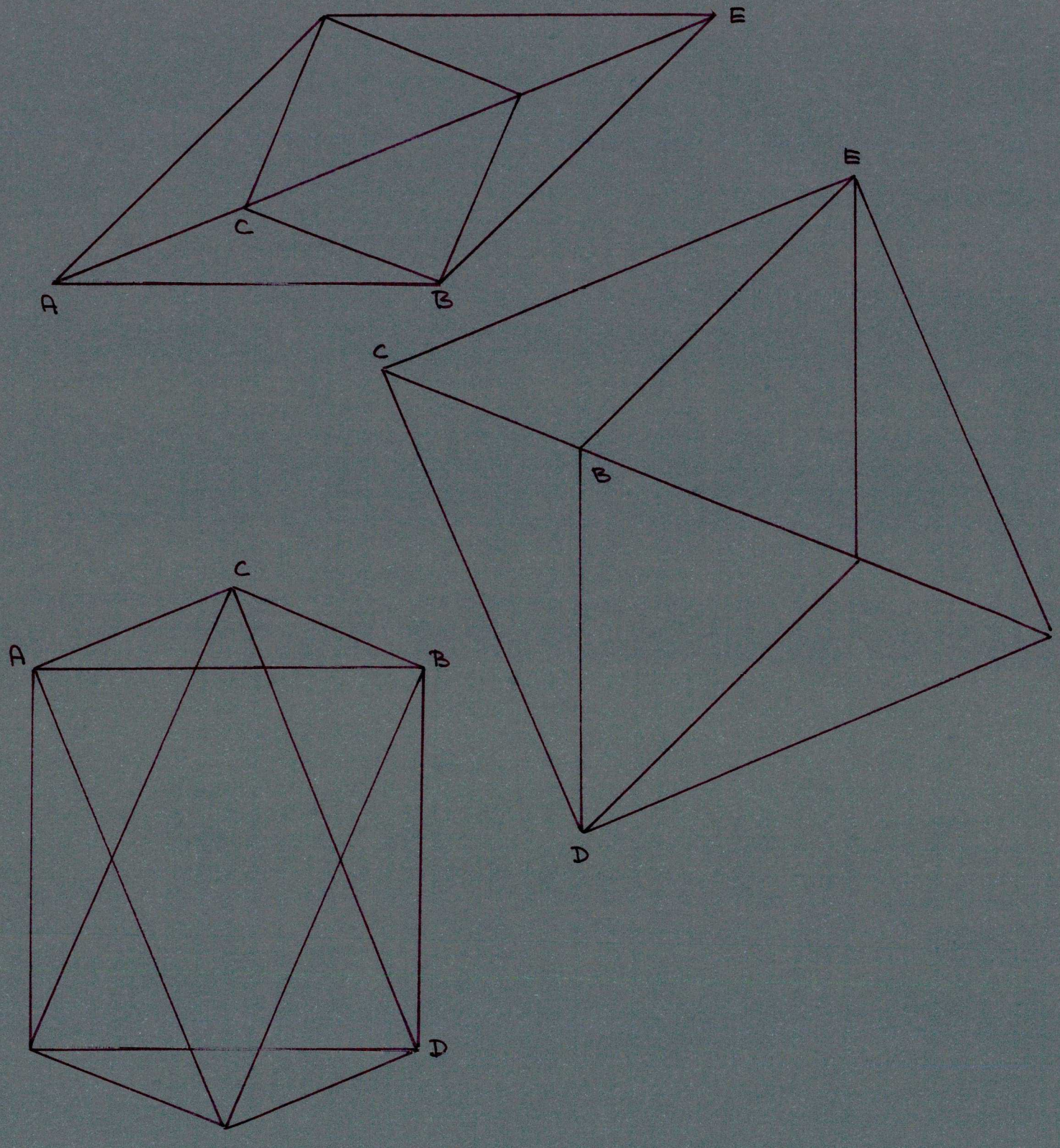
$\{3,4,3\}$ CESARO politóp v. 24-cella



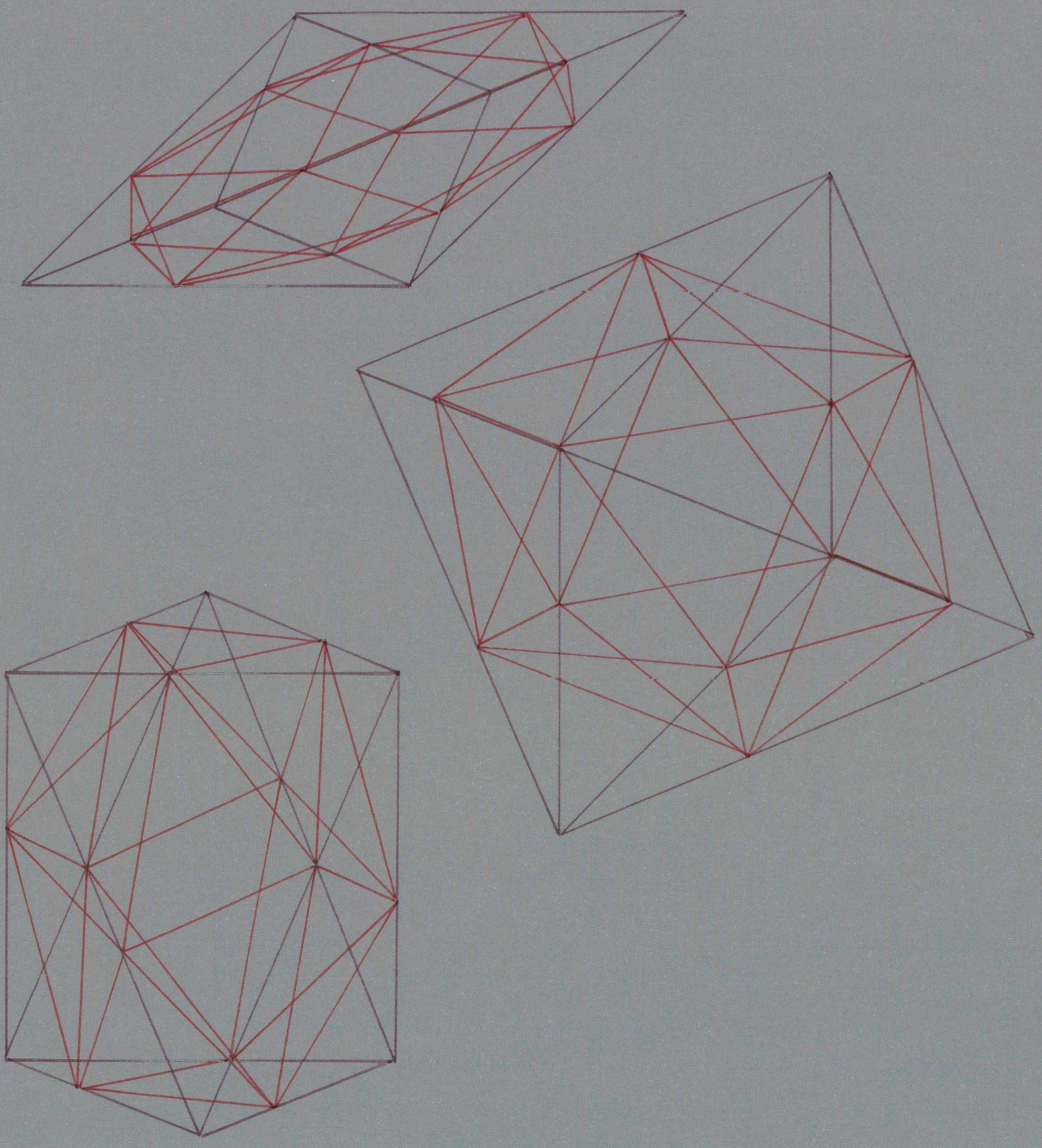
7. ábra: A $\{3,4,3\}$ előállítása két $\{4,3,3\}$ hiperkocka segítségével, felhasználva az egyik $\{4,3,3\}$ politóp 8 $\{4,3\}$ „alapú" gúlára való szétbontását.



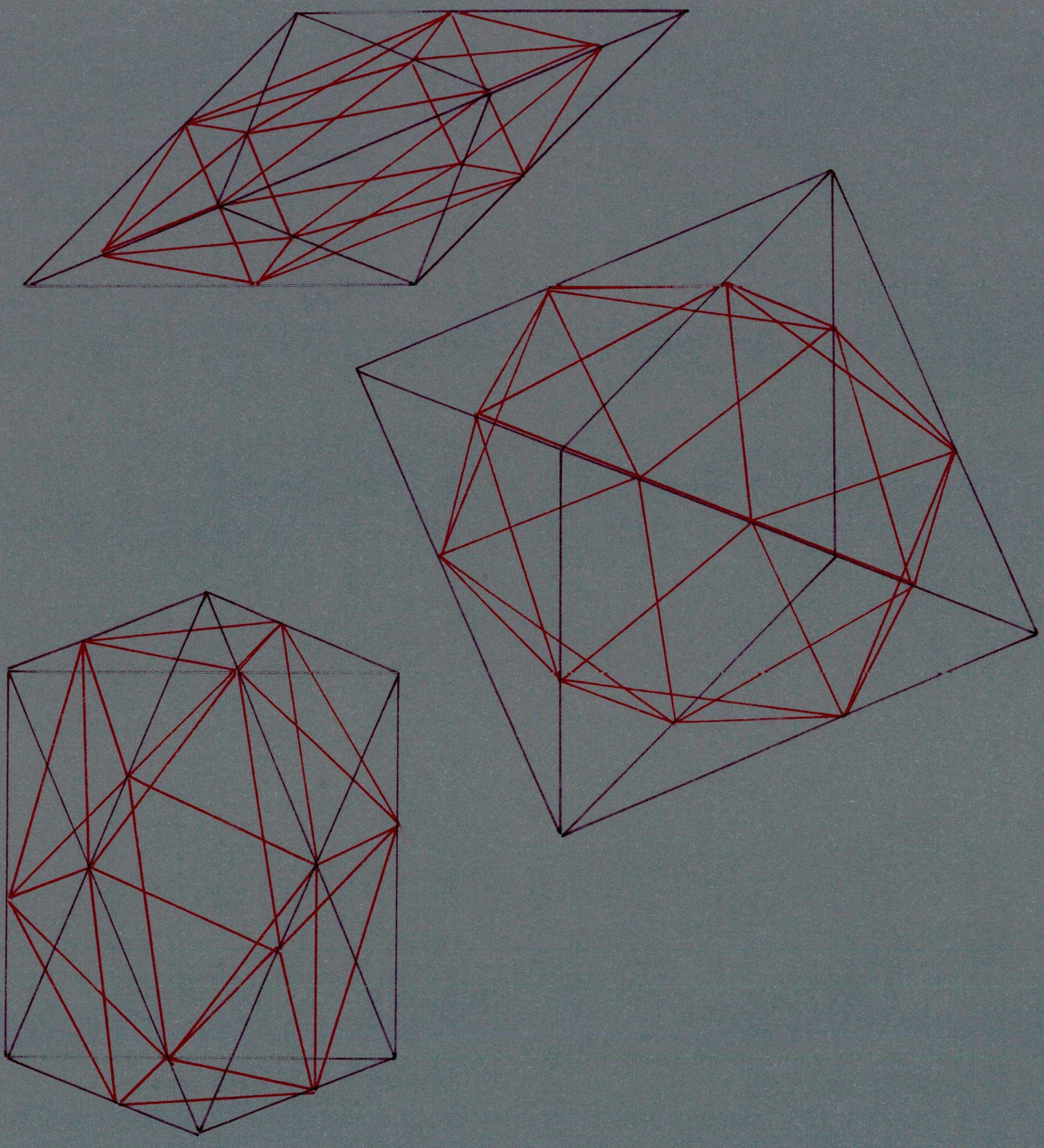
8. ábra: A $\Pi_4=\{p\times q,r\}=\{3,4,3\}$ CESARO-féle konstrukciója a $\{3,3,4\}$ politóp felhasználásával.



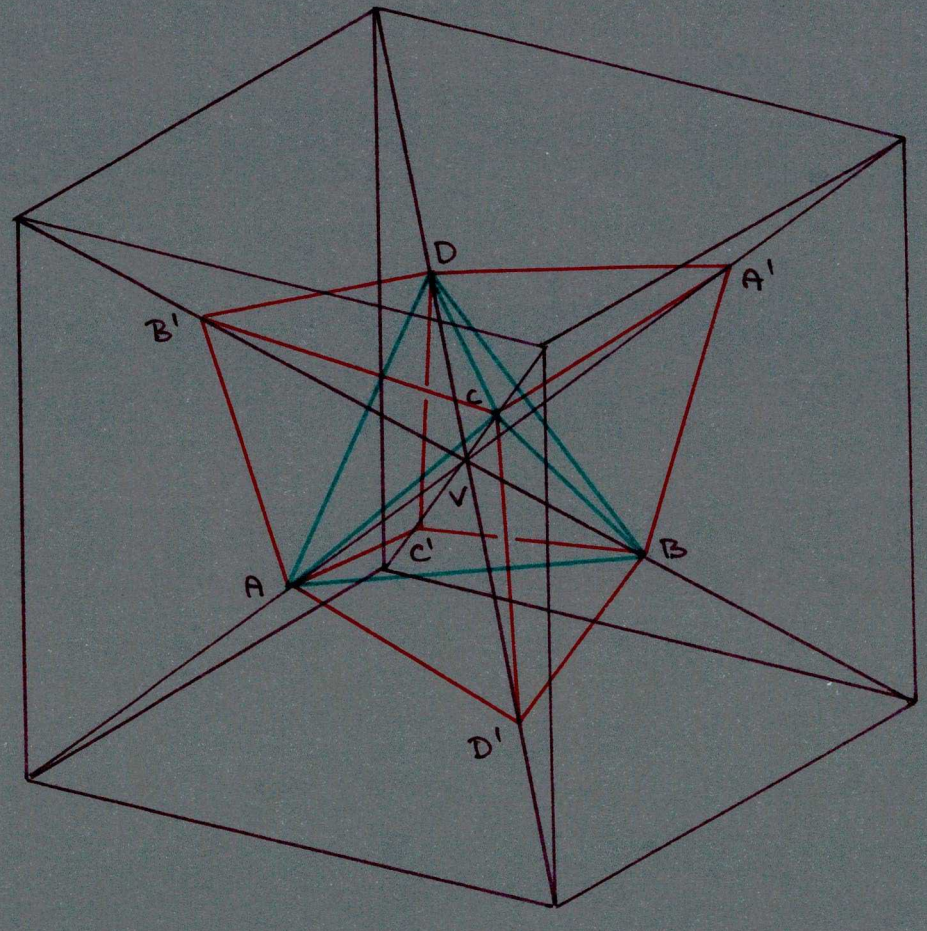
9. ábra: A $\Pi_4 = \{3,4,3\}$ politóp $\{3,4\}$ oktaéder cellái az ábrázolás során 3 különböző alakú „vetületben" jelennek meg. (A, B, C, D, E illesztési pontok)



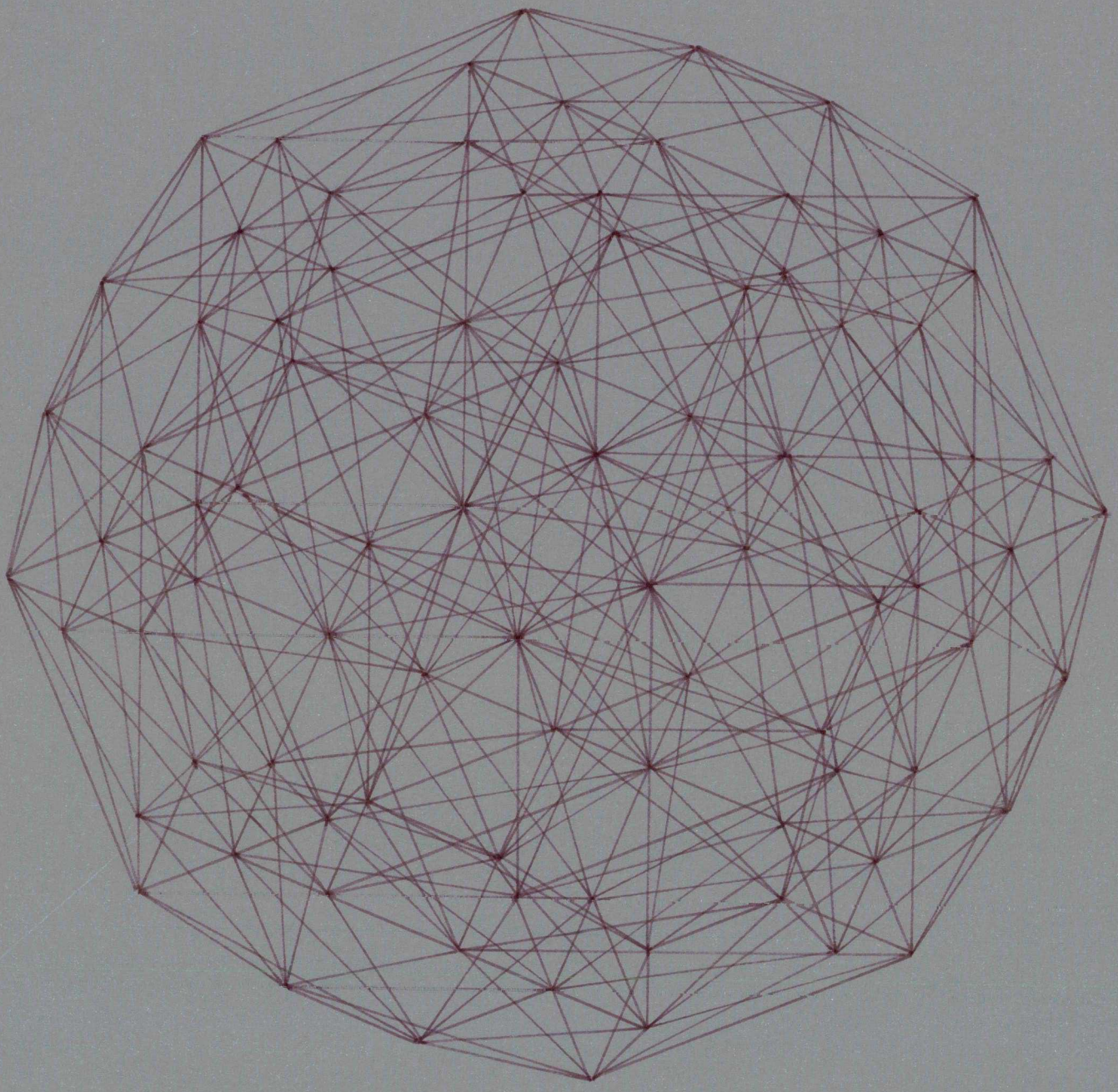
9/A ábra: A $\Pi_4 = s\{3,4,3\}$ féleg szabályos politóp $\{3,5\}$ vetületei az ábrázolás során $2 \cdot 3 = 6$ különböző alakú „vetületben" jelennek meg.



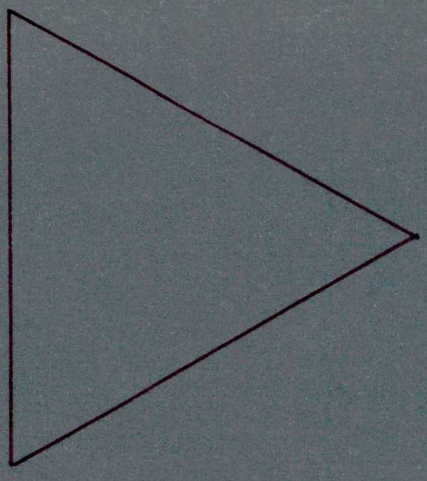
9/B ábra.



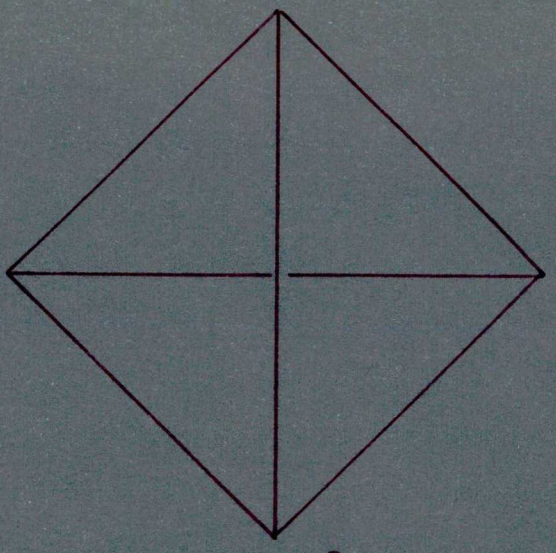
10.ábra: A $\{3,4,3\}$ politóp egy V csúcsának környezete az $s\{3,4,3\}$ megkonstruálása után.



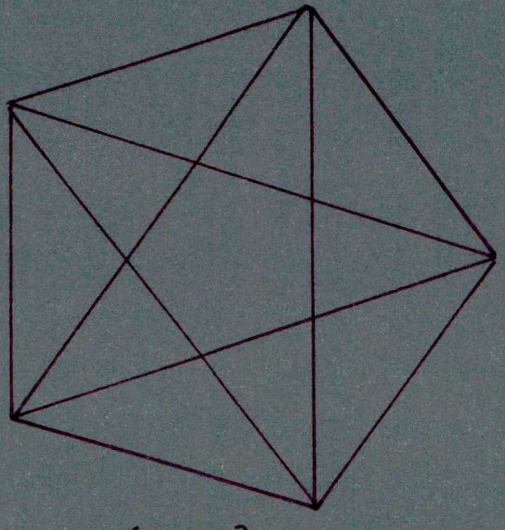
11. ábra: A $\Pi_4 = s\{3,4,3\}$ GOSSET-féle féligszabályos politóp ábrázolása.



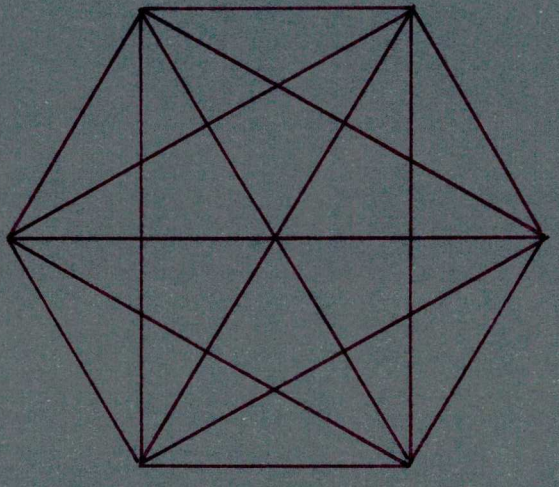
$n=2$ $\{3\}$



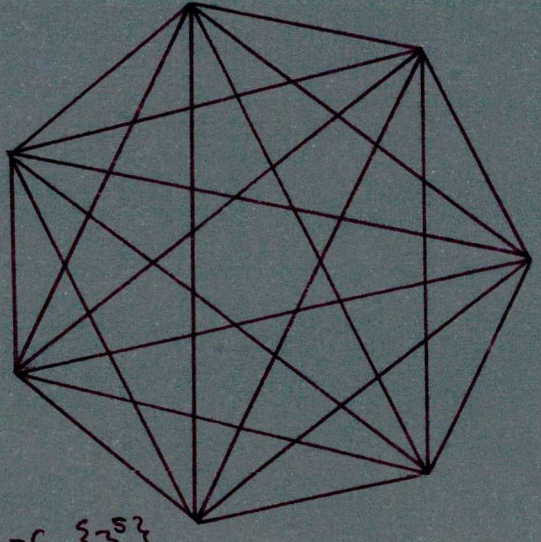
$n=3$ $\{3,3\}$



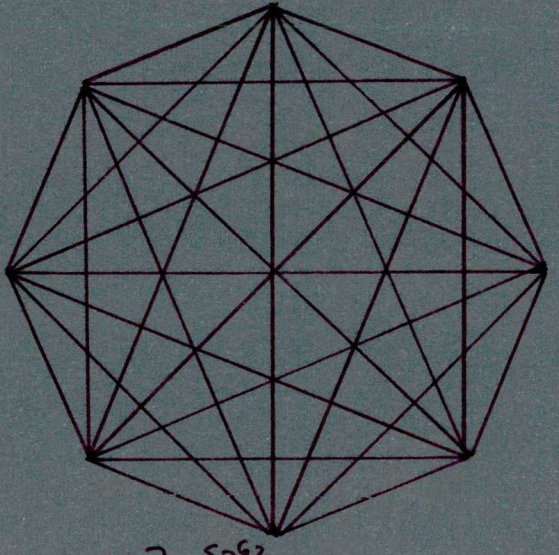
$n=4$ $\{3,3,3\}$



$n=5$ $\{3,3,3,3\}=\{3^4\}$

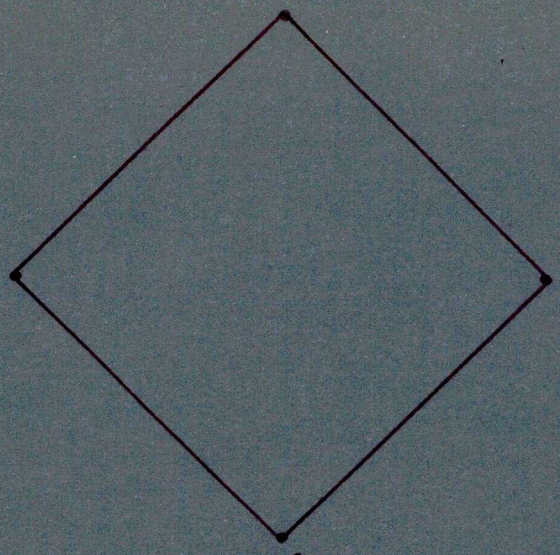


$n=6$ $\{3^5\}$

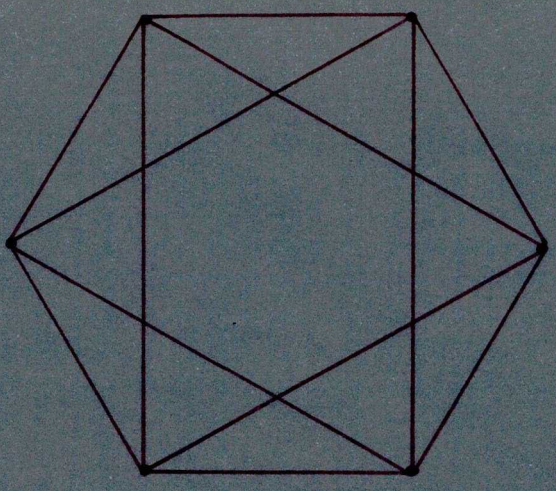


$n=7$ $\{3^6\}$

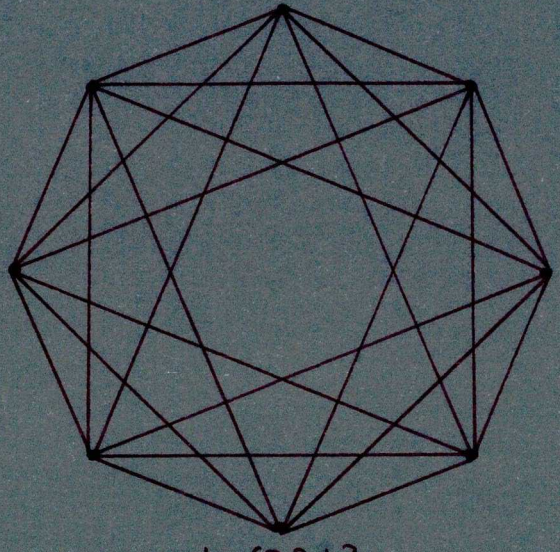
12. ábra: n szabályos szimplexek ábrázolása.



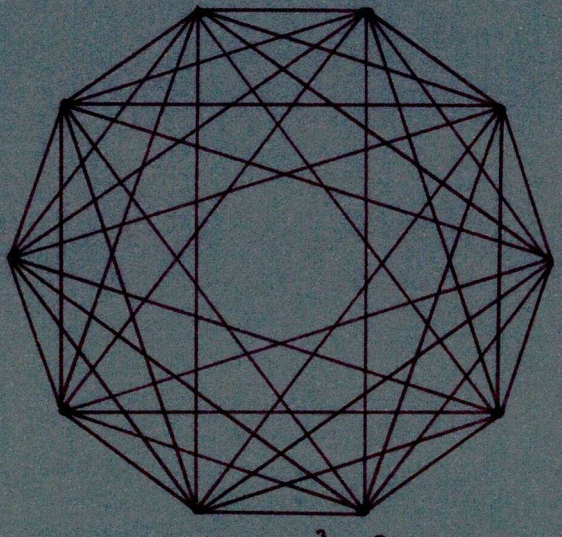
$n=2$ $\{4\}$



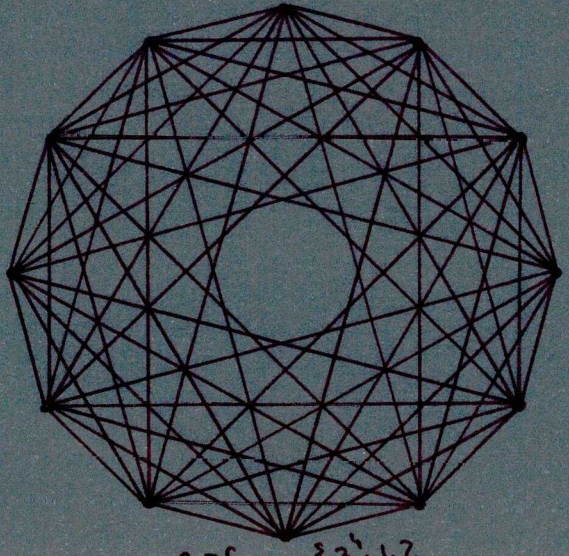
$n=3$ $\{3,4\}$



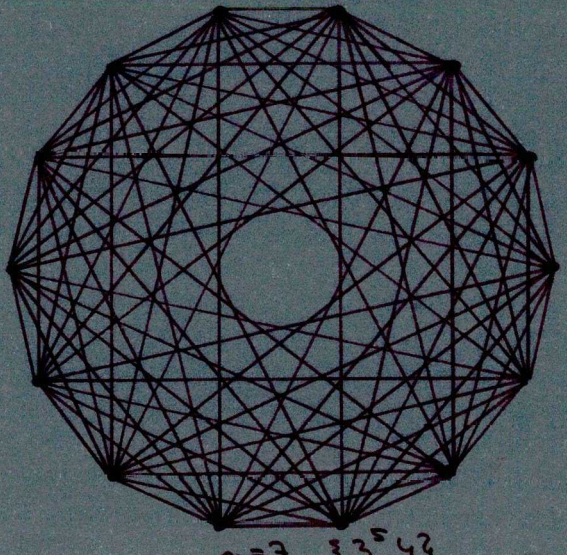
$n=4$ $\{3,3,4\}$



$n=5$ $\{3^3,4\}$

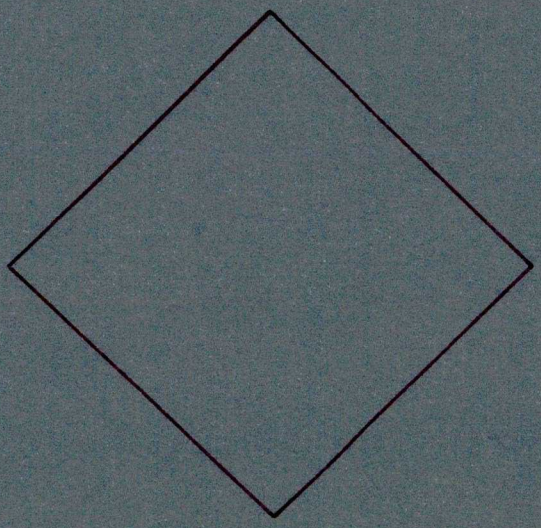


$n=6$ $\{3^4,4\}$

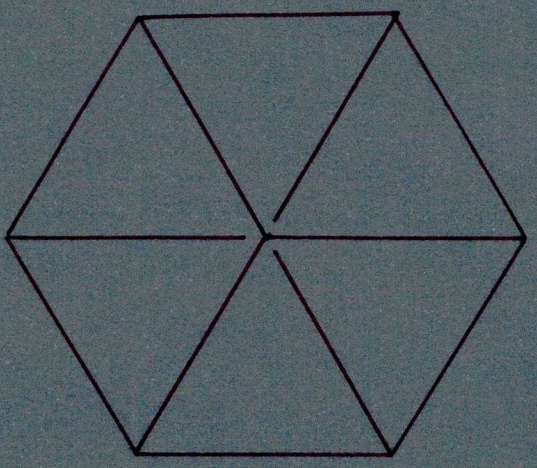


$n=7$ $\{3^5,4\}$

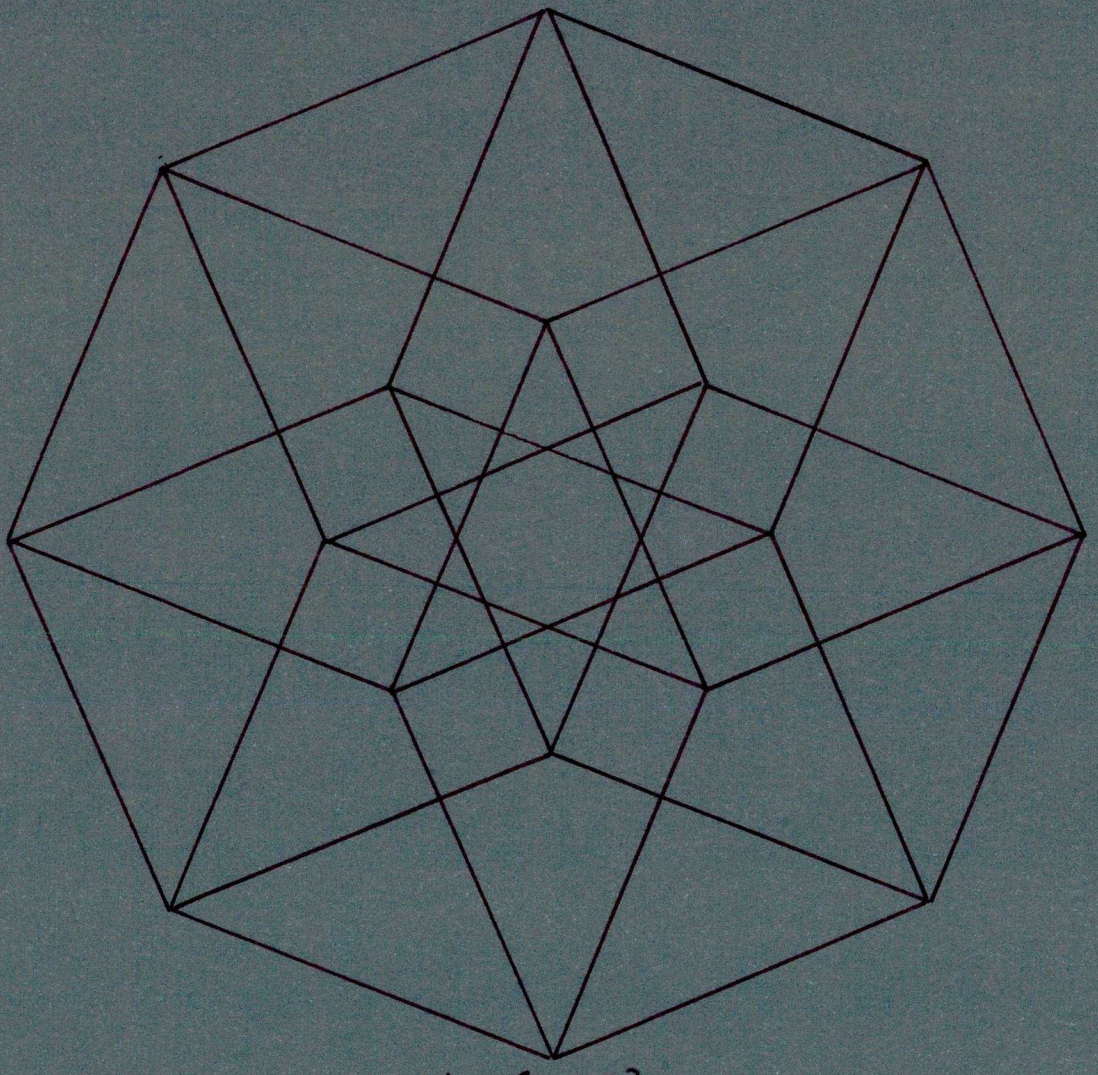
13. ábra: β_n kereszt politópok ábrázolása.



$n=2$ $\{4\}$

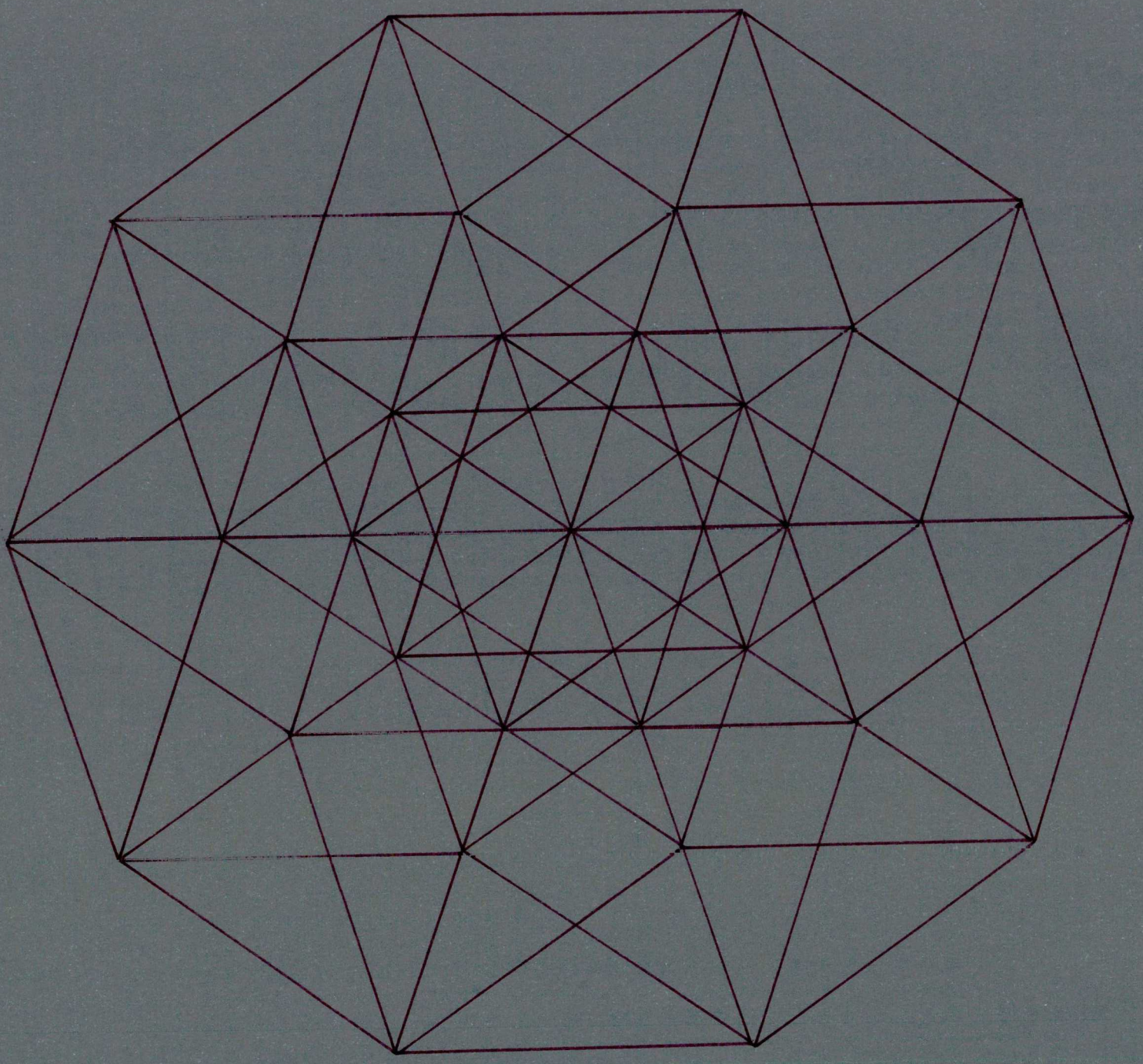


$n=3$ $\{4,3\}$

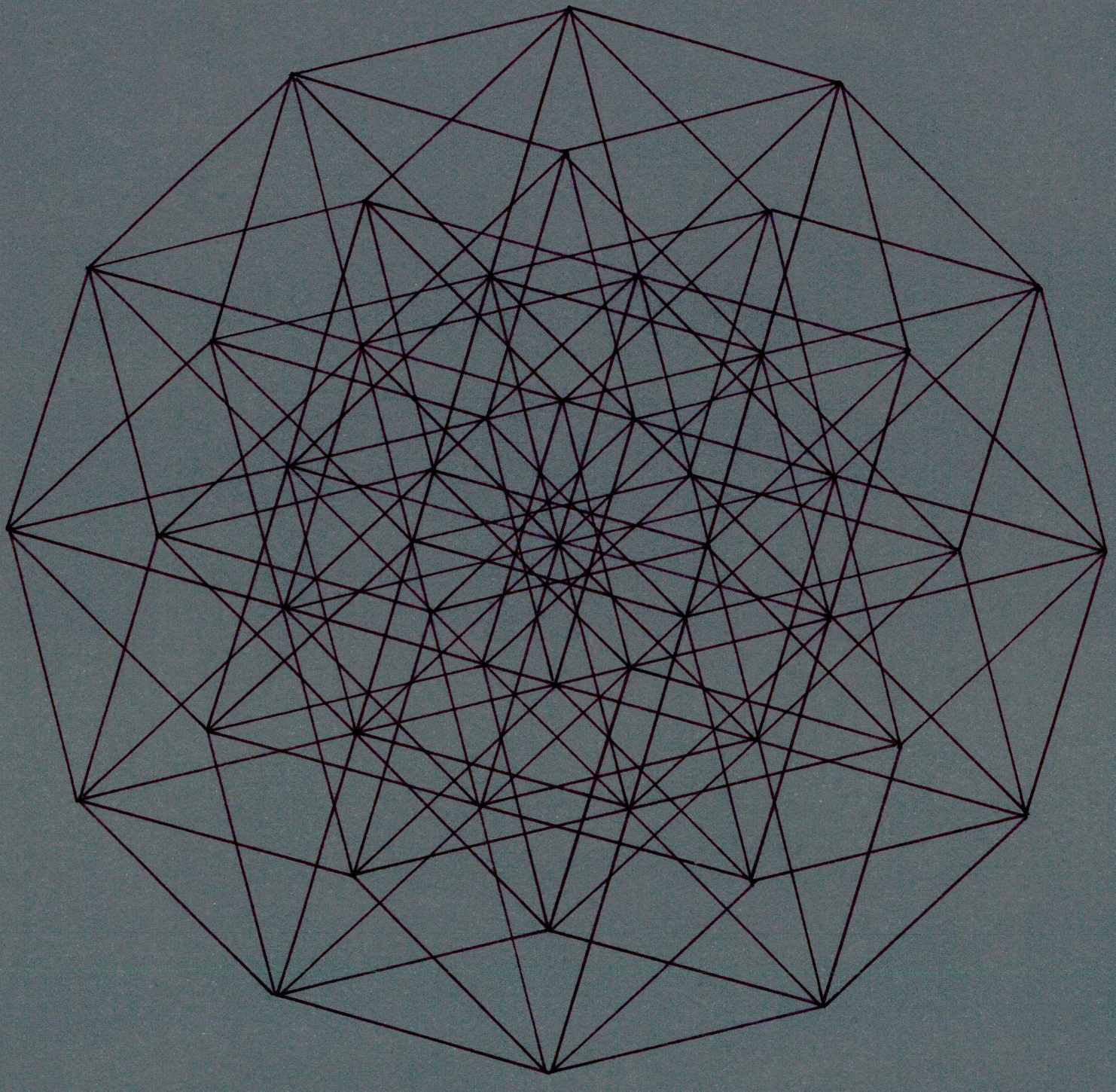


$n=4$ $\{4,3,3\}$

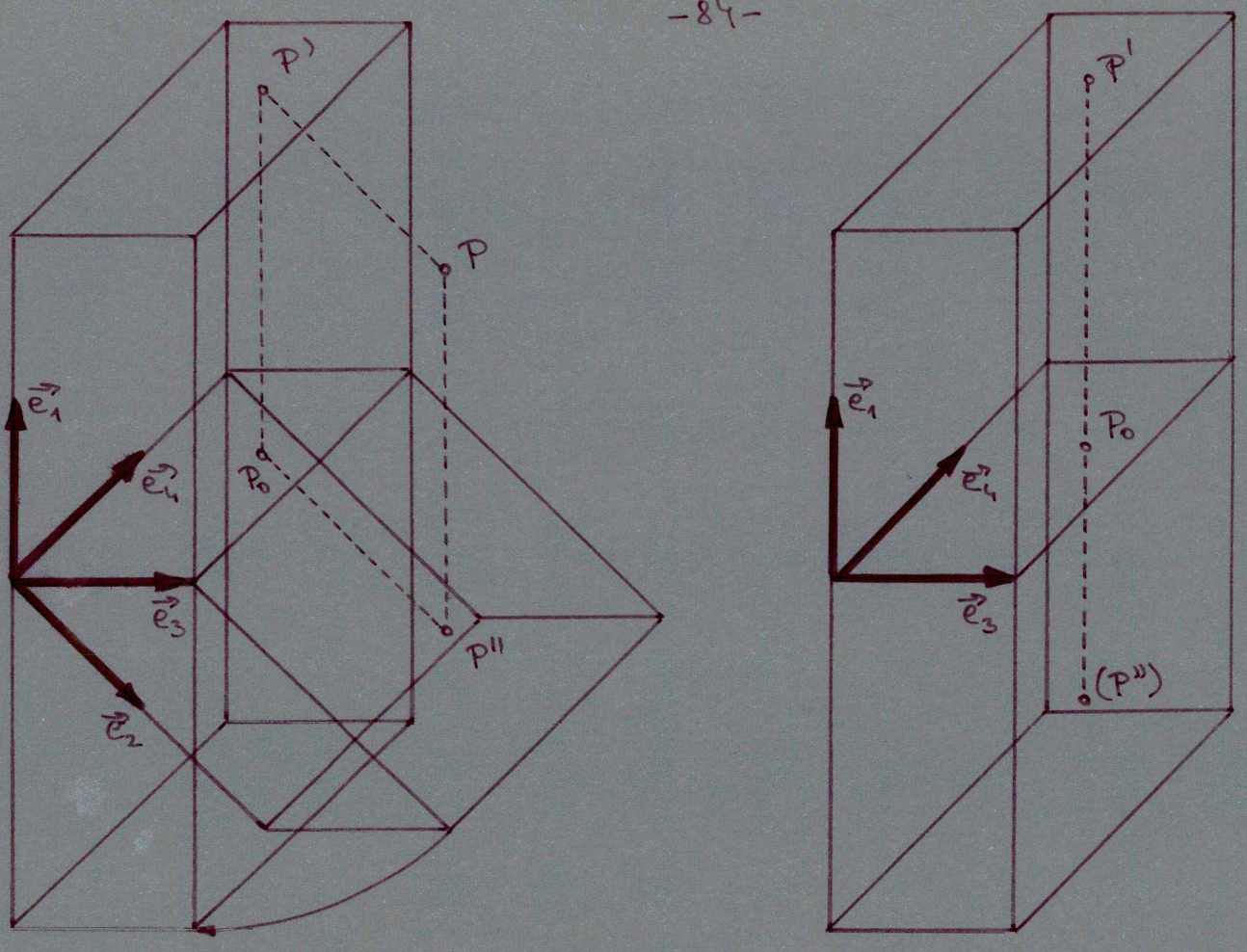
14. ábra: A $\Pi_n = \{4,3^{n-2}\}$ mértékpolitópok ábrázolása $(2 \le n \le 4)$ esetén.



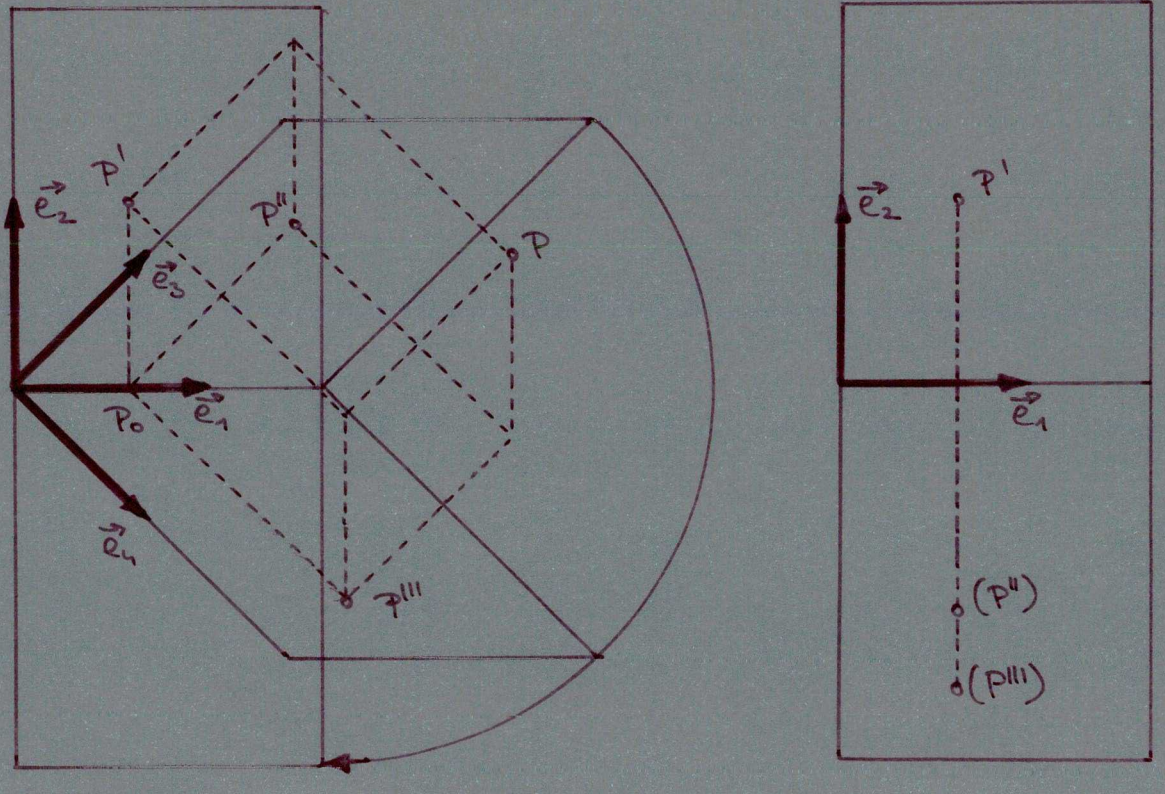
15. ábra: A $\Pi_5 = \{4,3,3,3\}$ mértek politóp (5-dimenziós kocka) ábrázolása.



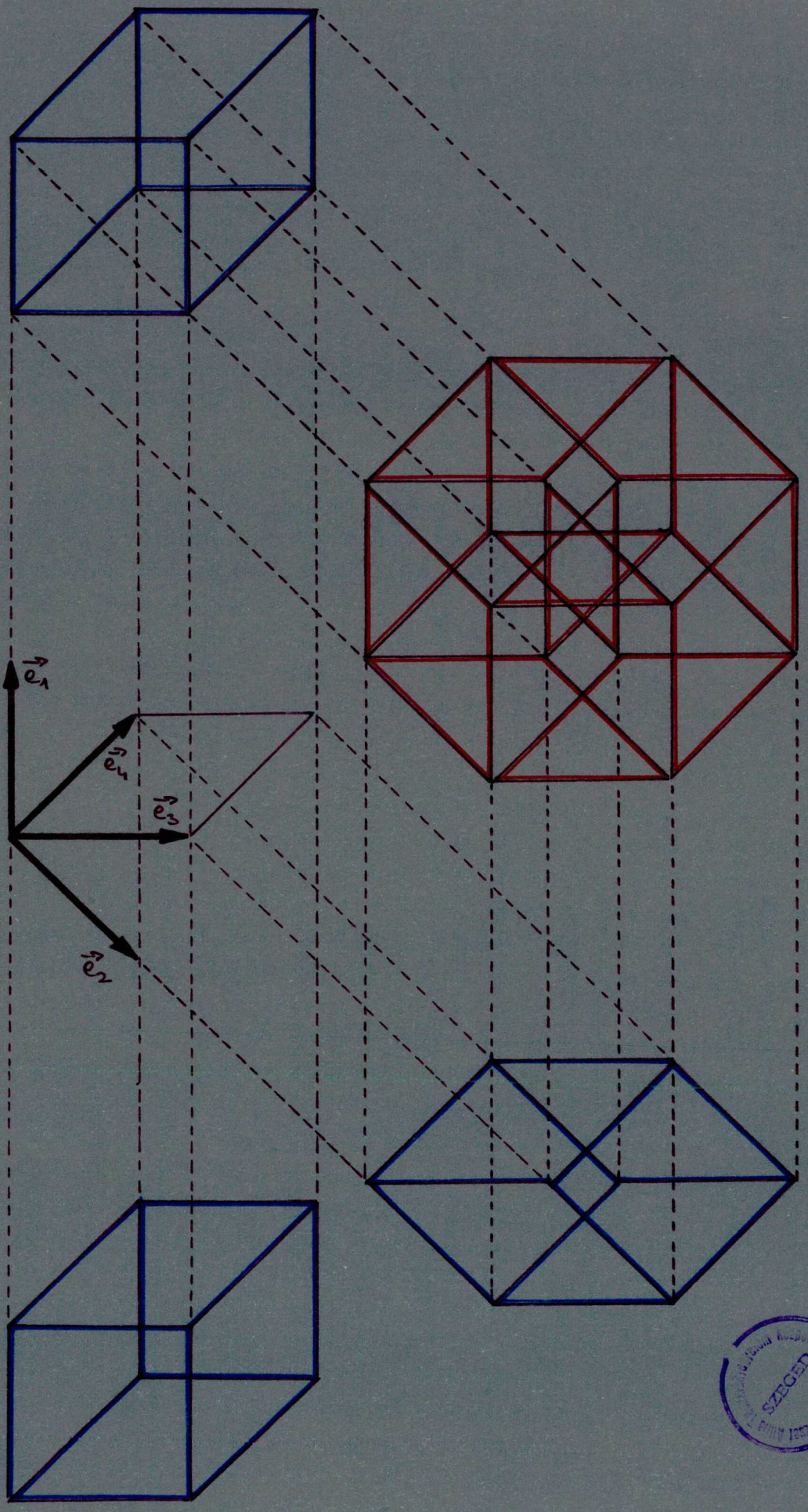
16. ábra: A $\Pi_6 = \{4,3,3,3,3\}$ mértek politóp (6-dimenziós kocka) ábrázolása.



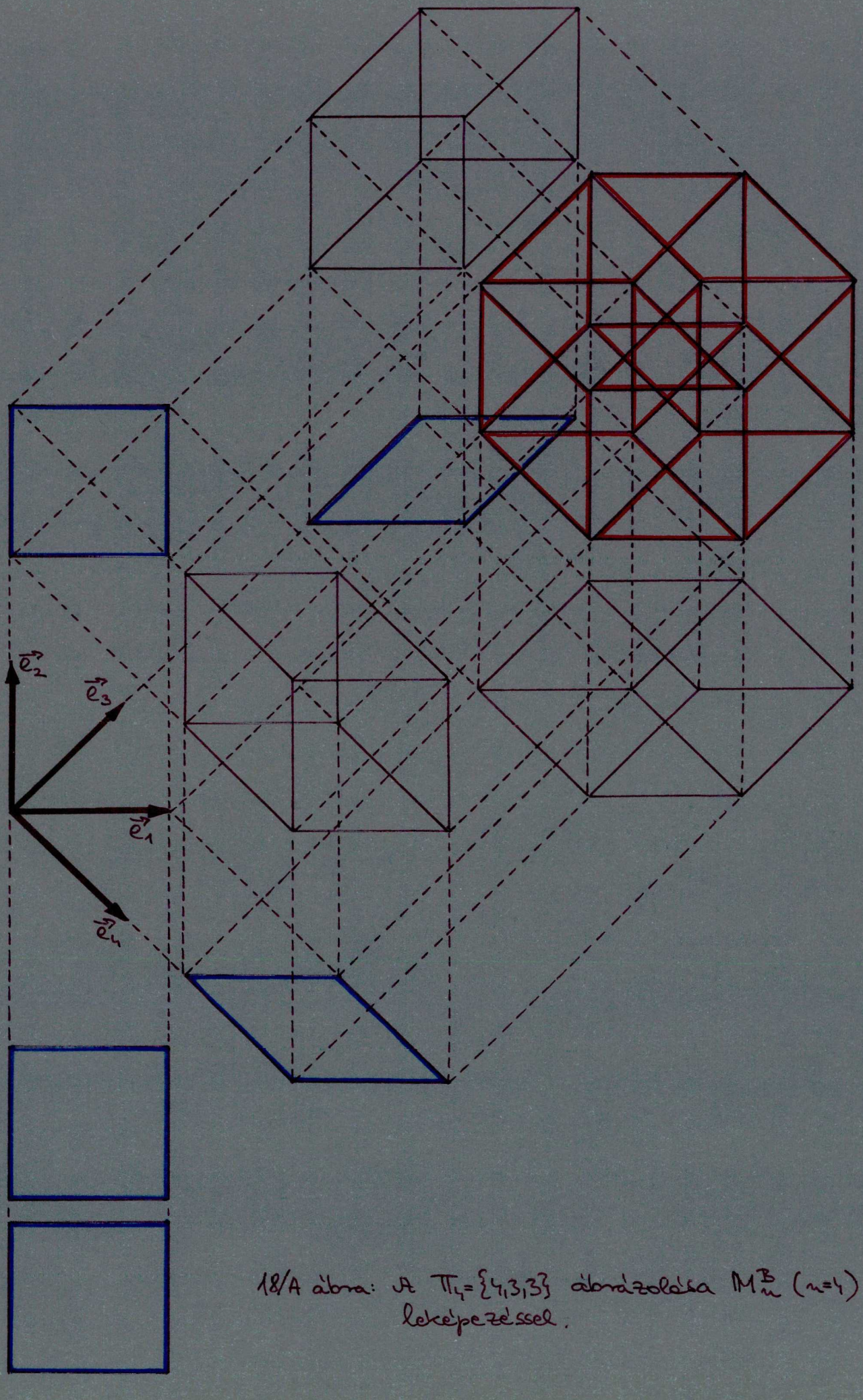
17. ábra: Az M^A_n leképezés $n=4$ esetén



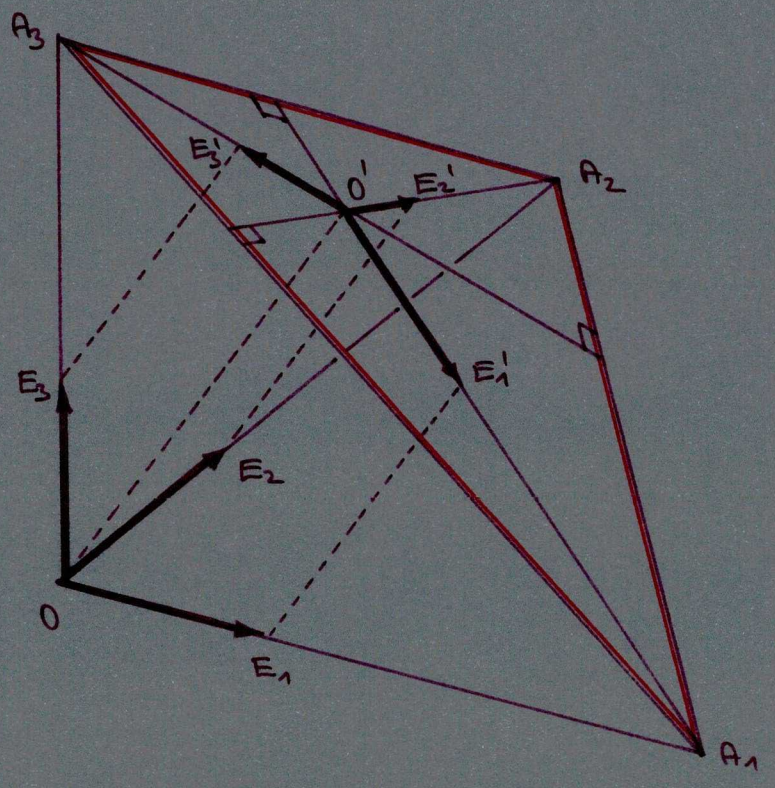
18. ábra: Az M^B_n leképezés $n=4$ esetén



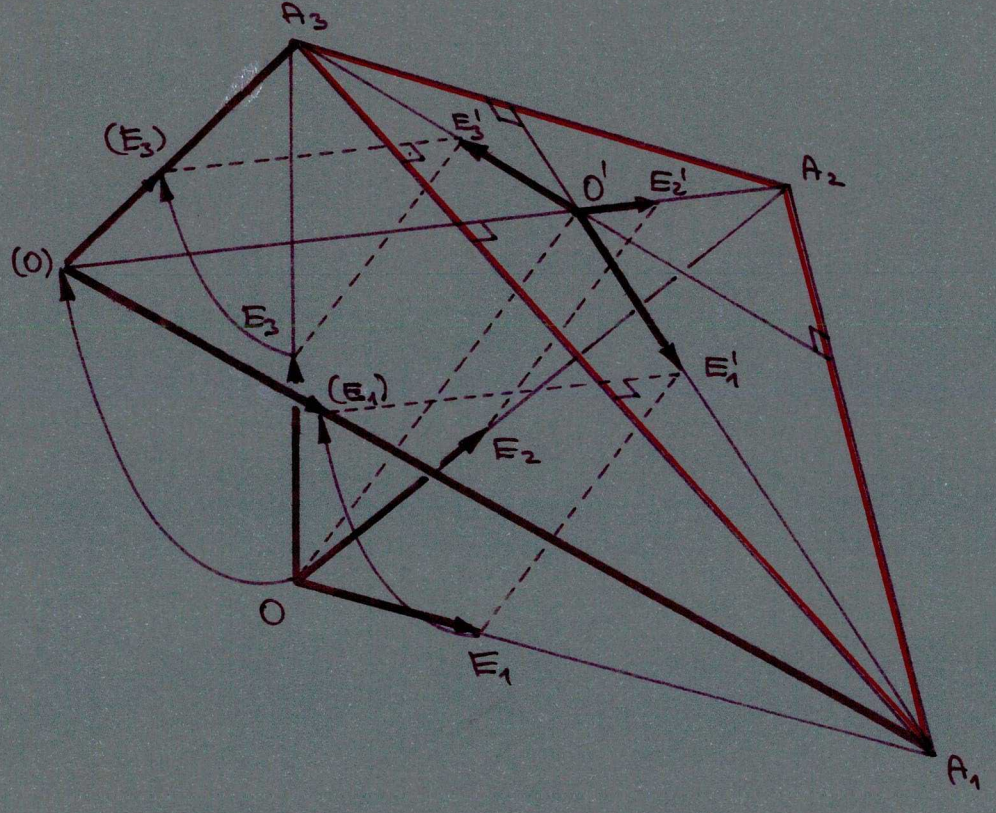
17/A ábra: A $\Pi_4 = \{4,3,3\}$ ábrázolása M^A_n $(n=4)$ leképezéssel.



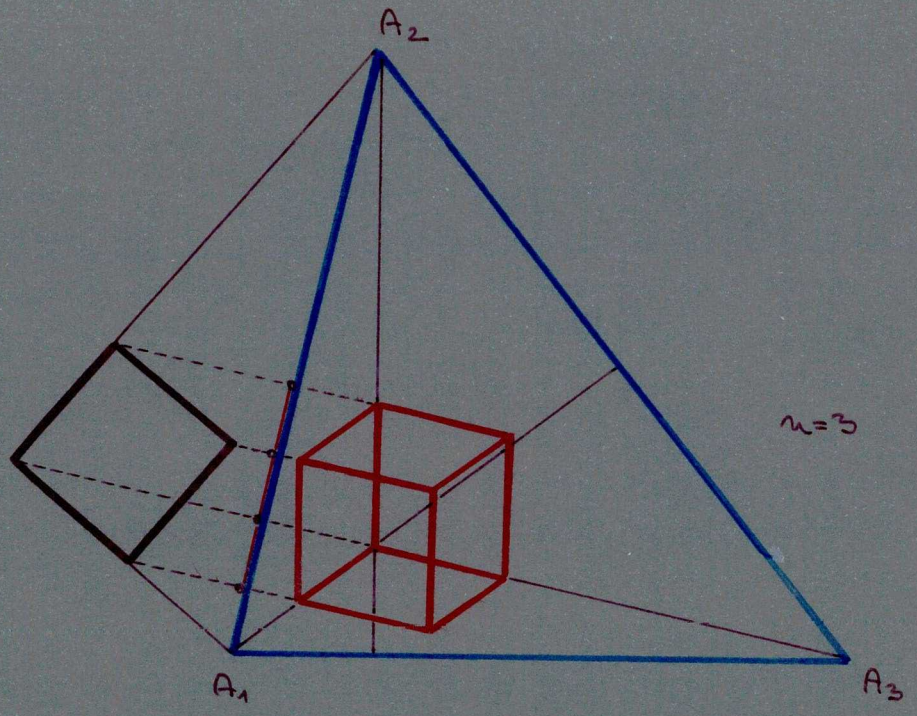
18/A ábra: A $\Pi_4 = \{4,3,3\}$ ábrázolása M^B_n $(n=4)$ leképezéssel.

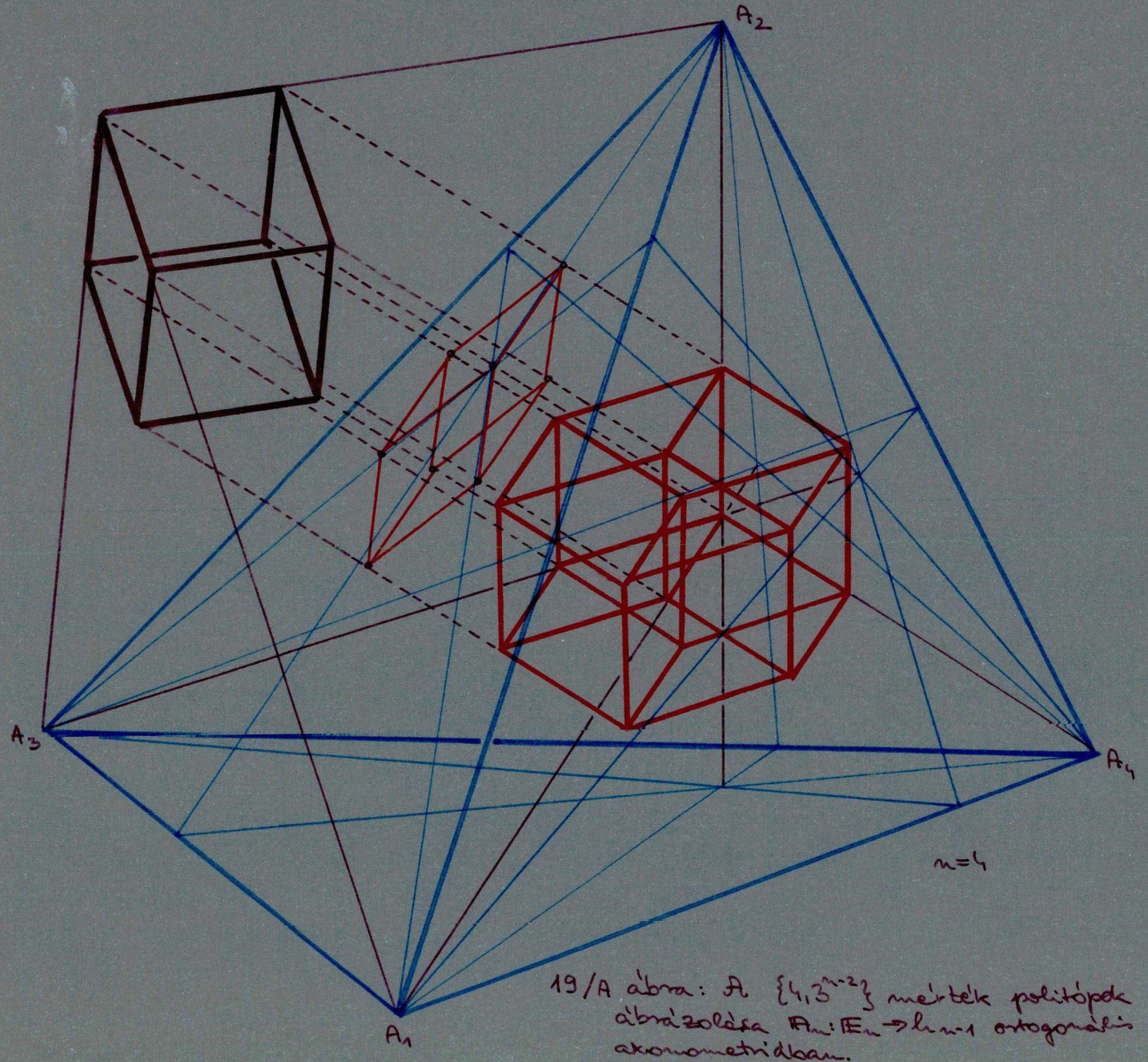


19. ábra: Az $A_n : E_n \to h_{n-1}$ $(n=3)$ ortogonális axonometrikus leképezés.

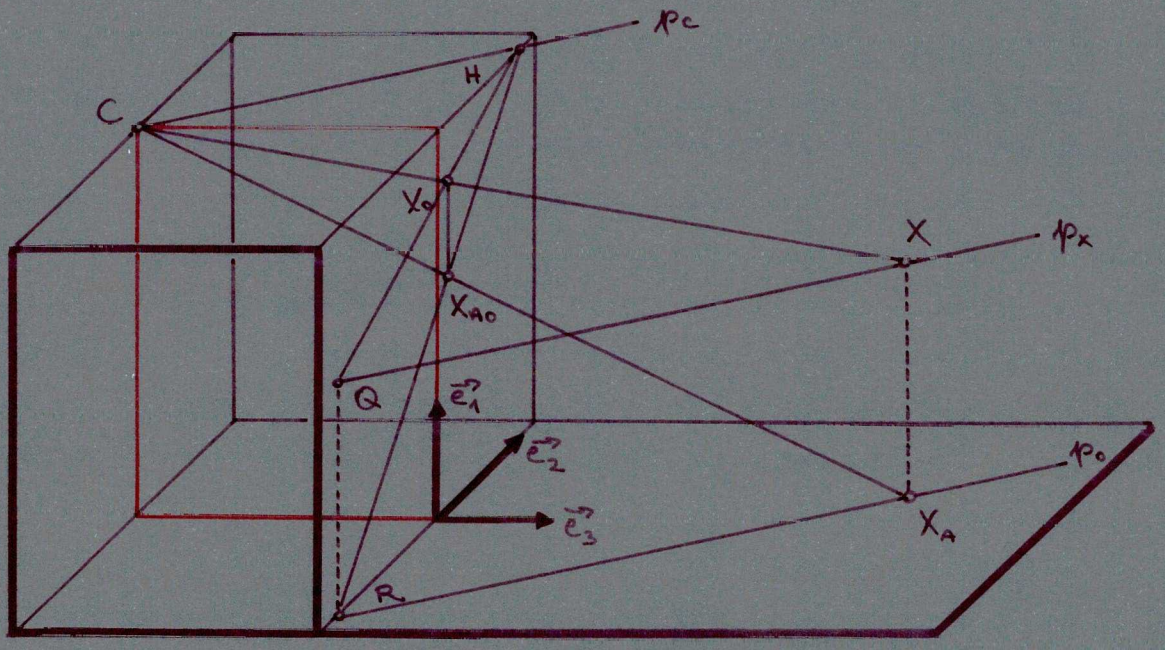


20. ábra: Egyszerű szakaszok szerkesztése ortogonális axonometrikus projekcióban $n=3$ esetén.

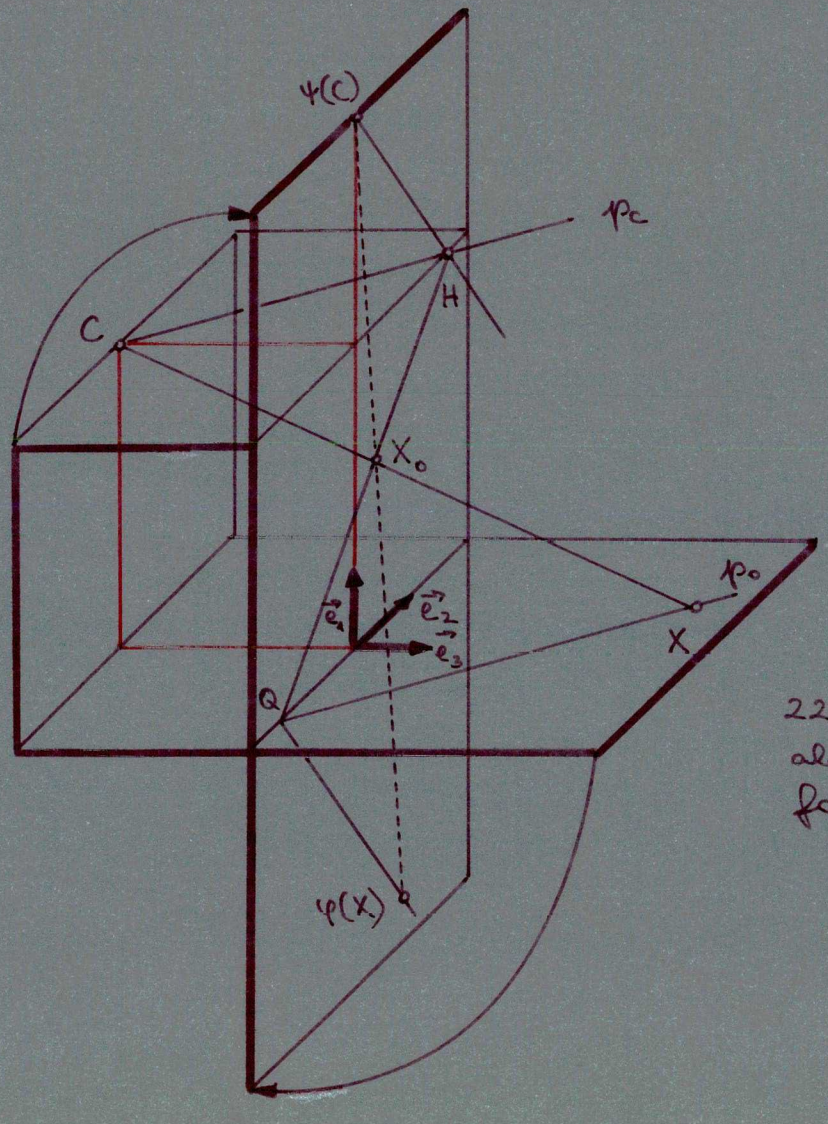




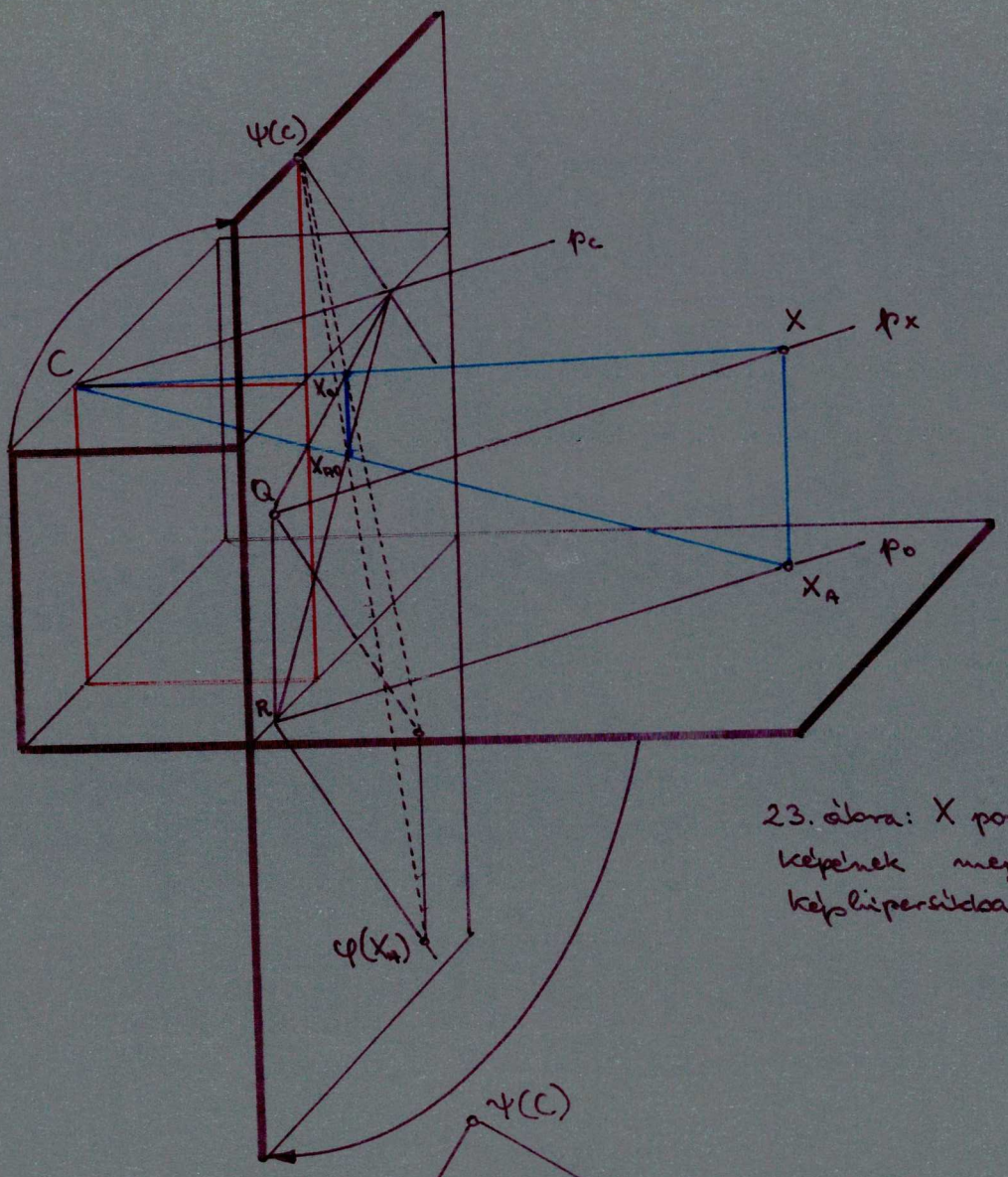
19/A ábra: A $\{4,3^{n-2}\}$ méretek politópok ábrázolása $A_n : E_n \to k_{n-1}$ ortogonális axonometriában.



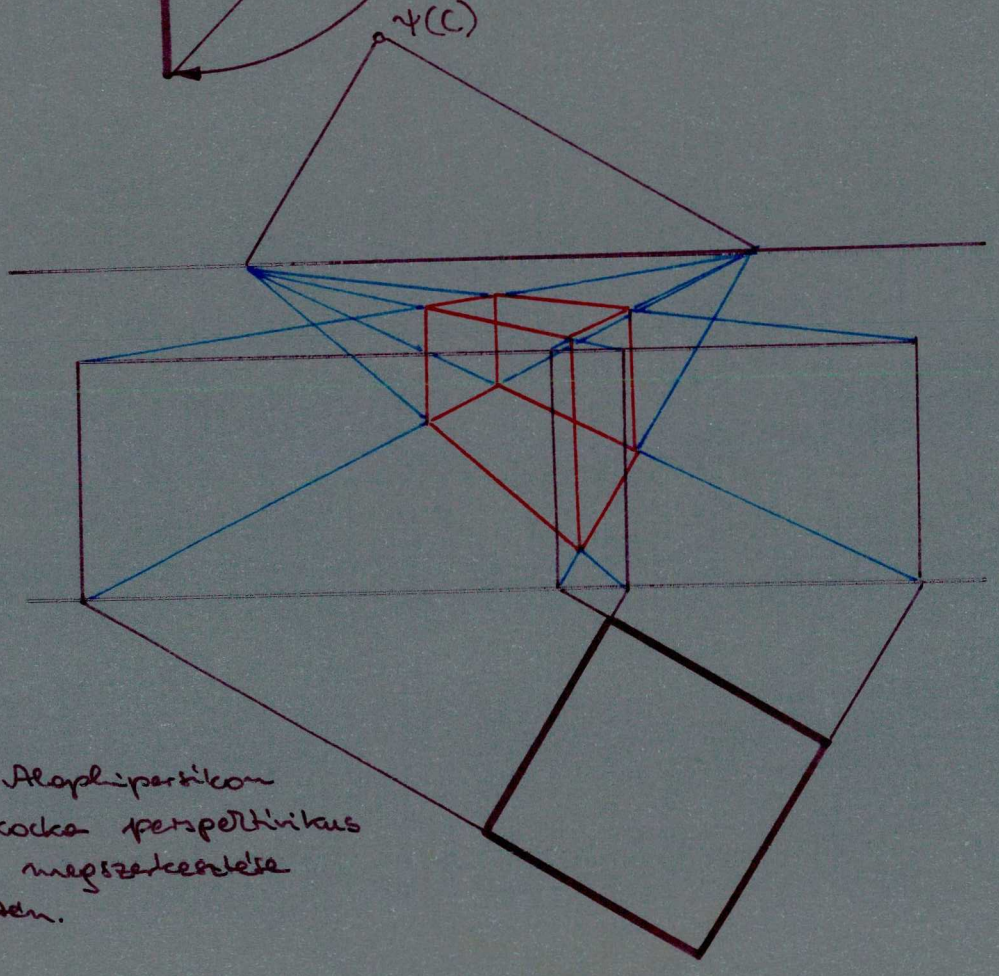
21. ábra: A perspektivikus projekció $n=3$ esetén.



22. ábra: A centrum és az alapsíkpontok képsíkpontokba forgatása $n=3$ esetén.

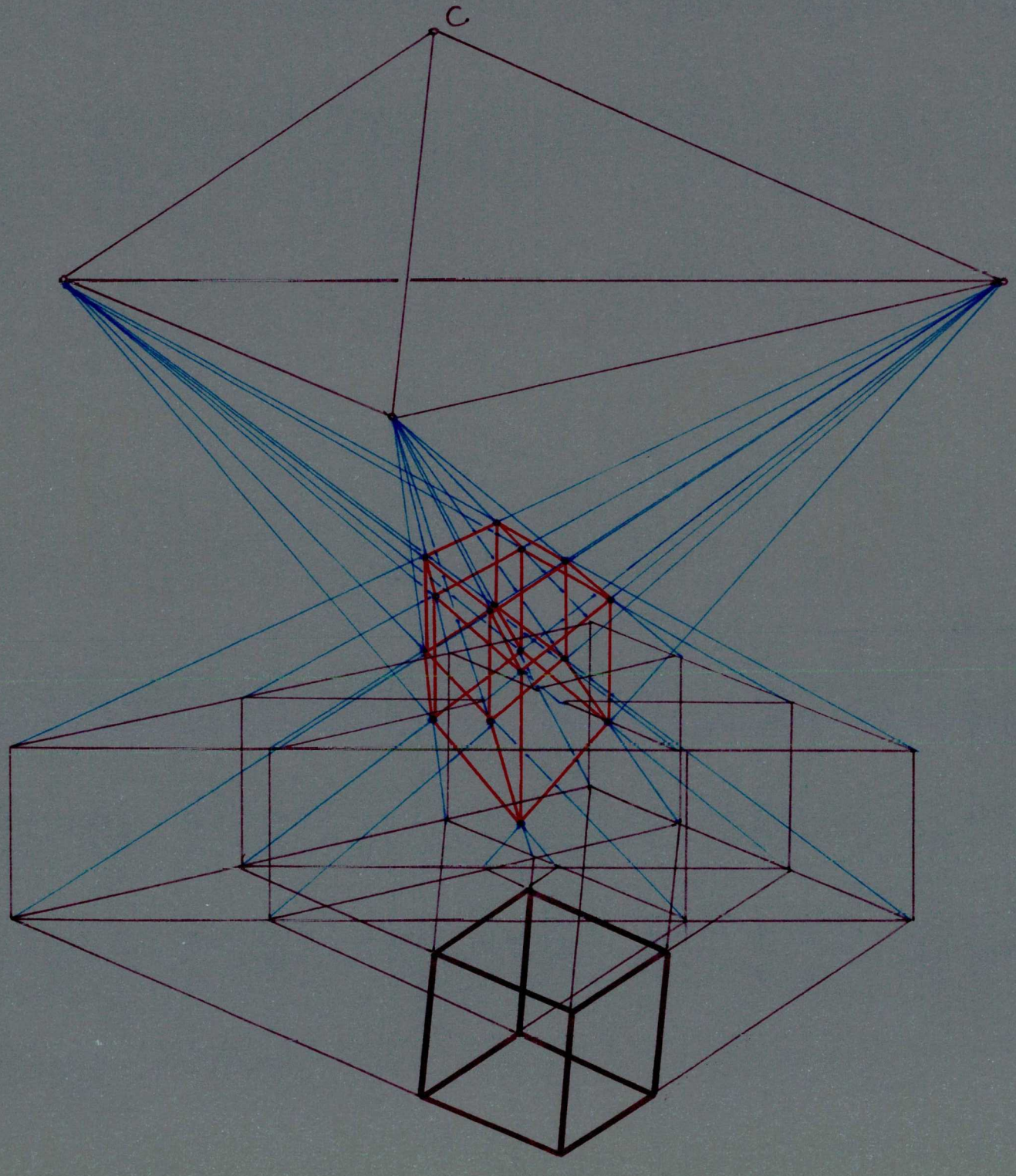


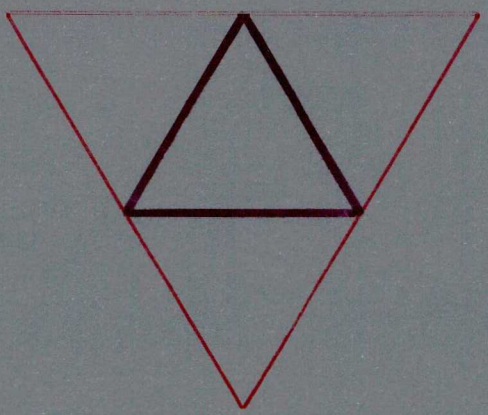
23. ábra: X pont perspektivikus képének megszerkesztése a képsíkperspektíván $n=3$ esetén.



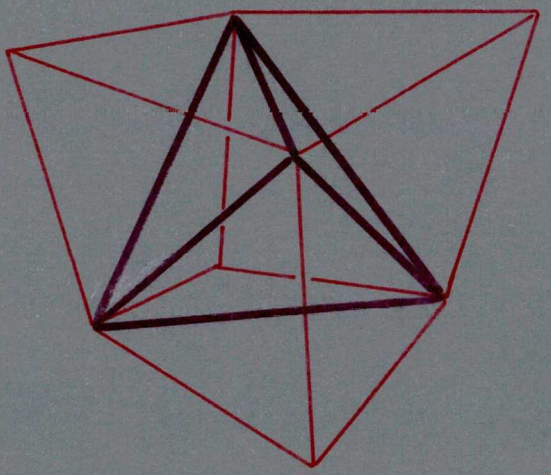
24. ábra: Alaksíkperspektívon nyugvó kocka perspektivikus képének megszerkesztése $n=3$ esetén.

25. ábra: Az alaphipersíkon nyugvó 4-dimenziós hiperkocka ábrázolása perspektivikus leképezéssel.

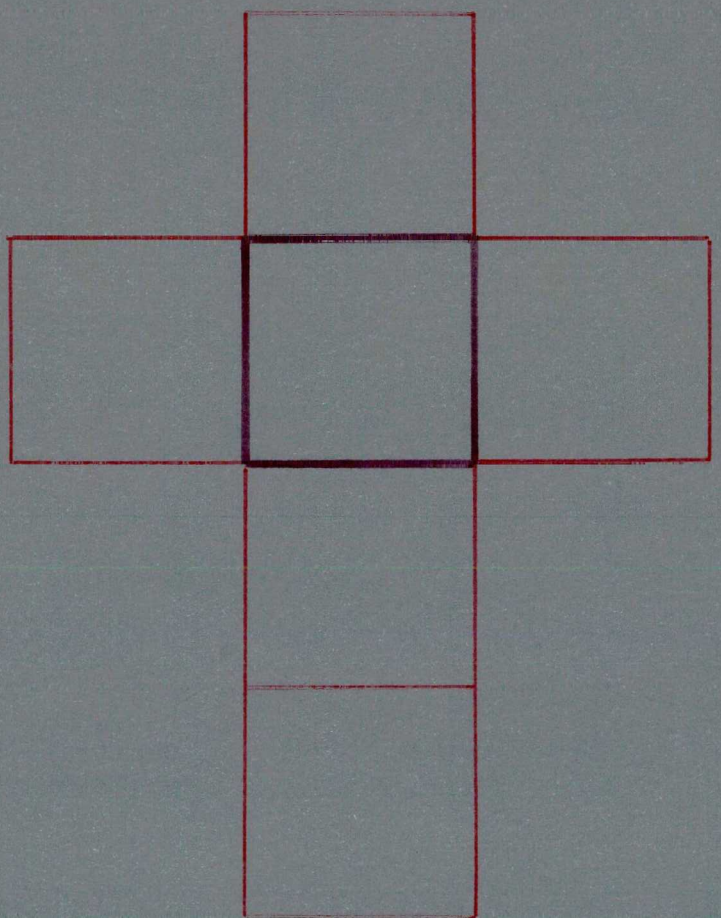




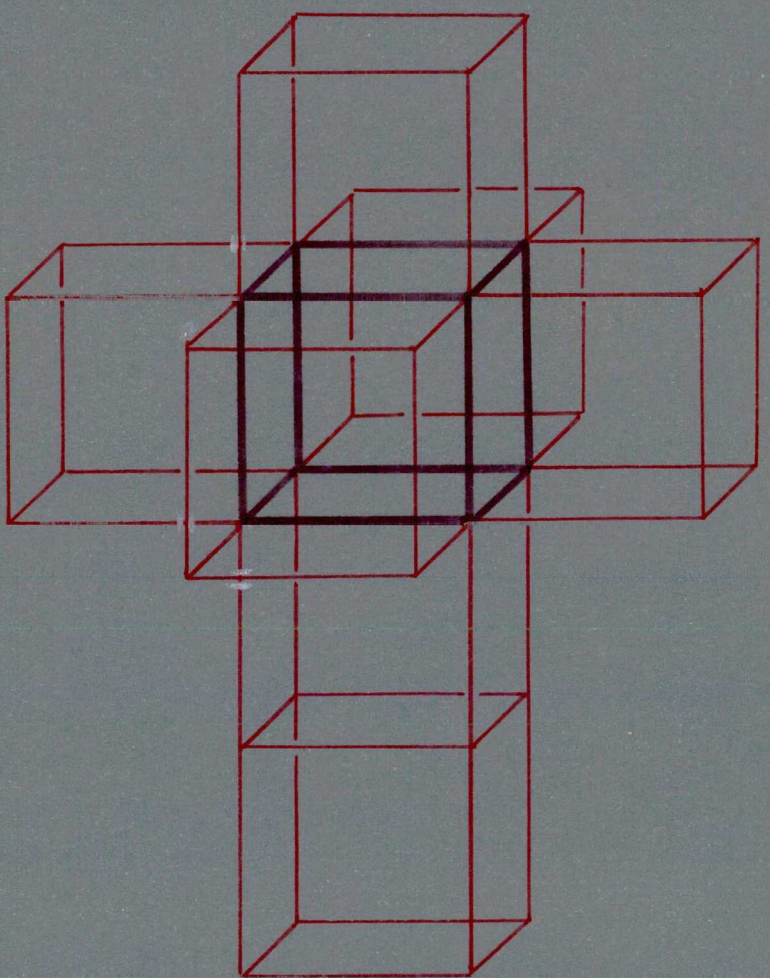
{3,3}



{3,3,3}

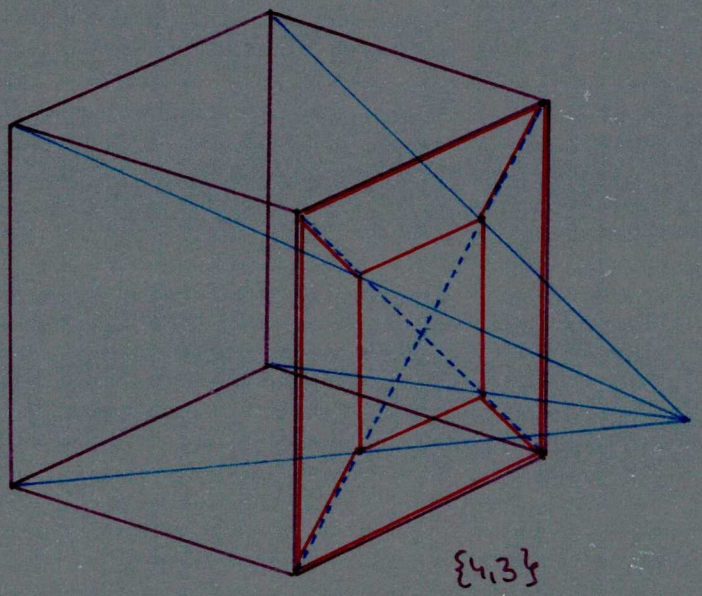


{4,3}

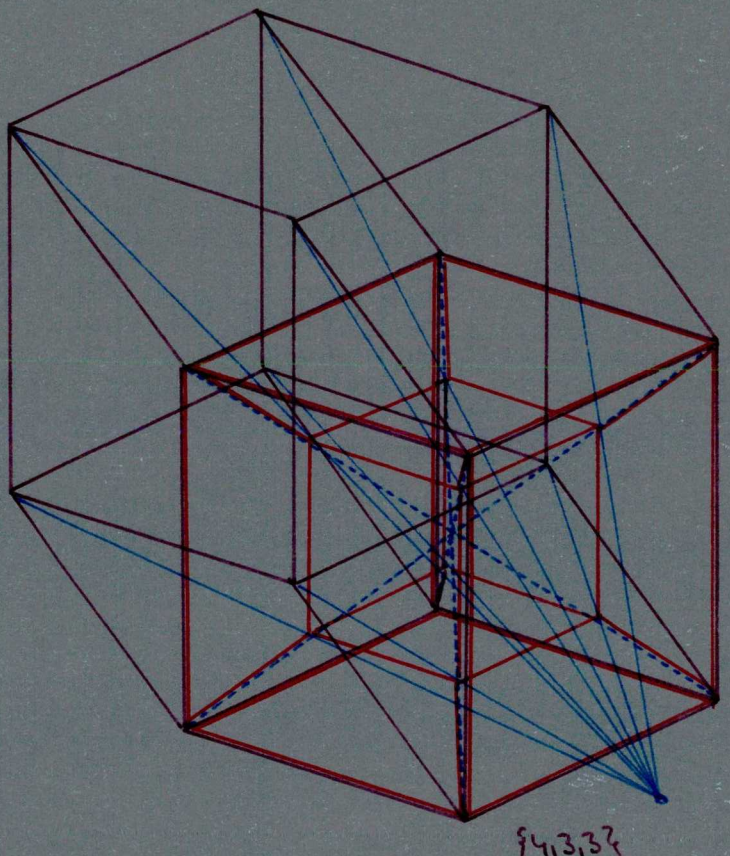


{4,3,3}

26. ábra: Az {3,3}, {4,3}, {3,3,3} és {4,3,3} szabályos politópok egy-egy hálózata.



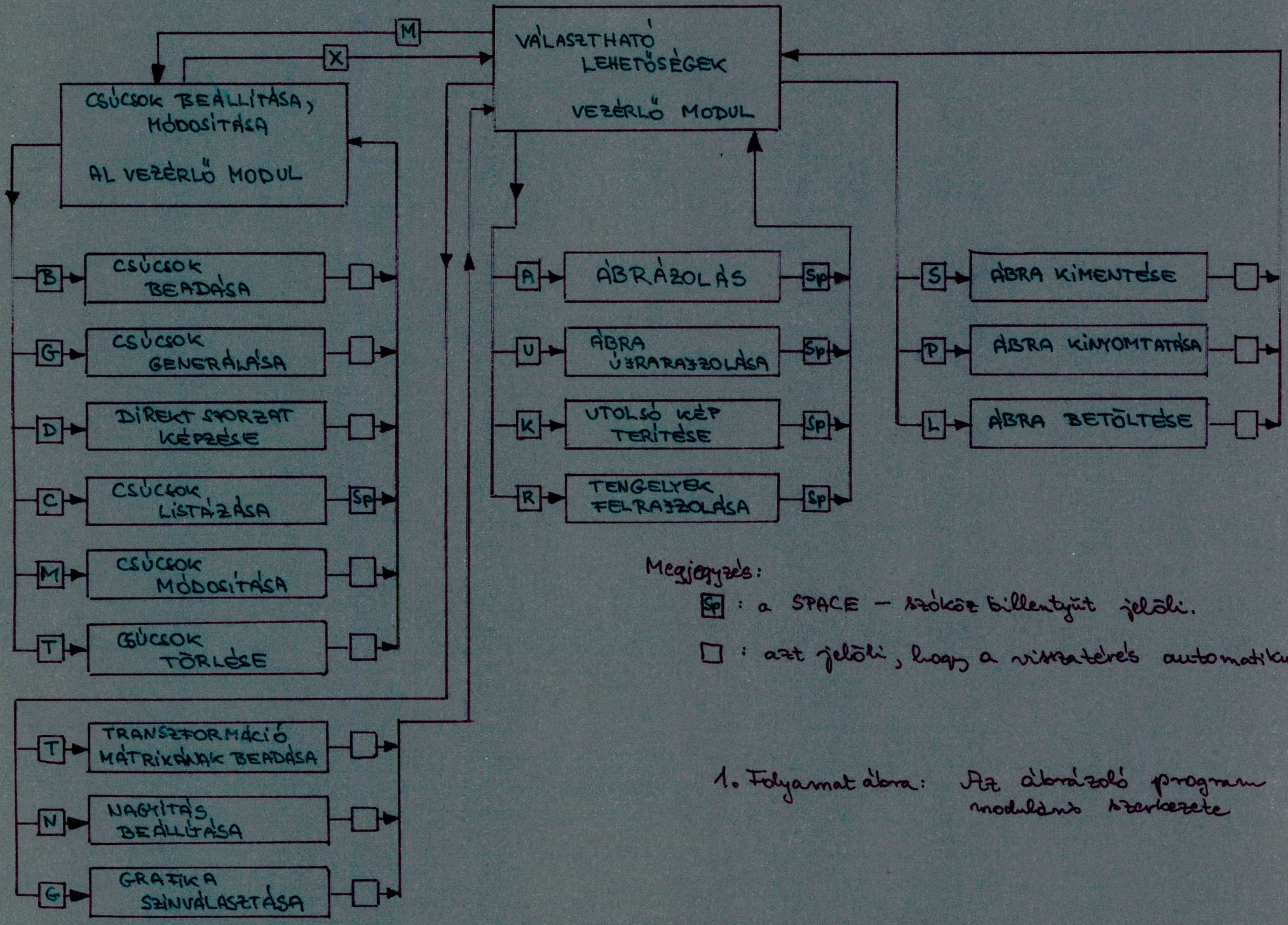
{4,3}



{4,3,3}

27. ábra: A {4,3} és {4,3,3} szabályos politópok SCHLEGEL diagramjai.

A SZÁMITÓGÉPES ÁBRÁZOLÓ
PROGRAM FOLYAMATÁBRÁI
ÉS TELJES LISTÁJA:

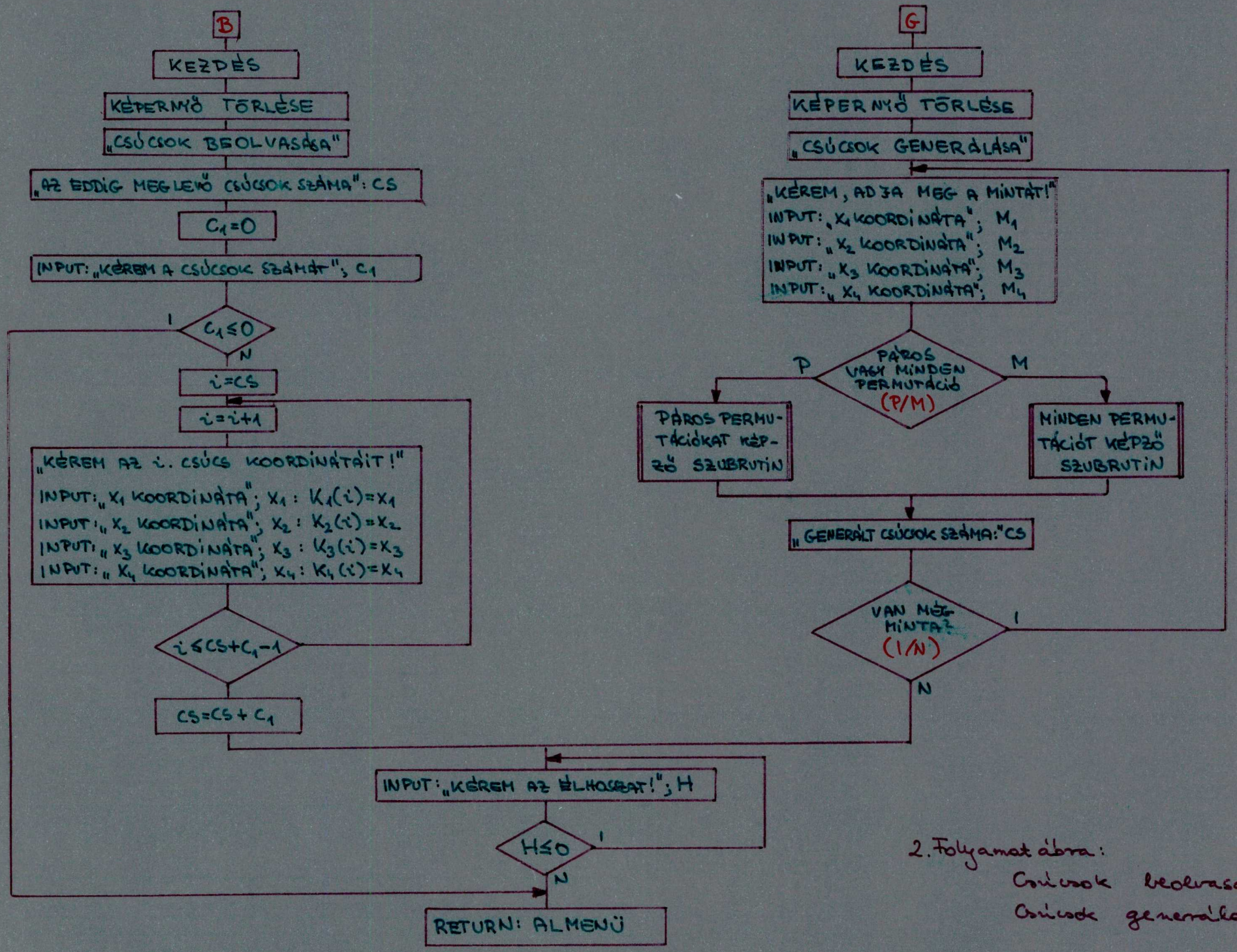


Megjegyzés:

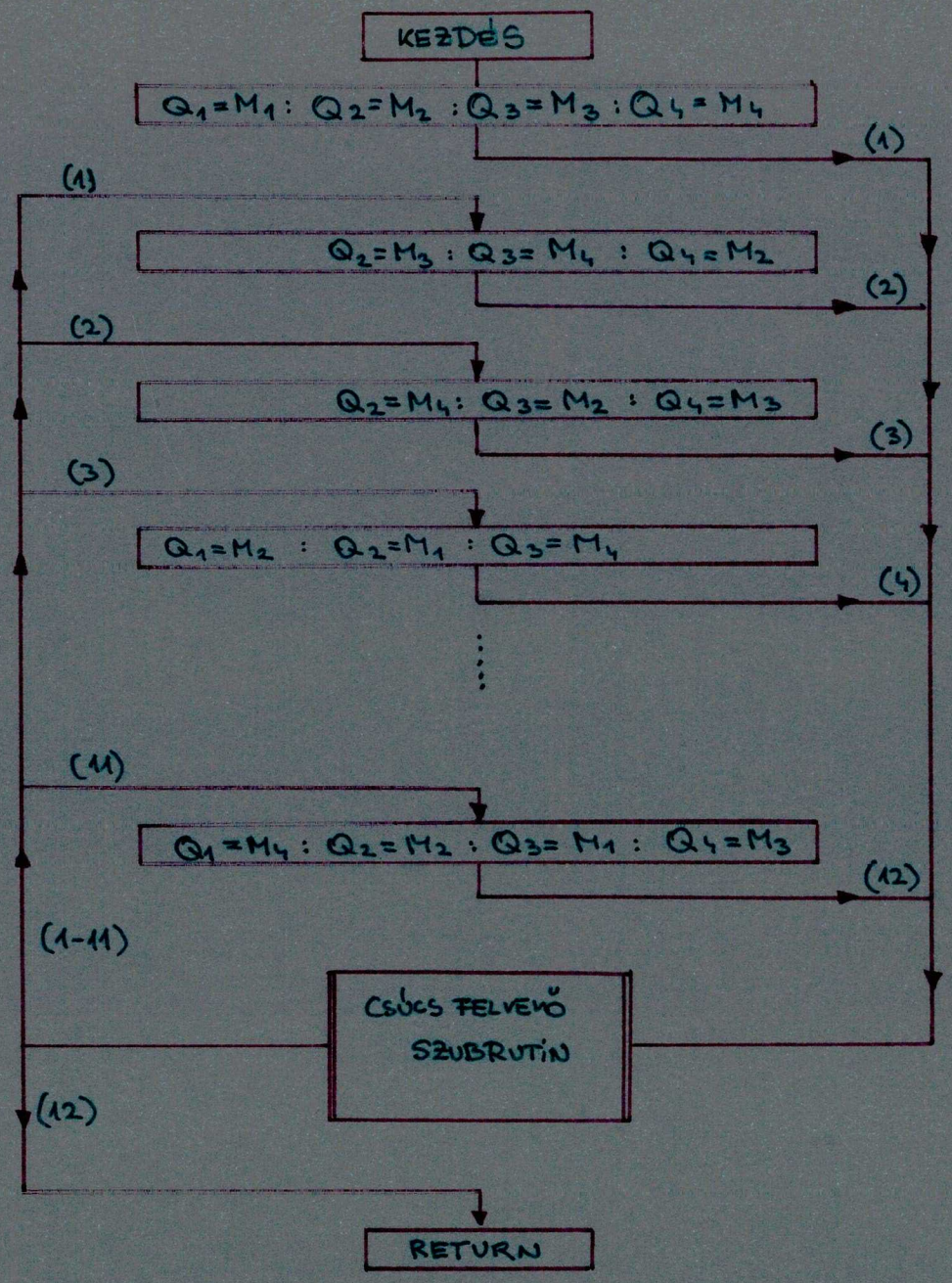
Sp : a SPACE – szóköz billentyűt jelöli.

□ : azt jelöli, hogy a visszatérés automatikus.

1. Folyamatábra: Az ábrázoló program moduláris szerkezete

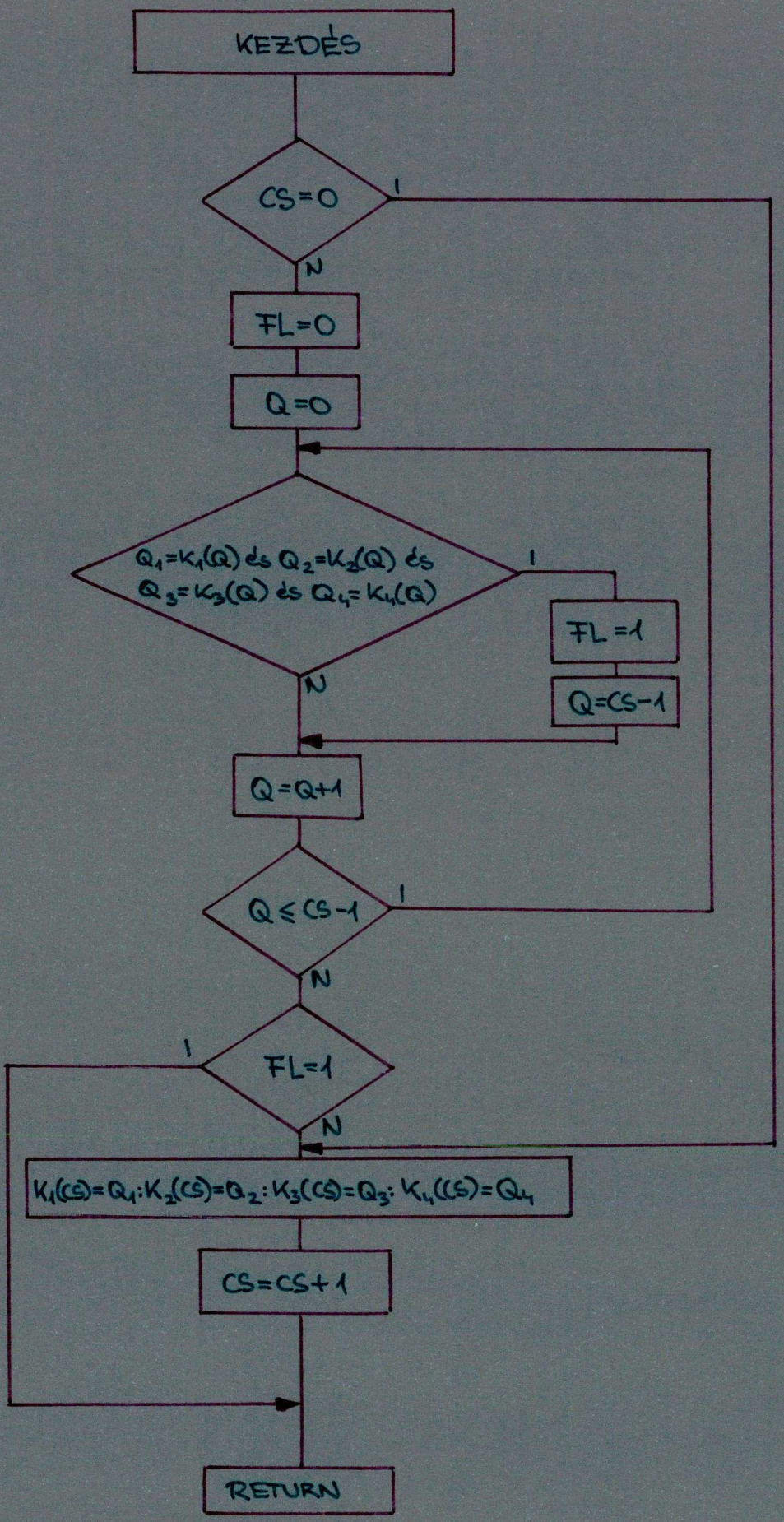


2. Folyamatábra:
Csúcsok beolvasása és
Csúcsok generálása.

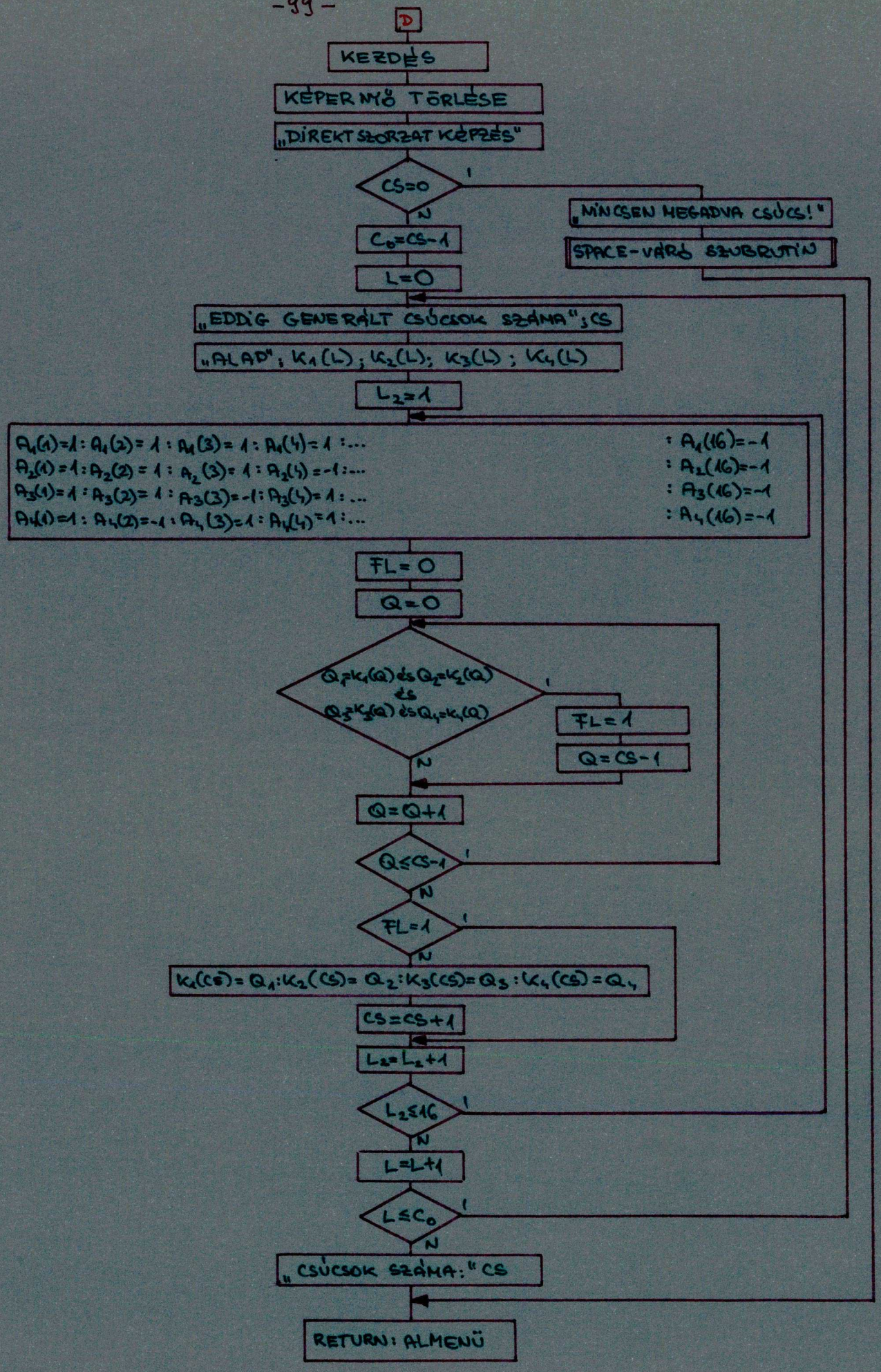


Páros permutációk:		Páratlan permutációk:	
1234	3124	1243	3142
1342	3241	1324	3214
1423	3412	1432	3421
2143	4132	2134	4123
2314	4213	2341	4231
2431	4321	2413	4312

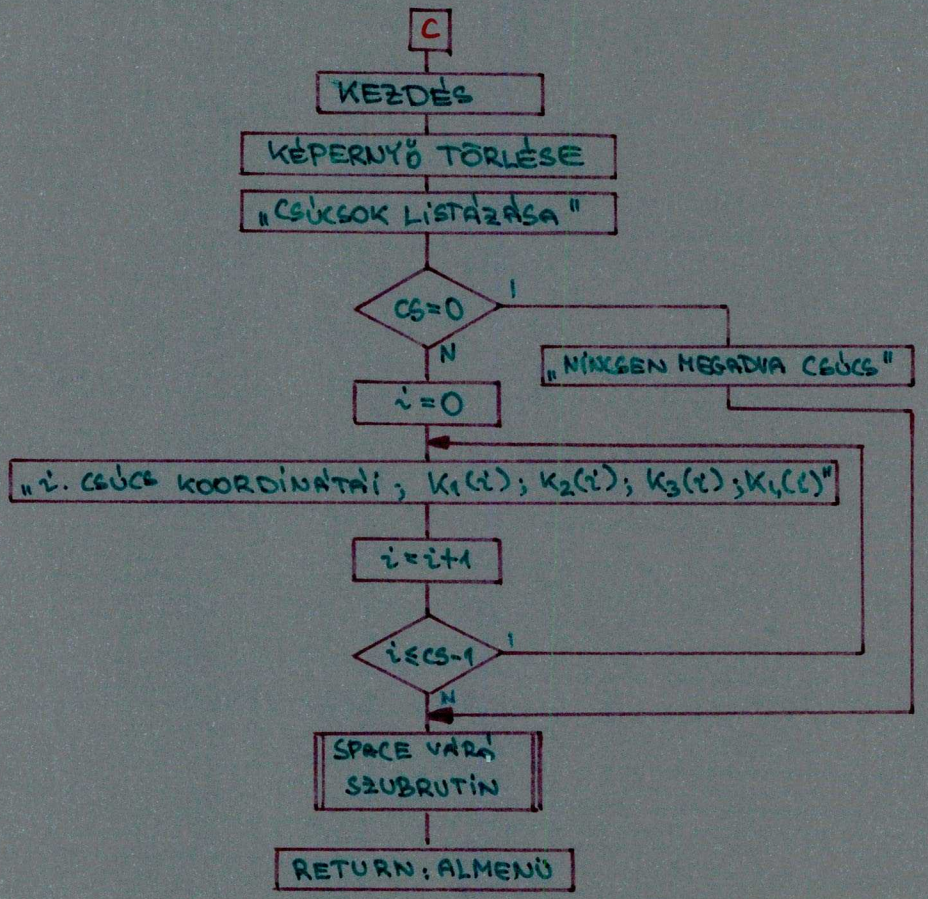
3. Folyamatábra: Páros permutációkat meghatározó szubrutin.
(Teljesen analóg szerkezetű az összes permutációkat meghatározó szubrutin is)



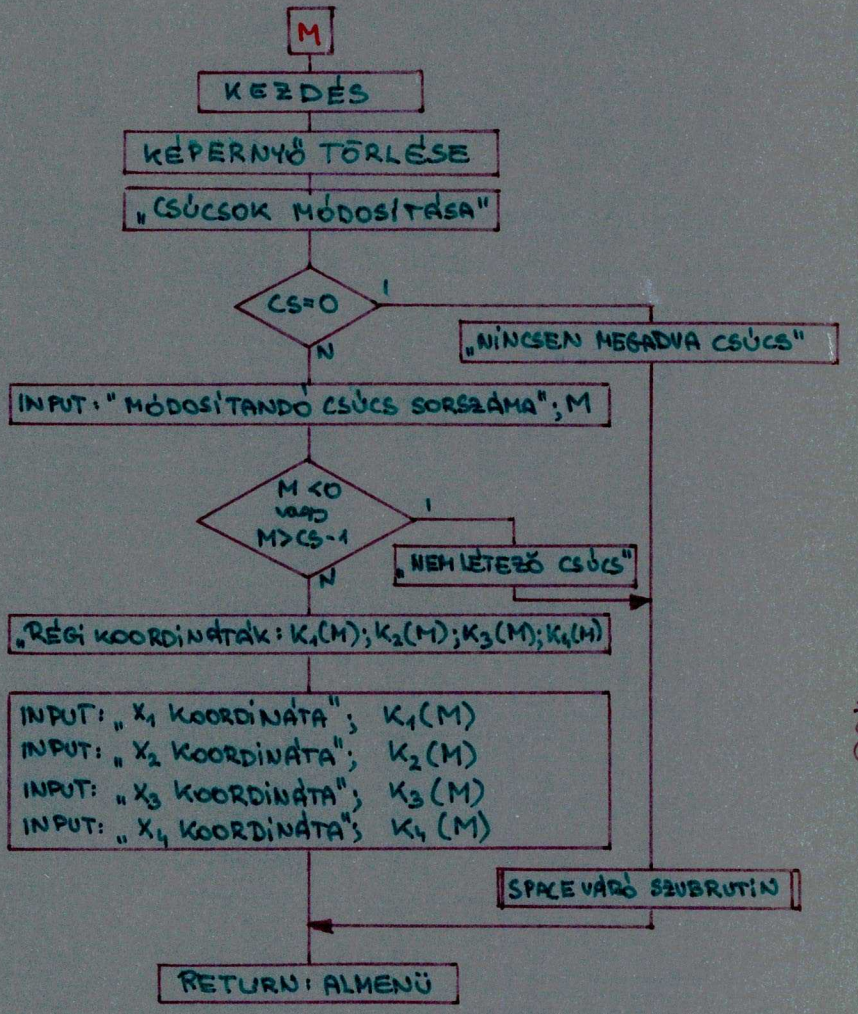
4. Folyamat ábra: Csúcsfelvevő szubrutin.



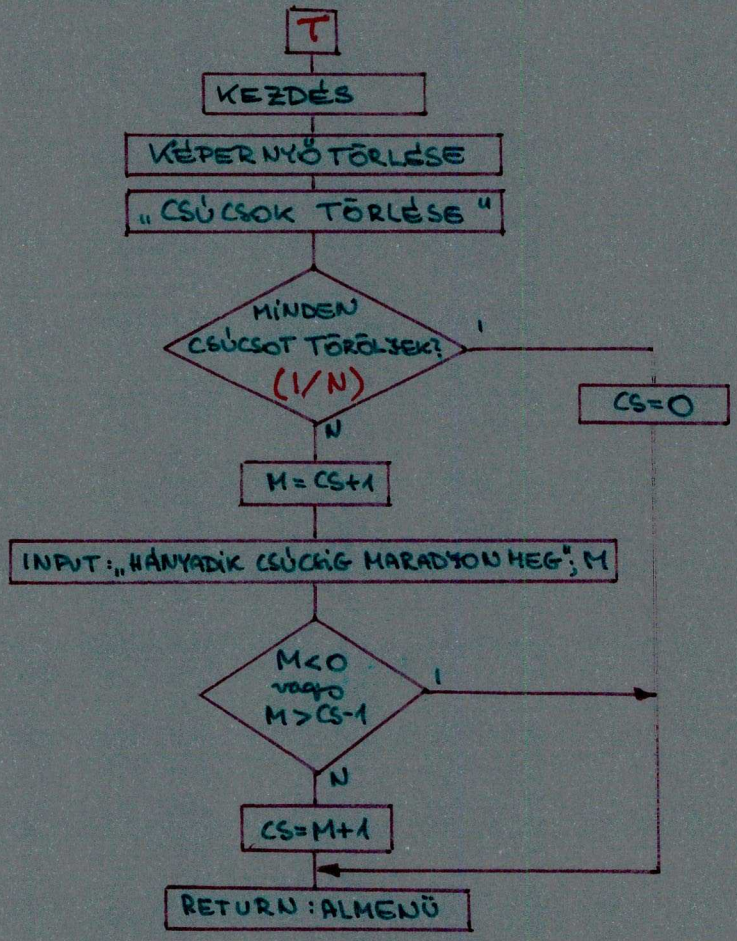
5. Folyamat ábra: Direkt szorzat képzése



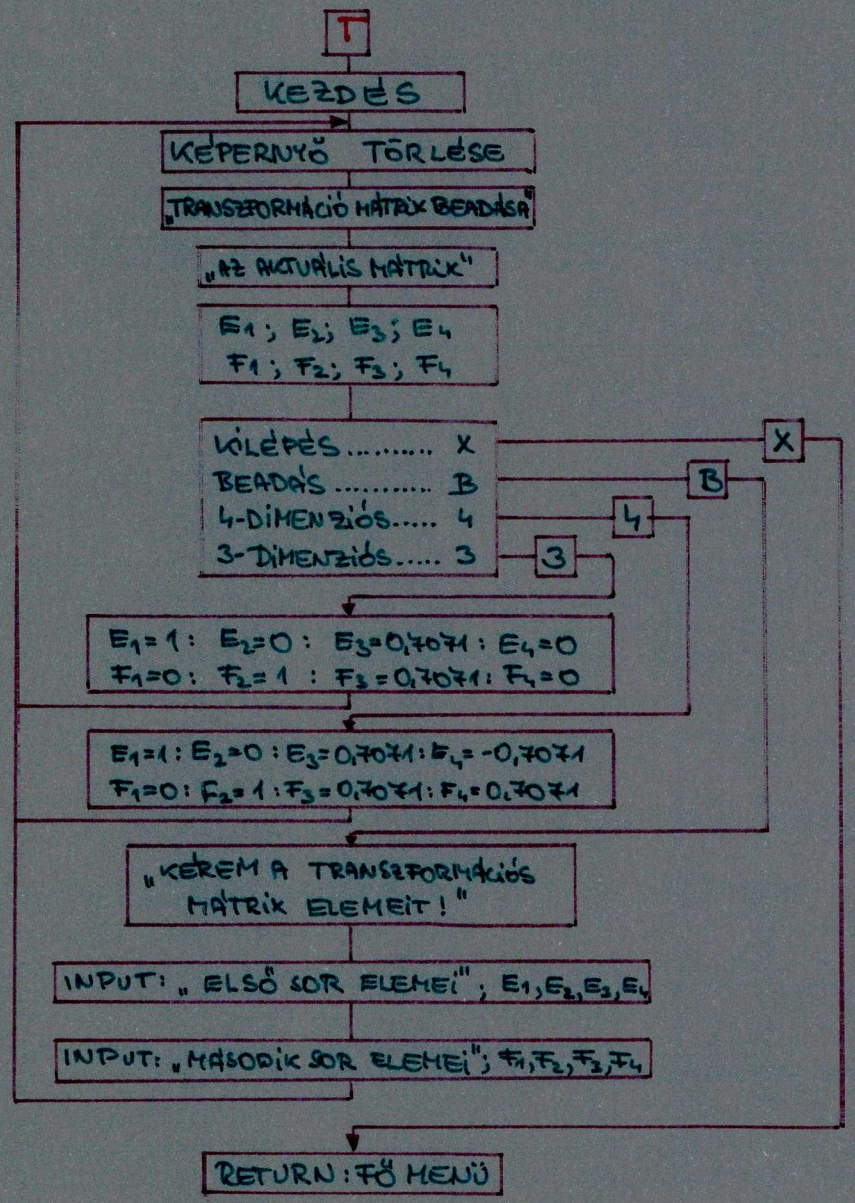
6. Folyamat ábra: Csúcsok listázása.



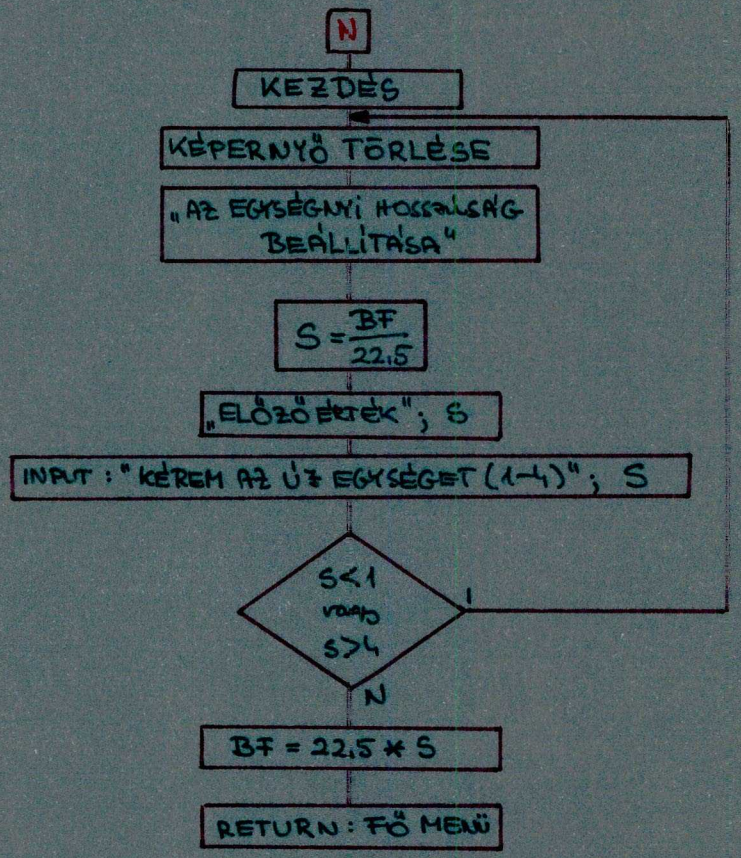
7. Folyamat ábra: Csúcsok módosítása.



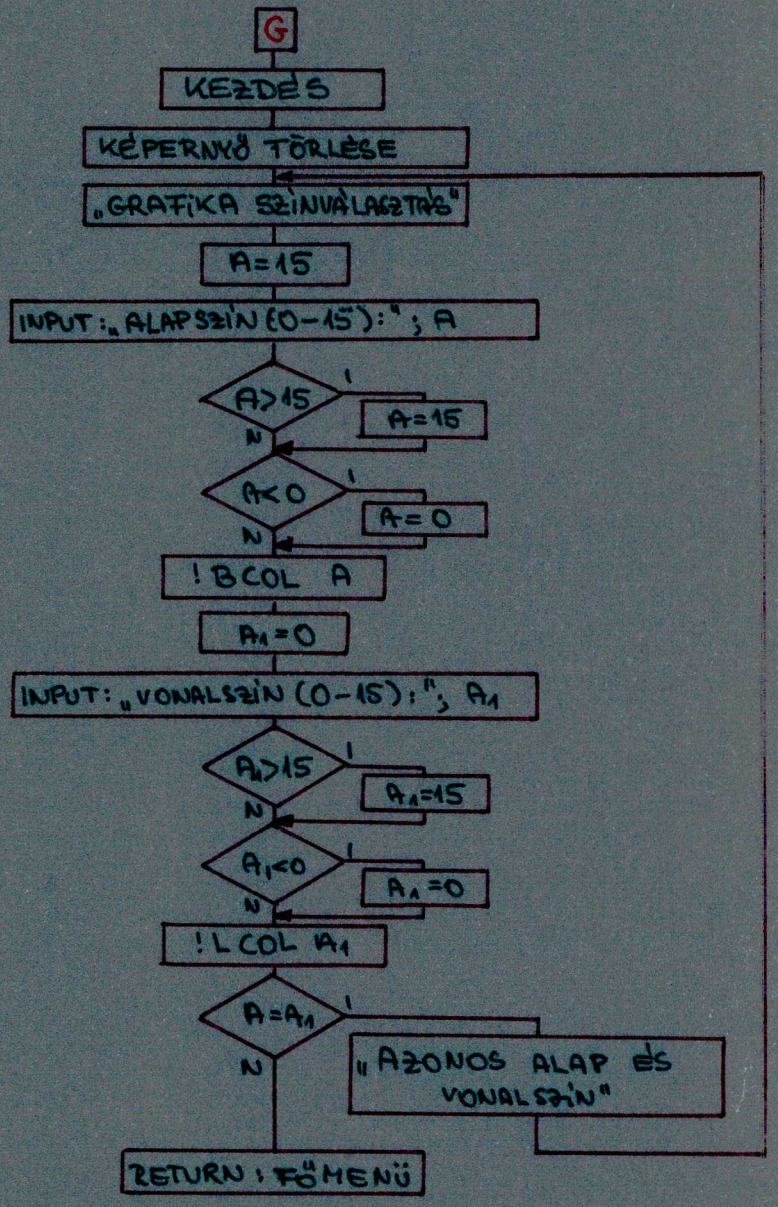
8. Folyamat ábra: Csúcsok törlése.



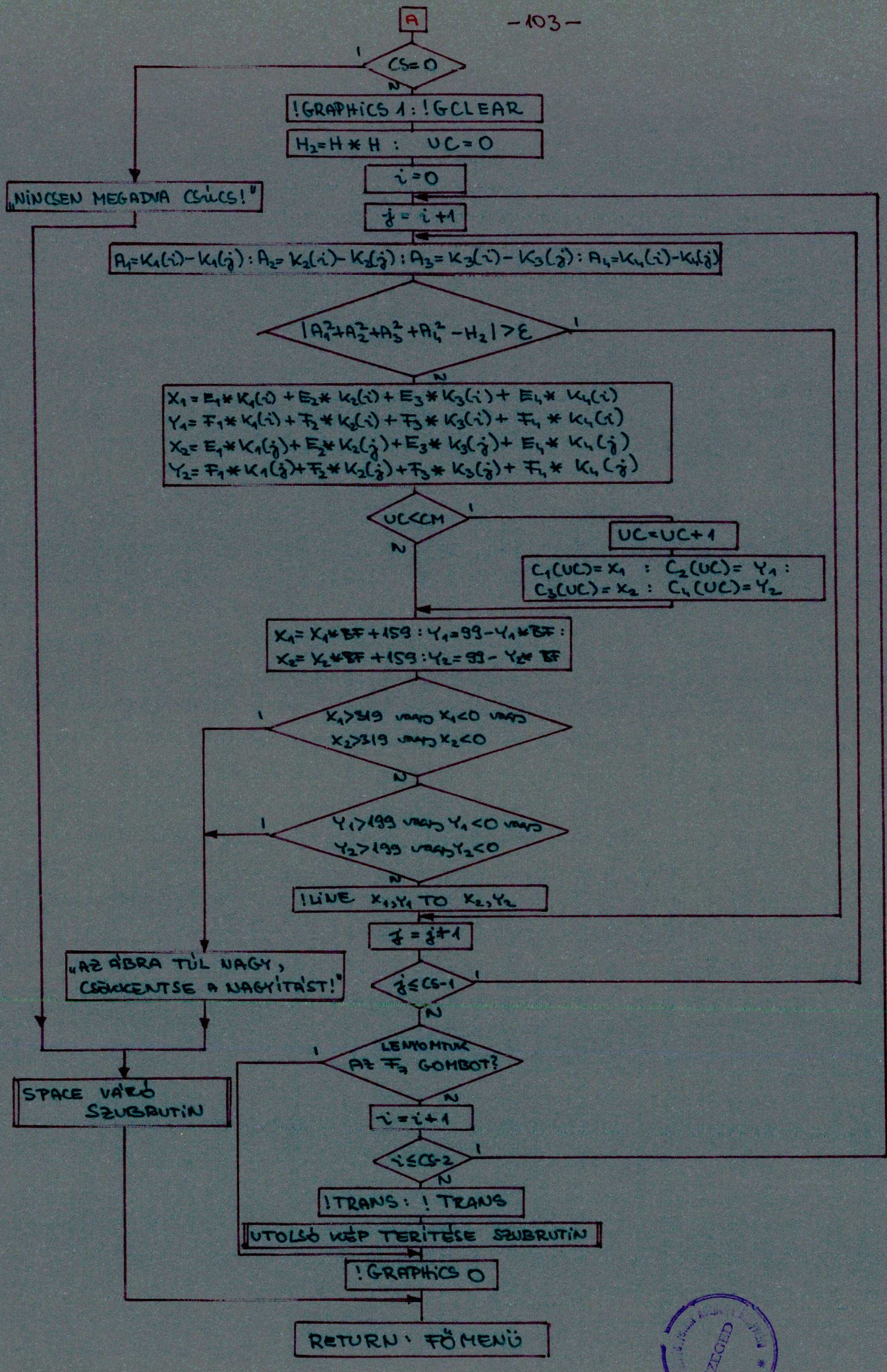
9. Folyamat ábra: Transzformációs mátrix beadása.



10. Folyamatábra: Nagyítás beállítása.

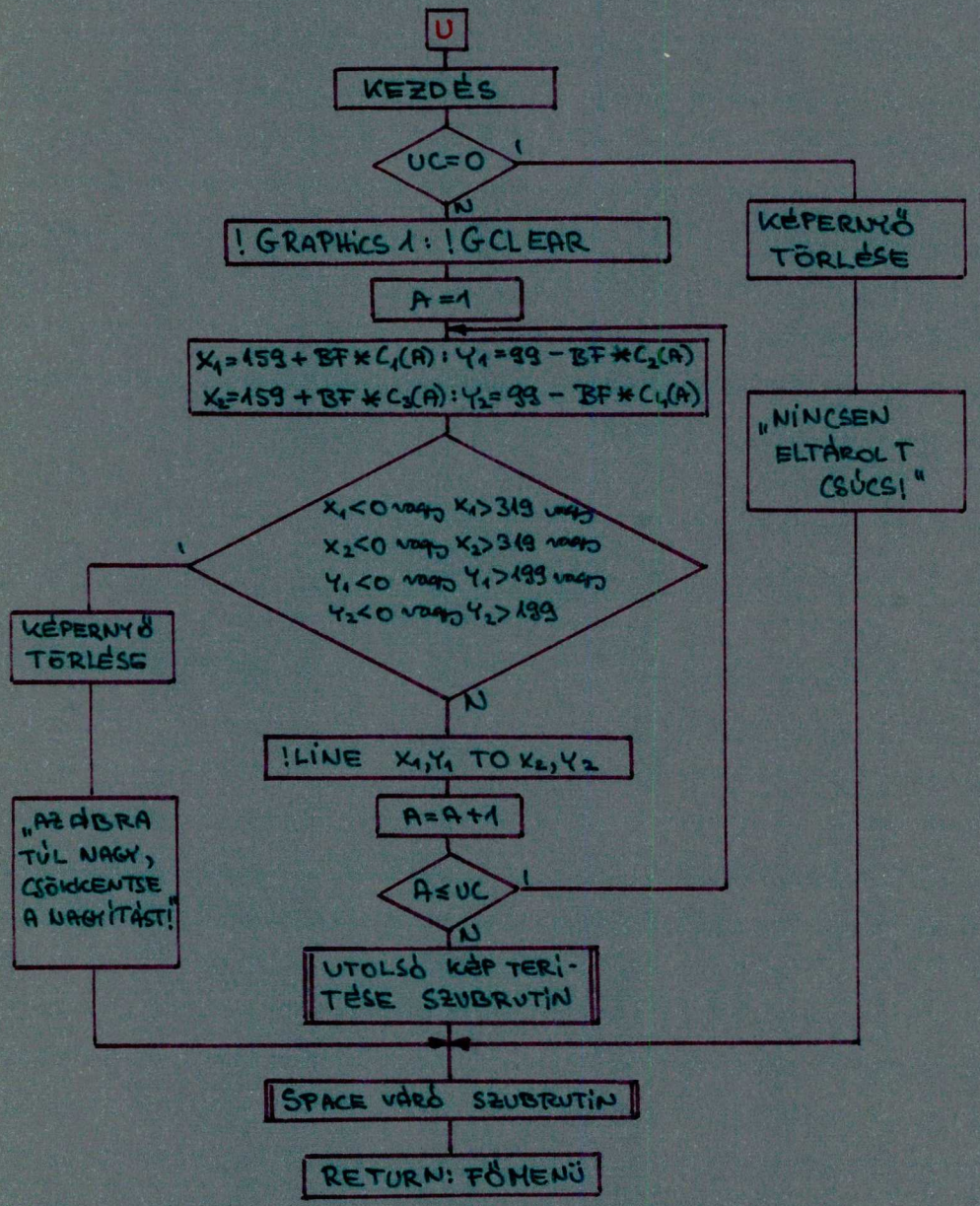


11. Folyamatábra: Grafika színválasztása.

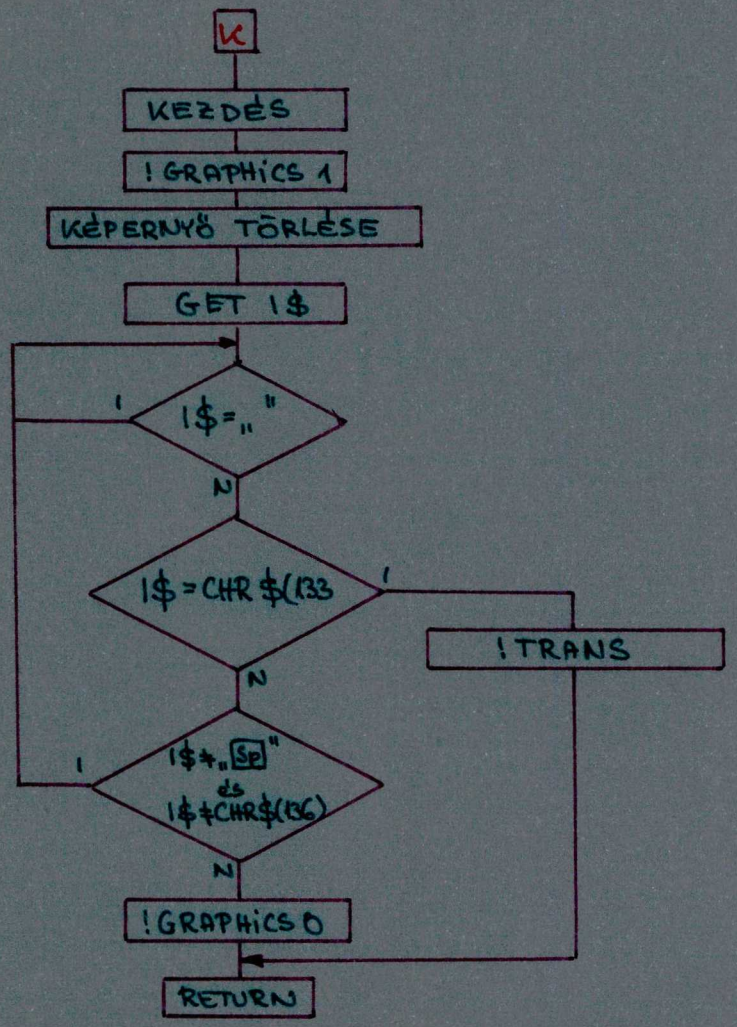


12. Folyamatábra: Ábrázolás.

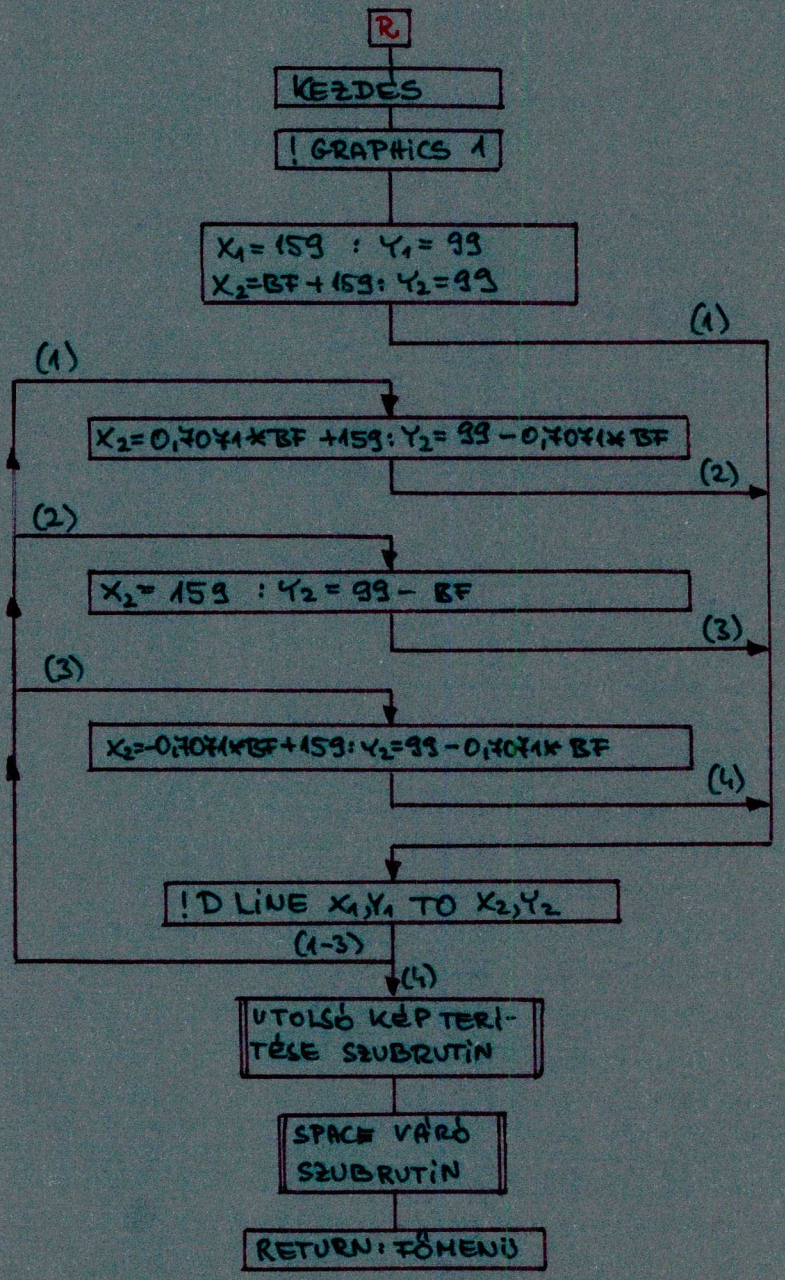
SZEGED



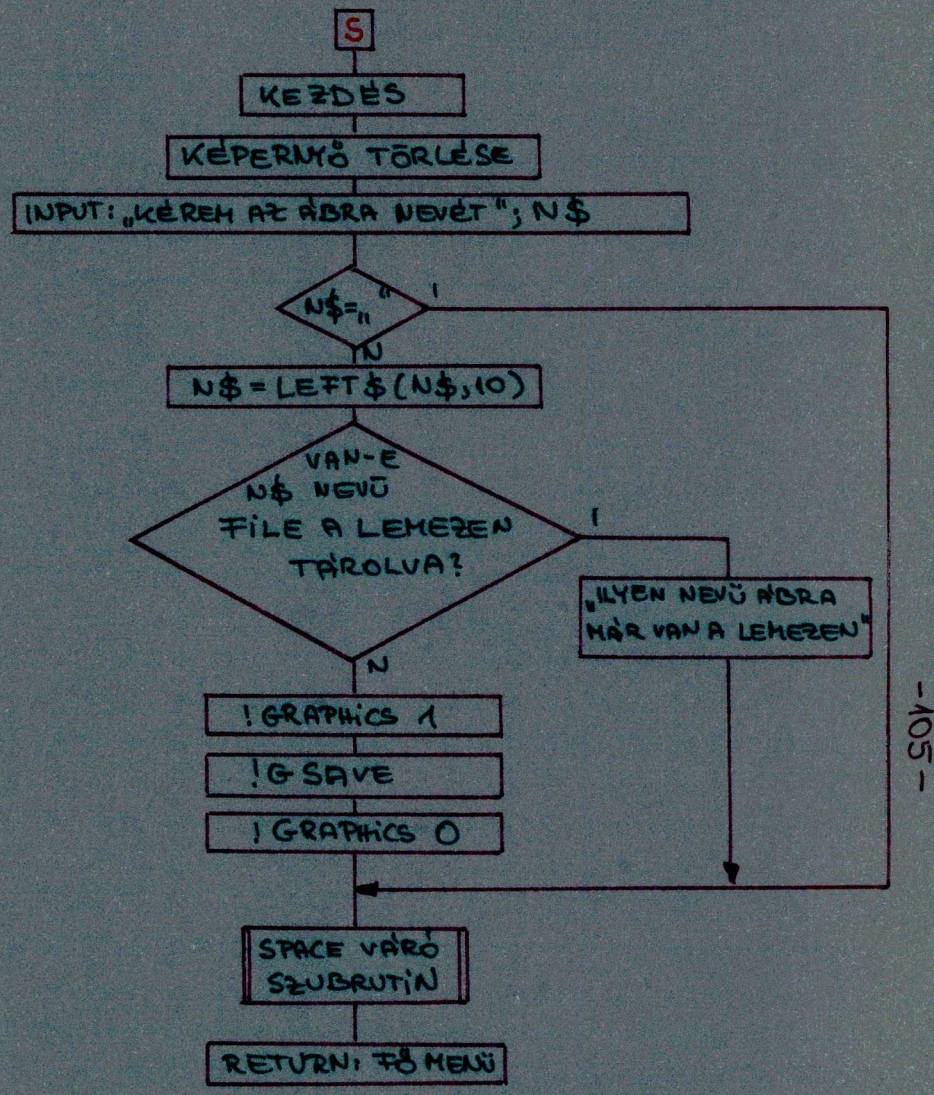
13. Folyamatábra: Az ábra újrarajzolása.



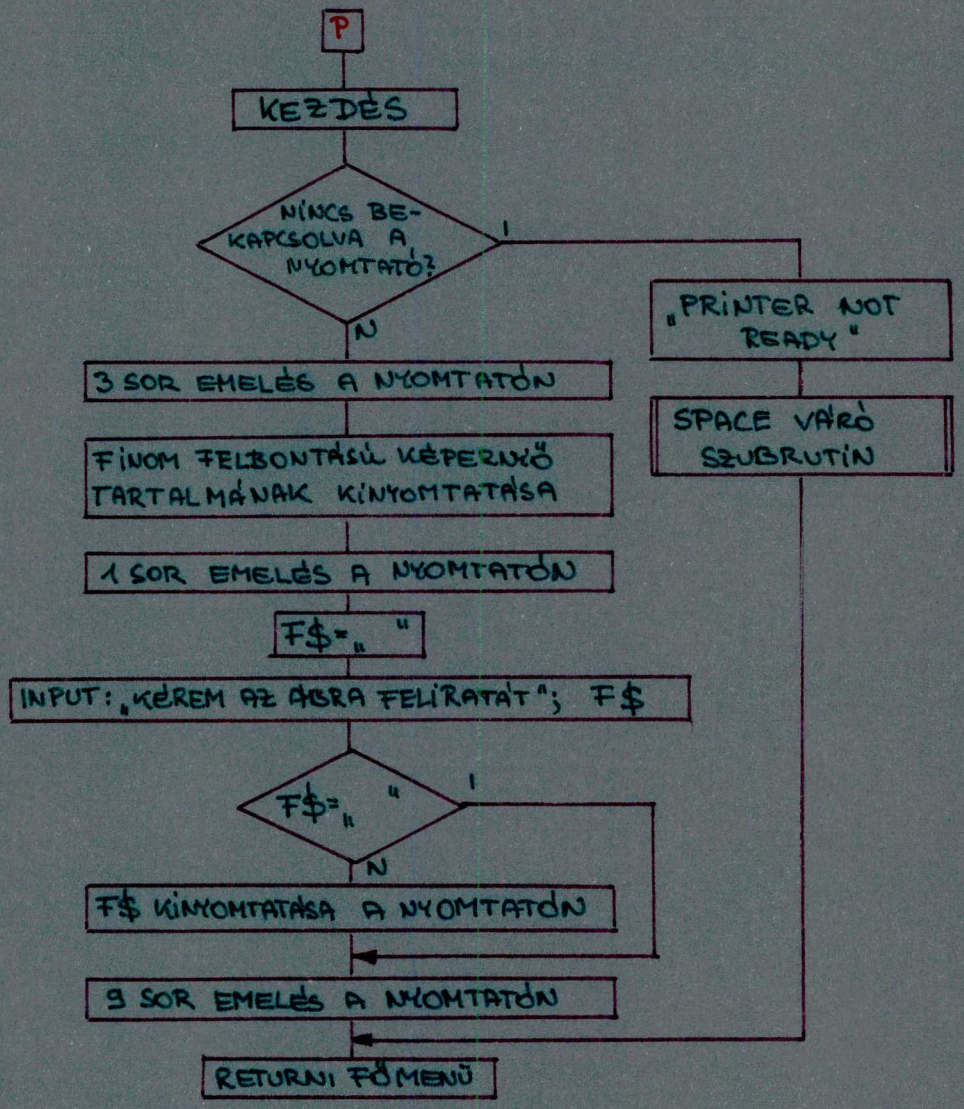
14. Folyamatábra: Az utolsó kép terítése.



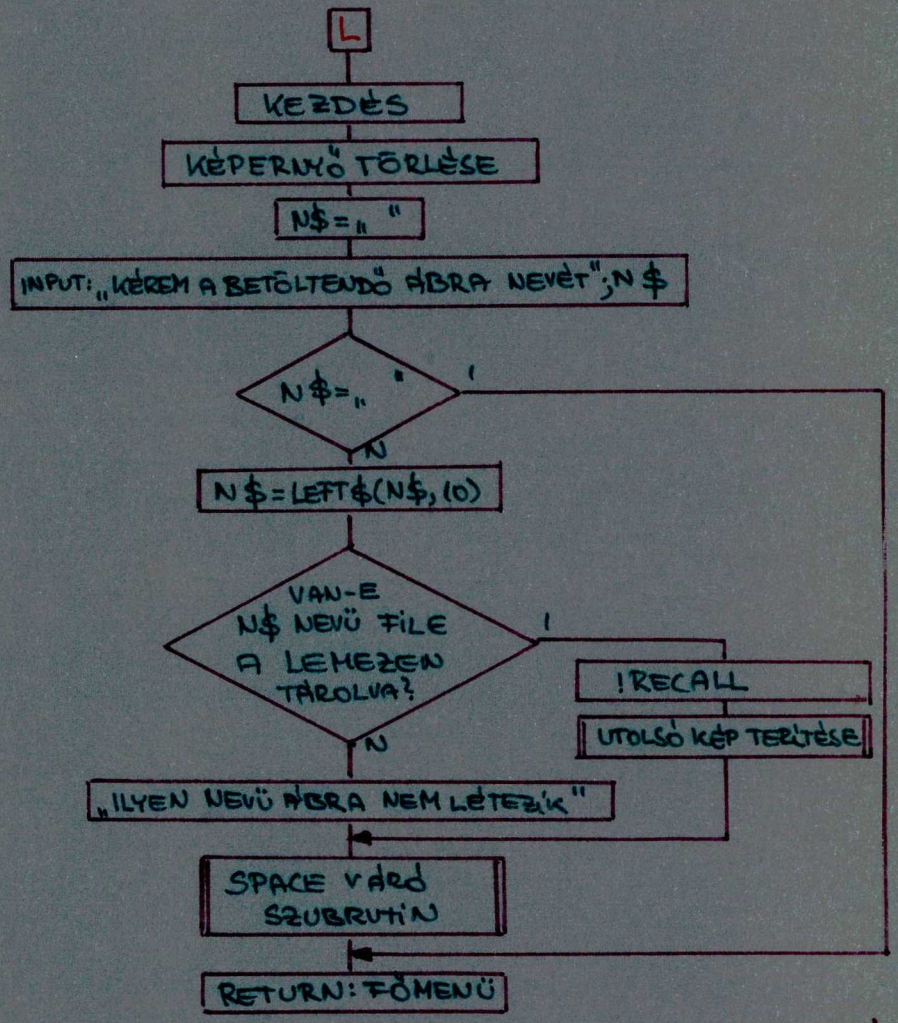
15. Folyamatábra: Tengelyek felrajzolása



16. Folyamatábra: Az ábra kimentése mágneslemezre.



17. Folyamat ábra: Az ábra kinyomtatása.



18. Folyamat ábra: Az ábra betöltése mágneslemeznél.

A SUPERGRAFIK 64 SEGÉDPROGRAMBÓL FELHASZNÁLT UTASITÁSOK ÉS AZOK ÉRTELMEZÉSE

!GCLEAR : Törli a nagyfelbontásu képernyőt.

!GRAPHICS 0 : A kisfelbontásu képernyő kerül kijelzésre, és az ennek megfelelő utasitások hajtódnak végre.

!GRAPHICS 1 : A nagyfelbontásu képernyő kerül kijelzésre, és az ennek megfelelő utasitások hajtódnak végre.

!LINE X_1,Y_1 TO X_2,Y_2 : Az /X_1,Y_1/ és az /X_2,Y_2/ pontok között egyenes szakaszt rajzol.

!DLINE X_1,Y_1 TO X_2,Y_2 : Az /X_1,Y_1/ és az /X_2,Y_2/ pontok között szaggatott egyenes szakaszt rajzol.

!BCOL/ szin / : Az utasitás a képernyő háttérszinét definiálja.

!LCOL/ szin / : Az utasitás az ábrázolt alakzat vonalszinét definiálja.

!GSAVE "d:fn",dn : A képernyő tartalmát kimenti a dn egységszámu lemezegység d sorszámu meghajtóján levő fn nevü file-ba.

!RECALL"d:fn",dn : A dn egységszámu lemezegység d sorszámu meghajtóján levő fn nevü file-t betölti az aktuális képernyő-memóriába.

!TRANS : A két nagyfelbontásu képernyőt felcseréli.

OPEN 4,4 : !HARD#4 : A parancs a nyomtatóra kimásolja a képernyő tartalmát.

```
2 REM -- 4-DIMENZIOS POLITOPOK ----------
3 REM PENTEK KALMAN DISSZERTACIOJA ALAPJAN
10 !LCOL0:!BCOL15:!GRAPHICS 0 :!GCLEAR:!TRANS:!GCLEAR:!TRANS
20 PRINTCHR$(147);:PRINT"■";
25 DIM C1(400),C2(400),C3(400),C4(400)
26 CM=400:REM ELTAROLT VONALAK SZAMA MAX
30 DIM K1(700),K2(700),K3(700),K4(700)
35 DIM M1(4),M2(4),M3(4),M4(4)
40 BF=90 : REM NORMALO  BUVFAKTOR
50 EP=0.01:REM EPSZILON HIBAHATAR
60 GOSUB 4230:REM TRAFO M. BEALLITASA
80 S$="   "
100 GOTO 5000 : REM MENU
200 REM --- IGEN/NEM BEOLVASO SZUBR ---
210 GET I$:IF I$="" THEN 210
220 IF I$="I" THEN PRINT" ■■IGEN■■■":W=1:RETURN
230 IF I$="N" THEN PRINT" ■■NEM■■■":W=0:RETURN
240 GOTO 210
400 REM --- CSUCSOK TORLESE ---
410 PRINTCHR$(147):PRINTTAB(8);"■CSUCSOK TORLESE■■" :PRINT:PRINT
420 PRINT"■MINDEN CSUCSOT TOROLJEK (I/N)?■■";:GOSUB200
430 IF W THEN CS=0:RETURN
440 PRINT:PRINT
460 M=CS+1: INPUT"■HANYADIK CSUCSIG MARADJON MEG■■";M
470 IF M<0 OR M>CS-1 THEN RETURN
480 CS=M+1:RETURN
500 REM --- MATRIX BEADAS, MODOSITAS ---
510 PRINTCHR$(147):PRINTTAB(7);"■CSUCSOK BEADASA,MODOSITASA■■":PRINT
520 PRINT:PRINT:
530 PRINT"        CSUCSOK GENERALASA.....■G■■":PRINT
540 PRINT"        CSUCSOK BEADASA.....■B■■":PRINT
545 PRINT"        DIREKTSZORZAT KEPZESE...■D■■":PRINT :PRINT
550 PRINT"        CSUCSOK MODOSITASA.....■M■■":PRINT
555 PRINT"        CSUCSOK LISTAZASA.....■C■■":PRINT
560 PRINT"        CSUCSOK TORLESE.....■T■■":PRINT:PRINT
565 PRINT"        KILEPES A FOMENUBE.....■X■■":PRINT
600 GET I$:IF I$="" THEN 600
610 IF I$="B" THEN GOSUB 1000:GOTO500
620 IF I$="C" THEN GOSUB 6000:GOTO500
630 IF I$="M" THEN GOSUB 700: GOTO500
640 IF I$="G" THEN GOSUB 850:GOTO500
650 IF I$="T" THEN GOSUB 400:GOTO500
655 IF I$="D" THEN GOSUB 9500:GOTO500
660 IF I$<>"X" THEN 600
670 RETURN
700 REM --- CSUCSOK MODOSITASA ---
710 PRINTCHR$(147):PRINTTAB(11);"■CSUCSOK MODOSITASA■■":PRINT:PRINT
715 IF CS=0 THENPRINT"      ■■■■ NINCSEN MEGADVA CSUCS ■■■■":GOSUB6500:RETURN
720 INPUT"■MODOSITANDO CSUCS SORSZAMA■■";M:PRINT
725 IFM<0ORM>CS-1THENPRINT:PRINT"  ■■■■ NEM LETEZO CSUCS ■■■■":GOSUB6500:RETU
726 PRINT:PRINT"REGI KOORDINATAK:":PRINTK1(M);S$;K2(M);S$;K3(M);S$;K4(M):PRIN
730 INPUT"■X1 KOORDINATA■■";K1(M)
740 INPUT"■X2 KOORDINATA■■";K2(M)
```

```
750 INPUT"■X3 KOORDINATA■";K3(M)
760 INPUT"■X4 KOORDINATA■";K4(M)
770 RETURN
850 REM --- CSUCSOK GENERALASA ---
860 PRINTCHR$(147):PRINTTAB(8);"■CSUCSOK GENERALASA■":PRINT:PRINT
870 PRINT" KEREM ADJA MEG A MINTAT !":PRINT
880 INPUT"■X1 KOORDINATA■";M1
890 INPUT"■X2 KOORDINATA■";M2
900 INPUT"■X3 KOORDINATA■";M3
910 INPUT"■X4 KOORDINATA■";M4
920 PRINT:PRINT" ■PAROS VAGY MINDEN PERMUTACIO (P/M) ?"
930 GET I$:IF I$="" THEN 930
935 IF I$<>"P" AND I$<>"M" THEN 930
940 GOSUB 9000
945 PRINT:PRINT:PRINT" GENERALT CSUCSOK SZAMA:";CS
950 PRINT:PRINT" ■VAN MEG MINTA (I/N) ?■";
960 GOSUB 200
970 IF W THEN 860
980 PRINT:PRINT:GOTO 1100
1000 REM ----- MATRIX BEOLVASASA -----
1005 PRINTCHR$(147):PRINTTAB(8);"■CSUCSOK BEOLVASASA■":PRINT:PRINT
1006 PRINT"■AZ EDDIG MEGLEVO CSUCSOKSZAMA:";CS:PRINT:PRINT
1010 PRINT:C1=0:INPUT" ■KEREM A CSUCSOK SZAMAT■";C1:IF C1=<0THEN RETURN
1020 PRINT:PRINT : FOR I=CS TO CS+C1-1
1030 PRINT" KEREM A ";I;". CSUCS KOORDINATAIT !":PRINT
1040 INPUT" ■X1 KOORD■";X1:K1(I)=X1
1050 INPUT" ■X2 KOORD■";X2:K2(I)=X2
1060 INPUT" ■X3 KOORD■";X3:K3(I)=X3
1070 INPUT" ■X4 KOORD■";X4:K4(I)=X4
1080 PRINT:PRINT
1090 NEXT I :CS=CS+C1
1100 INPUT"■KEREM AZ EL HOSSZAT■";H
1110 IF H<=0 THEN 1100
1200 RETURN
2000 REM ----- RAJZOLO SZUBRUTIN -----
2005 IFCS=0THENPRINT:PRINT"    ■■■■ NINCSEN MEGADVA CSUCS ■■■■■":GOSUB6500:RET
2010 !GRAPHICS 1
2020 !GCLEAR:H2=H*H:UC=0
2030 FOR I=0 TO CS-2
2040 FOR J=I+1 TO CS-1
2050 A1=K1(I)-K1(J):A2=K2(I)-K2(J)
2070 A3=K3(I)-K3(J):A4=K4(I)-K4(J)
2090 IFABS(A1*A1+A2*A2+A3*A3+A4*A4-H2)>EP THEN2200
2100 GOSUB 3000
2105 IFUC<CMTHENUC=UC+1:C1(UC)=X1:C2(UC)=Y1:C3(UC)=X2:C4(UC)=Y2
2110 X1=X1*BF+159:Y1=99-BF*Y1
2120 X2=X2*BF+159:Y2=99-BF*Y2
2130 IFX1>319ORX1<0ORX2>319ORX2<0THENGOSUB2500:RETURN
2140 IFY1>199ORY1<0ORY2>199ORY2<0THENGOSUB2500:RETURN
2150 !LINEX1,Y1 TO X2,Y2
2200 NEXT J
2205 GETI$:IFI$<>CHR$(136)THEN2210
2206 !GRAPHICS0:RETURN
2210 NEXT I
2230 !TRANS:!TRANS
2300 GOSUB 7500:!GRAPHICS 0
2310 RETURN
2499 REM HIBAJELZO SZUBRUTIN
2500 PRINTCHR$(147):!GRAPHICS0
2510 PRINT"          *** AZ ABRA TUL NAGY *** "
2520 PRINT"      ■*** CSOKKENTSE A NAGYITAST ***■"
2530 GOSUB 6500:RETURN
3000 REM --- 4 DIM --> 2 DIM KONVERZIO -
3010 X1=E1*K1(I)+E2*K2(I)+E3*K3(I)+E4*K4(I)
3020 Y1=F1*K1(I)+F2*K2(I)+F3*K3(I)+F4*K4(I)
3030 X2=E1*K1(J)+E2*K2(J)+E3*K3(J)+E4*K4(J)
3040 Y2=F1*K1(J)+F2*K2(J)+F3*K3(J)+F4*K4(J)
3050 RETURN
3500 REM --- TENGELYEK FELRAJZOLASA ---
3510 !GRAPHICS1
3520 X1=159:Y1=99
```

```
3540 X2=0.707*BF+159:Y2=99-BF*0.707 :GOSUB3700
3550 X2=159:Y2=99-BF :GOSUB3700
3560 X2=-0.707*BF+159:Y2=99-BF*0.707 :GOSUB3700
3600 GOTO 7500
3699 REM --- EGYENES RAJZOLO ---
3700 !DLINEX1,Y1 TO X2,Y2:RETURN
4000 REM --- TRANSZFORMACIOS MATRIX BEOLVASASA ----
4005 PRINTCHR$(147)
4010 PRINTTAB(6);"■TRANSZFORMACIOS MATRIX BEADASA■":PRINT:PRINT
4020 PRINT" ■■AZ AKTUALIS MATRIX:■■":PRINT
4030 PRINTE1;S$;E2;S$;E3;S$;E4:PRINT
4035 PRINTF1;S$;F2;S$;F3;S$;F4:PRINT
4040 PRINT:PRINT:PRINT:  PRINTTAB(9);"3 DIMENZIOS .....■3■"
4045 PRINTTAB(9);"4 DIMENZIOS .....■4■"
4050 PRINTTAB(9);"BEADAS..... ■B■":PRINT
4060 PRINTTAB(9);"KILEPES..... ■X■"
4080 GET I$:IF I$="" THEN 4080
4090 IF I$="B" THEN GOSUB 4110:GOTO4000
4095 IF I$="3" THEN GOSUB 4330:GOTO4000
4096 IF I$="4" THEN GOSUB 4230:GOTO4000
4100 IF I$="X" THEN RETURN
4105 GOTO 4080
4110 PRINT:PRINT"■KEREM A TRANSZFORMACIOS MATRIX ELEMEIT■":PRINT
4120 INPUT"ELSO SOR ELEMEI";E1,E2,E3,E4
4130 INPUT"MASODIK SOR ELEMEI";F1,F2,F3,F4
4200 RETURN
4229 REM --4 DIM--
4230 E1=1:E2=0:E3=0.7071067:E4=-0.7071067
4240 F1=0:F2=1:F3=0.7071067:F4=0.7071067
4250 RETURN
4325 REM -- 3 DIM --
4330 E1=1:E2=0:E3=0.7071067:E4=0
4340 F1=0:F2=1:F3=0.7071067:F4=0
4350 RETURN
5000 REM -------- FOMENU ---------
5010 PRINTCHR$(147)
5020 PRINTTAB(8);"■VALASZTHATO LEHETOSEGEK■":PRINT :PRINT:PRINT
5030 PRINT"       CSUCSOK MODOSITASA..... ■M■"
5040 PRINT"       CSUCSOK KILISTAZASA..... ■C■"
5050 PRINT"       ABRAZOLAS.............. ■A■" :PRINT
5060 PRINT"       ABRA KIMENTESE......... ■S■"
5070 PRINT"       ABRA BETOLTESE......... ■L■"
5080 PRINT"       ABRA KINYOMTATASA...... ■P■" :PRINT
5090 PRINT"       UTOLSO KEP TERITESE.... ■K■"
5100 PRINT"       TRAFO MATRIX BEOLVASASA... ■T■"
5110 PRINT"       NAGYITAS BEALLITASA..... ■N■"
5130 PRINT"       TENGELYEK FELRAJZOLASA.... ■R■"
5140 PRINT"       ABRA UJRARAJZOLASA..... ■U■":PRINT
5150 PRINT"       GRAFIKA SZINVALASZTAS..... ■G■":PRINT
5160 PRINT"       KILEPES................ ■X■"
5200 GET I$:IF I$="" THEN 5200
5210 IF I$="M" THEN GOSUB 500:GOTO5010
5220 IF I$="C" THEN GOSUB 6000:GOTO5010
5230 IF I$="A" THEN GOSUB 2000:GOTO5010
5240 IF I$="S" THEN GOSUB 7000:GOTO5010
5250 IF I$="L" THEN GOSUB 7100:GOTO5010
5270 IF I$="P" THEN GOSUB 7200:GOTO5010
5280 IF I$="T" THEN GOSUB 4000:GOTO5010
5290 IF I$="K" THEN GOSUB 7500:GOTO5010
5295 IF I$="U" THEN GOSUB 10500:GOTO5010
5300 IF I$="N" THEN GOSUB 8000:GOTO5010
5315 IF I$="R" THEN GOSUB 3500:GOTO5010
5320 IF I$="X" THEN END
5325 IF I$="G" THEN GOSUB 10000:GOTO5010
5330 GOTO 5200
6000 REM ---- CSUCSOK LISTAZASA ----
6010 PRINTCHR$(147)
6020 PRINTTAB(10);"■CSUCSOK LISTAZASA■":PRINT:PRINT
6030 IF CS=0 THENPRINT"      ■■■■ NINCSEN MEGADVA CSUCS ■■■■":GOSUB 6500:RETUR
6040 FOR I=0 TO CS-1
6050 PRINTI;TAB(4);"■.CS KOORD:■ ";K1(I);K2(I);K3(I);K4(I)
6060 NEXT I
```

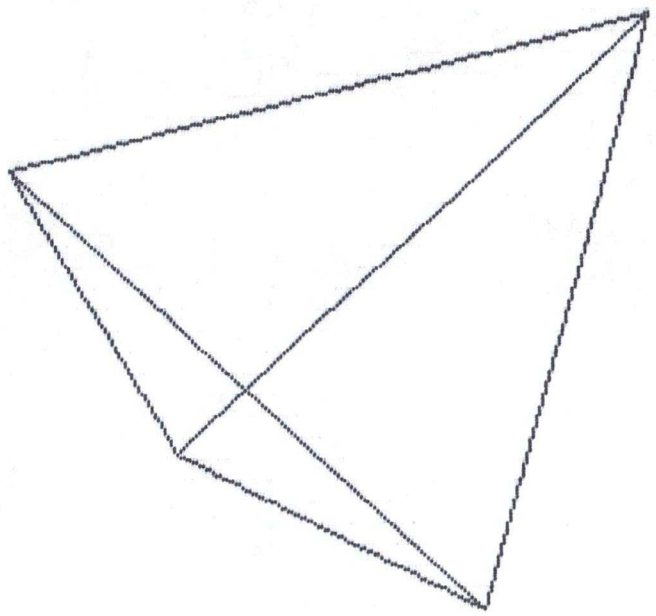
```
6500 REM ---- SPACE VARO SZUBRUTIN ----
6510 GET I$:IF I$<>" " THEN 6510
6520 PRINTCHR$(147);:RETURN
6599 REM ----  LAPVALTAS  ----
7000 REM ---- ABRA KIMENTESE -----
7010 PRINTCHR$(147)
7020 N$="":INPUT"■KEREM AZ ABRA NEVET■";N$
7025 IF N$="" THEN RETURN
7030 N$=LEFT$(N$,10)
7040 GOSUB7400
7050 IF ER$<>"00"THEN7080
7055 PRINT
7060 PRINT "■ILYEN NEVU ABRA MAR VAN A LEMEZEN !■":GOSUB6500:RETURN
7080 !GRAPHICS1:!GSAV"0:"+N$,8:!GRAPHICS0
7090 RETURN
7100 REM ----  ABRA BETOLTESE ----
7110 PRINTCHR$(147)
7120 N$="": INPUT"■KEREM A BETOLTENDO ABRA NEVET■";N$
7125 IF N$="" THEN RETURN
7130 N$=LEFT$(N$,10):PRINT:PRINT
7140 GOSUB 7400
7150 IF ER$<>"00"THENPRINT"  ■■ILYEN NEVU ABRA NEM LETEZIK■■":GOSUB6500:RETUR
7180 !RECALL N$,8:GOSUB 7510
7190 RETURN
7200 REM ---- ABRA KINYOMTATASA ----
7210 PRINT:OPEN3,4:PRINT#3,"":CLOSE3
7220 IF ST<>0 THENPRINT"            ■■PRINTER NOT READY■■":GOSUB 6500:RETURN
7310 !GRAPHICS1
7320 OPEN 4,4:PRINT#4:PRINT#4:PRINT#4
7330 !HARD#4
7335 PRINT#4
7340 CLOSE 4
7350 PRINTCHR$(147): !GRAPHICS 0
7360 F$="":INPUT"■KEREM AZ ABRA FELIRATAT■";F$
7370 IF F$="" THEN 7385
7380 OPEN4,4:PRINT#4,F$
7385 FORL=0TO9:PRINT#4:NEXTL:CLOSE4
7390 RETURN
7400 REM --- FILE LETEZIK MAR ?---
7410 OPEN15,8,15:OPEN2,8,2,N$:INPUT#15,ER$
7420 CLOSE15:CLOSE2:RETURN
7500 REM ---- UTOLSO KEP TERITESE ----
7510 !GRAPHICS 1:PRINTCHR$(147);
7520 GET I$:IF I$="" THEN 7520
7530 IF I$=CHR$(133) THEN GOSUB 7570
7540 IF I$<>" "AND I$<>CHR$(136)THEN 7520
7560 !GRAPHICS0:RETURN
7570 !TRANS : RETURN
8000 REM ----  NAGYITAS BEALLITASA  ----
8010 PRINTCHR$(147):PRINT"   ■AZ EGYSEGNYI HOSSZUSAG BEALLITASA■":PRINT
8015 S=BF/22.5: PRINT:PRINT:PRINT" ■ELOZO ERTEK:■";S:PRINT:PRINT
8020 INPUT"KEREM AZ UJ EGYSEGET (1-4)";S
8030 IF S<1 OR S>4 THEN 8010
8040 BF=22.5*S
8050 RETURN
9000 REM --- PERMUTACIOK KEPZESE ---
9005 PRINT:  IF I$="P"THENPRINT" ■■PAROS PERMUTACIOK■■"
9006 PRINT:IF I$="M"THENPRINT" ■■PERMUTACIOK■■"
9009 REM HA I$="P" :    PAROS PERM.
9010 IF I$="P" THEN GOSUB 9020:RETURN
9015 GOSUB9020:GOSUB9046:RETURN
9020 PRINT
9022 Q1=M1:Q2=M2:Q3=M3:Q4=M4:GOSUB9070
9024 Q2=M3:Q3=M4:Q4=M2:GOSUB9070
9026 Q2=M4:Q3=M2:Q4=M3:GOSUB9070
9028 Q1=M2:Q2=M1:Q3=M4:GOSUB9070
9030 Q2=M4:Q3=M3:Q4=M1:GOSUB9070
9032 Q2=M3:Q3=M1:Q4=M4:GOSUB9070
9034 Q1=M3:Q2=M1:Q3=M2:GOSUB9070
9036 Q2=M2:Q3=M4:Q4=M1:GOSUB9070
```

```
9040 Q1=M4:Q2=M1:Q3=M3:GOSUB9070
9042 Q2=M3:Q3=M2:Q4=M1:GOSUB9070
9044 Q2=M2:Q3=M1:Q4=M3:GOSUB9070
9045 RETURN
9046 Q1=M1:Q3=M4:Q4=M3:GOSUB9070
9048 Q2=M3:Q3=M2:Q4=M4:GOSUB9070
9050 Q2=M4:Q3=M3:Q4=M2:GOSUB9070
9052 Q1=M2:Q2=M1:Q4=M4:GOSUB9070
9054 Q2=M4:Q3=M1:Q4=M3:GOSUB9070
9056 Q2=M3:Q3=M4:Q4=M1:GOSUB9070
9058 Q1=M3:Q2=M1:Q4=M2:GOSUB9070
9060 Q2=M2:Q3=M1:Q4=M4:GOSUB9070
9062 Q2=M4:Q3=M2:Q4=M1:GOSUB9070
9064 Q1=M4:Q2=M1:Q4=M3:GOSUB9070
9066 Q2=M2:Q3=M3:Q4=M1:GOSUB9070
9068 Q2=M3:Q3=M1:Q4=M2:GOSUB9070:RETURN
9069 REM --- CSUCS FELVEVO ---
9070 IF CS=0 THEN 9085
9072 FL=0:FOR Q=0 TO CS-1
9075 IFQ1=K1(Q)ANDQ2=K2(Q)ANDQ3=K3(Q)ANDQ4=K4(Q)THENFL=1:Q=CS-1
9077 NEXT Q
9080 IF FL=1 THEN RETURN
9085 K1(CS)=Q1:K2(CS)=Q2:K3(CS)=Q3:K4(CS)=Q4:CS=CS+1:PRINTQ1,Q2,Q3,Q4
9095 RETURN
9200 REM  1234,1342,1423,2143,2314,2431,3124,3241,3412,4132,4213,4321
9210 REM  1243,1324,1432,2134,2341,2413,3142,3214,3421,4123,4231,4312
9300 REM --- INDEX KISZAMOLO ---
9310 READ A
9320 I1=INT(A/1000)
9330 A=A-1000*I1:I2=INT(A/100)
9340 A=A-100*I2:I3=INT(A/10)
9350 I4=A-10*I3
9360 RETURN
9500 REM --- DIREKTSZORZAT KEPZESE ---
9510 PRINTCHR$(147):PRINTTAB(9);"■DIREKTSZORZAT KEPZESE■":PRINT:PRINT
9515 IFCS=0THENPRINT"     ■*** NINCSEN MEGADVA CSUCS ***■":GOSUB6500:RETURN
9520 C0=CS-1
9525 FOR L=0 TO C0:PRINT"■ ■EDDIG GENERALT CSUCSOK SZAMA:■";CS:PRINT:PRINT
9528 PRINT:PRINT"■ALAP■ ";K1(L);K2(L);K3(L);K4(L):PRINT
9530 RESTORE
9540 FOR L2=1 TO 16
9550 READ A:Q1=A*K1(L)
9560 READ A:Q2=A*K2(L)
9570 READ A:Q3=A*K3(L)
9580 READ A:Q4=A*K4(L)
9660 FL=0:FOR Q=0 TO CS-1
9665 IFQ1=K1(Q)ANDQ2=K2(Q)ANDQ3=K3(Q)ANDQ4=K4(Q)THENFL=1:Q=CS-1
9670 NEXT Q
9680 IF FL=1 THEN 9690
9685 K1(CS)=Q1:K2(CS)=Q2:K3(CS)=Q3:K4(CS)=Q4:CS=CS+1
9686 PRINTQ1,Q2,Q3,Q4
9690 NEXT L2
9695 GETI$:IF I$=CHR$(136)THENRETURN
9700 NEXT L
9710 PRINT:PRINT" ■CSUCSOK SZAMA:■";CS
9720 GOSUB 6500
9750 RETURN
9810 DATA 1,1,1,1
9820 DATA 1,1,1,-1
9830 DATA 1,1,-1,1
9840 DATA 1,-1,1,1
9850 DATA -1,1,1,1
9860 DATA 1,1,-1,-1
9870 DATA 1,-1,1,-1
9880 DATA -1,1,1,-1
9890 DATA 1,-1,-1,1
9900 DATA -1,1,-1,1
9910 DATA -1,-1,1,1
9920 DATA 1,-1,-1,-1
9930 DATA -1,1,-1,-1
9940 DATA -1,-1,1,-1
9950 DATA -1,-1,-1,1
```

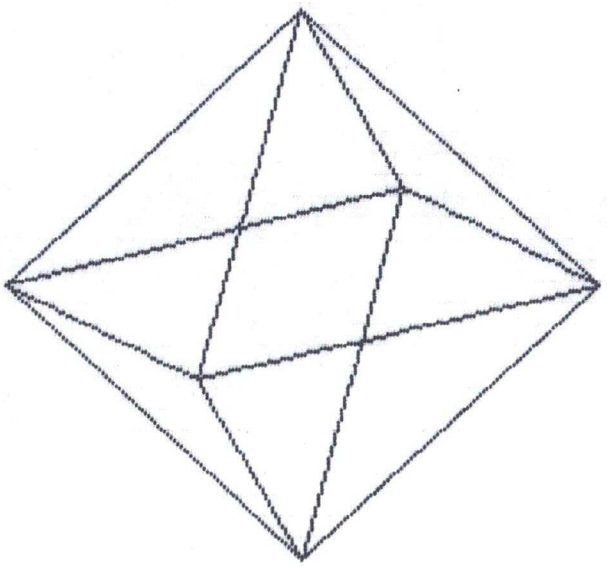
```
9580 DATA -1,-1,-1,-1
10000 REM --- GRAFIKA SZINVALASZTAS ---
10005 PRINTCHR$(147)
10010 PRINTTAB(8);"■GRAFIKA SZINVALASZTAS■":PRINT:PRINT
10020 A=15:INPUT"■ALAPSZIN (0-15):■";A:PRINT:PRINT
10030 IF A>15 THEN A=15
10040 IF A<0 THEN A=0
10045 !BCOL A
10050 A1=0:INPUT"■VONALSZIN (0-15):■";A1:PRINT:PRINT
10060 IF A1>15 THEN A1=15
10070 IF A1<0 THEN A1=0
10080 !LCOL A1
10090 IF A=A1 THENPRINT"   *** AZONOS ALAP ES VONALSZIN ***":PRINT:GOTO10010
10100 RETURN
10500 REM UJRARAJZOLAS
10505 IFUC=0THENPRINT:PRINT"      ■*** NINCSEN ELTAROLT ADAT ***■":GOTO6500
10510 !GCLEAR:!GRAPHICS 1
10520 FOR A=1 TO UC
10530 X1=159+BF*C1(A):Y1=99-BF*C2(A)
10540 X2=159+BF*C3(A):Y2=99-BF*C4(A)
10550 IFX1<0ORX1>319ORX2<0ORX2>319ORY1<0ORY1>199ORY2<0ORY2>199THEN2500
10570 !LINEX1,Y1TOX2,Y2:NEXTA
10580 GOSUB 7500
10590 RETURN

READY.
```

A SZÁMITÓGÉPES PROGRAM
SEGITSÉGÉVEL KÉSZITETT
ÁBRÁK

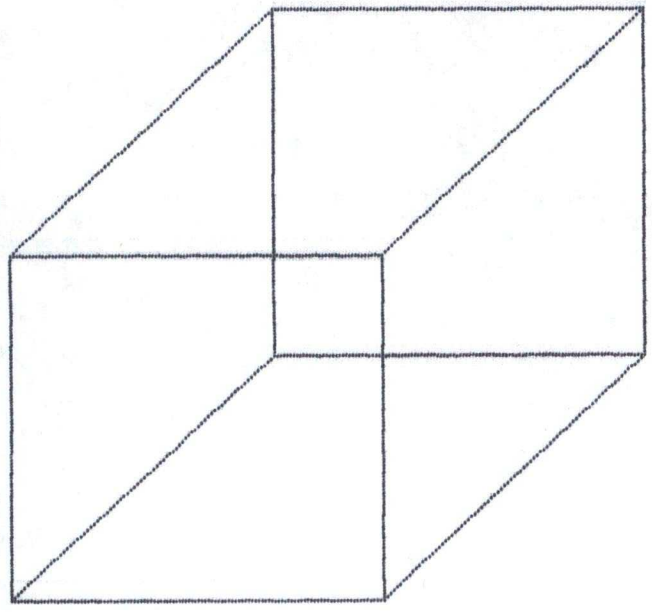
SZEGED



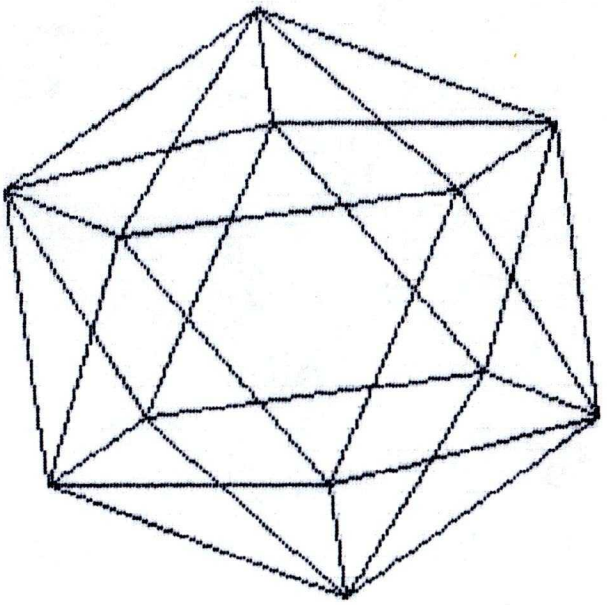
1. {3,3} TETRAEDER



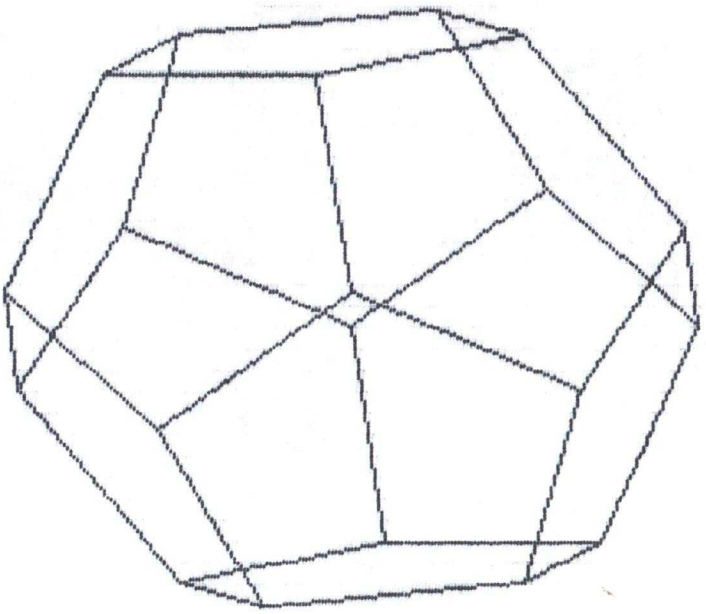
II. {3,4} OKTAEDER



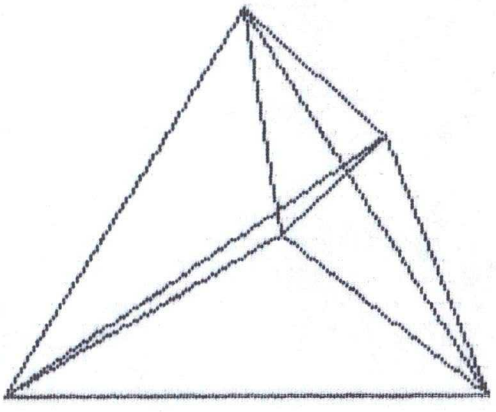
III. {4,3} KOCKA



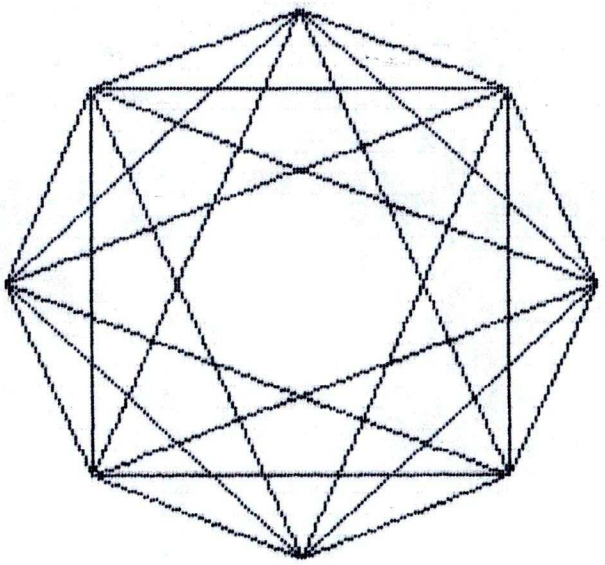
IV. {3,5} IKOZAEDER



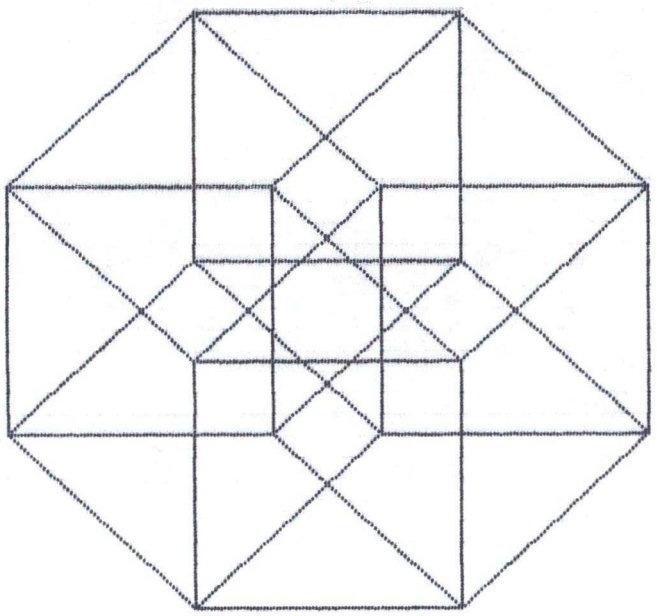
V. {5,3} DODEKAEDER



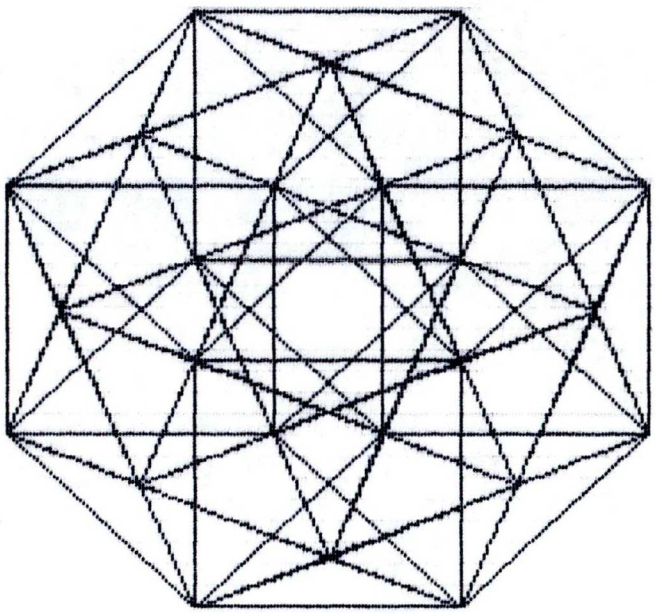
VI. {3,3,3} 4-DIMENZIOS SZIMPLEX



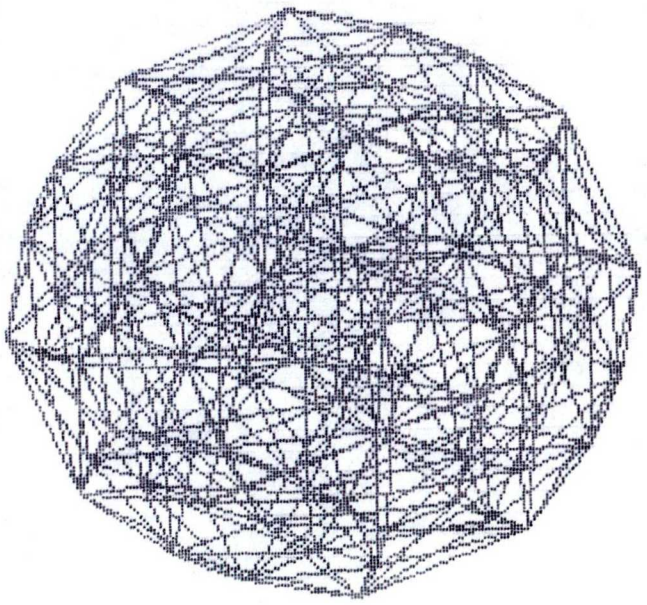
VII. {3,3,4} KERESZT POLITOP



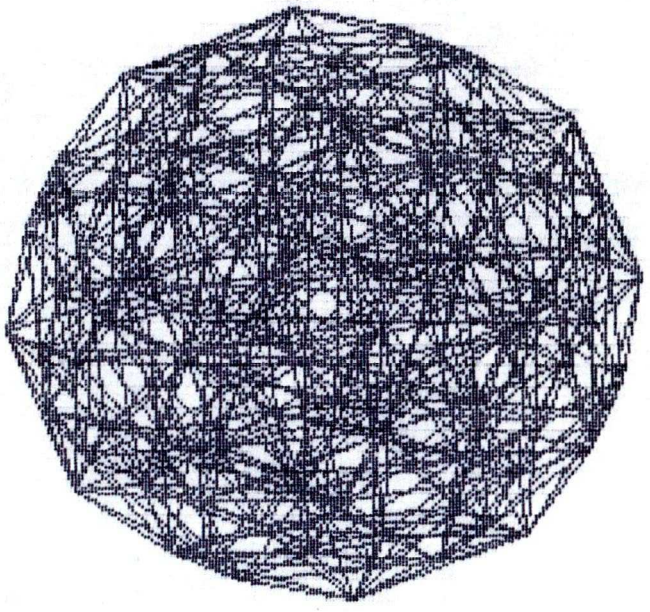
VIII. {4,3,3} HIPERKOCKA



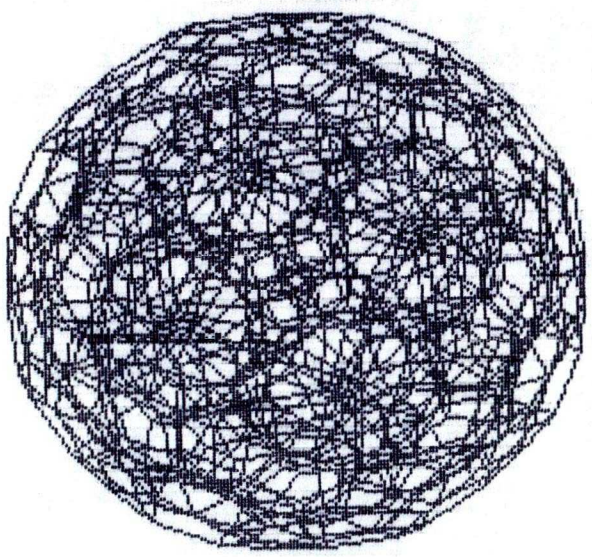
IX. {3,4,3} CESARO POLITOP



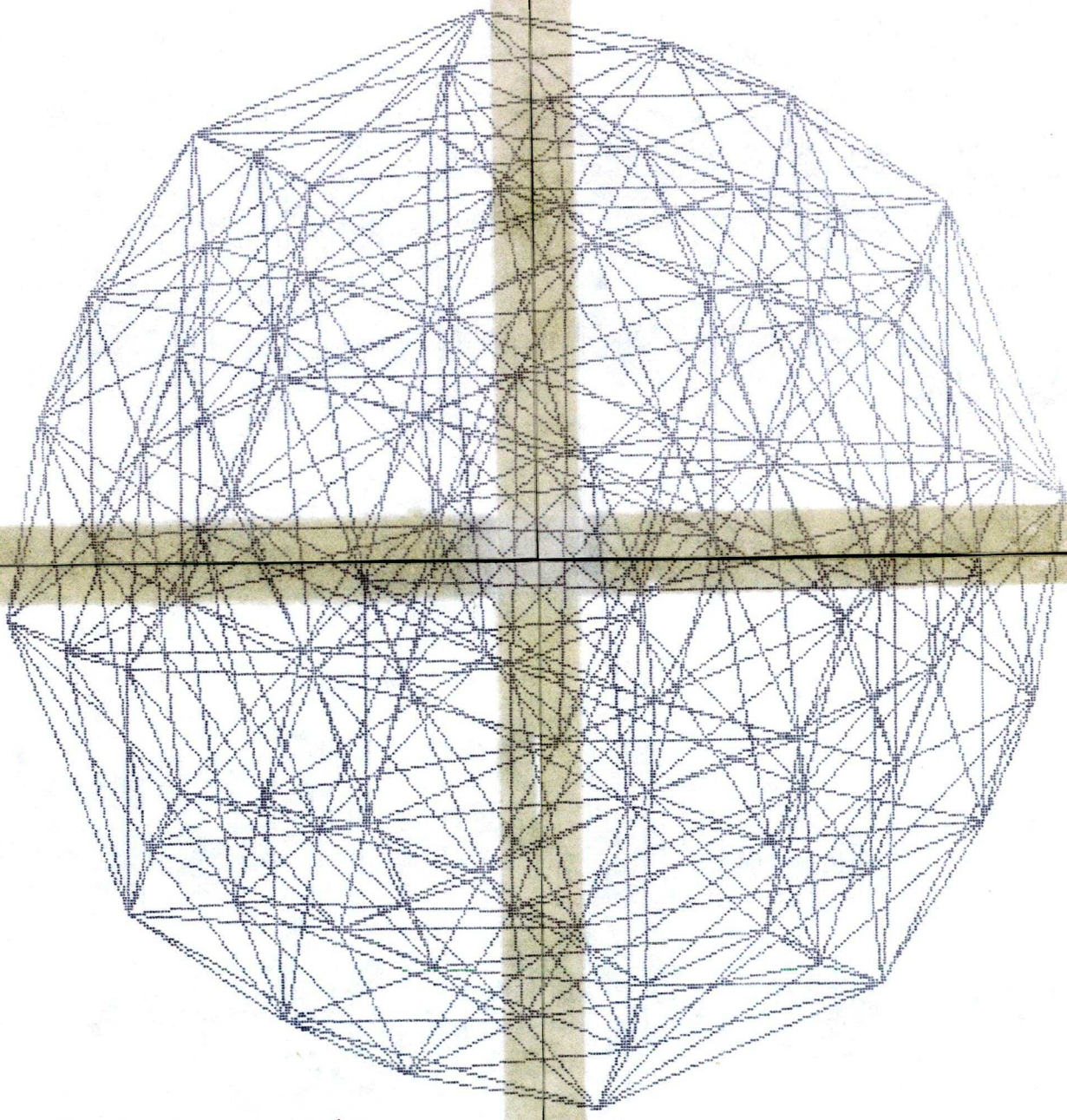
X. S(3.4.3) POLITOP



XI. {3,3,5} GOSSET POLITOP

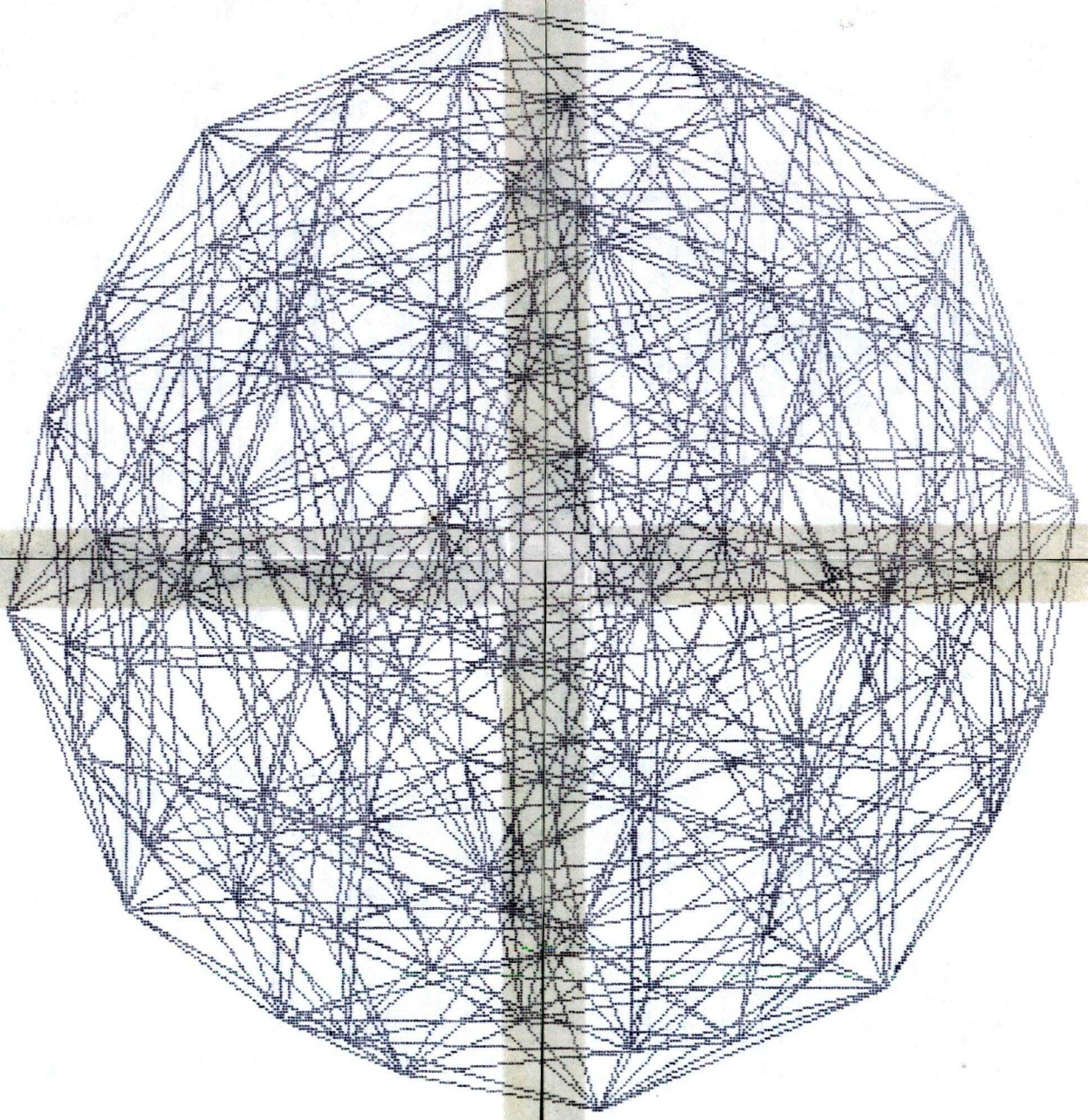


GOSSET DUALISA {5,3,3} XII.



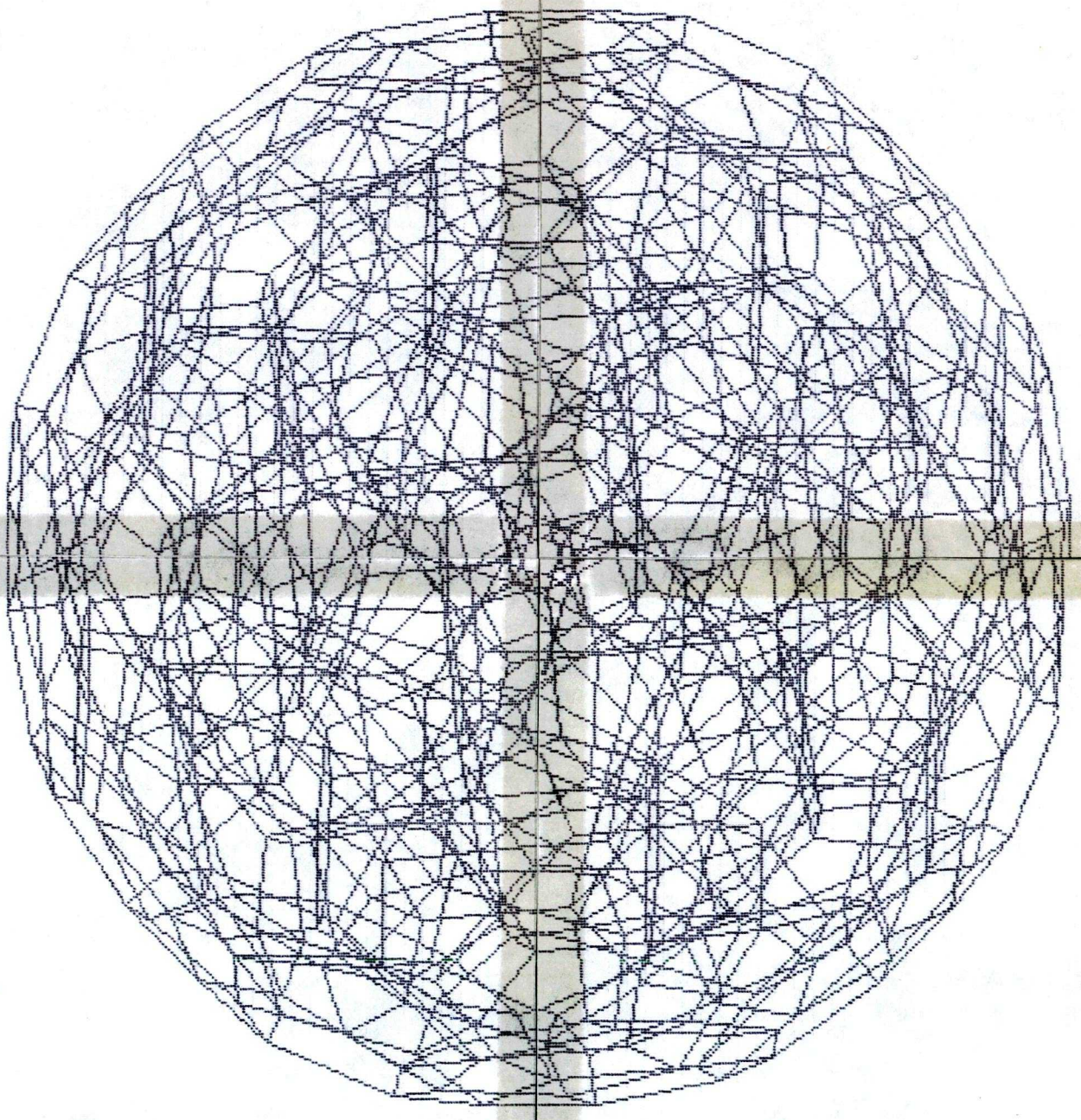
S{3,4,3} CESARO POLITÓP
NAGYÍTOTT KÉPE

XIII.



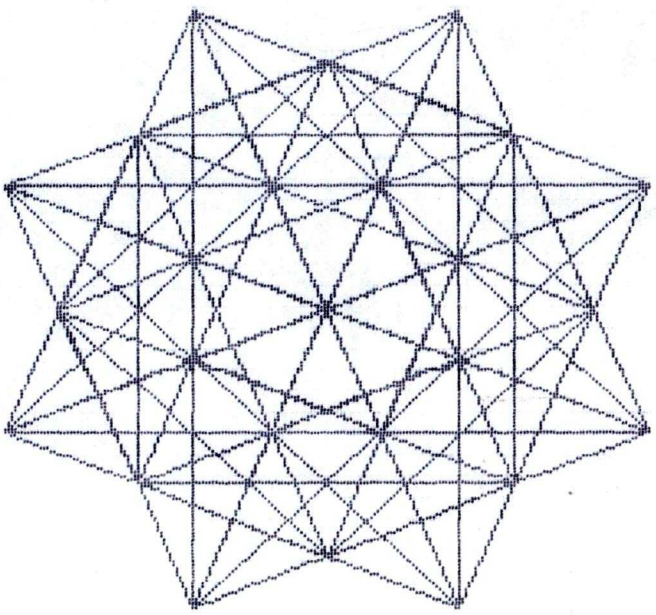
{3,3,5} GOSSET POLITÓP
NAGYÍTOTT KÉPE

XIV.



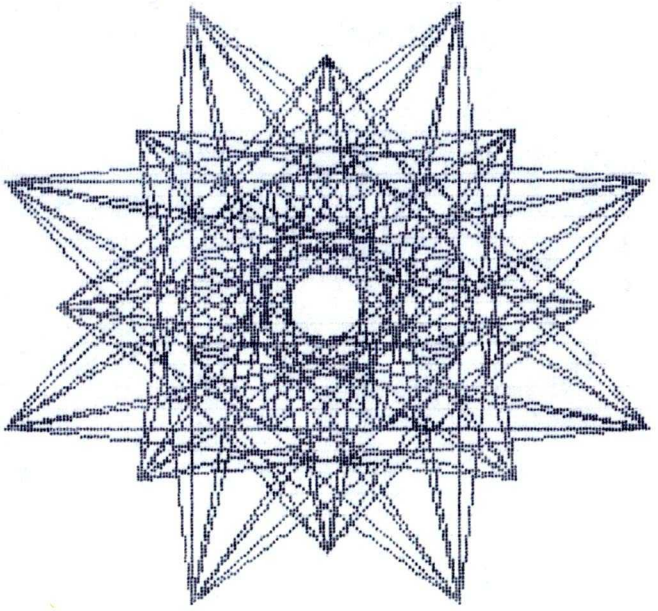
{5,3,3} DUÁLIS GOSSET POLITÓP
NAGYÍTOTT KÉPE

XV.



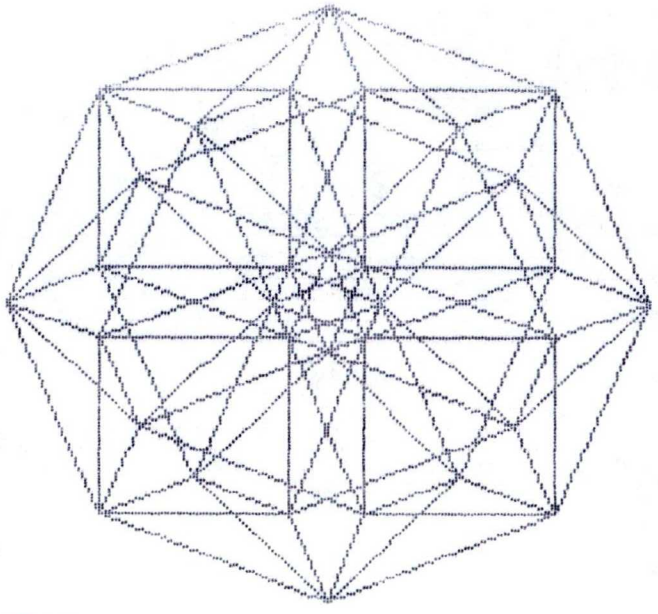
XVI. 2. CESARO POLITOP , e=2

(CSÚCSAI {3,4,3} CSÚCSAIVAL AZONOS, AZONBAN ÉLHOSSZA MÁS.)



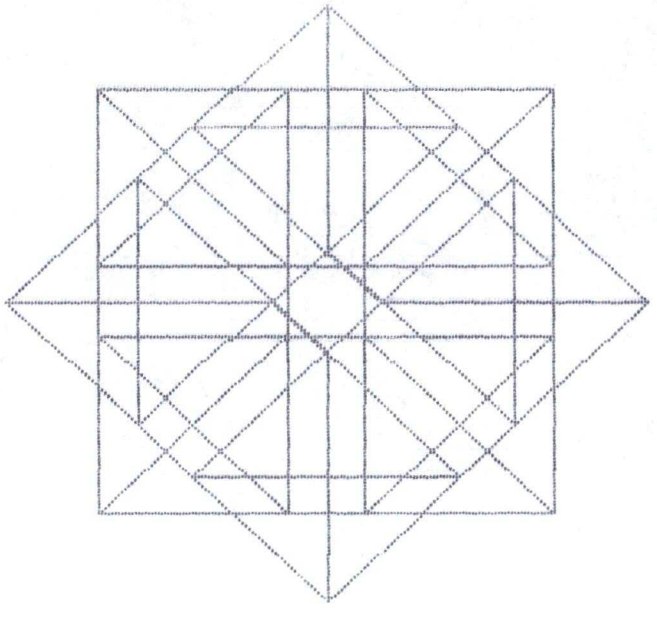
XVII. 3. CESARO POLITOP , $e = 2{,}449$

(CSÚCSAI {3,4,3} CSÚCSAIVAL AZONOS, AZONBAN ÉLHOSSZA MÁS.)



XVIII.

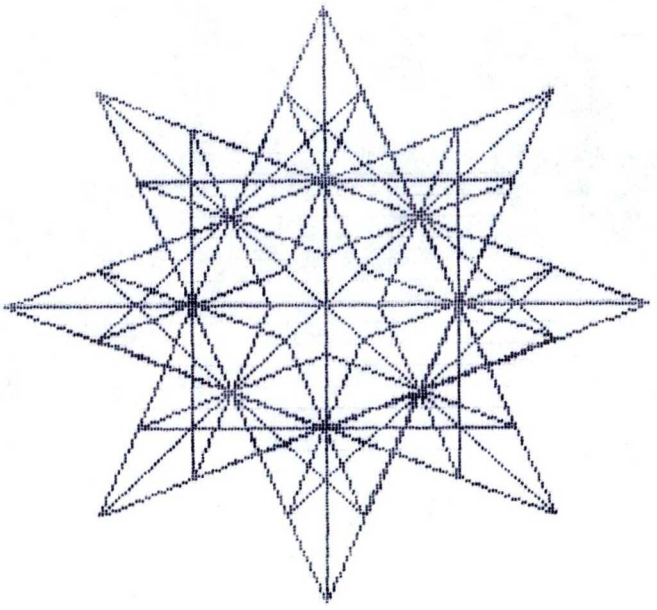
A {4,3,3} ÉLEINEK KÖZÉPPONTJAI ÁLTAL MEGHATÁROZOTT ALAKZAT (1)
e = 1,414



XIX.

A $\{4,3,3\}$ ÉLEINEK KÖZÉPPONTJAI ÁLTAL MEGHATÁROZOTT ALAKZAT (2)

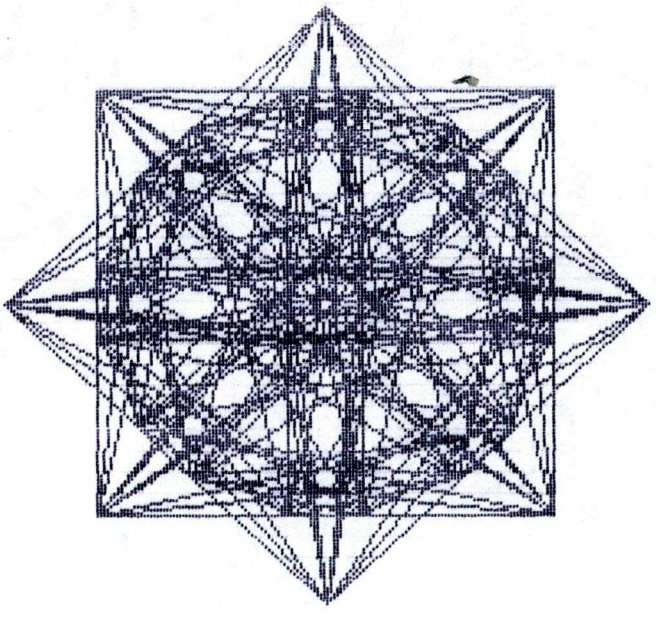
$e = 2$



XX.

A {4,3,3} ÉLEINEK KÖZÉPPONTJAI ÁLTAL MEGHATÁROZOTT ALAKZAT (3)

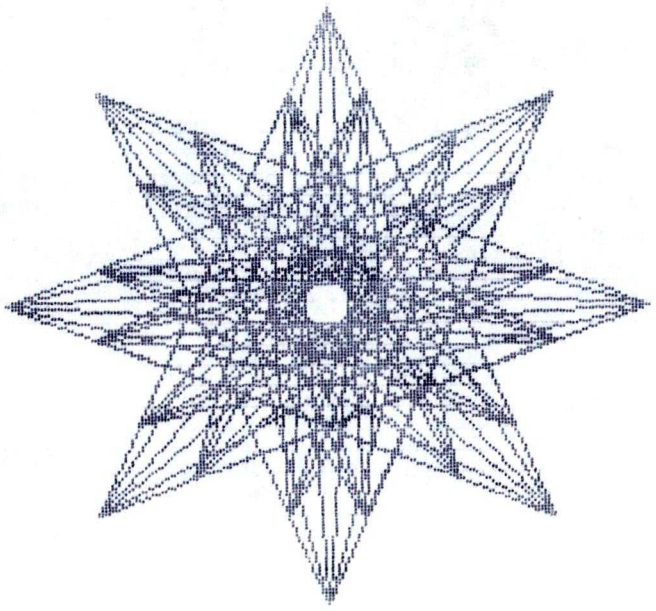
e= 2,828



XXI.

A {4,3,3} ÉLEINEK KÖZÉPPONTJAI ÁLTAL MEGHATÁROZOTT ALAKZAT (4)

e = 2,449



XXII.

A {4,3,3} ÉLEINEK KÖZÉPPONTJAI
ÁLTAL MEGHATÁROZOTT ALAKZAT (5)
e = 3,162