Egyetemi doktori értekezés

JABLONSZKIJ TÉTELÉNEK UJ BIZONYITÁSA

Baráth Tibor

JATE TTK

Szeged, 1985.

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára * SZEGED
B 2696

TARTALOMJEGYZÉK

oldal

Bevezetés

I. Fejezet

Fogalmak, jelölések..... 2

II. Fejezet

II.1. Galois-kapcsolat a függvényklónok és a relációklónok között..... 11

III. Fejezet

III.1. Néhány tétel a véges halmazon értelmezett függvények maximális klónjairól..... 15

IV. Fejezet

IV.1. Jablonszkij teljességi tétele..... 18

IV.2. A bizonyitás alapötlete..... 21

IV.3. A bizonyitás módszere..... 23

IV.4. A $\underline{3}$ halmazon értelmezett függvények maximális klónjainak egyváltozós részklónjai..... 29

V. Fejezet

V.1. Első csoport..... 34

V.2. Második csoport..... 40

V.3. Harmadik csoport..... 47

V.4. Negyedik csoport..... 50

V.5. Ötödik csoport..... 58

V.6. Hatodik csoport..... 83

V.7. Hetedik csoport..... 85

V.8. Egyedi eset..... 93

Összefoglalás..... 94

Felhasznált irodalom..... 95

B E V E Z E T É S

Szakdolgozatomban a háromelemü halmazon értelmezett algebrákat vizsgáltam. E vizsgálat egy részét képezte a háromelemü halmazon definiálható függvények maximális klónjainak felirása. A fenti dolgozat összefoglalásában bizonyitás nélkül szerepel az a tény, hogy az ott leirt 18 maximális klónnál nincs is több. A következőkben e tételnek fogom egy uj bizonyitását megadni.

Az igazolás alapgondolata, amelyet a IV.2. pontban fejtek ki részletesen, Csákány Bélától származik.

A dolgozat megirása során törekedtem arra, hogy a témakörben kevésbé jártas olvasó számára is önmagában követhető legyen. Ennek érdekében az első fejezetben részletesen leirtam a későbbiekben előforduló fogalmakat, definiciókat, a második, harmadik fejezetben pedig a bizonyitás elméleti hátterét alkotó tételeket.

A dolgozat elkészitéséhez sok segitséget adott Csákány Béla egyetemi tanár, akinek a helyen is köszönetet mondok a rendszeres konzultációkon nyujtott támogatásáért.

I. FEJEZET

FOGALMAK, JELÖLÉSEK

Annak érdekében, hogy a bizonyitások gondolatmenetét ne kelljen megszakitani a bennük szereplő fogalmak definiálása végett, ezeket az alábbiakban közöljük. Itt adjuk meg azokat a jelöléseket is, melyek a dolgozatban végig ugyanannak a matematikai objektumnak a megnevezésére szolgálnak.

Legyen H tetszőleges halmaz. A $H^n = \underset{1}{H}x\ldots x\underset{n}{H}$ halmaznak H-ba való leképezését H-n értelmezett n- változós müveleteknek nevezzük /$n \in N$/. A továbbiakban müvelet helyett gyakran fogjuk használni a függvény megnevezést. A függvényeket latin kisbetükkel jelöljük.

Definiáljuk a H-n értelmezett P_i n-változós függvényt a következő módon;

$$/1/ \qquad P_i/x_1,..,x_i,.,x_n/ = x_i \qquad n \in N, \quad 1 \leqq i \leqq n$$

Az /1/ egyenlőséggel megadott függvényt n-változós i-edik projekciónak nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a H halmazon értelmezett f k - változós függvény i-edik változója lényeges, ha vannak olyan $a_1,..,a_{i-1}, a_{i+1},.., a_k, b, c \in H$ elemek, hogy $f/a_1,..,a_{i-1},b,a_{i+1},..,a_k/ \neq f/a_1,..,a_{i-1},c,a_{i+1},..,a_k/$.

Legyen f n-változós, $g_1,..,g_n$ m-változós függvények a H halmazon. A $h/x_1,..,x_m/ = f/g_1/x_1..,x_m/,..,g_n/x_1,..,x_m//$ függvényt az f és a g_i /i= 1,..,n/ függvényekből összetett függvénynek nevezzük. Itt f-et külső függvénynek, a g_i függvé-

nyeket belső függvényeknek hivjuk.

Ha egy H halmaz részhalmazainak valamely $\mathcal{E}$ halmaza lefedi H-t, továbbá az $\mathcal{E}$ -hoz tartozó bármely két különböző halmaz idegen, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}$ H-nak osztályozása; $\mathcal{E}$ elemeit H osztályainak nevezzük.

Legyen ϱ részhalmaza a H^n halmaznak. Ekkor ϱ -t H-n értelmezett n-változós relációnak mondjuk. Másképpen ugy is fogalmazhatnánk, hogy ϱ elemei bizonyos olyan $/h_1,..,h_n/$ elem-n-esek, amelyekre $h_1,..,h_n \in H$ fennáll. Azt a tényt, hogy a $h_1,..,h_n$ elemek a ϱ relációban vannak egymással, röviden ugy irjuk: $\varrho/h_1,..,h_n/$. A relációkat görög kisbetükkel jelöljük.

Legyen ϱ a H halmazon értelmezett kétváltozós reláció. Azt mondjuk, hogy a ϱ reláció

reflexiv, ha $\varrho/a,a/$ minden $a \in H$-ra,

szimmetrikus, ha $\varrho/a,b/$ esetén $\varrho/b,a/$ is teljesül bármely $a,b \in H$-ra,

antiszimmetrikus, ha $\varrho/a,b/$ és $\varrho/b,a/$ együttes teljesülése esetén $a = b$ minden $a,b \in H$-ra,

tranzitiv, ha $\varrho/a,b/$ és $\varrho/b,c/$ fennállásából $\varrho/a,c/$ is következik bármely $a,b,c \in H$-ra.

A reflexiv, szimmetrikus és tranzitiv relációkat ekvivalenciának; a reflexiv, antiszimmetrikus és tranzitiv relációkat rendezési relációnak nevezzük.

Legyen H rendezett halmaz, rendezési relációját jelölje $\leqq$. Ha H bármely h_1,h_2 elempárjára $h_1 \leqq h_2$ vagy $h_2 \leqq h_1$ teljesül, akkor H-t teljesen rendezett halmaznak vagy láncnak nevezzük.

Legyen H tetszőleges halmaz, ς pedig a H-n értelmezett rendezési reláció. Ekkor H-t - pontosabban a $\langle H,\varsigma\rangle$ párt - rendezett halmaznak mondjuk.

A H halmaz minden $\mathcal{E}$ osztályozásához természetes módon rendelhető egy ekvivalencia, amelyben pontosan az $\mathcal{E}$ ugyanazon osztályához tartozó komponensekből álló párok vannak. Ezt az ekvivalenciát is $\mathcal{E}$-nal jelöljük.

Egy H halmazon értelmezett k-változós ς reláció diagonális, ha van olyan $\mathcal{E}$ osztályozás az $\{1,..,k\}$ halmazon, hogy $\varsigma = \{/a_1,..,a_k/ \mid a_i = a_j,$ ha $\mathcal{E}/i,j/\}$, $a_\ell \in H$, $1 \leqq \ell \leqq k$.

Legyen adva egy H nemüres halmaz, és legyenek rajta értelmezve müveletek, jelölje ezek halmazát Ω. H-t a rajta értelmezett müveletekkel együtt algebrai strukturának nevezzük. A tekintett struktura jelölése: $\langle H; \Omega\rangle$.

Legyen $\langle H;f\rangle$ egymüveletes algebrai struktura, müvelete legyen n-változós. Legyen M olyan részhalmaza H-nak, amelyre $f\,/M^n/ \subseteq M$. Ekkor azt mondjuk, hogy M zárt az adott müveletre nézve. Ha egy algebrai struktura valamely nemüres részhalmaza zárt a struktura összes müveletére nézve, akkor ezt a részhalmazt, ami az adott müveletekre nézve maga is algebrai struktura, az eredeti struktura részstruktúrájának nevezzük.

Legyen H egy egymüveletes algebrai struktura. Ha müvelete asszociatív, akkor félcsoportnak hivjuk.

Egy tetszőleges H halmaz önmagába való leképezéseit a H halmaz transzformációinak nevezzük. A H halmaz összes transzformációinak halmaza a leképezésszorzásra nézve félcsoportot alkot; neve teljes transzformációfélcsoport.
Ennek részfélcsoportjait transzformációfélcsoportoknak nevezzük.

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

Monoidon egységelemes félcsoportot értünk.

A félcsoportot félhálónak nevezzük, ha müvelete kommutativ és idempotens. A kétmüveletes algebrai struktura háló, ha mindkét müveletére nézve félháló, és mindegyik müvelete abszorptiv a másikra nézve. Nevezzük a tetszőleges H halmaz két müveletét egyesitésnek, illetve metszésnek, és jelöljük őket ennek megfelelően.
Ekkor bármely $a,b,c \in H$ elemekre

$$a \cap b = b \cap a, \qquad a \cup b = b \cup a \qquad \text{/kommutativ/}$$

$$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c, \qquad a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c \qquad \text{/asszociativ/}$$

$$a \cap a = a, \qquad a \cup a = a \qquad \text{/idempotens/}$$

$$a \cap (a \cup b) = a, \qquad a \cup (a \cap b) = a \qquad \text{/abszorptiv/}$$

Tekintsünk egy tetszőleges H rendezett halmazt, jelöje rendezési relációját $\leqq$. Ha $a,b \in H$, a $c \in H$ elemet a és b legkisebb közös felső korlátjának nevezzük, ha $c \geqq a,b$ és valahányszor $c' \geqq a,b$ mindannyiszor $c' \geqq c$; jelölése: $c = a \vee b$. Hasonlóan a $d \in H$ elemet az a és b elemek legnagyobb közös alsó korlátjának nevezzük, ha $d \leqq a,b$ és valahányszor $d' \leqq a,b$ mindannyiszor $d' \leqq d$; jelölése: $d = a \wedge b$. Az a és b elemek legkisebb közös felső korlátját és legnagyobb közös alsó korlátját nevezhetjük ezen elemek szuprémumának, illetve infimumának is.

Legyen H olyan rendezett halmaz, amelyben bármely két elemnek létezik szuprémuma és infimuma. A fentiek alapján könnyen igazolható, hogy a $\langle H; \vee, \wedge \rangle$ algebrai struktura háló.

Természetesen a szuprémum és az infimum fogalma kiterjeszthető tetszőleges számu /véges vagy végtelen/ elemet tartalmazó halmazra is. Legyen B a tetszőleges A rendezett halmaz egy részhalmaza. A B halmaz A-beli infimumán értjük a B alsó

korlátjaiból álló halmaz legnagyobb elemét; szuprémumán pedig a B felső korlátjaiból álló halmaz legkisebb elemét, feltéve, hogy ezek léteznek. Jelölésük: $\inf_A B$, $\sup_A B$.

Egy H háló tetszőleges számosságu L nemüres részhalmaza esetén az a_i /$i \in J$/ elemek metszetén az $\inf_H L$, egyesitésén a $\sup_H L$ elemet értjük, ha ezek léteznek.

Rövid jelölésük: $\cap L$, $\cup L$.

Ha egy H háló bármely nemüres L részhalmazához $\cap L$ és $\cup L$ létezik, akkor H-t teljes hálónak nevezzük.

Legyen H rendezett halmaz; rendezési relációját jelöje $\leqq$. Ha H-nak van olyan i eleme, hogy minden $h \in H$ esetén $i \leqq h$ teljesül, akkor H-t alulról korlátosnak nevezzük. Hasonlóan ha H tartalmaz olyan s elemet, hogy minden $h \in H$-ra $s \geqq h$ fennáll, akkor H-t felülről korlátosnak mondjuk. Az i, illetve s elemeket a H rendezett halmaz alsó, illetve felső korlátjának hivjuk. Ha a $\langle H, \leqq \rangle$ rendezett halmaznak van alsó és felső korlátja, akkor azt mondjuk, hogy $\leqq$ korlátos rendezés. A korlátosság fogalma természetesen alkalmazható olyan rendezett halmazra is, amely háló.

Legyen H alulról korlátos háló. Ennek valamely p elemét atomnak nevezzük, ha p követi H alsó korlátját, azaz p és az alsó korlát között további elem nincs.

Legyen H felülről korlátos háló. Az $m \in H$ elemet duális atomnak hivjuk, ha m megelőzi a felső korlátot. Másképpen: m és a felső korlát között további elem nincs.

Legyen adott egy H háló a $\cap$, $\cup$ müveleti jelekkel, ekkor az

$$a \wedge b = a \cup b \qquad a \vee b = a \cap b \qquad /a, b \in H/$$

egyenlőségekkel definiált $\wedge$, $\vee$ müveletek egy uj hálót határoznak meg. Ezt az uj hálót a H háló duálisának nevezzük, és $\mathcal{D}$ /H/-val jelöljük.

Egy H_1 hálónak egy H_2 hálóra való egy - egyértelmü f leképezését duális izomorfizmusnak m ondjuk, ha f H_1-nek $\mathcal{D}$ /H_2/-re való izomorf leképezése, azaz $f/a \cap b/ = f/a/ \vee f/b/$ és $f/a \cup b/ = f/a/ \wedge f/b/$ fennáll minden $a,b \in H_1$ esetén.
Egy H rendezett halmaz önmagába való f leképezését lezárási operációnak nevezzük, ha

$$f/h/ \geqq h \qquad \text{és} \qquad f^2/h/ = f/h/ \quad .$$

teljesül H minden h elemére.

Legyen H és L két rendezett halmaz, és s a H-nak L-be, t az L-nek H-ba való leképezése. Azt mondjuk, hogy az s,t leképezéspár Galois-kapcsolatot létesit a H,L rendezett halmazok között, ha teljesülnek a következők:

/1/ $h_1 \leqq h_2 \Rightarrow s/h_1/ \geqq s/h_2/$ $\qquad /h_1, h_2 \in H/;$

/2/ $\ell_1 \leqq \ell_2 \Rightarrow t/\ell_1/ \geqq t/\ell_2/$ $\qquad /\ell_1, \ell_2 \in L/;$

/3/ $h \leqq t/s/h//$ a H minden h elemére;

/4/ $\ell \leqq s/t/\ell//$ az L minden ℓ elemére.

Tekintsünk egy H /nemüres/ halmazt. Jelölje a H-n értelmezett függvények egy tetszőleges halmazát F. Ha F tartalmazza a projekciókat, és zárt az összetett függvény képzésére nézve, akkor klónnak nevezzük H felett.

Legyen F tetszőleges klón. Jelöje F elemeinek egy részhalmazát G . Ha G maga is klón, akkor G-t F részklónjának nevezzük.

Egy tetszőleges H halmazon értelmezett relációk $\mathcal{R}$ halmaza relációklón, ha teljesülnek a következők.

/1/ $\mathcal{R}$ tartalmazza az egyenlőségrelációt.

/2/ $\mathcal{R}$ zárt a relációk szorzására nézve, azaz ha $\varrho, \sigma \in \mathcal{R}$ k-, ill. ℓ -változós relációk, akkor $\varrho \times \sigma \in \mathcal{R}$ is teljesül, ahol

$$\varrho \times \sigma = \{/a_1,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_{k+\ell}/ \mid /a_1,\dots,a_k/ \in \varrho \text{ és } /a_{k+1},\dots,a_{k+\ell}/ \in \sigma\} .$$

/3/ Legyen $\varrho \in \mathcal{R}$ k-változós reláció és $i_1,\dots,i_\ell \in \{1,\dots,k\}$ /$i_1,\dots,i_\ell$ nem feltétlenül különbözők/. Definiáljuk $\varrho i_1,\dots,i_\ell$ -t a következőképpen:

$$\varrho i_1,\dots,i_\ell = \{/a_{i_1},\dots,a_{i_\ell}/ \mid a_1,\dots,a_k \in \varrho\} .$$ Ekkor $\varrho i_1,\dots,i_\ell \in \mathcal{R}$.

A müveletet, amellyel $\varrho i_1,\dots,i_\ell$ -t előállitottuk /$i_1,\dots,i_\ell$/ - vetitésnek nevezzük.

/4/ Legyen $\varrho \in \mathcal{R}$ k-változós reláció, és $\mathcal{E}$ osztályozás /ekvivalencia/ az $\{1,\dots,k\}$ halmazon. Ekkor $\varrho_\mathcal{E} \in \mathcal{R}$ is teljesül, ahol $\varrho_\mathcal{E} = \{/a_1,\dots,a_k/ \mid /a_1,\dots,a_k/ \in \varrho$ és $a_i = a_j$, ha $\mathcal{E}/i,j/\}$.

A fenti relációmüveletet $\mathcal{E}$ - átlósitásnak mondjuk.

Vegyünk egy véges H halmazt, s legyen F a H-n értelmezett függvények halmazának valódi részhalmaza, amely egyben klón. Ha F elemeiből és bármely, a H-n értelmezett F-en kivüli függvényből a H-n értelmezett összes függvények előállithatók az

összetett függvény képzésének végesszámu alkalmazásával, akkor F-et maximális /függvény/klónnak nevezzük.

Legyen H tetszőleges véges halmaz, s legyen $\mathcal{R}$ relációklón H felett. Ha bármely $\mathcal{R}$ -be tartozó nemdiagonális relációból a relációmüveletek /relációk szorzása, $/i_1,..,i_t/$-vetités, $\mathcal{E}$ -átlósitás/ segitségével bármely más $\mathcal{R}$ -beli reláció előállitható, akkor $\mathcal{R}$ minimális /reláció/klón.

Legyen H egy tetszőleges, nemüres halmaz, és legyen F egy klón H felett. F egyváltozós elemeinek halmazát az F klón talpának nevezzük.

Legyen $\mathcal{S}$ m-változós reláció a H halmazon, f pedig egy n-változós függvény ugyanott. Készitsük el a $\mathcal{S}x....x\mathcal{S}$ szorzathalmazt. Ennek elmei mxn-es tömbök /oszlopai $\mathcal{S}$ elemei/. Alkalmazzuk a tömbök soraira az f függvényt, igy ujabb elem--m-eseket /m elemü oszlopokat/kapunk. Ha minden tömb esetében az igy keletkező elem - m-esek megtalálhatók $\mathcal{S}$ elemei között, akkor azt mondjuk, hogy f tiszteli a $\mathcal{S}$ relációt. Ezt tömören igy irjuk: $f/\mathcal{S}x...x\mathcal{S}/\subseteq\mathcal{S}$.

Legyen F a H halmazon értelmezett függvényeknek egy tetszőleges halmaza. Mindazon függvények halmazát, amelyeket külső függvényként F elemeire alkalmazva F-beli függvényt kapunk, az F függvény halmaz normalizátorának nevezzük. Jelölése: N/F/.

Használni fogjuk az F függvényhalmaz által generált függvényhalmaz kifejezést. Ezen azt a függvényhalmazt értjük, amelynek elemei előállithatók F elemeinek és a projekcióknak a felhasználásával az összetett függvény képzésének végesszámu alkalmazásával. Jelölése: [F]. Látható, hogy az F függvényhalmaz által generált függvényhalmaz klón, ezért őt röviden az F függvényhalmaz által generált függvényklónnak nevezhetjük.

Hasonlóan az előzőkhöz, használni fogjuk az $\mathcal{R}$ relációhalmaz által generált relációhalmaz elnevezést is. Ezen a relációknak azt a halmazát értjük, amelynek elemei előállithatók $\mathcal{R}$ elemeinek és a diagonális relációknak a felhasználásával a relációmüveletek végesszámu alkalmazásával. Jelölése: $[\mathcal{R}]$. Akárcsak az előbb, most is észrevehetjük, hogy $[\mathcal{R}]$ klón, ezért röviden az $\mathcal{R}$ relációhalmaz által generált relációklónnak hivhatjuk.

Tekintsünk egy tetszőleges véges H halmazt. A H feletti függvények egy G részhalmazát teljes függvényrendszernek nevezzük, ha $[G]$ a H feletti összes függvények klónja.

Legyen F egy tetszőleges H halmaz feletti függvények egy halmaza. A H feletti függvények egy G halmazát generátorrendszernek nevezzük, ha $[G] = F$.

A G legszükebb olyan részhalmazait, amelyek maguk is generátorrendszerek, minimális generátorrendszereknek mondjuk.

Ha adott egy tetszőleges m-elemü halmaz, ezt röviden igy jelöljük: $\underline{m}$. A halmaz elemeit a 0,1,..,m-1 számokkal reprezentáljuk.

JATE Egyetemi Könyvtár SZEGED

II. FEJEZET

1. GALOIS-KAPCSOLAT A FÜGGVÉNYKLÓNOK ÉS A RELÁCIÓKLÓNOK KÖZÖTT

1.1. Galois-kapcsolat az m feletti függvények és relációk részhalmazhálói között

Jelölje F az m halmazon értelmezett összes függvények halmazát, és legyen $\mathcal{R}$ az összes relációk halmaza ugyanott. Nyilvánvaló, hogy F és $\mathcal{R}$ a halmazelméleti tartalmazásra mint relációra nézve rendezettek. Definiáljuk az F és $\mathcal{R}$ halmazok között az α relációt a következő módon: az $f \in F$ és a $\varrho \in \mathcal{R}$ elemek az α relációban vannak $/\alpha/f,\varrho//$, ha f tiszt ϱ -t. Rendeljük hozzá az F minden G részhalmzához az $\mathcal{R}$ összes olyan ϱ elemeinek halmazát, amelyekre minden $g \in G$ esetén $\alpha/g,\varrho/$ teljesül. Jelölje ezen ϱ elemek halmazát $s/G/$. Hasonlóan, az $\mathcal{R}$ minden $\mathcal{P}$ részhalmazához rendeljük hozzá az F összes olyan g elemeinek halmazát, amelyekre minden $\varrho \in \mathcal{P}$ esetén $\alpha/g,\varrho/$ fennáll. Ezen g elemek halmazát jelöljük $t/\mathcal{P}/$-vel. Ekkor az

$$s: G \mapsto s/G/ \qquad /G \subseteq F/ \text{ és a } t: \mathcal{P} \mapsto t/\mathcal{P}/ \qquad /\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}/$$

leképezéspár Galois-kapcsolatot létesit F és $\mathcal{R}$ részhalmazhálója között. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

/1/ Legyen $G_1, G_2 \subseteq F$ és $G_1 \subseteq G_2$, ekkor $s/G_2/ \subseteq s/G_1/$.

Minden olyan relációt, amelyet G_2 elemei tisztelnek a G_1 elemei is tisztelni fognak $G_1 \subseteq G_2$ miatt. Ugyanakkor létezhetnek $\mathcal{R}$ -ben olyan további relációk, amelyeket G_1 elemei tisztelnek, de G_2 - nek a G_1-en kivüli elemei már nem. Ebből pedig éppen $s/G_2/ \subseteq s/G_1/$ következik.

/2/ Legyen $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{R}$ és $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, ekkor $t/\mathcal{P}_2/ \subseteq t/\mathcal{P}_1/$.
Az állitás hasonlóan igazolható, mint /1/.

/3/ Legyen $G \subseteq F$, ekkor $G \subseteq t/s/G//$ F minden G részhalmazára.

Feleltessük meg ugyanis G-nek az s/G/ relációhalmazt. Majd keressük az összes olyan függvények t/s/G// halmazát, amelyek tisztelik s/G/-t. A G-beli függvények nyilván ilyenek, ezért $G \subseteq t/s/G//$.

/4/ Legyen $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$, ekkor $\mathcal{P} \subseteq s/t/P//\mathcal{R}$ minden részhalmazára.
Állitásunk igaz voltát itt is hasonlóan bizonyithatjuk, mint az előző esetben.
Tekintettel arra, hogy /1/-/4/ fennáll, ezzel igazoltuk, hogy az m halmazon értelmezett függvények halmaza és az ugyanott értelmezett relációk halmaza között a Galois-kapcsolat valóban létezik.

1.2. Ore tétele: Ha az s,t leképezéspár Galois-kapcsolatot létesit a H, L rendezett halmazok között, akkor ts a H-nak st az L-nek lezárási operációja. Ha H és L teljes hálók, akkor azon H-beli elemek Z_H halmaza, amelyeknek ts, illetve azon L-beli elemek Z_L halmaza, amelyeknek st lezárási operációja szintén teljes háló; és s a Z_H-nak Z_L-re, t pedig Z_L-nek Z_H-ra való duális izomorfizmusa.

Tekintsük ezek után az m halmazon értelmezhető összes függvények F halmazát és az ugyanott értelmezett relációk $\mathcal{R}$ halmazát. Legyen α a II. 11. pontban definiált reláció a két halmaz között. Vegyük az ott megadott s és t leképezéseket is. Igazoltuk, hogy F és $\mathcal{R}$ részhalmazhálói között s és t Galois-kapcsolatot létesit. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy a két részhalmazháló teljes, hiszen részhalmazok bármely hal-

mazának egyesitése és metszete is részhalmaz. Igy Ore tétele értelmében ts az m halmazon értelmezett függvények részhalmazhálójának, st pedig a relációk részhalmazhálójának lezárási operációja.

1.3. Bodnarcsuk - Kaluzsnyin - Kotov - Romov - tétel

A /ts/-zárt függvényhalmazok éppen a függvényklónok, az /st/-zárt relációhalmazok pedig a relációklónok m felett.
Ebből Ore tétele szerint következik, hogy m összes függvényklónjainak, ill. relációklónjainak hálója maga is teljes háló, és s a függvényklónok hálójának a relációklónok hálójára, t pedig a relációklónok hálójának a függvényklónok hálójára való duális izomorfizmusa.

Megmutatható, hogy a függvényklónok, ill. relációklónok hálójában a duális atomok éppen a maximális függvényklónok, az atomok pedig a minimális relációklónok. Tekintsük ugyanis a függvényklónok hálóját. Ennek legnagyobb eleme az összes függvények klónja. Tegyük fel, hogy C maximális függvényklón, de nem duális atomja a hálónak. Ekkor az összes függvények F klónja és C között kell legyen egy ujabb C' függvényklón, amely C-nél valódi módon bővebb, de F-nél szükebb, azaz $C \subset C \subset F$. Ha azonban C-hez bármely más függvényt hozzáveszünk, akkor a $C \cup \{f\}$ halmaz által generált függvényhalmaz - definició szerint - F lesz. Ezzel ellentmondásra jutottunk, aminek oka hibás feltevésünk volt, miszerint C nem duális atom. Hasonlóan bizonyitható, hogy a relációklónok hálójának atomjai a minimális relációklónok.

Ezek után megfogalmazhatjuk a Bodnarcsuk-Kaluzsnyin-Kotov-Romov-tétel korollariumát, mely számunkra alapvető fontosságu.

1.4. Korollárium

Tekintsük az m halmazon értelmezett függvények és relációk klónjainak halmazát. Egy C függvényklón az m halmazon pontosan akkor maximális, ha a neki megfelelő s/C/ relációklón minimális.

Bizonyítás: Az állitás annak következménye, hogy a függvényklónok hálója duálisan izomorf a relációklónok hálójával, amit korábban láttunk. Az előbbiekben igazoltuk azt is, hogy a függvényklónok hálójában duális atomok a maximális klónok, a relációklánok hálójában atomok a minimális klónok. A duális izomorfia pedig atomnak duális atomot feleltet meg.

A továbbiakban közöljük Slupecki tételét, amit később a Kuznyecov - tétel igazolásához fogunk felhasználni.

1.5. Slupecki tétele

Legyen f az m /m> 2, véges/ halmazon értelmezett olyan k-változós függvény, amelynek legalább két lényeges változója van, és a halmaz minden elemét felveszi függvényértékként.
Jelölje T az m -en értelmezett egyváltozós függvények halmazát. Ekkor $[f \cup T]$ az m feletti összes függvényekből áll.

III. FEJEZET

1. NÉHÁNY TÉTEL A VÉGES HALMAZON ÉRTELMEZETT FÜGGVÉNYEK MAXIMÁLIS KLÓNJAIRÓL

A véges halmazon értelmezett függvényeket és az általuk tisztelt relációklónokat vizsgálva néhány érdekes megállapitást tehetünk. Ehhez tekintsük először Kuznyecov maximális klónokra vonatkozó tételét.

1.1. Kuznyecov tétele

Véges halmazon értelmezett függvényeknek véges sok maximális klónja van.

Bizonyitás: Megmutatjuk, hogy ha két maximális klón különböző, akkor /lényegében/ egyváltozós függvényeik alkotta részklónjaik is különbözők. Az utóbbiak éppen az alaphalmaz teljes tranformációfélcsoportjának egységelemes részfélcsoportjai, és igy véges sokan vannak. Tehát a maximális klónok száma véges.

Legyen M olyan maximális részklón, amely az összes egyváltozós függvényeket tartalmazza. Slupecki tétele szerint M legalább kétváltozós függvényeinek értékkészlete szükebb, mint a tekintett véges halmaz. Az összes ilyen függvények, együtt a lényegében egyváltozósokkal, könnyen látható módon klónt alkotnak, amely - ugyancsak Slupecki tétele miatt - maximális. M tehát egyértelmüen meghatározott.

Legyenek most N_1 és N_2 olyan különböző maximális részklónok, amelyek ugyanazokat az egyváltozós függvényeket tartalmazzák. Az előzőek szerint van olyan f egyváltozós függvény, amelyet

$N_1 \cap N_2$ nem tartalmaz. Vegyünk egy $g \in N_2$ függvényt ugy,hogy $g \notin N_1$. Akkor $f \in [N_1, g]$. Legyen f az N_1-ből és g -ből vett legkisebb számu függvényekből összetett $N_1 \cap N_2$-n kivüli függvény. Ha $f/x/ = f_1/g_1/x/,..,g_k/x//$, akkor $g_i \in N_1 \cap N_2$ minden i-re, továbbá $f_1 \in N_1$, vagy $f_1 = g \in N_2$. Az első esetben $f \in N_1$, a másodikban $f \in N_2$, ellentmondásban azzal, hogy $f \notin N_1 \cap N_2$ /ui. N_1 és N_2 egyváltozós függvényei ugyanazok./

Nyertük, hogy $N_1 \cap N_2$ <u>minden</u> egyváltozós függvényt tartalmaz, de ekkor $N_1 = N_2 = M$ az előző bekezdés szerint, igy N_1 és N_2 nem különbözők.

Kuznyecov tételének érvényes a következő általánositása is.

1.2. <u>Tétel</u>

Ha egy véges halmazon értelmezett függvényeknek egy klónját végesszámu függvény generálja, akkor a klónnak véges sok valódi maximális részklónja van.

<u>Bizonyitás:</u>

Jelölje a tekintett klónt C. Mivel végesen generált, ezért alkalmas k-ra már a k-változós függvényei /jelöje ezek halmazát C_k/ generálják. Legyen M valódi maximális részklón C-ben, M_k a legfeljebb k-változós függvényeinek halmaza. Ekkor M_k valódi része C_k -nak. Tekintsük M_k normalizátorát $N/M_k/$-t. Mivel M_k tartalmazza a projekciókat, $M_k \subseteq N/M_k/$; sőt $M \subseteq N/M_k/$ is igaz, /mert M-beli legfeljebb k-változós függvényekből M-beli külső függvénnyel összetett függvény is M_k-ban van/. Másrészt $N/M_k/$ valódi része C-nek /mert pl. az $f \in C_k \setminus M_k$ függvényt az /M_k-beli/ projekciókra alkalmazva $f \notin M_k$ az eredmény. Igy M maximális volta miatt $N/M_k/ = M$.

Ez mutatja, hogy C különböző valódi maximális klónjainak "k-adik talpa" is különböző; ilyen talp azonban /halmazunk végessége miatt/ csak véges sok van. Ha most C az összes függvényeklónja, akkor Kuznyecov tételének eredeti, Kuznyecov-féle bizonyitását kapjuk.

IV. FEJEZET

1. JABLONSZKIJ TELJESSÉGI TÉTELE

1.1. Teljességi tétel

Egy tetszőleges véges H halmazon értelmezett függvények egy rendszere akkor és csak akkor teljes, ha nem része egyetlen H feletti maximális függvényklónnak sem.

Bizonyitás:

Szükségesség. Legyen G teljes függvényrendszer H felett. Ekkor definició szerint $[G]$ a H feletti összes függvények halmaza, ami szintén definició alapján bővebb a H feletti maximális függvényklónok bármelyikénél. Ezzel tehát beláttuk, ha egy G függvényrendszer teljes, akkor ő nem része egyetlen maximális klónnak sem.

Elegendőség. Slupecki tétele alapján állithatjuk, hogy véges halmazon értelmezett összes függvények klónjának van véges generátorrendszere. Ekkor nyilván létezik minimális generátorrendszer is. Jelölje az ebbe tartozó függvények halmazát V . Tekintsük ezek után a H feletti függvények klónjának egy valódi részklónját, C-t. Megmutatjuk, hogy C része valamely maximális valódi klónnak. Vegyük a C-t tartalmazó összes valódi részklónokat. Ezek a halmazelméleti tartalmazásra mint relációra nézve rendezett halmazt alkotnak. Tekintsük most a C-t tartalmazó valódi részklónok egy láncát. A lánc elemei között nincs egyetlen olyan klón sem, amely H minimális V generátorrendszerét tartalmazná, hiszen az az összes függvények halmazát generálná. Valódi részklónok egy láncának egyesitése egyrészt maga is klón, másrészt nem lehet a H-n értelmezett összes függvények klónja, mert akkor tartalmazná V-t, s igy a lánc valamelyik tagja is tartalmazná

/a véges/ V összes elemét, ami, mint láttuk, lehetetlen.

Nyertük, hogy a C-t tartalmazó valódi részklónok tartalmazás szerint rendezett halmaza eleget tesz a Zorn-lemma követelményeinek. Ezért a C-t tartalmazó valódi részklónok között van maximális, amely egyszersmind maximális klón H felett.

Legyen ezek után G a H feletti függvények olyan rendszere, amely nem része egyetlen maximális valódi klónnak sem. Tekintsük a $[G]$ függvényhalmazt. Nyilvánvaló, hogy $G \subseteq [G]$. Ebből adódóan $[G]$ nem lehet része egyetlen H feletti maximális valódi klónnak sem. Márpedig az előbb láttuk be, hogy minden valódi klón része valamelyik maximális valódi klónnak. Ebből következően $[G]$ nem lehet más, mint a H feletti összes függvények klónja. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy G teljes függvényrendszer.

E fejezet további részében és a következő fejezetekben a $\underline{3}$ halmazon értelmezett függvények maximális klónjait fogjuk vizsgálni.

1.2. Jablonszkij teljességi tétele

A $\underline{3}$ halmazon értelmezett függvények egy klónja akkor és csak akkor maximális, ha a következő 18 klón egyike:

1. A $0 < 1 < 2$ rendezést tisztelő függvények klónja.
2. A $0 < 2 < 1$ rendezést tisztelő függvények klónja.
3. Az $1 < 0 < 2$ rendezést tisztelő függvények klónja.
4. A lineáris /azaz $f/x_1,..,x_n/\equiv a_1x_1+..+a_nx_n+b$ /mod 3/ alakban előállítható/ függvények klónja.
5. A $\underline{3}$ ciklikus permutációját /azaz a $\{/0,1/,/1,2/,/2,0/\}$ relációt/ tisztelő függvények /az un. önduális függvények/ klónja.

6-8. A $\underline{3}$ halmaz nemtriviális ekvivalenciáit tisztelő függvények klónjai.

9-14. A $\underline{3}$ halmaz egyelemü és kételemü részhalmazait tisztelő függvények klónjai.

15. A $\underline{3}^2 \setminus \{/0,1/, /1,0/\}$ relációt tisztelő függvények klónja.

16. A $\underline{3}^2 \setminus \{/0,2/, /2,0/\}$ relációt tisztelő függvények klónja.

17. A $\underline{3}^2 \setminus \{/1,2/, /2,1/\}$ relációt tisztelő függvények klónja.

18. Az összes egyváltozós függvényekből és a $\underline{3}$-nál szükebb értékkészletü függvényekből álló klón /az un. Slupecki-klón/.

IV.1.1. alapján egy G függvényrendszer pontosan akkor lesz teljes, ha tartalmaz legalább olyan függvényeket, amelyek rendre e 18 osztályon kivül esnek. Másképpen, G-nek van olyan eleme, ami nem monoton, nem lineáris, nem önduális, nem tiszteli a $\underline{3}$ halmaz nemtriviális ekvivalenciáit, nem tiszteli $\underline{3}$ egyelemü, kételemü részhalmazait, nem tiszteli $\underline{3}^2 \setminus \{/i,j/, /j, i/\}$, $i,j \in \underline{3}$, $i \neq j$ halmazokat, végezetül nem eleme a Slupecki-klónnak. Természetesen ezen függvényeknek nem szükséges páronként különbözőknek lenni.

A IV.1.2. tétel bizonyitásának könnyebb része a felsorolt 18 klón maximális voltának bizonyitása. A nehezebb rész annak igazolása, hogy az ezektől különböző klónok nem maximálisak. A következőkben erre a tényre adunk uj bizonyitást. Ebből a célból a 18 klón talpát - amelyek $\underline{3}$ transzformációmonoidjai - felirjuk. A $\underline{3}$ halmaz ezektől különböző transzformációmonoidjai mindegyikéről kimutatjuk, hogy nem lehet

maximális klón talpa. A 18 klón osztályozható aszerint, hogy átvihetők-e egymásba az alaphalmaz transzformációjával vagy sem. Ezen osztályozás alapján 3 egyelemü 5 háromelemü osztályt kapunk: 1-3, 6-8, 9-11, 12-14, 15-17 a háromelemü osztályok, mig 4,5 és 18 az egyelemüek.

2. A BIZONYITÁS ALAPÖTLETE

Tekintsük a $\underline{3}$ halmaz egy, a Slupecki-klóntól különböző C maximális klónját. Ennek talpa legyen T, amely nem tartalmazza az összes egyváltozós függvényt. Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van N/T/ és C között.

Az egyváltozós függvények közül pontosan a T-beliek tartoznak N/T/ -be /mivel T tartalmazza az identikus függvényt/. A C-beli függvények mind N/T/-be tartoznak, hiszen C klón. A többváltozós függvények közül N/T/-be nem tartozhat C-hez nem tartozó függvény, mert különben N/T/ - C maximális volta miatt - az összes függvényekből állna, igy talpa nem lehetne T. Nyertük, hogy N/T/ = C, vagyis bármely a Slupecki-klóntól különböző maximális klón megegyezik saját talpának normalizátorával.

Másrészt, T $\underline{3}$ transzformációinak egy halmaza.

Ha $T = \{t_1,..,t_k\}$, akkor T ábrázolható

	t_1	t_2	...	t_k
0	0	a_{2o}		a_{ko}
1	1	a_{21}		a_{k1}
2	2	a_{22}		a_{k2}

alakban, ahol a_{ij} jelenti $j/\epsilon\ \underline{3}/$ képét a t_i leképezés mellett.

Táblázatunk oszlopai $\underline{3}$ - ból képzett elemhármasok, ezen oszlopok összessége $\underline{3}$-on értelmezett τ háromváltozós reláció. Ha f függvény $\underline{3}$-on, akkor a következő két állitás ekvivalens /N/T/ és a reláció-tisztelés definiciója szerint/:

/1/ f N/T/ -hez tartozik,
/2/ f tiszteli τ -t.

A Bodnarcsuk-Kaluzsnyin-Kotov-Romov-tétel korollárium alapján ekkor a τ által generált relációklón minimális /mivel N/T/ maximális klón/.

Ha tehát a /T által megadott/ relációból megengedett müveletekkel előállitható olyan nemdiagonális σ reláció, hogy σ - ból hasonló módon τ nem nyerhető, azaz τ nem-minimális klónt generál, akkor C/=N/T// nem lehet maximális.

Egy relációklón nem-minimális voltának szükséges és elegendő feltételét megfogalmazhatjuk a következőképpen is:

2.1. Tétel

Egy $[\tau]$ relációklón pontosan akkor nem-minimális, ha léteznek olyan $\varsigma \in [\tau]$ k-változós és $\sigma \in [\tau]$ ℓ-változós nemdiagonális relációk, valamint olyan $\langle \underline{3}; F \rangle$ algebra, hogy ς részalgebrája $\langle \underline{3}; F \rangle^k$ - nak, de σ nem részalgebrája $\langle \underline{3}; F \rangle^\ell$ - nek.

Megjegyzés: σ lehet maga τ is.

3. A BIZONYITÁS MÓDSZERE

A következőkben hozzáfogunk a kitüzött tétel bizonyitásához. Az igazolást a következő lépésekben végezzük el.

3.1. Tekinteni fogjuk a $\underline{3}$ halmaz összes lényegesen különböző monoidját, azaz azokat, amelyek az alaphalmaz transzformációjával egymásból nem nyerhetők. Ahogy ez Székely Zoltán [2] dolgozatából kiderül, 160 ilyen monoid létezik. A monoidokat Székely Zoltán dolgozata alapján sorszámoztuk, s tőle vettük át az elemhármasok praktikus jelölését is. Ennek lényege a következő: a $\underline{3}$ halmazon 27 egyváltozós függvény definiálható. Legyen például $0 \mapsto a$, $1 \mapsto b$, $2 \mapsto c$, ahol $a,b,c \in \underline{3}$. Ha ezek segitségével képezzük az $a.3^2 + b \,.\, 3 + c$ kifejezést, akkor minden esetben egy $[0; 26]$ -ba eső egész számot kapunk. /Természetesen különböző függvények esetében különbözőt./ Ezekkel a számokkal tehát a függvények jelölhetők. A $\underline{3}$ halmaz lényegesen különböző monoidjai a következők;

1. 5
2. 0 5
3. 0 5 13
4. 0 5 13 26
5. 2 5
6. 0 2 5
7. 2 5 26
8. 0 2 5 13
9. 0 2 5 26
10. 0 2 5 13 26
11. 0 1 5
12. 0 1 5 13
13. 0 1 5 13 26
14. 5 7
15. 0 5 7
16. 5 7 13 26
17. 0 5 7 13 26
18. 4 5 9
19. 0 4 5 9 13
20. 0 4 5 9 13 26
21. 2 5 8
22. 0 2 5 8
23. 0 2 5 8 26
24. 0 2 5 8 13 26
25. 2 5 14

JATE Egyetemi Könyvtár SZEGED

26. 2 5 14 26
27. 0 2 5 13 14
28. 0 2 5 13 14 26
29. 0 1 2 5
30. 0 1 2 5 13
31. 0 1 2 5 13 26
32. 0 1 3 5
33. 0 1 3 5 13
34. 0 1 3 5 13 26
35. 0 1 4 5
36. 0 1 4 5 13
37. 0 1 4 5 13 26
38. 0 2 3 5
39. 0 2 3 5 13
40. 0 2 3 5 13 26
41. 4 5 7 8
42. 0 4 5 7 8
43. 4 5 7 8 13 26
44. 0 4 5 7 8 13 26
45. 0 1 5 12 13
46. 0 1 5 12 13 26
47. 0 1 5 13 14
48. 0 1 5 13 14 26
49. 0 1 2 4 5
50. 0 1 2 4 5 13
51. 0 1 2 4 5 13 26
52. 2 5 8 18 24
53. 0 2 5 8 18 24 26
54. 0 2 5 8 13 18 24 26
55. 2 5 14 24 25
56. 0 2 5 13 14 24 25 26

57. 0 1 2 3 5
58. 0 1 2 3 5 13
59. 0 1 2 3 5 13 26
60. 0 1 3 4 5
61. 0 1 3 4 5 13
62. 0 1 3 4 5 13 26
63. 0 1 2 3 5 6
64. 0 1 2 3 5 6 13 26
65. 0 1 2 4 5 8
66. 0 1 2 4 5 8 13 26
67. 0 2 3 5 10 13
68. 0 2 3 5 10 13 26
69. 4 5 7 8 9 18
70. 0 4 5 7 8 9 13 18 26
71. 5 7 14 16 23 25
72. 5 7 13 14 16 23 25 26
73. 0 5 7 13 14 16 23 25 26
74. 5 7 13 17 22 26
75. 0 5 7 13 17 22 26
76. 0 1 2 5 12 13
77. 0 1 2 5 12 13 26
78. 0 1 2 5 13 14
79. 0 1 2 5 13 14 26
80. 0 1 3 5 12 13
81. 0 1 3 5 12 13 26
82. 0 1 4 5 13 14
83. 0 1 4 5 13 14 26
84. 0 1 2 3 4 5
85. 0 1 2 3 4 5 13
86. 0 1 2 3 4 5 13 26

87. 0 1 4 5 9 12 13
88. 0 1 4 5 9 12 13 26
89. 0 1 3 5 12 13 14
90. 0 1 3 5 12 13 14 26
91. 0 2 3 5 12 13 14
92. 0 2 3 5 12 13 14 26
93. 0 1 2 3 5 12 13
94. 0 1 2 3 5 12 13 26
95. 0 1 2 5 12 13 14
96. 0 1 2 5 12 13 14 26
97. 0 1 3 4 5 12 13
98. 0 1 3 4 5 12 13 26
99. 0 1 2 3 5 6 7
100. 0 1 2 3 5 6 7 13 26
101. 0 1 4 5 13 14 17 26
102. 0 1 2 5 12 13 24 26
103. 0 1 2 4 5 9 12 13
104. 0 1 2 4 5 9 12 13 26
105. 0 4 5 9 13 14 25 26
106. 0 1 2 3 5 10 12 13
107. 0 1 2 3 5 10 12 13 26
108. 0 1 2 3 4 5 6 8
109. 0 1 2 3 4 5 6 8 13 26
110. 4 5 7 8 13 17 22 26
111. 0 4 5 7 8 13 17 22 26
112. 0 1 2 3 5 12 13 14
113. 0 1 2 3 5 12 13 14 26
114. 0 1 3 4 5 12 13 14
115. 0 1 3 4 5 12 13 14 26
116. 0 2 5 6 13 16 20 23 26
117. 0 1 3 4 5 9 10 12 13
118. 0 1 3 4 5 9 10 12 13 26

119. 0 1 2 3 5 12 13 24 26
120. 0 1 2 3 4 5 6 7 8
121. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 13 26
122. 0 1 2 4 5 9 12 13 14
123. 0 1 2 4 5 9 12 13 14 26
124. 0 1 2 3 4 5 12 13 14
125. 0 1 2 3 4 5 12 13 14 26
126. 0 4 5 9 13 16 17 22 23 26
127. 0 1 2 4 5 8 13 14 17 26
128. 0 1 2 5 12 13 14 24 25 26
129. 0 1 4 5 9 12 13 14 25 26
130. 0 1 2 3 4 5 9 10 12 13
131. 0 1 2 3 4 5 9 10 12 13 26
132. 0 2 3 5 6 8 10 13 20 26
133. 0 2 3 5 6 10 13 16 20 23 26
134. 5 7 13 14 16 17 22 23 25 26
135. 0 5 7 13 14 16 17 22 23 25 26
136. 0 4 7 8 9 13 17 18 22 26
137. 0 1 2 3 4 5 9 10 12 13 14
138. 0 1 2 3 4 5 9 10 12 13 14 26
139. 0 1 3 5 10 12 13 14 16 23 25 26
140. 0 1 2 3 5 6 10 12 13 20 24 26
141. 0 1 2 4 5 9 12 13 14 24 25 26
142. 0 2 3 5 6 8 10 13 18 20 24 26
143. 0 1 2 3 4 5 12 13 14 24 25 26
144. 4 5 7 8 13 14 16 17 22 23 25 26
145. 0 4 5 7 8 13 14 16 17 22 23 25 26
146. 0 1 2 3 5 6 7 10 12 13 20 24 26
147. 0 1 2 3 4 5 9 10 12 13 14 25 26
148. 0 4 5 7 8 9 13 14 16 17 18 22 23 25 26
149. 0 1 2 3 5 6 10 12 13 14 16 20 23 24 25 26
150. 0 1 3 4 5 9 10 12 13 14 16 17 22 23 25 26

151. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 12 13 18 20 24 26
152. 0 1 2 3 5 6 7 10 12 13 14 16 20 23 24 25 26
153. 0 1 2 3 4 5 6 8 9 10 12 13 14 16 17 18 20
22 23 24 25 26
154. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 12 13 14 16 17 18
20 22 23 24 25 26

3 ciklusu ciklikus permutácitót tartalmaznak:

155. 5 15 19
156. 0 5 13 15 19 26
157. 5 7 11 15 19 21
158. 0 5 7 11 13 15 19 21 26
159. 0 1 2 3 4 5 6 8 9 10 12 13 14 15 16 17
18 19 20 22 23 24 25 26
160. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

3.2. A 160 monoid közül kivesszük a maximális klónok talpait. Korábban láttuk, hogy a 18 klónnak van egy osztályozása, ami alapján 8 osztályba sorolhatók, ahol egy osztályba az egymásba $\underline{3}$ permutációjával átvihető klónok esnek.
A nyolc osztálynak tekinthetjük azon reprezentánsát, amelynek talpa a fent emlitett 160 monoid között található.

3.3. A visszamaradt 152 monoidot hármováltozós relációként kezeljük. Minden egyes relációból származtatunk olyan $\mathcal{S}$ és $\mathcal{G}$ relációkat, amelyekhez egy megfelelő $\langle \underline{3}; F \rangle$ algebrát találva IV.2.1. alapján igazolni tudjuk, hogy az adott monoid nem lehet maximális klón talpa.

4. A 3 HALMAZON ÉRTELMEZETT FÜGGVÉNYEK MAXIMÁLIS KLÓNJAINAK EGYVÁLTOZÓS RÉSZKLÓNJAI

Monoton függvények

4.1. $0 < 1 < 2$ 127.

	0	1	2	4	5	8	13	14	17	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	2	1	1	2	2
2	0	1	2	1	2	2	1	2	2	2

4.2. $0 < 2 < 1$

	0	3	4	5	6	8	13	22	23	26
0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2
1	0	1	1	1	2	2	1	1	1	2
2	0	0	1	2	0	2	1	1	2	2

4.3. $1 < 0 < 2$

	0	2	3	5	12	13	14	20	23	26
0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	2
2	0	2	0	2	0	1	2	2	2	2

Lineáris függvények 158.

4.4.

	0	5	7	11	13	15	19	21	26
0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	2	1	2	1	0	1	0	2

Önduális függvények 155.

4.5.

	5	15	19
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Osztályozást tisztelő függvények 148.

4.6. $\{\{0\}, \{1,2\}\}$

	0	4	5	7	8	9	13	14	16	17	18	22	23	25	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
1	0	1	1	2	2	0	1	1	2	2	0	1	1	2	2
2	0	1	2	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	1	2

4.7. $\{\{1\}, \{0,2\}\}$

	0	2	3	5	6	8	10	13	18	20	21	22	23	24	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	0	0	1	1	2	2	0	1	0	0	1	1	1	2	2
2	0	2	0	2	0	2	1	1	0	2	0	1	2	0	2

4.8. $\{\{2\}, \{0,1\}\}$

	0	1	2	3	4	5	9	10	11	12	13	14	24	25	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Részhalmazt tisztelő függvények

4.9. $\{0\}$ 120.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

4.10. $\{1\}$

	3	4	5	12	13	14	21	22	23
0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

4.11. $\{2\}$

	2	5	8	11	14	17	20	23	26
0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

4.12. $\{0,1\}$

	0	1	2	3	4	5	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtár SZEGED

4.13. $\{0,2\}$

	0	2	3	5	6	8	18	20	21	23	24	26
0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2
1	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2

4.14. $\{1,2\}$ 144.

	4	5	7	8	13	14	16	17	22	23	25	26
0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

4.15. $\underline{3}^2 \setminus \{(0,1), (1,0)\}$

	0	2	5	6	8	11	13	14	16	17	18	20	22	23
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
1	0	0	1	2	2	0	1	1	2	2	0	0	1	1
2	0	2	2	0	2	2	1	2	1	2	0	2	1	2

	24	25	26
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

4.16. $\underline{3}^2 \setminus \{(0,2), (2,0)\}$

	0	1	3	4	5	9	10	12	13	14	16	17	21	22
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	2	2	1	1
2	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0	1

	23	25	26
0	2	2	2
1	1	2	2
2	2	1	2

4.17. $\underline{3}^2 \setminus \{/1,2/, /2,1/\}$ 151.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	18	20	24	26
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	1	1	0	0	2	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1	0	2	0	2

Slupecki-osztály 160.

4.18. A $\underline{3}$ halmazon értelmezhető 27 egyváltozós függvény mindegyike idetartozik.

V. FEJEZET

Ahogy korábban is emlitettük, a 160 lényegesen különböző monoid közül 8 talpa valamelyik maximális klónnak. A megmaradt 152 egyváltozós részklónról kell bebizonyitanunk, hogy nem lehet maximális klón talpa. Célszerü ezeket csoportositani aszerint, hogy melyekről mutatható ki hasonló módon nem-maximális voltuk.

1. Első csoport

Egyváltozós relációk származtatásával megoldhatók csoportja. Sorszám: 1,2,5,6,7, 11, 14, 21, 22, 29, 32, 35, 38, 49, 57, 60, 84.

1.1. A felsorolt háromváltozós relációkból a következő egyváltozós relációkat alkothatjuk meg.

$\varrho = \{a\}$, $\sigma = \{b,c\}$, ahol $a,b,c \in \underline{3}$, $a \neq b$, $a \neq c$ /b és c nem feltétlenül különbözők/. Az f függvény müvelettáblázatát ugy töltjük ki, hogy $f(a,a) = a$ legyen, azaz f tisztelje ϱ -t, de $f(\sigma \times \sigma) \cap \{b,c\} = \emptyset$, amiből következik, hogy f nem tiszteli σ -t. Ezzel a kiindulási τ relációból megengedett relációmüveletek segitségével két olyan nem-diagonális relációt származtattunk, melyek egyikét tiszteli f, másikát nem, ami azt jelenti, hogy az adott monoid nem lehet maximális függvényosztály talpa.

Nézzük meg ezt a következő konkrét példán.

1.

τ:	5
0	0
1	1
2	2

$\varrho = \tau_0 = \{0\}$

$\sigma = \tau_1 = \{1\}$

Tekintsük a következő kétváltozós függvényt:

f:	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

Nyilvánvaló, hogy a ς eleméből képzett elempáron a függvényérték 0, hiszen f/0,0/=0. Ez azt jelenti, hogy f tiszteli $\varsigma = \tau_0$ -t. Hasonló módon látható, hogy f/1,1/ = 2 miatt nem tiszteli $\sigma = \tau_1$ -et. Igy tehát, mig $\langle \underline{3}; f \rangle$ -nek $\langle \tau_0; f \rangle$ részalgebrája, addig $\langle \tau_1; f \rangle$ nem az. Ezzel előállitottuk a kivánt algebrát és relációkat, és bizonyitottuk, hogy a vizsgált egyváltozós részklón nem lehet maximális függvényosztály talpa.

Az igazolást az ezt követőekben is ugyanigy végezzük el. Természetesen a továbbiakban a mostani részletes magyarázatot elhagyjuk, csupán közöljük a származtatott relációkat, a megfelelő f függvény müvelettáblázatát, és rámutatunk arra,hogy mely elem -n-esen áll fenn az ellentmondás. Az f függvény mülettáblázatát mindig csak a szükséges mértékben töltjük ki. Az üresen hagyott helyekre a $\underline{3}$ halmaz bármely eleme beirható.

1.2.

2.

τ:	0	5
0	0	0
1	0	1
2	0	2

$\varsigma = \tau_0 = \{0\}$

$\sigma = \tau_1 = \{0,1\}$

f:	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

f/0,0/ = 0

f/1,1/= 2

5.

τ:

	2	5
0	0	0
1	0	1
2	2	2

$\varsigma = \tau_0 = \{0\}$

$\sigma = \tau_1 = \{0,1\}$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

$f/1,1/ = 2$

6.

τ:

	0	2	5
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	2	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

$f/1,1/ = 2$

7.

τ:

	2	5	26
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\varsigma = \tau_2$

$\sigma = \tau_0$

f:

	0	1	2
0			
1			
2	1		2

$f/0,2/ = 1$

11.

τ:

	0	1	5
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

$f/1,1/ = 2$

14.

τ:

	5	7
0	0	0
1	1	2
2	2	1

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		0	
2			

$f/1,1/ = 0$

21.

τ:

	2	5	8
0	0	0	0
1	0	1	2
2	2	2	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_2$

f:

	0	1	2
0	0		
1			
2			0

$f/2,2/ = 0$

22.

τ:

	0	2	5	8
0	0	0	0	0
1	0	0	1	2
2	0	2	2	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_2$

f:

	0	1	2
0	0		
1			
2			1

$f/2,2/ = 1$

29.

τ:

	0	1	2	5
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	1	2	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

f/1,1/ = 2

32.

τ:

	0	1	3	5
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

f/1,1/ = 2

35.

τ:

	0	1	4	5
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	1	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

f/1,1/ = 2

38.

τ:

	0	2	3	5
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	2	0	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

f/1,1/ = 2

49.

τ:

	0	1	2	4	5
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	1	2	1	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

f/1,1/ = 2

57.

τ :

	0	1	2	3	5
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	1	2	0	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

f/1,1/ = 2

60.

τ :

	0	1	3	4	5
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

f/1,1/ = 2

84.

τ :

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
2	0	1	2	0	1	2

$\varsigma = \tau_0$

$\sigma = \tau_1$

f:

	0	1	2
0	0		
1		2	
2			

f/1,1/ = 2

2. Második csoport

Sorszám: 4,10, 13, 28, 34, 40, 46, 48, 56, 62, 81, 83, 92, 55, 31, 51, 59, 79, 86, 37

Kivételek: 128, 101, 133, 134

2.1. A felsorolt relációk mindegyikéből származtatható a $S = \{/0,0/, /0,1/, /1,1/, /2,2/\}$ reláció. A τ alapreláció egyike sem tartalmazza a /0,0,0/, /0,0,1/ vagy /0,0,2/ hármasok valamelyikét.

Ekkor az alkalmas f függvény értéktáblázata a következő:

f:	0	1	2
0	0	0	a
1	0	0	a
2	a	a	0

ahol a ≠ 1 vagy a = 2 aszerint, hogy τ a /0,0,1/ vagy a /0,0,2/ hármast nem tartalmazza. Könnyen belátható f/ϱ xϱ /⊆ϱ, azaz a függvényünk ϱ -t tiszteli.

Ugyanakkor f//0,0,0/x/0,1,2// = /0,0,a/∉τ a megfelelő definiálása esetén, ami azt jelenti, hogy f nem tiszteli τ-t.
A IV.2.1. pontban emlitett σ reláció itt egybeesik a τ alaprelációval. Ezzel igazoltuk, hogy a vizsgált monoid/ok/ nem lehet/nek/ maximális klón talpa/i/.
Nézzünk itt is egy konkrét esetet:

4.

τ:	0	5	13	26
0	0	0	1	2
1	0	1	1	2
2	0	2	1	2

$\varrho = \tau_{o1} = \{/0,0/, /0,1/, /1,1/, /2,2/\}$

f:	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	0

f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,2/ ∉ τ

2.2. A továbbiakban megadjuk ϱ előállitási módját, a értékét.

1o.

τ:	0	2	5	13	26
0	0	0	0	1	2
1	0	0	1	1	2
2	0	2	2	1	2

$\varrho = \tau_{o1}$

a = 1

13.

τ:	0	1	5	13	26
0	0	0	0	1	2
1	0	0	1	1	2
2	0	1	2	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

$a = 2$

28.

τ:	0	2	5	13	14	26
0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	1	1	1	2
2	0	2	2	1	2	2

$\varsigma = \tau_{01}$

$a = 1$

34.

τ:	0	1	3	5	13	26
0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	1	1	1	2
2	0	1	0	2	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

$a = 2$

37.

τ:	0	1	4	5	13	26
0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	1	1	1	2
2	0	1	1	2	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

$a = 2$

40.

τ:	0	2	3	5	13	26
0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	1	1	1	2
2	0	2	0	2	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

$a = 1$

46.

τ:	0	1	5	12	13	26
0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	1	1	1	2
2	0	1	2	0	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

$a = 2$

48.

τ:	0	1	5	13	14	26
0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	1	1	1	2
2	0	1	2	1	2	2

$\varsigma = \tau_{01}$

a = 2

56.

τ:	0	2	5	13	14	24	25	26
0	0	0	0	1	1	2	2	2
1	0	0	1	1	1	2	2	2
2	0	2	2	1	2	0	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

a = 1

62.

τ:	0	1	3	4	5	13	26
0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	1	1	1	1	2
2	0	1	0	1	2	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

a = 2

81.

τ:	0	1	3	5	12	13	26
0	0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	1	1	1	1	2
2	0	1	0	2	0	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

a = 2

83.

τ:	0	1	4	5	13	14	26
0	0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	1	1	1	1	2
2	0	1	1	2	1	2	2

$\varsigma = \tau_{01}$

a = 2

92.

τ:	0	2	3	5	12	13	14	26
0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	1	1	1	1	1	2
2	0	2	0	2	0	1	2	2

$\varsigma = \tau_{01}$

a = 1

55.

τ:	2	5	14	24	25
0	0	0	1	2	2
1	0	1	1	2	2
2	2	2	2	0	1

$\varsigma = \tau_{01}$

a = 1

$f//0,0,2/ \times /0,1,2// = /0,0,0/ \notin \tau$

Az ellentmondás itt a fenti elemhármasok segitségével mutatható ki. Erre a változtatásra azért volt szükség mert $/0,0,0/ \notin \tau$.

A következő öt monoidból a V.2.1. pont alatt megadott ς relációt származtattuk. A felhasznált f függvény azonban eltér az ott definiálttól. Tekintettel arra azonban, hogy a következőkben alkalmazott f függvény értéktáblázatának szerkezete a korábban látottéval egyező, ezért ezeket is itt tárgyaljuk. Az eltérésre az kényszeritett bennünket, hogy ezen monoidok mindegyike tartalmazza a /0,0,1/, /0,0,2/ hármasokat.

31.

τ:	0	1	2	5	13	26
0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	1	2
2	0	1	2	2	1	2

f:	0	1	2
0	1	1	0
1	1	1	0
2	0	0	1

$\varsigma = \tau_{01}$

f//0,0,0/x/0,1,2// = /1,1,0/$\notin \tau$

Az ellentmondást a további négy monoid esetében is a fenti elemhármasok segitségével mutatjuk ki.

51.

τ:	0	1	2	4	5	13	26
0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	1	1	2
2	0	1	2	1	2	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

59.

τ:	0	1	2	3	5	13	26
0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	1	1	2
2	0	1	2	0	2	1	2

$\varsigma = \tau_{01}$

79.

τ:	0	1	2	5	13	14	26
0	0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	0	1	1	1	2
2	0	1	2	2	1	2	2

$\varsigma = \tau_{ol}$

86.

τ:	0	1	2	3	4	5	13	26
0	0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	1	1	1	2
2	0	1	2	0	1	2	1	2

$\varsigma = \tau_{ol}$

2.3. Kivételek

128.

τ:	0	1	2	5	12	13	14	24	25	26
0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
2	0	1	2	2	0	1	2	0	1	2

$\varsigma = \tau_{ol}$

E monoidból is a korábbi ς relációt származtattunk. Tekintettel arra, hogy τ a /0,0,1/, /0,0,2/, /1,1,0 / hármasok mindegyikét tartalmazza, ismét más f függvényt kellett keresnünk. Ennek szerkezete is eltér a korábbiakétől, ezért szerepel "Kivételek" cimszó alatt.

f:	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

f nyilván tiszteli τ_{ol} -et, ha annak elemeiből képzett párokon az /1,0/ értéket nem veszi fel. Ezt azonban nem teheti, mert ahhoz legalább két 0-ra végződő párnak kellene τ_{ol}-ben előfordulni, s csak egy van.

Ugyanakkor f//0,0,0/x/0,1,2// = /0,1,1/$\notin \tau$.

A 101.,133. és 134. monoidokból ugyan más kétváltozós relációt származtattunk, de a megfelelő f függvény szerkezete hasonló a 128-nál látottéhoz, ezért ezeket is itt tárgyaljuk.

101.

τ:	0	1	4	5	13	14	17	26
0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	1	1	1	1	2	2
2	0	1	1	2	1	2	2	2

Állitsuk elő az $\alpha = \tau \times \tau$ hatváltozós relációt, s válasszuk ki azon elem-6-osokat, amelyekben a harmadik és negyedik helyen álló elemek egyezők $\beta = \alpha\{2,3\},\{0\},\{1\},\{4\},\{5\}$

β:															
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
0	0	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	2	2	2	2
0	1	1	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2

Legyen $\varrho = \beta_{0,5} = \{/0,0/, /0,1/, /0,2/, /1,1/, /1,2/, /2,2/\}$, f pedig:

f:	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2

f//0,0,0/x/0,1,2// = /0,2,2/$\notin \tau$

133.

τ:	0	2	3	5	6	10	13	16	20	23	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	0	1	1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	2	0	2	0	1	1	1	2	2	2

$\tau_{01} = \{/0,0/,/0,1/,/0,2/, /1,1/,/2,2/\}$

f:	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2

$f//0,0,0/x/0,1,2// = /0,2,2/ \notin \tau$

134.

τ:	5	7	13	14	16	17	22	23	25	26
0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2
2	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2

$\tau_{01} = \{/0,1/,/0,2/,/1,1/,/1,2/,/2,1/,/2,2/\}$

f:	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2

$f//0,1,2/x/0,2,1// = /0,2,2/ \notin \tau$

3. Harmadik csoport

Sorszám: 17,24,100
Kivétel: 66, 118

3.1. Ezen háromváltozós relációk mindegyikéből a $\varsigma = \{/0,0/,/0,1/,/0,2/,/1,1/,/2,2/\}$ kétváltozós relációt származtattuk.

Némi számolással ellenőrizhető, hogy a

	0	1	2
0	0	0	a
1	0	0	a
2	a	a	a

tipusu értéktáblázattal definiált f függvény tiszteli ς -t a = 1 és a = 2 esetben.

/Nyilván, hiszen a fenti függvény csak akkor vezetne ki ς -ból, ha annak elemei között legalább két 2-sel kezdődő elem volna/.
Ugyanakkor a $\sigma = \tau$ relációnak találunk olyan elemeit, amelyek segitségével igazolható, hogy f nem tiszteli τ -t.

3.2.

17.

τ:	0	5	7	13	26
0	0	0	0	1	2
1	0	1	2	1	2
2	0	2	1	1	2

$\varsigma = \tau_{ol}$

a = 2

$f//0,1,2/x/0,2,1// = /0,2,2/ \notin \tau$

24.

τ:	0	2	5	8	13	26
0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	1	2	1	2
2	0	2	2	2	1	2

$\varsigma = \tau_{ol}$

a = 1

$f//0,0,0/x/0,1,2// = /0,0,1/ \notin \tau$

100.

τ:	0	1	2	3	5	6	7	13	26
0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	1	2	2	1	2
2	0	1	2	0	2	0	1	1	2

$\varsigma = \tau_{o1}$

$a = 2$

$f//0,1,2/x/0,2,1// = /0,2,2/ \notin \tau$

3.3. Kivételek

A ς definiciója alapján e csoportba tartozik a 66. monoid is. Ez azonban tartalmazza a /0,0,a/, /0,a,a,/ $a \in \{1,2\}$ hármasok mindegyikét, ezért más f függvényt kellett konstruálnunk.

66.

τ:	0	1	2	4	5	8	13	26
0	0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	1	2	1	2
2	0	1	2	1	2	2	1	2

f:	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	2
2	0	2	1

$\varsigma = \tau_{o1}$

$f//0,1,2/x/2,2,2//=/0,2,1/ \notin \tau$

Könnyen ellenőrizhető, hogy f valóban tiszteli ς -t.
A 118. monoidot is itt tárgyaljuk. A belőle származtatott ς reláció ugyan különbözik a fentiektől, de a felhasznált f függvény táblázatának szerkezete megegyezik a 3.1. pontban definiálttal.

118.

τ:	0	1	3	4	5	9	10	12	13	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	2
2	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$S = \tau_{o1}$

f//0,0,0/x/0,1,2//= /1,1,2/ $\notin \tau$

131.

τ:	0	1	2	3	4	5	9	10	12	13	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$S = \tau_{o1}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/ $\notin \tau$

4. Negyedik csoport

Sorszám: 3,8,9,12,23,25,27,30,33,36,39, 45,47, 50, 58,61, 76,78, 80,82,85,91

4.1. Ezen háromváltozós relációk mindegyikéből a $S = \{/a,a/, /a,b/, /b,b/\}$ kétváltozós relációt alkottuk meg.
/a,b $\in$ 3, a$\neq$b/

Elég kézenfekvő, hogy ς elemeiből képzett párok a $\underline{2}^2$ halmaz elemei, ahol $\underline{2} = \{a,b\}$. Ha az f függvényünk értéktáblázatát ugy töltjük ki, hogy $f/\underline{2}^2/ = a$ vagy $f/\underline{2}^2/ = b$ teljesül, akkor f tiszteli a ς relációt. Az értéktáblázat kitöltését folytassuk ugy, hogy f ne tisztelje a $\sigma = \tau$ relációt. Ezzel igazoljuk, hogy a fenti monoidok nem lehetnek maximális klónok egyváltozós részklónjai.

4.2.

3.

	0	5	13
0	0	0	1
1	0	1	1
2	0	2	1

τ:

f:	0	1	2
0	0	0	
1	0	0	2
2			

$\varsigma = \tau_{o1}$

$f//1,1,1/x/0,1,2// = /0,0,2/ \notin \tau$

8.

	0	2	5	13
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	2	2	1

τ:

f:	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	
2			

$\varsigma = \tau_{o1}$

$f//0,0,0/x/0,1,2// = /0,0,1/ \notin \tau$

9. τ:

	0	2	5	26
0	0	0	0	2
1	0	0	1	2
2	0	2	2	2

f:

	0	1	2
0	0	2	0
1			
2	0		0

$\mathcal{S} = \tau_{o2}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,2,0/$\notin \tau$

12. τ:

	0	1	5	13
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	2	1

f:

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	
2			

$\mathcal{S} = \tau_{o1}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,2/$\notin \tau$

23. τ:

	0	2	5	8	26
0	0	0	0	0	2
1	0	0	1	2	2
2	0	2	2	2	2

f:

	0	1	2
0	2	1	2
1			
2	2		2

$\mathcal{S} = \tau_{o2}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/2,1,2/$\notin \tau$

25.

τ:	2	5	14
0	0	0	1
1	0	1	1
2	2	2	2

f:	0	1	2
0	0	0	
1	0	0	
2			1

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,2/x/0,1,2/\not= /0,0,1/\notin \tau$

27.

τ :	0	2	5	13	14
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
2	0	2	2	1	2

f:	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	
2			

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,1/\notin \tau$

30.

τ :	0	1	2	5	13
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	1	2	2	1

f:	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	
2			

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/\notin \tau$

33.

τ:

	0	1	3	5	13
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	2	1

f:

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	
2			

$\varrho = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,2/ \notin \tau$

36.

τ:

	0	1	4	5	13
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	1	2	1

f:

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	
2			

$\varrho = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,2/ \notin \tau$

39.

τ:

	0	2	3	5	13
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	2	0	2	1

f:

	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	
2			

$\varrho = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,1/ \notin \tau$

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

45.

τ:

	0	1	5	12	13
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	2	0	1

f:

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,2/\notin \tau$

47.

τ:

	0	1	5	13	14
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	2	1	2

f:

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,2/\notin \tau$

50.

τ:

	0	1	2	4	5	13
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
2	0	1	2	1	2	1

f:

	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/\notin \tau$

58.

τ:

	0	1	2	3	5	13
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
2	0	1	2	0	2	1

f:

	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	
2			

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/\notin \tau$

61.

τ:

	0	1	3	4	5	13
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	2	1

f:

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	
2			

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,2/\notin \tau$

76.

τ:

	0	1	2	5	12	13
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
2	0	1	2	2	0	1

f:

	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	
2			

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/\notin \tau$

78.

τ:

	0	1	2	5	13	14
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
2	0	1	2	2	1	2

f:

	0	1	2
0	1	1	0
1	1	1	
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,0/\notin \tau$

80.

τ:

	0	1	3	5	12	13
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	0	2	0	1

f:

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,2/\notin \tau$

82.

τ:

	0	1	4	5	13	14
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	1	2	1	2

f:

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,2/\notin \tau$

85.

τ:

	0	1	2	3	4	5	13
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	1	2	0	1	2	1

f:

	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	
2			

$\varsigma = \tau_{o1}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/ \notin \tau$

91.

τ:

	0	2	3	5	12	13	14
0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	2	0	2	0	1	2

f:

	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	
2			

$\varsigma = \tau_{o1}$

$f//0,0,0/x/0,1,2/\neq/0,0,1/ \notin \tau$

5. Ötödik csoport

Sorszám: 16,19,20,41,43,44,52-54, 64, 67-75, 77, 87-90, 93-98, 102-107, 109-117, 119, 121-126, 129,130, 132, 135,136,139-143, 146, 147,

Kivételek: 137, 138

5.1. A fenti relációkból olyan kétváltozós ς relációkat származtattunk, amelyek mindegyikére teljesül, hogy $\{/a,a/, /a,b/, /b,a/, /b,b/\} \subseteq \varsigma$, ahol $a,b \in \underline{3}$, $a \neq b$.

Emiatt,ha f értéktáblázatában csak az a,b elemek fordulnak elő, akkor nyilvánvaló, hogy a ς elemeiből képzett párokon felvett függvényértékek is $\underline{2} = \{a,b\}$ -ba esnek, s igy f tiszteli ς -t. A táblázat kitöltését most is oly módon folytatjuk, hogy függvényünk a $\sigma = \tau$ relációt viszont ne tisztelje.

5.2.

16.

τ :

	5	7	13	26
0	0	0	1	2
1	1	2	1	2
2	2	1	1	2

f:

	0	1	2
0	1		
1			2
2		2	

$\varsigma = \tau_{12}$

$f//0,1,2/x/0,2,1//=/1,2,2/ \notin \tau$

19.

τ :

	0	4	5	9	13
0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
2	0	1	2	0	1

f:

	0	1	2
0	1	1	0
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,0/ \notin \tau$

20.

τ :

	0	4	5	9	13	26
0	0	0	0	1	1	2
1	0	1	1	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	1	0
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,0/ \notin \tau$

41.

τ:	4	5	7	8
0	0	0	0	0
1	1	1	2	2
2	1	2	1	2

f:	0	1	2
0	1		
1			2
2		2	

$\varsigma = \tau_{12}$

$f//0,1,2/x/0,2,1//=/1,2,2/ \notin \tau$

43.

τ:	4	5	7	8	13	26
0	0	0	0	0	1	2
1	1	1	2	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2

f:	0	1	2
0	1		
1			2
2		2	

$\varsigma = \tau_{12}$

$f//0,1,2/x/0,2,1//=/1,2,2/ \notin \tau$

44.

τ:	0	4	5	7	8	13	26
0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	1	1	2	2	1	2
2	0	1	2	1	2	1	2

f:

	0	1	2
0	1	2	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,2,1/\notin \tau$

52.

τ :

	2	5	8	18	24
0	0	0	0	2	2
1	0	1	2	0	2
2	2	2	2	0	0

f:

	0	1	2
0	0		
1			2
2			0

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,1,2/x/0,2,2//=/0,2,0/\notin \tau$

53.

τ :

	0	2	5	8	18	24	26
0	0	0	0	0	2	2	2
1	0	0	1	2	0	2	2
2	0	2	2	2	0	0	2

f:

	0	1	2
0	0	2	0
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,2,0/\notin \tau$

54.

τ :

	0	2	5	8	13	18	24	26
0	0	0	0	0	1	2	2	2
1	0	0	1	2	1	0	2	2
2	0	2	2	2	1	0	0	2

f:

	0	1	2
0	0	2	0
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,2,0/\notin \tau$

64.

τ :

	0	1	2	3	5	6	13	26
0	0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	1	2	1	2
2	0	1	2	0	2	0	1	2

f:

	0	1	2
0	0	1	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,1,1/\notin \tau$

67.

τ :

	0	2	3	5	10	13
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
2	0	2	0	2	1	1

f:

	0	1	2
0	0	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,1/\notin \tau$

68.

τ :

	0	2	3	5	10	13	26
0	0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	1	1	0	1	2
2	0	2	0	2	1	1	2

f:

	0	1	2
0	0	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,1/\notin \tau$

69.

τ:

	4	5	7	8	9	18
0	0	0	0	0	1	2
1	1	1	2	2	0	0
2	1	2	1	2	0	0

f:

	0	1	2
0	1		
1			1
2		1	

$\varsigma = \tau_{12}$

$f//0,1,2/x/0,2,1//=/1,1,1/\notin \tau$

70.

τ :

	0	4	5	7	8	9	13	18	26
0	0	0	0	0	0	1	1	2	2
1	0	1	1	2	2	0	1	0	2
2	0	1	2	1	2	0	1	0	2

f:

	0	1	2
0	0	1	0
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,1,0/\notin \tau$

71.

τ:

	5	7	14	16	23	25
0	0	0	1	1	2	2
1	1	2	1	2	1	2
2	2	1	2	1	2	1

f:	0	1	2
0	1		
1			2
2		2	

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,1,2/x/0,2,1/\!/=/1,2,2/ \notin \tau$

72.

τ:	5	7	13	14	16	23	25	26
0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	1	2	1	1	2	1	2	2
2	2	1	1	2	1	2	1	2

f:	0	1	2
0	1		
1			2
2		2	

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,1,2/x/0,2,1//=/1,2,2/ \notin \tau$

73.

τ:	0	5	7	13	14	16	23	25	26
0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	1	2	1	1	2	1	2	2
2	0	2	1	1	2	1	2	1	2

f:	0	1	2
0	1		
1			2
2		2	

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,1,2/x/0,2,1//=/1,2,2/ \notin \tau$

74.

τ:	5	7	13	17	22	26
0	0	0	1	1	2	2
1	1	2	1	2	1	2
2	2	1	1	2	1	2

f:	0	1	2
0	1		
1			2
2		1	

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,1,2/x/0,2,1//=/1,2,1/ \notin \tau$

75.

τ:	0	5	7	13	17	22	26
0	0	0	0	1	1	2	2
1	0	1	2	1	2	1	2
2	0	2	1	1	2	1	2

f:	0	1	2
0	1	2	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,2,1/$\notin \tau$

77.

τ:	0	1	2	5	12	13	26
0	0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	0	1	1	1	2
2	0	1	2	2	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	0	0
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,0/$\notin \tau$

87.

τ:	0	1	4	5	9	12	13
0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
2	0	1	1	2	0	0	1

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

88.

τ:	0	1	4	5	9	12	13	26
0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	1	1	0	1	1	2
2	0	1	1	2	0	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

89.

τ:	0	1	3	5	12	13	14
0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	0	2	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

90.

τ:	0	1	3	5	12	13	14	26
0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	1	1	1	1	1	2
2	0	1	0	2	0	1	2	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

93.

τ:	0	1	2	3	5	12	13
0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	1	2	0	2	0	1

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$S = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

94.

τ:	0	1	2	3	5	12	13	26
0	0	0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	0	1	1	1	1	2
2	0	1	2	0	2	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$S = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

95.

τ:	0	1	2	5	12	13	14
0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$S = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

96.

τ:

	0	1	2	5	12	13	14	26
0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	1	1	2
2	0	1	2	2	0	1	2	2

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2/\!/=/1,0,1/\notin \tau$

97.

τ:

	0	1	3	4	5	12	13
0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	2	0	1

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/\notin \tau$

98.

τ:

	0	1	3	4	5	12	13	26
0	0	0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	1	1	1	1	1	2
2	0	1	0	1	2	0	1	2

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/\notin \tau$

102.

τ:

	0	1	2	5	12	13	24	26
0	0	0	0	0	1	1	2	2
1	0	0	0	1	1	1	2	2
2	0	1	2	2	0	1	0	2

f:

	0	1	2
0	0	1	0
1			
2			

$S = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,1,0/$\notin \tau$

103.

τ:

	0	1	2	4	5	9	12	13
0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
2	0	1	2	1	2	0	0	1

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$S = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

104.

τ:

	0	1	2	4	5	9	12	13	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	0	1	1	2
2	0	1	2	1	2	0	0	1	2

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$S = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

105.

τ:

	0	4	5	9	13	14	25	26
0	0	0	0	1	1	1	2	2
1	0	1	1	0	1	1	2	2
2	0	1	2	0	1	2	1	2

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/\notin \tau$

106.

τ:

	0	1	2	3	5	10	12	13
0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
2	0	1	2	0	2	1	0	1

f:

	0	1	2
0	1	0	0
1			
2			

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,0/\notin \tau$

107.

τ:

	0	1	2	3	5	10	12	13	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	0	1	1	2
2	0	1	2	0	2	1	0	1	2

f:

	0	1	2
0	1	0	0
1			
2			

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,0/\notin \tau$

109.

τ:

	0	1	2	3	4	5	6	8	13	26
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	1	1	2	2	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	2	1	2

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/ $\notin \tau$

110.

τ:

	4	5	7	8	13	17	22	26
0	0	0	0	0	1	1	2	2
1	1	1	2	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2

f:

	0	1	2
0	1		
1			2
2		1	

$\varsigma = \tau_{12}$

f//0,1,2/x/0,2,1//=/1,2,1/ $\notin \tau$

111.

τ:

	0	4	5	7	8	13	17	22	26
0	0	0	0	0	0	1	1	2	2
1	0	1	1	2	2	1	2	1	2
2	0	1	2	1	2	1	2	1	2

f:

	0	1	2
0	1	2	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,2,1/ $\notin \tau$

112.

τ:

	0	1	2	3	5	12	13	14
0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	2	0	2	0	1	2

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\mathcal{S} = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

113.

τ:

	0	1	2	3	5	12	13	14	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	1	1	1	2
2	0	1	2	0	2	0	1	2	2

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\mathcal{S} = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

114.

τ:

	0	1	3	4	5	12	13	14
0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	2	0	1	2

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\mathcal{S} = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

115.

τ:

	0	1	3	4	5	12	13	14	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	1	1	1	1	1	1	2
2	0	1	0	1	2	0	1	2	2

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{12}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/$\notin \tau$

116.

τ:

	0	2	5	6	13	16	20	23	26
0	0	0	0	0	1	1	2	2	2
1	0	0	1	2	1	2	0	1	2
2	0	2	2	0	1	1	2	2	2

f:

	0	1	2
0	1	1	2
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/$\notin \tau$

117.

τ:

	0	1	3	4	5	9	10	12	13
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
2	0	1	0	1	2	0	1	0	1

f:

	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/$\notin \tau$

Az f függvény értéktáblázatát - az eddigiektől eltérően - nem a ϱ reláció elemeiben szereplő 0-val és 1-sel töltöttük ki, mivel τ tartalmaz minden olyan hármast, ami segitségükkel előállitható. Nyilvánvaló azonban, hogy f tiszteli ϱ -t.

119.

τ:	0	1	2	3	5	12	13	24	26
0	0	0	0	0	0	1	1	2	2
1	0	0	0	1	1	1	1	2	2
2	0	1	2	0	2	0	1	0	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varrho = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/ \notin \tau$

121.

τ:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	13	26
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	1	2

ϱ megalkotásához tekintsük először a következő két relációt:

$$\alpha = \tau_{01} = \{/0,0/,0,1/,/0,2/,/1,1/,/2,2/\}$$

$$\beta = \tau_{10} = \{/0,0,/1,0/,/2,0/,/1,1/,/2,2/\}$$

Képezzük a $\gamma = \alpha \times \beta$ négyváltozós relációt, s ennek elemei közül válasszuk ki azokat, amelyekben a második és a harmadik helyen azonos elemek állnak, azaz $\delta = \gamma^{e}_{\{1,2\},\{0\},\{3\}}$

Az igy nyert elem - 4-ések első és utolsó elemét véve nyerjük a keresett relációt. $\varrho = \delta_{0,3}$

$\mathcal{S}$:

0	0	0	1	1	0	0	2	2
0	1	1	1	1	2	2	2	2
0	1	1	1	1	2	2	2	2
0	0	1	0	1	0	2	0	2

$\mathcal{S} = \{/0,0/,/0,1/,/1,0/,/1,1/,/0,2/,/2,0/,/2,2/\}$

Ha ezek után f táblázatát csupa 0-val és 2-sel töltjük ki, akkor f természetesen tisztelni fogja $\mathcal{S}$ -t, ugyanakkor könnyen kimutatható, hogy nem tiszteli $\sigma = \tau$ -t.

f:

	0	1	2
0	2	0	0
1			
2			

$f//0,0,0/x/0,1,2// = /2,0,0/ \notin \tau$

122.

	0	1	2	4	5	9	12	13	14
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
2	0	1	2	1	2	0	0	1	2

τ :

f:

	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\mathcal{S} = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2// = /1,0,1/ \notin \tau$

123.

	0	1	2	4	5	9	12	13	14	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	2
2	0	1	2	1	2	0	0	1	2	2

τ :

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\mathcal{S} = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/ \notin \tau$

124.

τ:	0	1	2	3	4	5	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\mathcal{S} = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/ \notin \tau$

125.

τ:	0	1	2	3	4	5	12	13	14	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\mathcal{S} = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/ \notin \tau$

126.

τ:	0	4	5	9	13	16	17	22	23	26
0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
1	0	1	1	0	1	2	2	1	1	2
2	0	1	2	0	1	1	2	1	2	2

f:	0	1	2
0	1	1	2
1			
2			

$\mathcal{S} = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/ \notin \tau$

129.

τ:	0	1	4	5	9	12	13	14	25	26
0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
1	0	0	1	1	0	1	1	1	2	2
2	0	1	1	2	0	0	1	2	1	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{o1}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/ \notin \tau$

130.

τ:	0	1	2	3	4	5	9	10	12	13
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1

f:	0	1	2
0	1	0	2
1	0	0	
2			

$\varsigma = \tau_{o1}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,2/ \notin \tau$

Az f függvény keresésekor ugyanazon problémával találkoztunk, mint a 117. monoid esetében.

132.

τ:	0	2	3	5	6	8	10	13	20	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2
1	0	0	1	1	2	2	0	1	0	2
2	0	2	0	2	0	2	1	1	2	2

f:	0	1	2
0	0	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{o1}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,0,1/ \notin \tau$

135.

τ:

	0	5	7	13	14	16	17	22	23	25	26
0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	0	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2
2	0	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2

f:

	0	1	2
0	0	1	1
1			
2			

$\neq 0$

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,1,1/ \notin \tau$

Az f függvény keresésekor ismét azt a problémát kellett megoldanunk, mint a 117. monoid esetében.

136.

τ:

	0	4	5	7	8	9	13	17	18	22	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	1	1	2	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	1	2	0	1	2	0	1	2

f:

	0	1	2
0	1	1	2
1			
2			

$S = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,1,2/ \notin \tau$

139.

τ:

	0	1	3	5	10	12	13	14	16	23	25	26
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2
1	0	0	1	1	0	1	1	1	2	1	2	2
2	0	1	0	2	1	0	1	2	1	2	1	2

f:

	0	1	2
0	0	1	1
1			
2			

$S = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,1,1/ \notin \tau$

140.

τ:	0	1	2	3	5	6	10	12	13	20	24	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	0	0	1	1	2	0	1	1	0	2	2
2	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2	0	2

f:	0	1	2
0	1	0	0
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,0/ $\notin \tau$

141.

τ:	0	1	2	4	5	9	12	13	14	24	25	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	2	2	2
2	0	1	2	1	2	0	0	1	2	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	0	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,1/ $\notin \tau$

142.

τ:	0	2	3	5	6	8	10	13	18	20	24	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	2
1	0	0	1	1	2	2	0	1	0	0	2	2
2	0	2	0	2	0	2	1	1	0	2	0	2

f:	0	1	2
0	0	1	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,1,1/ $\notin \tau$

143.

τ:	0	1	2	3	4	5	12	13	14	24	25	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

A τ alaprelációból előállitott S reláció tartalmazza a $\{0,1\}$ x $\{0,1\}$ halmazt. S megalkotásának bonyolult volta miatt ezt részletezzük.

$\alpha = \tau \cap \tau_{2o1}$ $\qquad$ $\beta = \alpha \cap \alpha_{1o2}$

α:				
0	0	0	1	2
0	0	1	1	2
0	1	1	1	2

β:			
0	0	1	2
0	0	1	2
0	1	1	2

Tekintsük ezek után a $\gamma^e = \beta$ x β hatváltozós relációt, és válasszuk ki azon elem-6-osokat, amelyekben az első és a negyedik helyen azonos elemek állnak, azaz vegyük a

$$\delta = \gamma^e_{\{0,3\},\{1\},\{2\},\{4\},\{5\}}$$ relációt.

δ:						
0	0	0	0	1	2
0	0	0	0	1	2
0	0	1	1	1	2
0	0	0	0	1	2
0	0	0	0	1	2
0	1	0	1	1	2

Legyen $S = \delta_{25} = \{/0,0/,/0,1/,/1,0/,/1,1/, /2,2/\}$.

Definiáljuk az f függvényt a következő módon:

f:	0	1	2
0	1	0	0
1			
2			

Nyilvánvaló, hogy f tiszteli S -t, ugyanakkor $f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,0/\notin \tau$

146.

τ:	0	1	2	3	5	6	7	10	12	13	20	24	26
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	0	0	1	1	2	2	0	1	1	0	2	2
2	0	1	2	0	2	0	1	1	0	1	2	0	2

f:	0	1	2
0	0	1	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,1,1/\notin \tau$

147.

τ:	0	1	2	3	4	5	9	10	12	13	14	25	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	2	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	1	2

f:	0	1	2
0	1	2	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{02}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,2,1/\notin \tau$

5.3. Kivételek

A következő két monoid a ς reláció alapján e csoportba tartozik. Azonban mindkét monoid - azaz τ alapreláció - tartalmazza a 0,1 elemek segitségével előállitható összes hármast. Ezért az f függvényt másképp kellett megalkotnunk, mint eddig tettük.

137.

τ:	0	1	2	3	4	5	9	10	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1	2

f:	0	1	2
0	1	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\varphi = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,2/ \notin \tau$

A τ_{12} reláció tartalmazza az összes 0-val és 1-gyel kezdődő elempárokat. Függvényünk tisztelni fogja $\varphi = \tau_{12}$ -t, ha 2-vel kezdő elempárt nem állit elő a τ_{12} x τ_{12} halmazon. Ilyen viszont biztos nem lesz, mert ehhez 2-vel kezdődő elempárt is kellene τ_{12}-nek tartalmaznia.

138.

τ:	0	1	2	3	4	5	9	10	12	13	14	26
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	2

f:	0	1	2
0	1	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\varphi = \tau_{12}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/1,0,2/ \notin \tau$

A τ_{12} reláció itt bővült a/2,2/ elemmel. Ez azonban nem okoz problémát, mert azon elempárokon, amelyek előállitásában a/2,2/ résztvesz, a felvett függvényérték is 2.

6. Hatodik csoport

Sorszám: 15, 26, 42, 63, 65, 99, 1o8

6.1. Az alaprelációból származtatott kétváltozós reláció $\varrho = \{/a,\underline{3}/\}$ vagy $\varrho = \{/\underline{3},a/\}$ alaku $/a \in \underline{3}/$. Nyilvánvaló, hogy ha $f/a,a/= a$ teljesül, akkor f tiszteli ϱ -t. Az értéktáblázat kitöltését ugy folytatjuk, hogy ugyanakkor f ne tisztelje τ -t.

6.2.

15.

		0	5	7
	0	0	0	0
τ:	1	0	1	2
	2	0	2	1

		0	1	2
f:	0	0		
	1			1
	2		1	

$\varrho = \tau_{o1}$

$f//0,1,2/x/0,2,1//=/0,1,1/ \notin \tau$

26.

		2	5	14	26
	0	0	0	1	2
τ:	1	0	1	1	2
	2	2	2	2	2

		0	1	2
f:	0		1	
	1		0	
	2			2

$\varrho = \tau_{12}$

$f//0,1,2/x/1,1,2//=/1,0,2/ \notin \tau$

42.

τ :

	0	4	5	7	8
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	2	2
2	0	1	2	1	2

f:

	0	1	2
0	0	0	2
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2/=/0,0,2/ \notin \tau$

63.

τ :

	0	1	2	3	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	2
2	0	1	2	0	2	0

f:

	0	1	2
0	0	2	2
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,2,2/ \notin \tau$

65.

τ :

	0	1	2	4	5	8
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	2
2	0	1	2	1	2	2

f:

	0	1	2
0	0	2	0
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,2,0/ \notin \tau$

99.

τ:	0	1	2	3	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	2	2
2	0	1	2	0	2	0	1

f:	0	1	2
0	0	1	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,1,1/ \notin \tau$

108.

τ:	0	1	2	3	4	5	6	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	2	2
2	0	1	2	0	1	2	0	2

f:	0	1	2
0	0	2	1
1			
2			

$\varsigma = \tau_{01}$

$f//0,0,0/x/0,1,2//=/0,2,1/ \notin \tau$

7. Hetedik csoport

Sorszám: 145, 150, 153, 154, 159, 149, 152, 156, 157

7.1. Ezen csoportba tartozó relációk elemháramasaiból az I. fejezetben megadott relációmüveletek segitségével előállitjuk a 3 halmaz összes nempermutációinak halmazát, ill. annak valódi részhalmazát. Ezt jelöljük most ς -val. Ezek után keresünk egy megfelelő f függvényt, ami ς -t tiszteli, de

τ-t nem. Ez az esetek többségében a $\underline{3}$ halmaz egy permutációja.

Az eddigi gyakorlatnak megfelelően felirjuk a ς reláció előállitásának módját. Mivel ez bonyolultabb, mint a korábbiakban volt, ezért többnyire megadjuk a ς előállitásában szereplő relációknak, valamint ς -nak az elemeit, ha ez utóbbi különbözik az összes nempermutációk halmazától. Természetesen definiáljuk a szükséges f függvényt, és rámutatunk arra, hogy az adott reláció mely elemeinek segitségével cáfolható a relációklón minimális volta.

7.2. A következő relációk elemhármasaiban az $/i_1,\ldots i_\ell/$- vetités segitségével permutáljuk a 0,1,2 jegyeket, és az igy nyert relációnak vesszük a τ alaprelációval való metszetét. Ez lesz a keresett ς reláció.

145.

	0	4	5	7	8	13	14	16	17	22	23	25	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
τ: 1	0	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
2	0	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

$$\varsigma = \tau_{1o2} \cap \tau$$

ς :	0	1	1	1	1	2	2	2	2
	0	1	1	2	2	1	1	2	2
	0	1	2	1	2	1	2	1	2

f:	0	1	2	
0	1			$\neq 0$
1		0	0	
2		0	0	

Függvényünk nyilván tiszteli $\mathcal{S}$-t, hiszen a csak 1-et vagy 2-t tartalmazó hármasok segitségével előállitott párokon a függvényérték mindig 0, és $/0,0,0/\in\mathcal{S}$. Ha a hármasok közül legalább az egyik a /0,0,0/, akkor a függvényérték 1 vagy 2. E két jegy segitségével előállitható hármasok mindegyikét tartalmazza $\mathcal{S}$.
Ugyanakkor $f//0,1,2/x/0,2,1//=/1,0,0/\notin\tau$.

150.

τ:	0	1	3	4	5	9	10	12	13	14	16	17
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	2	2
2	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2	1	2

	22	23	25	26
0	2	2	2	2
1	1	1	2	2
2	1	2	1	2

$\mathcal{S} = \tau_{1o2} \cap \tau$

$\mathcal{S}$:														
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
0	0	1	1	0	0	1	1	1	2	2	1	1	2	2
0	1	0	1	0	1	0	1	2	1	2	1	2	1	2

f:	
0	2
1	1
2	0

$f/0,1,2/=/2,1,0/\notin\tau$

153.

τ:	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	13	14	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2	1

	17	18	2o	22	23	24	25	26
0	1	2	2	2	2	2	2	2
1	2	0	0	1	1	2	2	2
2	2	0	2	1	2	0	1	2

f:	0	0
	1	2
	2	1

$\varrho = \tau_{1o2} \cap \tau \; /= \tau \setminus \{/0,1,2/\}$, azaz az összes nempermutációk. f tiszteli ϱ -t, hiszen nempermutációból nempermutációt csinál, s ϱ az összes ilyen hármast tartalmazza. Ugyanakkor $f/0,1,2/=/0,2,1/ \notin \tau$.

A következő két esetben is az összes nempermutációkat fogjuk előállitani a τ alaprelációból. Az előzőek alapján az ilyen tipusu relációkat a permutációk tisztelik.

154.

τ:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	1	1	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	1	2

	16	17	18	20	22	23	24	25	26
0	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	0	0	1	1	2	2	2
2	1	2	0	2	1	2	0	1	2

$\varrho = \tau_{1o2} \cap \tau$

f:	0	1
	1	0
	2	2

$f/0,1,2/=/1,0,2/ \notin \tau$

159.

τ:

	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2	0

	16	17	18	19	20	22	23	24	25	26
0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	0	0	0	1	1	2	2	2
2	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2

$\varsigma = \tau_{1o2} \cap \tau$

f:

0	0
1	2
2	1

$f/0,1,2/=/0,2,1/ \notin \tau$

7.3. A következő esetekben a relációk szorzását, az $\mathcal{E}$-átlósitást, esetenként a relációk metszetének képzését használjuk fel ς előállitásához.

149.

τ:

	0	1	2	3	5	6	10	12	13	14	16	20	23
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2
1	0	0	0	1	1	2	0	1	1	1	2	0	1
2	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2	1	2	2

	24	25	26
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

Tekintsük az $\alpha = \tau \times \tau_{21o}$ hatváltozós relációt, és vegyük a $\{2,3\}, \{1,4\}, \{0\}, \{5\}$ osztályok szerinti osztályozását.

$\beta = \alpha_{\{2,3\},\{1,4\},\{0\},\{5\}}$.

$\mathcal{B}$ elemei olyan elem-6-osok, amelyekben a második, ötödik és harmadik, negyedik helyen álló elemek megegyeznek.

$\mathcal{B}$:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	1	2	2	0	0	2	2	2	0	0	1	1	0	0	1	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	0	0	1
0	1	1	2	2	0	0	2	2	2	0	0	1	1	0	0	1	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	1	0	2	0	1	0	1	2	0	2	0	1	0	1	1	0	1	2	1	2	0	2	0	1	2	0	2	1

$\gamma = \mathcal{B}_{o25}$

γ :

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	2	2	0	2	0	1	1	0	0	2	2	2	1	2	2	2	0	0	1	1	2	2	2	2	0	0	1
0	0	1	0	2	1	1	2	0	1	0	1	0	1	2	2	0	2	1	0	2	1	2	0	2	1	2	0	2	1

$\varsigma = \gamma \cap \tau$

ς :

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	0	0	1	1	0	2	1	2	2	0	1	2	0	1	2	2	0	2	1	0	2	1	2	0	1	2	2
0	0	0	1	2	0	1	1	1	2	0	1	2	2	2	0	1	2	2	1	2	2	1	2	2	0	1	2	2	2

Könnyen ellenőrizhető, hogy a következő függvény tiszteli ς -t:

f:	
0	1
1	0
2	2

Ugyanakkor $f/0,1,2/ = /1,0,2/ \notin \tau$.

152.

τ :

	0	1	2	3	5	6	7	10	12	13	14	16	20
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2
1	0	0	0	1	1	2	2	0	1	1	1	2	0
2	0	1	2	0	2	0	1	1	0	1	2	1	2

	23	24	25	26
0	2	2	2	2
1	1	2	2	2
2	2	0	1	2

A megoldás hasonló a 149. monoidnál látottakhoz.

$\alpha = \tau_x \tau_{210}$. Tekintsük ismét a $\beta = \alpha_{\{2,3\},\{1,4\},\{0\},\{5\}}$ relációt.

β :

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2
0	1	1	2	2	0	0	2	2	2	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	2	2	2	1	1	1
0	1	1	2	2	0	0	2	2	2	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	2	2	2	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2
0	0	1	0	2	0	1	0	1	2	0	2	0	1	2	0	1	0	1	1	0	1	2	0	1	2

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	0	0	1	1	1	2
2	2	2	2	2	0	0	1	1	1	2
0	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
0	2	0	1	2	0	2	0	1	2	2

$\gamma^e = \beta \circ 25$

γ^e :

0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	2	2	0	2	0	1	1	1	0	0	2	2	2	1	2	2	2	0	0	1	1	1
0	0	1	0	2	1	1	2	2	0	1	0	1	0	1	2	2	0	2	1	0	2	0	1	2

$\delta = \gamma^e_{102}$. Legyen $\varsigma = \delta \cap \tau$.

ς :

0	1	2	0	0	1	1	0	2	1	2	2	2	0	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
0	1	2	1	2	0	1	0	2	2	0	2	1	0	1

Sikerült előállitani ugyanazt a ς relációt, mint a 149. monoid esetében. Az ott definiált f függvény ismét megfelelő lesz, hiszen ς -t tiszteli, de $f/0,1,2/=/1,0,2/ \notin \tau$.

156.

τ :

	0	5	13	15	19	26
0	0	0	1	1	2	2
1	0	1	1	2	0	2
2	0	2	1	0	1	2

Tekintsük az $\alpha = \tau \times \tau \times \tau$ kilencváltozós relációt, s vegyük ennek a $\{0,3,6\}, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{7\}, \{8\}$ osztályok szerinti osztályozását.

$$\beta = \alpha_{\{0,3,6\},\{1\},\{2\},\{4\},\{5\},\{7\},\{8\}}.$$

Ezzel lényegében azokat az elem-9-eseket választjuk ki, amelyekben az első, negyedik, hetedik helyen a 3 halmaz azonos elemei állnak. Alkossunk ebből egy háromváltozós relációt a következőképpen: $\varsigma = \beta_{258}$. Tömören:

$$\varsigma = \left[(\tau \times \tau \times \tau)_{\{0,3,6\},\{1\},\{2\},\{4\},\{5\},\{7\},\{8\}}\right]_{258}.$$

	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	0	2	0	0	0
	0	0	0	2	0	2	2	2	1	1	1	0	1	0	1	0	2	2	2	1	2	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
:	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	0	2	0	2	0	0
	0	0	2	0	2	0	2	2	1	1	0	1	0	1	0	0	2	2	1	2	1	2	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	0	1	0	0	1	1	0	1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	0	2	2	0	0	2	0
	0	2	0	0	2	2	0	2	1	0	1	1	0	0	0	0	2	1	2	2	1	1	2	1

Ellenőrizhető, hogy $\varsigma = \beta_{258}$ éppen az összes nempermutációk halmaza.

Tekintsük a következő f függvényt:

f:	0	1
	1	0
	2	2

f tiszteli ς -t, de $f/0,1,2/ = /1,0,2/ \notin \tau$.

157.

τ:	5	7	11	15	19	21
0	0	0	1	1	2	2
1	1	2	0	2	0	1
2	2	1	2	0	1	0

A megfelelő relációt ez esetben is a

$$\varsigma = [(\tau x\ \tau\ x\ ^{\tau})_{\{0,\ 3,6\},\ \{1\},\{2\},\{4\},\{5\},\{7\},\{8\},]}\ _{258}$$

egyenlőség definiálja. Könnyen ellenőrizhető, hogy ismét az összes nempermutációkat kapjuk. Ebből következik, ha f értéktáblázatát csak két elem - pl. 1 és 2 - felhasználásával töltjük ki, akkor f tisztelni fogja ς -t. Ugyanakkor nyilván nem tiszteli τ-t, hiszen annak elemei 3 permutációi.

8. Egyedi eset

Itt tárgyaljuk a kimaradt egy monoidot, amely a reláció származtatása, és az f függvény megalkotása szempontjából az előző csoportok egyikébe sem sorolható be.

18.

τ:	4	5	9
0	0	0	1
1	1	1	0
2	1	2	0

$\varsigma = \tau_{01}$

$\sigma = \tau$

f:	0	1	2
0	0	0	
1	1	1	0
2			

Könnyen ellenőrizhető, hogy f tiszteli ς -t. Ellenben $f//0,1,1/x/0,1,2//=/0,1,0/ \notin \tau$

ÖSSZEFOGLALÁS

Az előző fejezetben sikerült igazolnunk, hogy a 3 halmaz 160 monoidja közül csak a feltüntett 8 monoid lehet valamely maximális klón talpa, s ezzel igazoltuk Jablonszkij tételében álló feltétel szükségességét.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Sz.V. Jablonszkij: Funkcionalnije posztroenyija b b k-znacsnoj logike, Trudi Mat.Inszt. im. Sztyeklova, 51 /1958/, 5-142.

Székely Zoltán: Komüveletek klónjai a 3 elemü halmazon. Diplomamunka. JATE, 1983.