

STEINER TIBOR

Konstans görbületű szakaszosan
kúpos felületek

Egyetemi doktori értekezés

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
BOLYAI INTÉZET

1986.



KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetemet fejezem ki dr. Nagy Péternek,
a JATE TTK Geometria Tanszék vezetőjének és
az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Inté-
zetének a dolgozat elkészítéséhez nyújtott
értékes támogatásukért.

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS
2. A GÖRBÜLET
3. KONSTANS GÖRBÜLETŰ SZAKASZOSAN KÚPOS FORGÁSFELÜLETEK
4. GEODETIKUSOK

IRODALOMJEGYZÉK

MELLÉKLETEK

1. fejezet

BEVEZETÉS

A matematika már évszázadok óta használja a differenciálható függvényeket és a differenciálegyenleteket a valóság modellezésére. Ennek az elméletnek az alkalmazása a geometriai alakzatok /görbék, felületek/ leírására a differenciálgeometria.

A differenciálgeometriának a valóságra való alkalmazásánál derült ki, hogy a jelenségek nagy része jobban leírható diszkrét valóságmodellekkel. Sok esetben a többszöri differenciálhatóság csak a könnyű kezelhetőséget biztosítja, de ilyen jellegű tulajdonság létezése nem feltétlenül következik a vizsgált jelenségből. Ugyanakkor a digitális számítógépek megjelenése nagy segítséget jelentett a valóság diszkrét leírásában. Ezért az alkalmazások szempontjából nagy jelentőségű a diszkrét és a szakaszonként differenciálható függvények, valamint a differenciálegyenletek elméletének és módszerének a kiépítése.

A differenciageometria programját R. Sauer /1/ fogalmazta meg és alkalmazta a felületelmélet különböző kérdéseire. Bevezette a görbék és felületek véges sok ponttal való közelítéseit és az így kapott egyszerű felületek tulaj-

donságait vizsgálva jutott a klasszikus differenciálgeometriában elért eredményekhez hasonlókra.

Jelen dolgozatban a differenciageometria módszereit és a differenciaegyenleteket használjuk a klasszikus differenciálgeometria fontos kérdéseinek, így a forgásfelületek, rajtuk haladó geodetikusok és a konstans görbületű forgásfelületek differenciageometriai tárgyalására. Felhasználjuk Sauer fogalmait, módszereit, valamint Alekszandrov /2/ általános felületelméletének ide vonatkozó részeit.

Bár a dolgozat témája a klasszikus differenciálgeometria gyakran vizsgált tételeiből ered, ez nem jelenti feltétlenül, hogy a kapott eredményeknek is a klasszikus esethez hasonlónak kell lenniük. Abból a célból, hogy a dolgozat nagyobb elmélyülést tudjon nyújtani, megemlít néhány ide vonatkozó tulajdonságot a differenciálható felületek elméletéből.

A számítógépek elterjedése nagy mértékben megváltoztatta a matematika arculatát. A matematika új ágai jelentek meg, úgy mint programozáselmélet, vagy valamely ága új lendületet vett fejlődésében, mint pl. a numerikus matematika. A számítógépeknek - mint tudjuk - egyik legfőbb előnye az iterációban van, azaz abban a képességben, hogy valamely műveletet gyorsan képes sokszor megismételni.

Iterációra pedig a matematika sok ágában szükség van, gondoljunk csak olyan alapvető dolgokra, mint a differenciálegyenletek numerikus megoldása. Tehát egy feladatot akkor is jól definiáltnak és vizsgálatra érettnak tekinthetünk, ha a feladatnak nem ismerjük az egzakt megoldását /esetleg azért, mert ilyen nem is létezik/, de tudunk iteratív megoldást javasolni. Ebből például az is következik, hogy ha egy differenciaegyenletet nem tudunk zárt alakú képlettel megoldani, esetleg megoldhatjuk iteratív úton, mondjuk, számítógéppel. Az így kapott megoldást pedig teljes értékűnek kell tekintenünk - különösen a gyakorlati alkalmazások során.

A dolgozat a szakaszosan kúpos felületek osztályát vizsgálja.

Az (x,y) sík valamely $c(s) = (x(s), y(s))$ sima görbéjét az y tengely körül forgatva a térben forgásfelülethez jutunk, amelynek K görbületére a felületelméletből jól ismert

$$K = -y''/y$$

érvényes.

Tekintsünk most a sima görbe helyett egy megfelelő töröttvonalat, amely azonos h hosszúságú szakaszokból épül

fel és amelynek nincs közös pontja forgástengellyel. Ezt megforgatva olyan csonka kúpokból felépülő felületet kapunk, amelyik a körélek mentén megtörik /szakaszosan kúpos forgásfelület/. A felület görbülete a körélekre koncentrálódik. A forgást úgy is el lehet végezni, hogy a profiltöröttvonalat rendre $2\pi/n$, ..., $k \cdot 2\pi/n$, 2π szögekkel forgatjuk el $/n$ természetes szám/. Ilyenkor az elforgatott töréspontok poliédrikus szakaszosan kúpos forgásfelületet határoznak meg, melynek görbülete a csucspontokba koncentrálódik.

Egy szakaszosan kúpos forgásfelület konstans görbületű, ha tetszőleges köréle görbületének és hosszának aránya állandó. A felület alapegyenlete lineáris másodrendű differenciaegyenlet, melyet megoldhatunk akár a differenciaegyenletek általános elmélete szerint /3/, vagy ettől eltérő, közvetlen uton is.

Egy poliédrikus szakaszosan kúpos felületet konstans görbületűnek hívunk, ha egyetlen profiltöröttvonal-él elforgatásával adódó szabályos sokszög görbületösszegének és a szabályos sokszög közelítő területének az aránya állandó. A felület alapegyenlete nemlineáris másodrendű differenciaegyenlet, amelyet iteratív uton lehet megoldani.

Egy konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelület jellemző tulajdonsága annak konvexitása ill. konkavi-



tása, amely szoros összefüggést mutat annak görbületével. A felületnek három típusa lehet a klasszikus esethez hasonlóan: elliptikus, parabolikus vagy hiperbolikus.

Végül megvizsgáljuk a geodetikusok viselkedését szakaszosan kúpos forgásfelületen. Pozitív görbületű felület esetén az "egyenlítőt" metsző geodetikus a "szélességi kör"-öket egyre kisebb szög alatt metszi, és az egész geodetikus benne van két, az egyenlítőt is tartalmazó kör közötti felületrészben. Negatív görbületű felület esetén ilyen állítás nem érvényes.

2. fejezet

A GÖRBÜLET

Az (x,y) sík valamely $c(s) = (x(s), y(s))$ sima
- ivhossz szerint paraméterezett - görbét az y tengely
körül megforgatva a térben olyan forgásfelületet kapunk
/1. ábra/, amelynek K görbületére a

$$K = -y''/y$$

formula adódik. Konstans K görbület esetén az $y'' + Ky = 0$
differenciálegyenlet általános megoldásai:

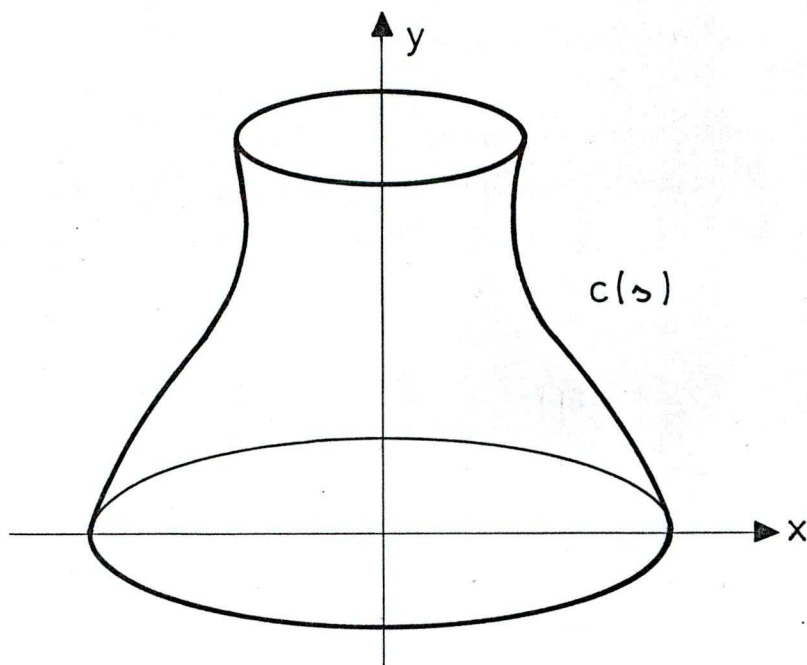
$$y(s) = c_1 \cos(\sqrt{K} s) + c_2 \sin(\sqrt{K} s), \quad \text{ha } K > 0$$

$$y(s) = c_1 s + c_2, \quad \text{ha } K = 0$$

$$y(s) = c_1 e^{\sqrt{-K} s} + c_2 e^{-\sqrt{-K} s}, \quad \text{ha } K < 0$$

c_1, c_2 konstansok

Ezzel előállítottuk a konstans görbületű forgásfelületet.



1. ábra

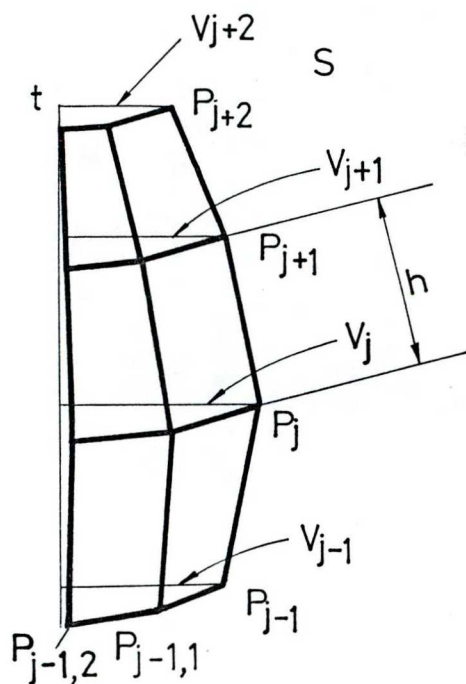
Sima forgásfelület helyett tekinthetünk azonban olyan forgásfelületet, amely csonka kúppalástokból áll és a határoló körök mentén megtörik, vagy olyan felületet, amelynél a forgási köröket szabályos sokszögekkel helyettesítjük. Így jutunk el a szakaszosan kúpos forgásfelület és a poliédrikus szakaszosan kúpos felület fogalmához.

Legyen adott egy $h > 0$ szám és a tér egy S síkjában

egy t egyenes. Tekintsünk továbbá egy v_j pozitív valós számsorozatot. Legyen P_0 az S síknek egy t -től v_0 távolságra lévő pontja, valamint P_j olyan pont S -en, amelynek távolsága t -től v_j , P_{j-1} -től pedig h . Továbbá a P_j pontok vetületei t -n monoton pontsorozatot alkotnak.

Definíció: A $\dots P_{-j} \dots P_{-1} P_0 P_1 \dots P_j \dots$ töröttvonalat forgassuk el t körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel. $/n$ pozitív egész szám/ Így a P_j pontok $P_{j0}, P_{j1}, \dots, P_{jn} /P_{j0} \equiv P_0 \equiv P_{jn}/$ elforgatottjait kapjuk. A $P_{jk} P_{j+1,k} P_{j+1}, P_{j,k+1}$ egyenlő szárú trapézok rendszerét poliédrikus szakaszosan kúpos felületnek nevezzük /2. ábra/.

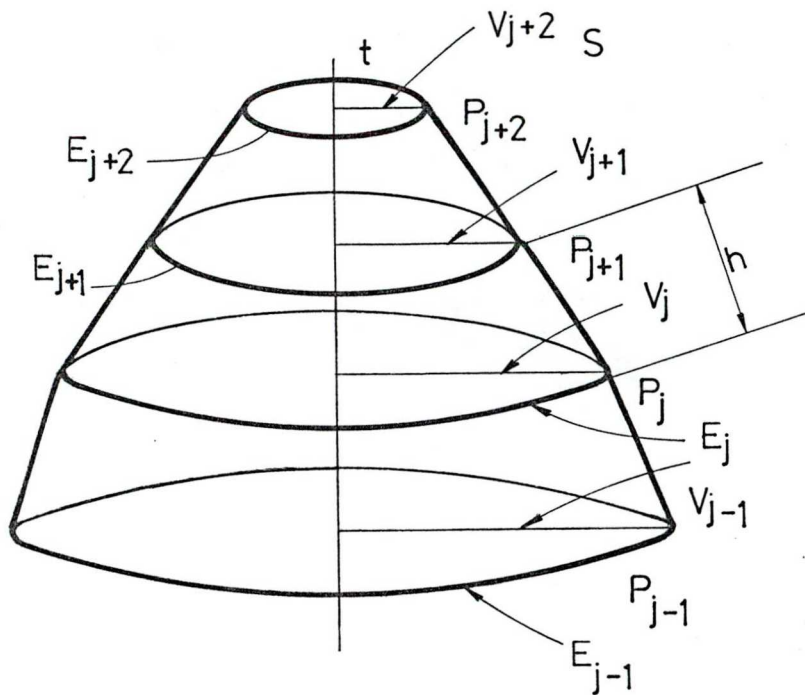
A $\dots P_{-j} \dots P_{-1} P_0 P_1 \dots P_j \dots$ töröttvonalat elforgatjuk t körül 2π -vel. A P_j és P_{j+1} pontok által leírt E_j és E_{j+1} körök által meghatározott csonka kúppalástok rendszerét szakaszosan kúpos forgásfelületnek nevezzük /3. ábra/.



2. ábra

Megjegyezzük, hogy a poliédrikus szakaszosan kúpos forgás felületeket az irodalomban szokás forgáspoliédernek is nevezni.

$t-t$ forgástengelynek, a $\dots P_{j-1} P_j P_{j+1} \dots$ töröttvonalat és annak elforgatottjait profiltöröttvonalnak hívjuk.

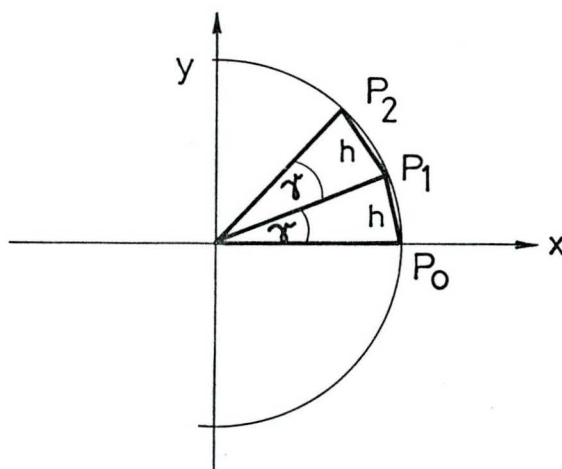


3. ábra

Példa: Legyen a $P_0 P_1 \dots$ töröttvonal olyan, hogy a $P_0, P_1 \dots$ pontok egyetlen egyenesre illeszkednek. Ekkor az a szakaszosan kúpos forgásfelület, amelynek $P_0 P_1 \dots$ a profiltöröttvonala, forgáshenger /ha a $P_0 P_1$ párhuzamos a forgástengellyel/, vagy forgáskúp /ha $P_0 P_1$ nem párhuzamos a forgástengellyel/. Az a poliédrikus szakaszosan kúpos felület, amelynek $P_0 P_1 \dots$ a profiltöröttvonala, hasáb

/ha P_0P_1 párhuzamos a forgástengellyel/ vagy gúla /ha P_0P_1 nem párhuzamos a forgástengellyel/. Mivel a profiltöröttvonalnak teljes egészében a forgástengely egyik oldalán kell elhelyezkednie, ezért a forgáshenger és a hasáb mindkét irányban végtelen, a forgáskúp és a gúla egyik irányban végtelen, másik irányban a profiltöröttvonal a forgástengely metszéspontjáig folytatható.

Példa: Vegyünk az x, y síkban egy origó középpontú körbe irt egyenlő h hosszúságú szakaszokból álló töröttvonalat, amelynek szakaszai a középponttól γ szög alatt látszanak:



Ekkor a P_{j+1} pont y -től való v_{j+1} távolsága és a P_{j-1} pont v_{j-1} távolsága között a

$$v_{j+1} + v_{j-1} = 2v_j \cos \gamma$$

összefüggés áll fenn, mert

$$\cos (j+1)\gamma + \cos (j-1)\gamma = 2 \cos j\gamma \cos \gamma .$$

Az ábra alapján

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{h}{2v_0} \quad \text{és így} \quad \cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{h^2}{2v_0^2} ,$$

ezért

$$v_{j+1} = 2 \left(1 - \frac{h^2}{2v_0^2} \right) v_j - v_{j-1} .$$

Ha a $P_0 P_1 \dots$ töröttvonalat y körül megforgatjuk, akkor olyan szakaszosan kúpos forgásfelületet /jelöljük ezt G_1 -gyel/ ill. olyan poliédrikus szakaszosan kúpos felületet /jelöljük H_1 -gyel/ kapunk, amelynek v_j forgási sugarára érvényesek az alábbi összefüggések:

$$v_1 = \left(1 - \frac{h^2}{2v_c^2}\right) v_0$$

.

.

.

$$v_j = 2 \left(1 - \frac{h^2}{2v_c^2}\right) v_{j-1} - v_{j-2}$$

Azaz v_j nem más, mint a $T_j(x)$ Csebisev-polinom az $x = 1 - \frac{h^2}{2v_c^2}$ helyen.

Mint a 2. ábrából látható, egy poliédrikus szakaszon kúpos felület csonka kúppalástokból áll. Így a felület szinguláris pontjai a $\dots P_{j-1} P_j P_{j+1}$ töröttvonalra és elforgatottjaira illeszkedő $P_{j0}, P_{j1}, \dots P_{jn}$ pontok. Ezek közül számunkra a P_j pontok azon P_{jk} elforgatottjai érdekesek, amelyekre igaz, hogy a P_{jk} -ban találkozó trapézok szögeinek összege 2π -től eltér, így pontosan ezeknek a pontoknak a görbülete különbözik zérustól.

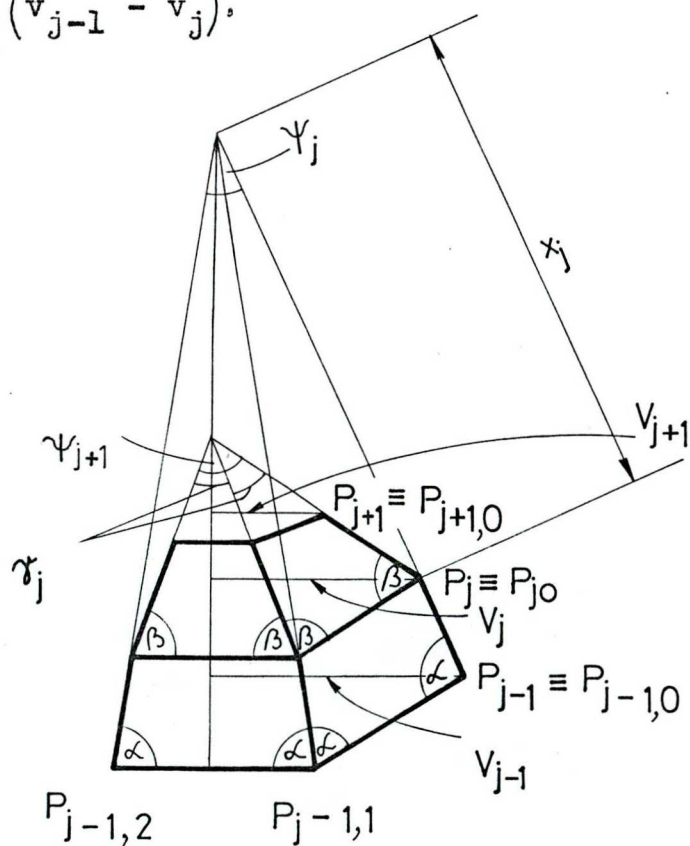
A 3. ábrából látható, hogy egy szakaszosan kúpos forgásfelület csonka kúppalástokból áll. Szinguláris vonalai a P_j pontok forgatásával keletkező E_j körök, amelyeknek görbületösszege különbözik zérustól.

Szemlélet alapján is világos, hogy egy felületet meghatároz $\dots P_0, \dots, P_j, \dots$ pontok $\dots v_0, \dots, v_j, \dots$ forgási sugara, valamint a $P_0 P_1 = \dots = P_j P_{j+1} = h$ távolság

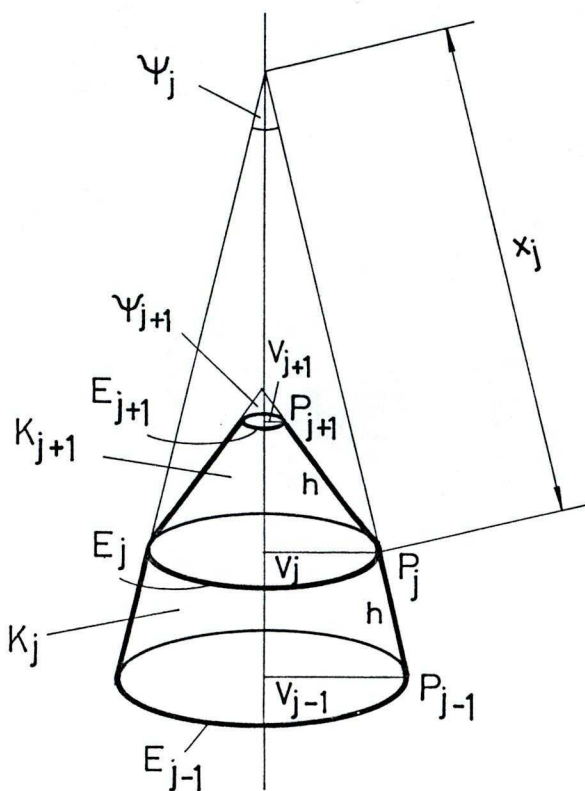
Igy értelmes feladat annak megvizsgálása, hogyan függ a szinguláris pontok ill. görbék görbülete a felületet meghatározó paraméterektől. A görbület meghatározása során elemi módszereket használunk csupán.

Jelölje ψ_j ill. ψ_{j+1} egy poliédrikus szakaszosan kúpos felület két egymás után következő csonka gúlájának előjeles nyílásszögét /4. ábra/, azaz

$$\text{sgn } \psi_j = \text{sgn } (v_{j-1} - v_j),$$



4. ábra



4. ábra

Az ábráról látszik az ott alkalmazott jelölésekkel, hogy

$$K(P_j) = 2\pi - (2\beta + 2(\pi - \alpha)) = 2\alpha - 2\beta = (\psi_{j+1} - \psi_j) / n,$$

ahonnan az

$$nK(P_j) = \psi_{j+1} - \psi_j$$

összefüggés áll fenn a P_j pont $\kappa(P_j)$ görbületére.

Hasonló gondolatmenetet alkalmazhatunk szakaszosan kúpos forgásfelület esetén is. Ha Ψ_j ill. Ψ_{j+1} jelöli egy szakaszosan kúpos forgásfelület két egymás utáni csonka kúpjának nyílásszögét úgy, hogy

$$\operatorname{sgn} \Psi_j = \operatorname{sgn} (v_{j-1} - v_j),$$

akkor a 4. ábráról láthajuk, hogy az E_j kör $\kappa(E_j)$ görbülete nem más, mint a K_{j+1} ill. a K_j kúpok gömbi képei felszínének, Ψ_{j+1} -nek ill. Ψ_j -nek a különbsége:

$$\kappa(E_j) = \Psi_{j+1} - \Psi_j$$

Mindkét felületosztályra igaz tehát, hogy a P_j pont forgatásával adódó alakzat $/P_{j0}, P_{j1}, \dots, P_{jn}$ töröttvonal ill. E_j kör/ görbületösszege az alakzat mentén találkozókét kúp nyílásszögének a különbsége. Érvényes tehát az alábbi tétel.

Tétel: Poliédrikus szakaszosan kúpos felület tetszőleges csúcspontjának görbülete egyenlő a csúcspontban találkozókét csonka gúla nyílásszögekülönbségének n -ed részével:

$$\kappa(P_j) = (\Psi_{j+1} - \Psi_j) / n,$$

ahol n a poliedrikus szakaszosan kúpos felület profiltöröttvonalainak a száma.

Szakaszosan kúpos forgásfelület tetszőleges szinguláris vonalának görbülete egyenlő a vonal mentén találkozó két kúp nyílásszögének a különbségével:

$$\kappa(E_j) = (\psi_{j+1} - \psi_j) / n.$$

A fenti tétel a nem zérus görbülettel rendelkező alakzatok görbületét a felületet alkotó kúpok nyílásszögével fejezi ki. A kúpok nyílásszöge azonban meghatározható a v_j forgási sugarakkal és a h távolsággal.

Jelölje az 5. ábrán T_j a $P_{j-1} P_j$ egyenesnek t -vel való metszéspontját. Ekkor

$$\frac{v_{j-1} - v_j}{h} = \frac{v_j}{x_j},$$

ahol

$$\operatorname{sgn}(v_{j-1} - v_j) = \operatorname{sgn} x_j.$$

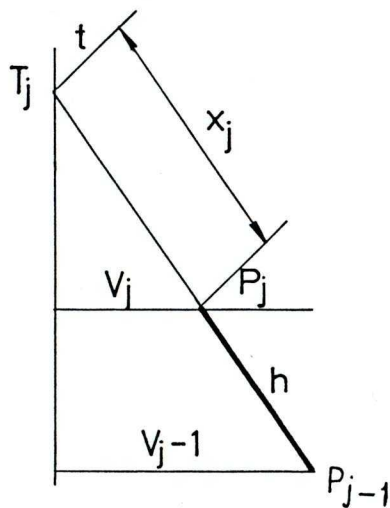
Innen

$$\frac{1}{x_j} = \frac{v_{j-1} - v_j}{hv_j} \quad \text{és}$$

/*/

$$\frac{1}{x_j + h} = \frac{v_{j-1} - v_j}{hv_{j-1}} .$$

/**/



5. ábra

A 4. ábrán alkalmazott jelölésekkel

$$\overline{P_{j0} P_{j1}} = 2 \cdot v_j \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2 x_j \sin \frac{\gamma_j}{2} = 2 (x_{j+1} + h) \sin \frac{\gamma_{j+1}}{2}$$

Innen

$$\psi_j = n \varphi_j = 2 n \arcsin \left(\frac{v_j}{x_j} \sin \frac{\pi}{n} \right) = 2 n \arcsin \left(\frac{v_j}{x_{j+1}+h} \sin \frac{\pi}{n} \right)$$

azaz

$$K(P_{jk}) = \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{n} = 2 \arcsin \left(\frac{v_j}{x_{j+1}+h} \sin \frac{\pi}{n} \right) -$$

$$- 2 \arcsin \left(\frac{v_j}{x_j} \sin \frac{\pi}{n} \right).$$

/*/ és **/ alapján kapjuk:

$$K(P_{jk}) = 2 \arcsin \left(\frac{v_j - v_{j+1}}{h} \sin \frac{\pi}{n} \right) -$$

$$- 2 \arcsin \left(\frac{v_{j-1} - v_j}{h} \sin \frac{\pi}{n} \right).$$

Szakaszosan kúpos forgásfelületre a fentihez hasonló gondolatmenet során

$$\psi_{j+1} - \psi_j = \frac{2\pi v_j}{x_{j+1}+h} - \frac{2\pi v_j}{x_j}$$

adódik, innen pedig



$$\begin{aligned} \kappa(E_j) &= \psi_{j+1} - \psi_j = 2\pi \frac{v_j - v_{j+1}}{h} - 2\pi \frac{v_{j-1} - v_j}{h} = \\ &= -2\pi \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h} \end{aligned}$$

áll elő. Így bebizonyítottuk az alábbi tételt:

Tétel: Poliédrikus szakaszosan kúpos felület P_j csúcspontjának $\kappa(P_j)$ görbületét a

$$\begin{aligned} \kappa(P_j) &= 2 \arcsin \left(\frac{v_j - v_{j+1}}{h} \sin \frac{\pi}{n} \right) - \\ &- 2 \arcsin \left(\frac{v_{j-1} - v_j}{h} \sin \frac{\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

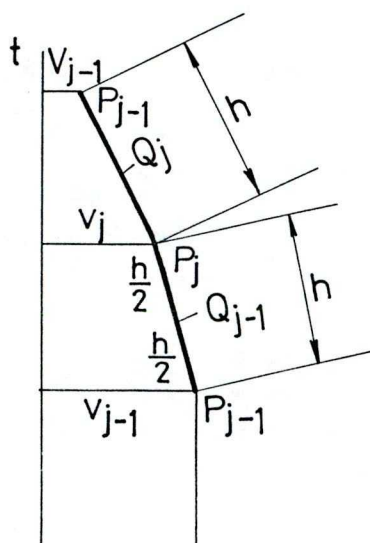
összefüggés határozza meg a v_j forgási sugarak és a h távolság függvényében.

Szakaszosan kúpos forgásfelület E_j szinguláris vonalának $\kappa(E_j)$ görbületét a

$$\kappa(E_j) = -2\pi \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h}$$

összefüggés adja.

A $g = \dots P_{j-1} P_j P_{j+1}$ profiltöröttvonalon vegyünk fel újabb osztáspontokat. Feltéhetjük, hogy ezek az osztáspontok felezik a $P_{j-1} P_j$, $P_j P_{j+1}$, ... távolságokat /6. ábra/.



6. ábra

Igy a $\dots P_{j-1}, Q_{j-1}, P_j, Q_j, P_{j+1} \dots$ profiltöröttvonalat kapjuk, amelynek t körüli forgatásával ugyanazt az F' felületet kapjuk, mint a $\dots P_{j-1}, P_j, P_{j+1} \dots$ profiltöröttvonal segítségével előálló F felület. Azonban az F -re jellemző h távolság $\overline{P_{j-1} P_j} = h$ és F' -re jellemző h' távolság $\overline{P_{j-1} Q_{j-1}} = h' = \overline{Q_{j-1} P_j}$ között a $2h' = h$ összefüggés áll fenn. A P_j pontok mint F' pontjainak görbülete:

$$\begin{aligned} \kappa(P_j) &= 2 \arcsin \left(\frac{v_j - \frac{v_j + v_{j+1}}{2}}{h/2} \sin \frac{\pi}{n} \right) - \\ &- 2 \arcsin \left(\frac{\frac{v_j + v_{j-1}}{2} - v_j}{h/2} \sin \frac{\pi}{n} \right), \end{aligned}$$

ami nem más, mint P_j -nek, mint F egy pontjának a görbülete.

Hasonlóan szakaszosan kúpos felületre:

$$\kappa(E_j) = -2\pi \frac{\frac{v_{j+1} + v_j}{2} - 2v_j + \frac{v_j + v_{j-1}}{2}}{h/2},$$

azaz a $\kappa(E_j)$ görbület, mint F' -hez tartozó E_j kör görbülete nem más, mint az F -hez tartozó E_j kör görbülete.

Megjegyezzük, hogy a görbületnek az új osztáspontok bevezetésével szembeni invarianciája a görbület definíciójából következik. A definícióból pedig nyilvánvaló, hogy a szinguláris alakzatok görbülete csak az alakzat egy környezetétől függ, azaz ilyen értelemben lokális. A fentieket egy tételben foglalhatjuk össze:

Tétel: A szakaszosan kúpos forgásfelületek és a poliédrikus szakaszosan kúpos felületek görbületfogalma a felületre jellemző mennyiség.

Mivel analógia van a szakaszosan kúpos forgásfelületek és a poliédrikus szakaszosan kúpos felületek definíciója között, ezért valamilyen összefüggésnek léteznie kell a rájuk értelmezett görbületfogalmak között is. Ezért megvizsgáljuk, milyen reláció érvényes egy szakaszosan kúpos forgásfelület és egy beirt poliédrikus szakaszosan kúpos felület között.

Tétel: Egy szakaszosan kúpos forgásfelület E_j szinguláris körének és a beirt poliédrikus szakaszosan kúpos felület töréspontjainak görbülete között a

$$K(E_j) - n K(P_{jk}) = v \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad /***/$$

összefüggés áll fenn, ahol n jelöli valamely P_j pont elforgatottjainak számát. /7. ábra/

Bizonyítás: Sorbafejtjük a $\sin x$ és az $\arcsin x$ függvényeket:

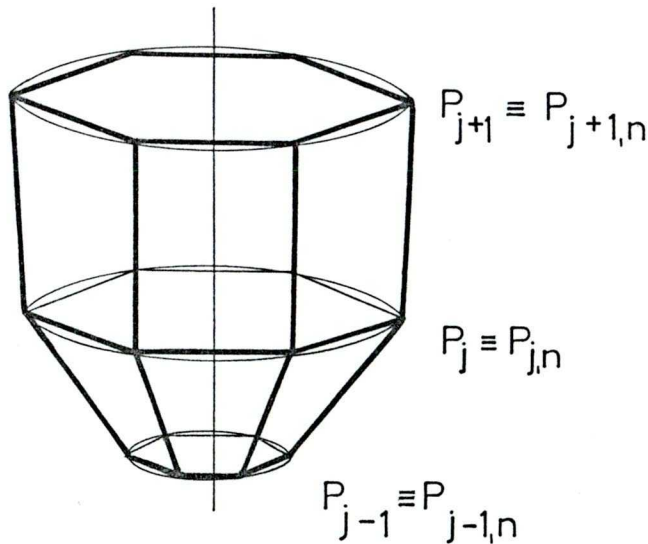
$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

$$\arcsin \left(\frac{v_j - v_{j+1}}{h} \left(\frac{\pi}{n} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) = \frac{v_j - v_{j+1}}{h} \frac{\pi}{n} + o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Innen pedig

$$\begin{aligned}
 n \kappa (P_{jk}) &= 2 \frac{v_j - v_{j+1}}{h} \frac{\pi}{n} + \sigma \left(\frac{1}{n^2} \right) - 2 \frac{v_{j-1} - v_j}{h} \frac{\pi}{n} + \sigma \left(\frac{1}{n^2} \right) = \\
 &= \kappa (E_j) + \sigma \left(\frac{1}{n^2} \right),
 \end{aligned}$$

ami pedig éppen a tétel állítása.



7. ábra

Példa: Határozzuk meg a G_1 felületen tetszőleges törésvonalnak, H_1 -en tetszőleges töréspontnak a görbületét!
 /lásd 11. oldal példája/ Először G_1 egy törésvonalának a

görbületét számítjuk ki.

Mivel

$$\begin{aligned}v_{j+1} - 2 v_j + v_{j-1} &= \cos (j+1) \gamma - 2 \cos j \gamma + \cos (j-1) \gamma = \\&= 2 \cos j \gamma \cos \gamma - 2 \cos j \gamma = 2 \left(1 - \frac{h^2}{2v_o^2} \right) \cos j \gamma - 2 \cos j \gamma = \\&= - \frac{h^2}{v_o^2} \cos j \gamma ,\end{aligned}$$

ezért

$\kappa (E_j) = 2 \pi \frac{h}{v_o^2} \cos j \gamma$, azaz $\kappa (E_j)$ j -nek monoton
növekvő függvénye a $j > 0$ tartományban és j -nek monoton csök-
kenő függvénye a $j < 0$ tartományban.

Vegyük most H_1 -et! Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}v_j - v_{j+1} &= \cos j \gamma - \cos (j+1) \gamma = - 2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \left(j + \frac{1}{2} \right) \gamma = \\&= - \frac{h}{v_o} \sin \left(j + \frac{1}{2} \right) \gamma\end{aligned}$$

és

$$v_{j-1} - v_j = - \frac{h}{v_o} \sin \left(j - \frac{1}{2} \right) \gamma$$

Innen

$$\begin{aligned} K(P_j) &= 2 \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{v_0} \sin \left(j - \frac{1}{2} \right) \pi \right) - \\ &- 2 \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{v_0} \sin \left(j + \frac{1}{2} \right) \pi \right) = \arcsin s(j) - \arcsin s(j+1) \end{aligned}$$

alkalmas $s(j)$ monoton függvény levezetésével. $j > 0$ esetén $K(P_j) < K(P_{j-1})$ érvényes, mert

$$2 \arcsin s(j) < \arcsin s(j-1) + \arcsin s(j+1)$$

$\arcsin x$ függvény $x > 0$ tartományban való konvexitása miatt.

Hasonlóképpen

$K(P_j) > K(P_{j-1})$ $j < 0$ esetén. Speciálisan

$$K(E_0) = \frac{2\pi h}{v_0} \quad \text{és}$$

$$K(P_0) = -4 \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{n}}{v_0} \right) = -4 \arcsin \left(\frac{h}{2v_0^2} \sin \frac{\pi}{n} \right).$$

A fenti tételt úgy is szavakba foglalhatjuk, hogy minél nagyobb oldalszámu szabályos sokszöget írunk a szakaszo-

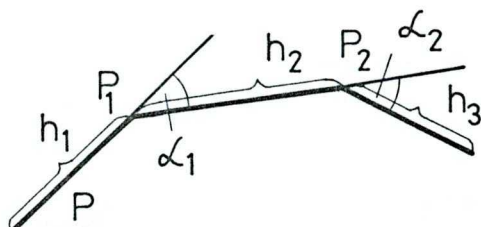
san kúpos forgásfelület szinguláris köreibe, annál kisebb lesz az eltérés a szinguláris körök görbülete és a felületbe beírt poliédrikus szakaszosan kúpos felületen azon pontok görbületösszege között, amelyek azonos profiltöröttvonal forgatásával keletkeztek.

Ezután megadjuk a konstans görbületű felületek definícióját.

A definíció megadása úgy tűnik, már az első pillanatban problémákat vet fel. Ilyen probléma az, hogy mind a poliédrikus felületeknél, mind a forgásfelületeknél minden pont nem lehet azonos görbületű; "azonos" görbületről csak a szinguláris alakzatok görbülete esetén beszélhetünk valamilyen értelemben. Ez az eljárás azonban általános a differenciageometriában, gondoljunk csak például Sauer görbületdefiníciójára /1/: a p poligon görbülete /8. ábra/

$$\kappa(P_1) = \frac{\sin \alpha_1}{h_1},$$

$$\kappa(P_2) = \frac{\sin \alpha_2}{h_2}$$



8. ábra

Tehát a "konstans görbület" fogalomnak csak a szinguláris alakzatokra kell vonatkoznia, azaz poliédrikus szakaszosan kúpos felület esetén a töréspontokra, szakaszosan kúpos forgásfelület esetén a törésvonalakra.

A fenti megjegyzés után már természetes az alábbi definíció:

Definíció: Egy poliédrikus szakaszosan kúpos felületet konstans görbületűnek nevezünk, ha tetszőleges $P_{j0} P_{j1} \dots P_{jn}$ töröttvonala $\kappa(P_{j0} P_{j1} \dots P_{jn})$ görbületösszegének és a töröttvonal $\ell(P_{j0} P_{j1} \dots P_{jn})$ hosszának aránya állandó:

$$\frac{n \cdot \kappa(P_{jk})}{\ell(P_{j0} P_{j1}, \dots P_{jn})} = \frac{\kappa(P_{j0} P_{j1}, \dots P_{jn})}{\ell(P_{j0} P_{j1}, \dots P_{jn})} = K_h$$

Egy szakaszosan kúpos forgásfelületet konstans görbületűnek hívunk, ha tetszőleges E_j szinguláris vonala $\kappa(E_j)$ görbületének és $\ell(E_j)$ hosszának aránya állandó:

$$\frac{\kappa(E_j)}{\ell(E_j)} = \frac{\kappa(E_j)}{2\sqrt{v_j}} = K_h.$$

A fentiek segítségével nyilvánvaló az alábbi tétel:

Tétel: A konstans görbületű poliédrikus szakaszosan kúpos felületek alapegyenlete az

$$\begin{aligned} & \arcsin \left(\frac{v_j - v_{j+1}}{h} \sin \frac{\pi}{n} \right) - \arcsin \left(\frac{v_{j-1} - v_j}{h} \sin \frac{\pi}{n} \right) = \\ & = K h v_j \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{/***/} \end{aligned}$$

nemlineáris másodrendű differenciaegyenlet.

A konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületek alapegyenlete a

$$v_{j+1} - 2 v_j + v_{j-1} = -K h^2 v_j \quad \text{****/}$$

lineáris másodrendű differenciaegyenlet.

Mint ismeretes, a konstans görbületű differenciálható forgásfelületek alapegyenlete a

$$B'' + K B = 0 \quad \text{*****/}$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet. Így megállapítjuk, hogy

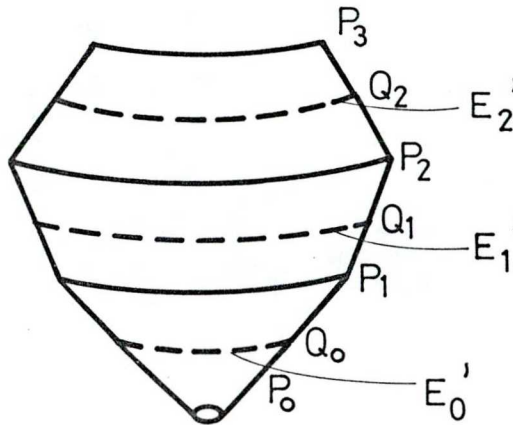
Tétel: A konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületek alapegyenlete a konstans görbületű forgásfelületek alapegyenletének közelítése abban az értelemben, hogy a ~~****~~ alapegyenletben szereplő második differenciálhányadost másodrendű osztott differenciával helyettesítve a ~~***~~ alapegyenlethez jutunk.

A konstans görbületű poliédrikus szakaszosan kúpos felületek alapegyenlete a konstans görbületű szakaszosan kúpos felületek alapegyenletének közelítése abban az értelemben, hogy ~~*****~~ egyenletben a differenciálhányadost differencia-hányadosra cserélve a ~~***~~ egyenletet kapjuk.

Végül megvizsgáljuk, hogy az imént levezetett "konstans görbület" fogalma valóban jól jellemzi-e a felületeket.

Azt tudjuk már, hogy a szakaszosan kúpos forgásfelületek és a poliédrikus szakaszosan kúpos felületek görbületfogalma a felületre és nem a felület definiálásához használt paraméterekre /forgási sugár, töréspontok h távolsága/ jellemző mennyiség. Ha viszont a profiltöröttvonalon osztáspontokat /az egyszerűség kedvéért felező osztáspontokat/ veszünk fel, akkor továbbra is szakaszosan kúpos felületet kapunk, amely szemlélet alapján azonos az eredetivel, ugyanakkor a "régi" és az "új" töréspontok görbülete nem egyenlő /9. ábra/. Ennek a gondolatmenetnek az a hibája,

hogy az "uj" $/Q_j/$ osztáspontok



9. ábra

bevezetésével nem változtattuk meg a felületek, a konstans görbület teljesülését $/\kappa(P_0) = \kappa(Q_0) ?/$ pedig megkövetelnénk az új osztáspontokra is. Valójában a felület nem változott meg, tehát a konstans görbületű felület fogalmának teljesülése sem kívánhat az előbbinél több feltételt. Hiszen a Q_j pontok elforgatottjai $/E_j$ kör ill. $Q_{j0} Q_{j1} \dots Q_{jn}$ sokszög/ nem alkotnak a felületen szinguláris alakzatot, így nekik semmilyen pótlólagos feltételt nem kell teljesíteniük a konstans görbületű felület kritériumához. Összefoglalva tehát: a konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületek és poliédrikus szakaszosan kúpos fe-

lülletek osztálya jól definiált.

Példa: A G_1 felület $K = \frac{1}{v^2}$ görbülettel konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelület, míg a H_1 felület nem konstans görbületű poliédrikus szakaszosan kúpos felület.
/lásd 11. oldal/

3. fejezet

KONSTANS GÖRBÜLETÜ SZAKASZOSAN KÚPOS FORGÁSFELÜLETEK

Megoldjuk a konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületek

$$v_{j+1} + (Kh^2 - 2) v_j + v_{j-1} = 0 \quad /x/$$

alapegyenletét. Mivel $K = 0$ esetén az alapegyenlet megoldása

$$v_j = v_0 + j (v_1 - v_0)$$

és a $P_0, P_1, \dots$ pontok egyetlen egyenesre illeszkednek, a $K = 0$ eset számunkra nem érdekes. Így a továbbiakban $K \neq 0$. Mivel minden j -re $v_j > 0$, így

$$v_{j+1} + 2 v_j + v_{j-1} > 0$$

amit $/x/$ -gal összevetve azt kapjuk, hogy

$$Kh^2 < 4.$$

A /*/ másodrendű differenciaegyenlethez tartozó

$\lambda^2 + (Kh^2 - 2)\lambda + 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{2-Kh^2 \pm \sqrt{Kh^2 (Kh^2 - 4)}}{2}$$

Innen azt kapjuk, hogy a négyzetgyök alatti mennyiség pontosan akkor pozitív /negatív/, ha $K < 0$ / $K > 0$ /. A differenciaegyenletek általános elmélete /3/ alapján adódik /*/ általános megoldása, azaz

Tétel: A konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületek /*/ alapegyenletének általános megoldása:

$$v_j = A \left(\frac{2-Kh^2 + \sqrt{Kh^2 (Kh^2 - 4)}}{2} \right)^j + B \left(\frac{2-Kh^2 - \sqrt{Kh^2 (Kh^2 - 4)}}{2} \right)^j$$

ahol $K > 0$ esetén $A = \bar{B}$ komplex konstansok, $K < 0$ esetén pedig A és B tetszőleges valós konstansok. /*/ általános megoldása

$K > 0$ esetén:

$$v_j = a \cos j\alpha + b \sin j\alpha = \lambda \cos (\beta + j\alpha), \quad /**/$$

ahol $a, b, \lambda, \beta, \alpha$ csak A-tól és B-től függő konstansok.

$K < 0$ esetén:

$$v_j = a \operatorname{ch} j\alpha + b \operatorname{sh} j\alpha = \lambda \operatorname{ch} (\beta + j\alpha) \quad /***/$$

ahol $a, b, \lambda, \beta, \alpha$ csak A-tól és B-től függő konstansok.

Bizonyítás: Csak a /**/ és /***/ állításokat szükséges igazolni. Vezessük le az alábbi jelöléseket:

$$A = \frac{1}{2} (a-ib), \quad B = \frac{1}{2} (a+ib), \quad \frac{2-Kh^2}{2} = x, \quad \frac{\sqrt{Kh^2(4-Kh^2)}}{2} = y$$

Ekkor

$$v_j = \frac{1}{2} (a-ib) (x+iy)^j + \frac{1}{2} (a+ib) (x-iy)^j$$

Irjuk fel $(x+iy)$ -t trigonometrikus alakban:

$$x+iy = r (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

ahol r és α kifejezhetők x, y -nal. Mivel

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 = \frac{(2-Kh^2)^2 + Kh^2(4-Kh^2)}{2^2} = \\ &= \frac{4-4Kh^2+K^2h^4+4Kh^2-K^2h^4}{2^2} = 1, \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} v_j &= \frac{1}{2} (a-ib) (\cos j\alpha + i \sin j\alpha) + \frac{1}{2} (a+ib) (\cos j\alpha - i \sin j\alpha) = \\ &= a \cos j\alpha + b \sin j\alpha. \end{aligned}$$

Bevezetve a

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{és} \quad \lambda = \sqrt{a^2+b^2}$$

jelöléseket

$$v_j = \sqrt{a^2+b^2} \cos\beta \cos j\alpha - \sqrt{a^2+b^2} \sin\beta \sin j\alpha = \lambda \cos(\beta + j\alpha)$$

áll elő, ami éppen a ~~///~~ állítás.

A ~~///~~ állítás igazolása hasonlóképpen történik. Legyen

$$\lambda = \frac{2 - Kh^2 + \sqrt{Kh^2(Kh^2 - 4)}}{2}$$

ekkor

$$v_j = A \lambda^j + B \lambda^{-j}, \text{ mert}$$

$$\frac{2 - Kh^2 + \sqrt{Kh^2(Kh^2 - 4)}}{4} \cdot \frac{2 - Kh^2 - \sqrt{Kh^2(Kh^2 - 4)}}{4} = 1.$$

Bevezetve az

$$A = \frac{1}{2} (a+b), \quad B = \frac{1}{2} (a-b)$$

jelöléseket, kapjuk:

$$v_j = \frac{a+b}{2} \lambda^j + \frac{a-b}{2} \lambda^{-j} = a \frac{\lambda^j + \lambda^{-j}}{2} + b \frac{\lambda^j - \lambda^{-j}}{2}$$

Legyen $\alpha = \ln \lambda$ Ekkor

$$v_j = a \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} + b \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2} = a \operatorname{ch} j\alpha + b \operatorname{sh} j\alpha$$

Bevezetve a

$$\operatorname{ch} \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \operatorname{sh} \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{és} \quad \lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$

jelöléseket

$$v_j = \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} jx + \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} jx = \lambda \operatorname{ch} (\beta + j\alpha)$$

adódik, ami ~~///~~ állítása.

Példa: Oldjuk meg a

$$v_{j+1} - 2 v_j + v_{j-1} = - \frac{h^2}{c^2} v_j$$

egyenletet a

$$v_0 = c$$

$$v_1 = \left(1 - \frac{h^2}{2c^2}\right) c$$

kezdeti értékekkel, majd vizsgáljuk meg a megoldást!

Az egyenlet általános megoldása

$$v_j = \lambda \cos (\beta + j\alpha)$$

alkalmas λ , β és α értékekkel, amelyeket a kezdeti értékekből számítunk ki:

$$\beta = 0, \text{ mert } v_{-1} = v_0 + \frac{h^2}{2v_0} - \frac{h^2}{v_0} = v_0 - \frac{h^2}{2v_0} = \left(1 - \frac{h^2}{2c^2}\right) c = v_1$$

$$\lambda = v_0, \text{ mert } v_0 = \lambda \cos (0+0, \lambda) = \lambda$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{h^2}{2v_0^2}, \text{ mert } v_1 = \left(1 - \frac{h^2}{2v_0^2}\right) v_0 = v_0 \cos \alpha$$

Az egyenlet a fenti kezdeti értékekkel konstans pozitív görbületű szakaszosan kúpos felületet határoz meg $K = \frac{1}{c^2}$ görbülettel, amely egy gömbbe beírt felület. Ugyanis a P_j pont abszcisszája $v_j = v_0 \cos j\alpha$, y koordinátája pedig az alábbi módon számítható:

$$\begin{aligned} |v_{k+1} - v_k| &= |v_0 \cos (j+1)\alpha - v_0 \cos j\alpha| = \\ &= 2 \left| v_0 \sin \left(j+\frac{1}{2}\right)\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \right|; \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{2} = \frac{h^2}{4v_0^2} \text{ és így} \end{aligned}$$

$$y = \sum_{k=0}^{j-1} \sqrt{h^2 - (v_{k+1} - v_k)^2} = \sum_{k=0}^{j-1} \sqrt{h^2 - 4v_0^2 \left(\sin^2 \left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right) \frac{h^2}{4v_0^2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} h \cos \left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha = \frac{h}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{k=0}^{j-1} -(\sin k\alpha - \sin (k+1)\alpha) =$$

$$= \frac{h \sin j\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = v_0 \sin j\alpha,$$

azaz a P_j pontok egy origó körüli c sugaru körön helyezkednek el.

Mint láttuk, analógia van a differenciálható konstans görbületű felületek és a szakaszosan kúpos forgásfelületek alapegyenlete között. Mint az várható is, hasonlóság van megoldásaik között is.

Tétel: A $K > 0$ esetén jelölje $\sqrt{K}$ -t c , $K < 0$ esetén $\sqrt{-K}$ -t c . Akkor az előző tétel jelöléseinél maradva

$$v_j = a \cos j \frac{h}{c} + b \sin j \frac{h}{c} + j \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right) \quad /K > 0/ \quad \text{ill.}$$

$$v_j = a \operatorname{ch} j \frac{h}{c} + b \operatorname{sh} j \frac{h}{c} + j \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right) \quad /K < 0/.$$

B. A konstans görbületű differenciálható felületek

$$w'' + Kw = 0$$

alapegyenletének $w = w(x)$ megoldása és a konstans görbületű szakaszosan kúpos felületek $/\ast/$ alapegyenletének

$v_j = v(x)$ megoldása között a

$$w(x) = v(x) + x \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right)$$

összefüggés áll fenn.



Bizonyítás: A B rész az A rész egyenes következménye, így elég az A rész bizonyításával foglalkoznunk. Így

$$K > 0 \text{ esetén: } \alpha = \arccos \left(1 - \frac{h^2}{2c^2} \right) = \frac{h}{c} + \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right)$$

$$K < 0 \text{ esetén: } \alpha = \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{h^2}{2c^2} \right) = \frac{h}{c} + \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right)$$

Ezt beírva v_j explicit kifejezésébe

$$\begin{aligned} K > 0 \text{ esetén: } v_j &= a \cos \left(j \frac{h}{c} + j \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right) \right) + b \sin \left(j \frac{h}{c} + j \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right) \right) = \\ &= a \cos j \frac{h}{c} + b \sin j \frac{h}{c} + j \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K < 0 \text{ esetén: } v_j &= a \operatorname{ch} \left(j \frac{h}{c} + j \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right) \right) + b \operatorname{sh} \left(j \frac{h}{c} + j \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right) \right) = \\ &= a \operatorname{ch} j \frac{h}{c} + b \operatorname{sh} j \frac{h}{c} + j \sigma \left(\frac{h^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

A bizonyítás során kaptuk azt a részeredményt, hogy α csak h -től és K -től függ, de nem függ a -tól és b -től /vagy ami ezzel ekvivalens: v_0 -tól és v_1 -től/. A B rész egyszerű következményeként kapjuk az alábbi tételt:

Tétel: Az azonos kezdeti feltételekkel rendelkező konstans görbületű forgásfelület $w(x)$ forgási sugarai és a

konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelület $v(x)$ forgási sugarai közötti különbség az x paraméterértékekkel egyenesen arányos, azaz az x nagyságrendjében tart végtelenbe.

Miután elvégeztük az $/*$ egyenlet megoldását, rátérünk a megoldások vizsgálatára, azaz megvizsgáljuk, milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületek. Ennek során felhasználjuk az alapegyenlet megoldásán kívül magát az alapegyenletet is, megvizsgáljuk a felület konvexitását /konkavitását, szimmetricitását továbbá osztályozzuk a felületek különböző típusait.

Tétel: /a szakaszosan kúpos forgásfelületek konvexitásáról/konkavitásáról/:

- A. A v_j számsorozat akkor és csak akkor konvex, ha $K > 0$.
- B. A v_j számsorozat akkor és csak akkor konkáv, ha $K < 0$.

Bizonyítás: A $/*$ alapegyenlet átrendezéséből

$$2 v_j = v_{j+1} + v_{j-1} + Kh^2 v_j$$

áll elő. Továbbá $2 v_j > v_{j-1} + v_{j+1}$ pontosan akkor áll, ha $K > 0$ és $2 v_j < v_{j-1} + v_{j+1}$ pontosan akkor, ha $K < 0$.

A fenti tétel egy egyszerű következménye, hogy egy nem

konvex és nem konkáv számsorozat nem lehet konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelület forgási sugarainak a hossza.

Tudjuk, hogy a differenciálható konstans görbületű felületeknek mindig van a forgástengelyre merőleges szimmetriasisíkja. Ez nem feltétlenül van így konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületek esetén, mint az várható is. Az alábbi tétel szükséges és elegendő feltételt ad meg ilyen tulajdonságu szimmetriasisík létezésére.

Tétel: Konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületnek akkor és csakis akkor létezik a forgástengelyre merőleges szimmetriasisíkja, ha van két egyenlő forgási sugara.

Bizonyítás: Nyilván csak a feltétel elegendőségét kell igazolni. Ehhez interpretáljuk a $/**/$ és $/***/$ összegüggéseket az alábbi módon: Mozogjon egy origó középpontu síkbeli helyvektor végpontja az

$$K > 0 : x^2 + y^2 = 1/\lambda \text{ kör}$$

$$K < 0 : x^2 - y^2 = 1/\lambda \text{ hiperbola}$$

mentén úgy, hogy a helyvektor egymás utáni helyzetei egymással $\angle$ szöget zárjanak be. Ekkor a v_j forgási sugár a

a helyvektor j -edik helyzetéhez tartozó pont x -koordinátája. Ebből pedig az következik, hogy ha $v_j = v_k$ ($j < k$), akkor $v_{j+1} = v_{k-1}$ stb. Ami pedig éppen a tétel állítása.

Példa: Keressünk a

$$v_{j+1} - 2 v_j + v_{j-1} = \frac{h^2}{c^2} v_j$$

egyenlet megoldásai közül olyanokat, amelyek eleget tesznek a $v_1 = v_{-1}$ feltételnek.

A tétel szerint tehát a megoldás a forgástengelyre merőleges szimmetriasíkkal rendelkező felület.

Az alapegyenlet szerint

$$v_1 - 2 v_0 + v_{-1} = \frac{h^2}{c^2} v_0 ,$$

azaz

$$v_1 = v_0 \left(1 + \frac{h^2}{2c^2} \right) .$$

Tegyük fel, hogy P_1 létezik tehát

$$|v_0 - v_1| = v_0 \frac{h^2}{2c^2} \leq h \Leftrightarrow \frac{v_0 h}{2c^2} \leq 1 .$$

Az általános megoldásból

$$v_1 = v_0 \operatorname{ch} \alpha = v_0 \left(1 + \frac{h^2}{2c^2} \right) \Rightarrow \operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{h^2}{2c^2} \Rightarrow \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2c}$$

Keressünk most olyan megoldást, amelyre

$$v_{\frac{1}{2}} = v_{-\frac{1}{2}}$$

Az egyenlet szerint

$$v_{\frac{3}{2}} = v_{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right)$$

Mivel

$$\lambda \cos \left(\beta + \frac{1}{2} \alpha \right) v_{\frac{1}{2}} = v_{-\frac{1}{2}} = \lambda \cos \left(\beta - \frac{1}{2} \alpha \right), \text{ ezért } \beta = 0.$$

Felhasználjuk, hogy

$$v_{\frac{1}{2}} = \lambda \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}$$

$$v_{\frac{3}{2}} = \lambda \operatorname{ch} \frac{3}{2} \alpha = v_{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right)$$

innen a

$$\operatorname{ch} \frac{3}{2} \alpha = \operatorname{ch} \frac{1}{2} \alpha \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right)$$

egyenletet kapjuk. Ezt megoldva

$$4 \operatorname{ch}^3 \frac{\alpha}{2} + 3 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right)$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{h^2}{4c^2}$$

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2c}$$

adódik.

A konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületek hasonló módon osztályozhatók, mint a differenciálható konstans görbületű forgásfelületek. Az analógiák és különbségek nyilvánvalóvá tétele érdekében először összefoglaljuk az utóbbiak osztályozását.

Az $f(u, v) = (h(u) \cos v, h(u) \sin v, k(u))$ konstans görbületű forgásfelület alapegyenlete

$$h'' + Kh = 0,$$

amelynek megoldásai $c = 1/\sqrt{|K|}$ helyettesítéssel

$$h(u) = a \cos \frac{u}{c} + b \sin \frac{u}{c} \quad K > 0$$

$$h(u) = a \operatorname{ch} \frac{u}{c} + b \operatorname{ch} \frac{u}{c} \quad K < 0.$$

$K > 0$ esetén az $a = \lambda$, $b = 0$ kezdeti érték melletti megoldások

$$k(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} \sin^2 \frac{t}{c}} dt.$$

Ez a $\lambda = c$ -re a gömböt szolgáltatja, $\lambda < c$ -re orsó típusu felületet, $\lambda > c$ -re dudor típusu felületet ad. /10. ábra/.

$k < 0$ esetén az $a = b = \lambda$ kezdeti érték a

$$h(u) = \lambda e^{-\frac{u}{c}}, \quad k(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2\frac{t}{c}}} dt$$

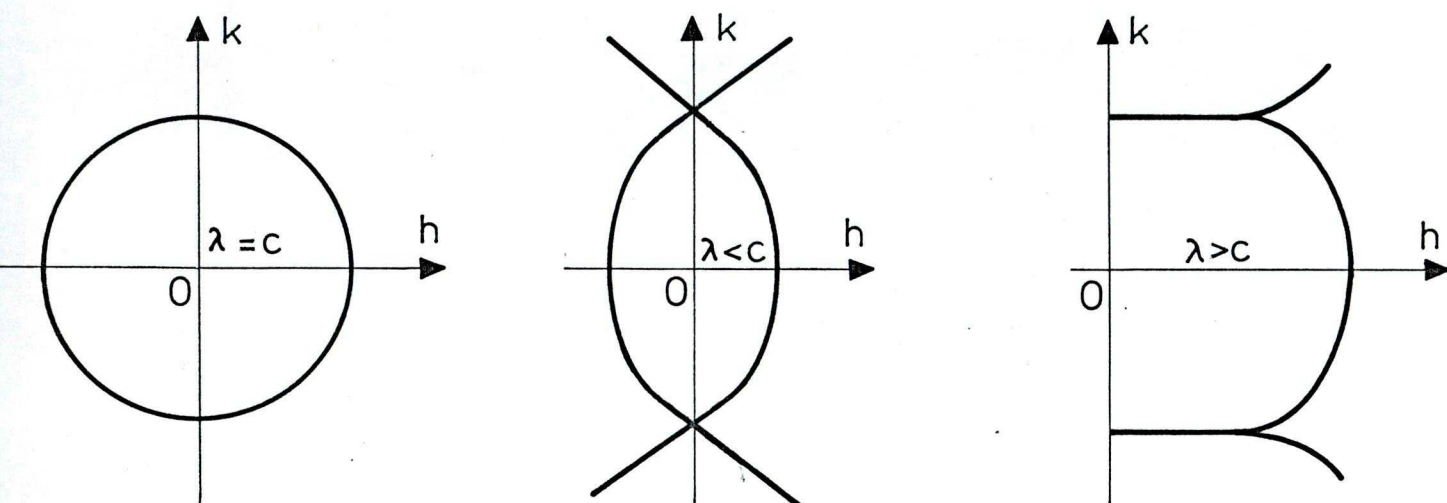
görbét adja, amely az un. traktrix, a felület pedig a pszeudoszféra. $b = 0$, $a = \lambda$ esetén

$$h(u) = \lambda \operatorname{ch} \frac{u}{c}, \quad k(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} \operatorname{sh}^2 \frac{t}{c}} dt$$

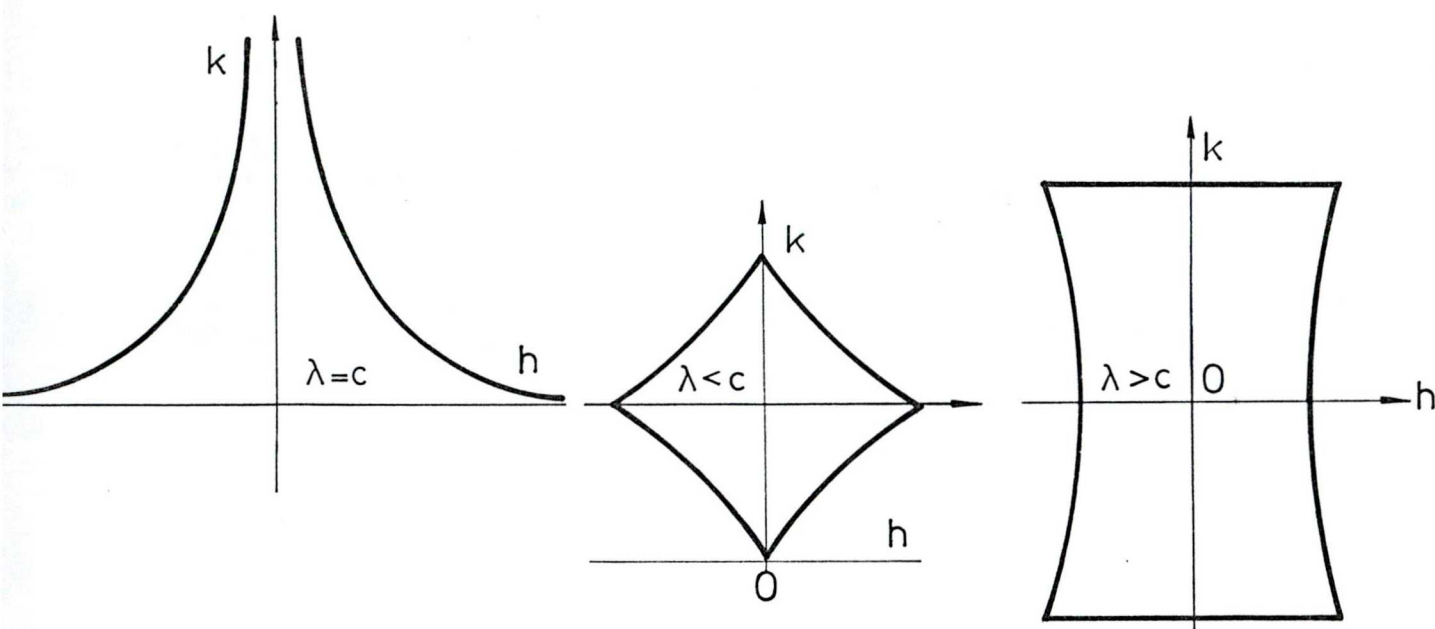
megoldás a gömb típusu felületet adja. $a = 0$, $b = \lambda$ esetén a

$$h(u) = \lambda \operatorname{sh} \frac{u}{c}, \quad k(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} \operatorname{ch}^2 \frac{t}{c}} dt$$

a gége típusu negatív görbületű felületet szolgáltatja
/11. ábra/.



10. ábra



11. ábra

Vizsgáljuk meg, milyen tulajdonságok érvényesek a fentiekből a konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületekre!

Egy szakaszosan kúpos forgásfelület profiltöröttvonalala addig folytatható, míg teljesül $|v_k - v_{k-1}| \leq 0$ és $|v_{k+1} - v_k| > h$ valamely k -ra. Megköveteljük tehát a

$$h \geq \left| v_{j+1} - v_j \right| = \left| \lambda \cos \left(\beta + (j+1)\alpha \right) - \cos \left(\beta + j\alpha \right) \right| =$$

$$= 2\lambda \left| \sin \left(\beta + j\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} \right| \quad /j \leq k-1/$$

egyenlőség teljesülését. Felhasználjuk a

$$\cos \alpha = 1 - \frac{h^2}{2c^2}, \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{h}{2c}$$

egyenlőtlenséget

$$c \geq \lambda \left| \sin \left(\beta + j\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) \right|$$

adódik. Azaz adódhat $\beta, \alpha, c, \lambda$ olyan kombinációja, hogy a feltétel nem teljesül, míg más $\beta, \alpha, c, \lambda$ esetén minden j -re teljesül a feltétel. Ez ad alapot a pozitív görbületű felületek osztályozására, mégpedig az alábbi módon: Egy konstans pozitív görbületű felületet elliptikusnak nevezünk, ha profiltöröttvonalala meghosszabbítható mindkét irányban a forgástengelyen túl, azaz

$$v_{j-1} \geq 0, \quad v_j, \quad v_{j+1}, \dots v_{j+k} > 0, \quad v_{j+k+1} \leq 0,$$

$$\left| v_{\ell} - v_{\ell-1} \right| \geq h \quad \ell = j, \dots j+k+1.$$

Egy konstans pozitív görbületű felületet parabolikusnak nevezünk, ha profiltöröttvonalala meghosszabbítható a forgástengelyig, de azon túl nem, azaz $v_{j-1} \leq 0$,

$$v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+k} > 0, v_{j+k+1} \leq 0, \quad |v_\ell - v_{\ell-1}| \leq h$$

$$\ell = j+1, \dots, j+k$$

Egy konstans negatív görbületű felületet hiperbolikusnak nevezünk, ha profiltöröttvonalala nem hosszabbítható meg a forgástengelyig, azaz $v_{j-1} \leq 0$, $v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+k} > 0$, $v_{j+k+1} \leq 0$

$$|v_\ell - v_{\ell-1}| \leq h \quad \ell = s, \dots, t$$

$$|v_{s-1} - v_{s-2}| > h$$

$$|v_{j+k+1} - v_{j+k+2}| > h \quad \text{/lásd mellékletek/.}$$

Ha $K < 0$, akkor a

$$\begin{aligned} h &\geq |v_{j+1} - v_j| = \lambda \left| \operatorname{ch} (\beta + (j+1)\alpha) - \operatorname{ch} (\beta + j\alpha) \right| = \\ &= 2 \lambda \left| \operatorname{sh} \left(\beta + j\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \right| \end{aligned}$$

egyenlőtlenség teljesülését kívánjuk meg. A $\text{ch } \alpha = 1 + \frac{h^2}{2c^2}$ egyenlőtlenség felhasználásával

$$c \geq \lambda \left| \text{sh} \left(\beta + j\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) \right|$$

egyenlőtlenség adódik. Adott λ és β esetén az egyenlőtlenség csak véges sok j -re teljesülhet. Azaz

Tétel: Egy konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületet alkotó forgáskúpok száma véges.

A $K > 0$ esethez hasonlóan elliptikusnak nevezünk egy felületet, ha profiltöröttvonalala folytatható a forgástengelyig és azon túl; parabolikusnak, ha profiltöröttvonalala a forgástengelyig folytatható azon túl nem; hiperbolikusnak, ha profiltöröttvonalala nem folytatható a forgástengelyig /lásd mellékletek!/,

Példa: Oldjuk meg a

$$v_{j+1} - 2 v_j + v_{j-1} = - \frac{h^2}{c^2} v_j$$

egyenletet a

$$v_0 = c$$

$$v_1 = 2 \left(1 - \frac{h^2}{2c^2} \right) c$$



$$h \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} c$$

kezdeti értékekkel, vizsgáljuk meg a profiltöröttvonal folytathatóságát és adjuk meg a felület típusát! Az egyenletet felhasználva azt kapjuk, hogy $v_{-1} = 0$, mert

$$v_{-1} = -v_1 + 2 v_0 - \frac{h^2}{c^2} v_0 = -v_1 + 2 c - \frac{h^2}{c} = 0,$$

azaz a P_{-1} pont már nem tartozik a szakaszosan kúpos forgásfelülethez, tehát a profiltöröttvonal P_0 -án túl nem folytatható negatív indexekre. Megmutatjuk, hogy

$|v_{+1} - v_0| \leq h$, azaz létezik az egyenletnek olyan megoldása, amely konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületet eredményez. Ez pedig igaz, mert

$$|v_1 - v_0| = c - 2c + \frac{h^2}{c} = \frac{h^2}{c} - c \leq h$$

akkor és csak akkor, ha

$$h^2 - ch - c^2 \leq 0, \text{ azaz}$$

$$h \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} c.$$

Ez a feltétel intuitive azt jelenti, hogy csak olyan konstans görbületű szakaszosan kúpos felület létezik, amelyben például nagy görbülethez / $K = \frac{1}{c^2}$ miatt kicsi c -hez/ nagy finomság /kicsi h / tartozik.

Mivel $v_{-1} = \lambda \cos(\beta - \alpha) = 0$, ezért $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + s\pi/s$ egész szám/, azaz $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ -t véve

$$\sin \beta = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos \beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$$

Az általános megoldásba $j = 0$ -t írva $v_0 = \lambda \cos \beta$ adódik, innen $\lambda \cos \beta = c$ és $\lambda = \frac{c}{\sin \alpha}$ teljesül. Továbbá

$$v_1 = \lambda \cos(\alpha + \beta) = \lambda \cos \alpha \cos \beta - \lambda \sin \alpha \sin \beta =$$

$$= \lambda \sin \alpha \cos \alpha + \lambda \cos \alpha \sin \alpha = 2 \lambda \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2c}{\sin \alpha} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 c \cos \alpha \text{ és } 2 c \left(1 - \frac{h^2}{2c^2}\right) = 2 c \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{h^2}{2c^2}.$$

A fentiek alapján

$$v_j = \lambda \cos(\beta + j\alpha) = \lambda \cos \beta \cos j\alpha - \lambda \sin \beta \sin j\alpha =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \sin \alpha \cos j\alpha + \lambda \cos \alpha \sin j\alpha = \lambda \sin (j+1)\alpha = \\
 &= \frac{c \sin (j+1)\alpha}{\sin \alpha}.
 \end{aligned}$$

Adott P_{j-1} , P_j pontok és v_{j-1} , v_j forgási sugarak esetén pontosan akkor létezik a P_{j+1} pont a v_{j+1} forgási sugárral, ha $v_{j+1} > 0$ és $|v_{j+1} - v_j| \leq h$. Innen

$$\begin{aligned}
 |v_{j+1} - v_j| &= \left| \frac{c}{\sin \alpha} (\sin (j+1)\alpha - \sin \alpha) \right| = \\
 &= \left| \frac{c}{\sin \alpha} \cos \left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \left| \frac{c}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cos \left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha \right| = \\
 &= \left| \frac{c^2}{h} \cos \left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha \right| \geq h, \text{ azaz } \left| \cos \left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha \right| \leq \frac{h^2}{c^2}
 \end{aligned}$$

adódik, ami viszont $|v_1 - v_0| \leq h$ és a $\cos x$ függvény az általunk vizsgált $0 < \left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha < \frac{\pi}{2}$ intervallumban való csökkenés miatt minden lehetséges j -re teljesül. Tehát P_j pontosan akkor létezik, ha

$$\sin (j+1)\alpha > 0, \text{ azaz } 0 < j < \frac{\pi - \alpha}{\alpha}$$

Igy a felület profiltöröttvonalala a $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontokból áll, ahol n a lehető legnagyobb szám, amelyre tel-

jesül $n < \frac{\pi - \alpha}{\alpha}$. Mivel a felület $P_0 - n$ tul negatív indexre nem folytatható, de folytatható a profiltöröttvonal a forgástengelyig, így felület parabolikus.

A fenti példa mutatja, hogy a felületek osztályozása bonyolultabb, mint a differenciálható konstans görbületű forgásfelületek esetén.

A forgásfelületek osztályozásának definícióiból levonhatjuk az alábbi következtetést: ha egy konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelület K görbületét és ha un. finomságát állandónak tartjuk, λ -t pedig változtatjuk, akkor a felület átmegy az egyik tipusból a másikba. Mivel a K görbület eközben nem változik, ez izomorf leképezés.

Ilyen leképezést kapunk akkor, ha egy szakaszosan kúpos felületet felvágunk egyik profiltörött vonal mentén és úgy hajlitjuk, hogy eközben nem változik a forgástengely. A hajlítás során K és h nem változik, csak a és b /vagy ami ezzel ekvivalens: λ és β /. Tehát a hajlítás során az egyik típusu felület átmegy a másik típusu felületbe. Ha λ -t növeljük, akkor a felület szétnyílik, ha csökkentjük, akkor összezsugorodik.

Megmutatjuk, hogy a hajlítás során a megfelelő forgási sugarak aránya állandó, azaz ha a P_j pont /amelyhez a v_j forgási sugár tartozik/ átmegy a Q_j pontba, amelyhez a q_j forgási sugár tartozik, akkor $v_j/q_j = t = \text{állandó}$.

Ez pedig nyilván igaz, hiszen δ -val jelölve a hajlítás során nyert felület j -edik kúpjának nyílásszögét, fennállnak a

$$2\sqrt{t} \ v_j = q_j \delta$$

$$\frac{v_j}{q_j} = \frac{\delta}{2\sqrt{t}} = t = \text{áll.}$$

összefüggések.

Tegyük fel, hogy szétnyitjuk a felületet $t < 1$. Mivel teljesülnie kell a

$$\left| q_{j+1} - q_j \right| = \frac{1}{t} (v_{j+1} - v_j) \leq h$$

egyenlőtlenségnek, ezért a Q_{j+1} és Q_j pontok y koordinátáinak különbsége kisebb, mint a P_{j+1} és P_j pontok y koordinátáinak különbsége. Sőt előfordulhat, hogy

$$\left| v_{j+1} - v_j \right| \leq h, \quad \text{de} \quad \left| q_{j+1} - q_j \right| > h,$$

azaz a felületet nem is lehet úgy hajlítani, hogy a $P_0 \dots, P_j, P_{j+1}$ pontok rendre a $Q_0 \dots Q_j, Q_{j+1}$ pontokba menjenek át. Tegyük fel, hogy összecsuksuk a felületet

$/t > 1/$. Mivel

$$\left| q_{j+1} - q_j \right| = \frac{1}{t} \left| v_{j+1} - v_j \right| \leq h$$

mindig teljesül, ezért a Q_{j+1} és Q_j pontok y koordinátáinak különbsége nagyobb, mint a P_{j+1} és P_j pontok y - koordinátáinak különbsége. Sőt előfordulhat, hogy a hajlitott felület tovább folytatható.

Tétel: Elliptikus konstans görbületű szakaszosan kúpos felület elég kicsi darabja parabolikus és hiperbolikus felületbe hajlitható. Hiperbolikus konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelület parabolikus ill. elliptikus felületbe hajlitható, amely esetleg még tovább folytatható.

A differenciálható konstans görbületű forgásfelületek és a konstans görbületű szakaszosan kúpos forgásfelületek közötti analógia nem teljes. Ezt mutatja az alábbi, önmagában is érdekes tétel.

Tétel: Egy parabolikus negatív görbületű szakaszosan kúpos forgásfelület profiltöröttvonala P_{j-1} pontjának a P_j és P_{j+1} egyenes t -vel való metszéspontjától való távolsága

$$\frac{1}{x_j + h} = \frac{h}{2c} + \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4c^2}} = \frac{1}{c} + \sigma/h/$$

Bizonyítás: Parabolikus felületnél $v_j = \lambda e^j$. Így

$$\frac{1}{x_j + h} = \frac{v_{j-1} - v_j}{h v_{j-1}} = \frac{e^{(j-1)\alpha} - e^{j\alpha}}{h e^{(j-1)\alpha}} = \frac{1 - e^\alpha}{h} .$$

Tudjuk, hogy

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{h^2}{2c^2}, \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{h}{c} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4c^2}}, \quad \text{és}$$

$$e^\alpha = 1 + \frac{h^2}{2c^2} + \frac{h}{c} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4c^2}},$$

ezért

$$\frac{1}{x_j + h} = \frac{\frac{-h^2}{2c^2} + \frac{h}{c} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4c^2}}}{h} = -\frac{h}{2c} + \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4c^2}} = \frac{1}{c} + o(h)$$

Igaz ugyan, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x_j + h} = \frac{1}{c}$$

de a két felületosztály közötti teljes analógia az

$$\frac{1}{x_j + h} = \frac{1}{c}$$

összefüggést kívánná meg.

4. fejezet

GEODETIKUSOK

A geodetikusok a felületek belső geometriájának nagyon fontos részét alkotják. Ezért vizsgálatuk mindig nagy mértékben utal a felületek lényegi tulajdonságaira.

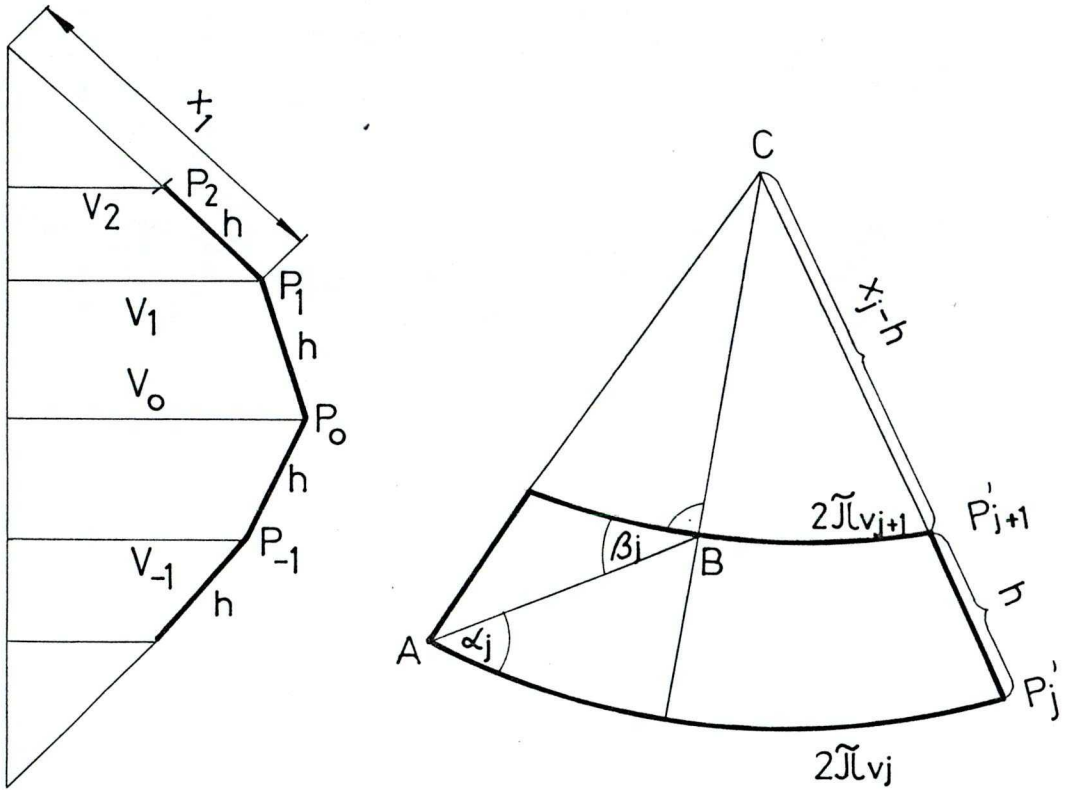
Pozitív görbületű differenciálható forgásfelületek geodetikusait az alábbi módon írhatjuk le: Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az f forgásfelület $u = 0$ -ra egyenlítővel rendelkezik az alábbi értelemben: Az $r(u)$ forgási sugár folytonos $r(u) \leq r(0)$ -ra és minden $u_+ > 0$ -ra u értelmezési tartományából létezik pontosan egyetlen olyan $u_- < 0$, amelyre $r(u_+) = r(u_-)$, és fordítva is, minden $u_- < 0$ -hoz létezik egyetlen $u_+ > 0$ ugyanezzel a relációval. Más szóval: minden északi szélességi körhöz létezik pontosan egy vele azonos sugaru déli szélességi kör és fordítva.

A γ_0 szög olyan, hogy létezik $u_+ > 0$ és $u_- < 0$ az értelmezési intervallumában úgy, hogy teljesül $r(0) \cos \gamma_0 = r(u_+) = r(u_-)$. Ekkor az a geodetikus, amely az egyenlítőt γ_0 szög alatt metszi, teljes egészében az $u_- \leq u \leq u_+$ által leírt zónában fut, mégpedig érinti az

$u = u_+$ és $u = u_-$ határoló szélességi köröket.

A fenti tétel arra vonatkozóan ad tehát kvalitatív leírást, hogy a geodetikusok az egyenlítőnek egy alkalmasan megválasztott környezetében hogyan viselkednek. Ezután azt vizsgáljuk, hogy a fenti tételt milyen formában kell módosítani ahhoz, hogy érvényes legyen pozitív görbületű szakaszosan kúpos felületekre.

Szakaszosan kúpos felületeken az egyenlítőnek nyilván a maximális forgási sugár fog megfelelni. Továbbá nem várhatunk valamely olyan erős állítás teljesülését, mint a határoló körök érintését a geodetikus által. Ennek az állításnak egy gyengített változatát remélhetjük megmutatni.



12. ábra

Tétel: Terítsük ki a síkba egy szakaszosan kúpos forgásfelület egy csonka kúpját és húzzunk rajta egy AB egyenes szakaszt /12. ábra/. Jelölje α_j az AB szakasz AP'_j ívvel bezárt hajlásszögét, β_j pedig az AB szakasz BP'_{j+1} -gyel alkotott hajlásszögét. Ekkor

$$\cos \beta_j = \frac{v_j}{v_{j+1}} \cos \alpha_j$$

Bizonyítás:

Az ABC háromszögből

$$\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_j \right)}{x_{j-h}} = \frac{\left(\sin \frac{\pi}{2} + \beta \right)}{x_j},$$

azaz

$$\cos \beta_j = \frac{x_j}{x_{j-h}} \cos \alpha_j$$

Mivel

$$2 \pi v_j = x_j \text{ ACP}_j^* \quad \text{✗}$$

$$2 \pi v_{j+1} = (x_j - h) \text{ ACP}_j^* \quad \text{✗}$$

és így

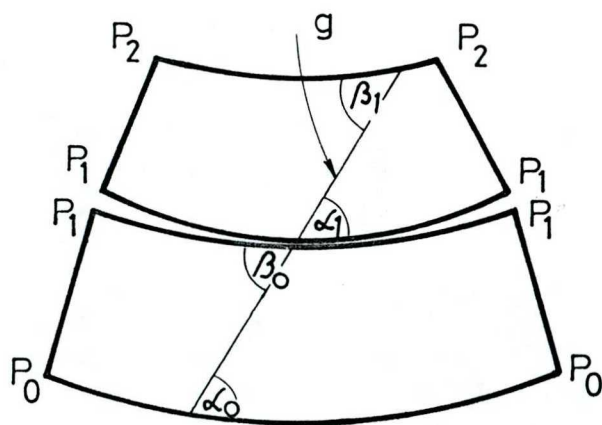
$$\frac{x_j}{x_j - h} = \frac{v_j}{v_{j+1}}$$

ezért

$$\cos \beta = \frac{v_j}{v_{j+1}} \cos \alpha_j .$$

Ha g egy geodetikus, akkor g egy síkba kiterített csónakúpaláston /13. ábra/ egyenes szakasz. Továbbá $\beta_j = \alpha_{j+1}$ minden j -re. Ezért

$$\begin{aligned} \cos \beta_j &= \frac{v_j}{v_{j+1}} \cos \alpha_j = \frac{v_j}{v_{j+1}} \cos \beta_{j-1} = \frac{v_j}{v_{j+1}} \frac{v_{j-1}}{v_j} \cos \alpha_{j-1} = \\ &= \frac{v_{j-1}}{v_{j+1}} \cos \alpha_{j-1} = \dots = \frac{v_0}{v_{j+1}} \cos \alpha_0 . \end{aligned} \quad /*/$$



13. ábra

Mivel $\cos \beta_j \leq 1$ -nek teljesülnie kell, ezért mindig teljesül

$$v_{j+1} \geq v_0 \cos \alpha_0 \quad // ** /$$

is. Innen kapjuk az alábbi tételeket.

Tétel: Negatív görbületű szakaszosan kúpos felület olyan geodetikusa, amely a minimális sugarú kört nullától különböző szög alatt metszi, nem zárt és a felület határáig folytatható.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a felületet a v_s és v_t [$s > 0$, $t < 0$] sugaru körök határolják [$v_s, v_t \geq 0$]. Mivel v_j növekszik $j > 0$ esetén, ezért $// ** /$ szerint $\cos \beta_j$ csökken, így β_j növekszik. Mivel definíció szerint $\beta_j \leq \frac{\pi}{2}$ mindig teljesül, így β_j mindig létezik, azaz a geodetikus a felület v_s sugaru köréig folytatható pozitív j indexekre. Hasonló az állítás bizonyítása negatív j indexekre is. Ha tehát egy geodetikus metszi a v_j forgási sugarú kört, akkor metszi a v_{j+1} és v_{j-1} forgási sugaru köröket is /feltéve, hogy ezek léteznek/, így a geodetikus nem lehet zárt és a felület határáig folytatódik.

Tétel: Legyen g egy pozitív görbületű szakaszosan kúpos forgásfelület olyan geodetikusa, amely a maximális sugarú

v_0 sugarú kört α_0 szög alatt metszi. Továbbá tegyük fel, hogy léteznek olyan $j > 0$ és $k < 0$ számok, amelyekre

$$v_j < v_0 \cos \alpha_0$$

$$v_k < v_0 \cos \alpha_0$$

Ekkor g azon v_{j_0} és v_{k_0} sugarú körök között marad $/j_0 > 0, k_0 < 0/$ amelyekre

$$j_0 = \min \{ j > 0 / v_j \geq v_0 \cos \alpha_0 \}$$
$$k_0 = \max \{ k < 0 / v_k \geq v_0 \cos \alpha_0 \}$$

Megjegyezzük, hogy a ******* feltétel azt fogalmazza meg, hogy a g /tovább nem folytatható/ geodetikus nem megy el a felület határáig.

Bizonyítás: Először meg kell mutatnunk az állításban szereplő j_0 és k_0 számok létezését.

Ha $j > 0$, akkor v_j csökkenő, ezért β_j , így α_j is csökken. Csökkenése során v_j ******* szerint $v_0 \cos \alpha_0$ alá csökken, azaz nem teljesül ******, azaz nem létezik valamely j -re β_j . Ekkor pedig j nem más, mint az előbbieken szereplő j_0 . k_0 létezésének bizonyítása hasonló.

Ha pedig β_{j_0} és α_{j_0} nem létezik, akkor g benne marad a fent említett sávban.

A fenti tételek bizonyítása során kaptuk a geodetikuskok alábbi tulajdonságainak igazolását.

Tétel: Pozitív görbületű felület geodetikusa a felület maximális forgási sugarától távolodva a köröket csökkenő szög alatt metszi. Negatív görbületű felület geodetikusa a felület minimális forgási sugarától távolodva a köröket növekvő szög alatt metszi.

A fenti tétel speciális esetét kapjuk akkor, ha a maximális sugarú kör egyben a felület egyenlítője, azaz minden j -re $v_j = v_{-j}$. Ekkor $j_0 = -k_0$.

Foglalkozzunk most azzal a kérdéssel, hogy egy pozitív görbületű felület geodetikusa mikor zárt. Tegyük fel, hogy teljesül a $/\ast\ast\ast/$ feltétel.

Tétel: Jelölje a P ill. Q a g geodetikusknak az egyenlítővel való két egymás utáni metszéspontját és legyen ψ az a szög, amellyel P -t el kell forgatni a felület forgástengely körül ahhoz, hogy átmenjen Q -ba. Ekkor g akkor és csak akkor egy zárt geodetikus része, ha $\psi/2\pi$ racionális.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy a geodetikus az egyenlítőt P -ben és Q -ban egyenlő szög alatt metszi. Tudjuk, hogy g -nek nincs közös pontja valamely v_{j_0} sugarú

S_{j_0} körrel. Ekkor az S_{j_0} és S_{j_0-1} által határolt, síkba kiterített paláston lévő darabja g -nek egyenes szakasz, így g S_{j_0-1} -et két egymással egyenlő szög alatt metszi. De innen már az is következik, hogy g S_{j_0-2} -t is két egymással egyenlő szög alatt metszi ahonnan kapjuk, hogy g -nek P -nél és Q -nál lévő szöge egyenlő.

Legyenek P_j pontok a geodetikusknak az egyenlítővel való egymás utáni metszéspontjai $/P_0 \equiv P/$. A fentiek szerint a P_j pontot P_{j+1} -be átvivő forgástengely körüli forgatás szöge j -től független φ állandó. A P_j sorozat így pontosan akkor áll véges sok pontból, ha $\varphi/2\pi$ racionális. Tehát ha $\varphi/2\pi$ nem racionális, akkor g nem lehet zárt.

Legyen $\varphi/2\pi$ racionális. Ekkor a véges sok P_j pontot jelöljük $P_0 \dots P_k \dots P_{k+s}$ -sel $/P_k \equiv P_{k+s}, k < s/$. Így a $P_{k-s} \dots P_0 \dots P_k \dots P_{k+s}$ geodetikus zárt.

Az alábbiakban meghatározzuk, mikor rendelkezik egy pozitív görbületű felület geodetikusa önátmetszéssel. Tegyük fel, hogy teljesül a $/***/$ feltétel.

Tétel: Jelöljük φ -vel az előző tételben szereplő szöget. Ekkor a g geodetikusknak akkor és csak akkor nincs önátmetszése, ha $\pi\varphi$ -nek egész számú többszöröse.

Bizonyítás: Elégségesség: Jelöljük R_j -vel a g -nek azokat a pontjait, amelyekben metszi a csonkakúppalástok határát.

Vetítsük merőlegesen az R_j pontokat egy a forgástengelyre merőleges S -síkra, így kapjuk az R_j pontokat. Legyen O az S -nek és a forgástengelynek a metszéspontja. R_0 a geodetikus kezdőpontja az egyenlítőn, R_n az egyenlítőn vele szemközti pont.

Mivel az $R_0'OR_j'$ szög monoton nő, így g -nek R_0 és R_n közötti szakaszát S -re vetítve egy önátmetszéssel nem rendelkező töröttvonalat kapunk. Így g -nek nem lehet önátmetszése R_0 és R_n között. Hasonlóképpen g -nek R_n és R_0 között sincs önátmetszése. Ugyanakkor az előző tétel szerint g zárt, azaz R_n sem metszéspont.

Szükségesség: Ha $\varphi > 2\pi$, akkor nyilvánvaló az önátmetszés. Ha $\pi\varphi$ -nek nem egész számu többszöröse, de 2π az, akkor g -nek R_0 -ban önátmetszése van.

Legyen $\varphi < 2\pi$. Ekkor jelölje Q_k g -nek az egyenlítővel való egymás utáni metszéspontjait. Q_{k_0} az a metszéspont, amelyre

$$\sum_{j=0}^{k_0-1} Q_j \circ Q_{j+1} \angle < 2\pi, \quad \sum_{j=0}^{k_0} Q_j \circ Q_{j+1} \angle > 2\pi.$$

Ha g -nek Q_k Q_{k+1} és Q_0 Q_1 közötti darabja a felületnek

ugyanazon az egyenlítő által határolt tartományában vannak, akkor Q_{k_0} Q_{k_0+1} és Q_0 Q_1 metszik egymást. Ha különböző tartományban vannak akkor, Q_{k_0+1} Q_{k_0+2} és Q_0 Q_1 metszik egymást.

Végül bebizonyítjuk a fejezet elején a pozitív görbületű differenciálható forgásfelületre kimondott tételt differenciageometriai eszközök segítségével.

Tudjuk, hogy mind a pozitív görbületű differenciálható forgásfelületek, mind a pozitív görbületű szakaszosan kúpos felületek konvexek. Akkor pedig alkalmazhatók rájuk Alekszandrov mértékkonvergenciáról szóló tételei /2/, azaz: ha egy differenciálható F forgásfelületet közelítünk F_j szakaszosan kúpos felületekkel, akkor a konvergáló felületsorozat által definiált mérték a differenciálható felület mértékéhez tart. Ebből pedig az következik, hogy a konvergáló felületsorozaton lévő geodetikusoknak egy konvergens sorozata a határfelület geodetikusa. A mértékek konvergenciája miatt teljesül a szögek konvergenciája is, azaz ha a p_s és q_s / F_s szakaszosan kúpos forgásfelületen lévő/ geodetikusok szöge α_s és $p_s \rightarrow p$, $q_s \rightarrow q$ / $p, q \in F$, $F_s \rightarrow F$, $s \rightarrow \infty$ / akkor α_s p és q szögéhez konvergál. A fenti tulajdonságok segítségével egyszerűen adódik az állítás. F_s maximális sugarú köre F egyenlítőjéhez tart

$/s \rightarrow \gamma/$. F_s e_s egyenlítőjével γ_0 szöget bezáró g_s geodetikusból kiválasztható egy $g \in F$ -hez tartó konvergens részsorozat. /Feltehető, hogy mindjárt $g_s \rightarrow g/$. g_s az F_s felületnek v_{j_s} és v_{k_s} sugarú körei között marad. v_{j_s} -ből és v_{k_s} -ből kiválasztható konvergens részsorozat, melyet ugyanugy jelölünk, mint az eredetit, amely F -nek v_j ill. v_k sugarához tart $/v_{j_s} \rightarrow v_j, v_{k_s} \rightarrow v_k/$, továbbá szimmetria okok miatt $v_j = r(u_+)$, $v_k = r(u_-)$. Mivel a g határgörbe geodetikus, így egyben érinti is az $r(u_+)$ és $r(u_-)$ sugarú köröket. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A bizonyítás menete néhány figyelemre méltó megjegyzésre ad alkalmat. A fentiek során differenciálgeometriai tételt bizonyítottunk oly módon, hogy a megfelelő tulajdonságot először egy egyszerűbb felületosztályra mutattuk meg, majd határátmenetet alkalmaztunk. A fenti állítás igazolása tiszta differenciálgeometriai eszközökkel bonyolultabb lett volna. Mivel itt nem differenciálást, hanem tiszta geometriai fogalmakat /szög, egyenes/ használtunk, így a bizonyítás egyben szemléletesebb is.

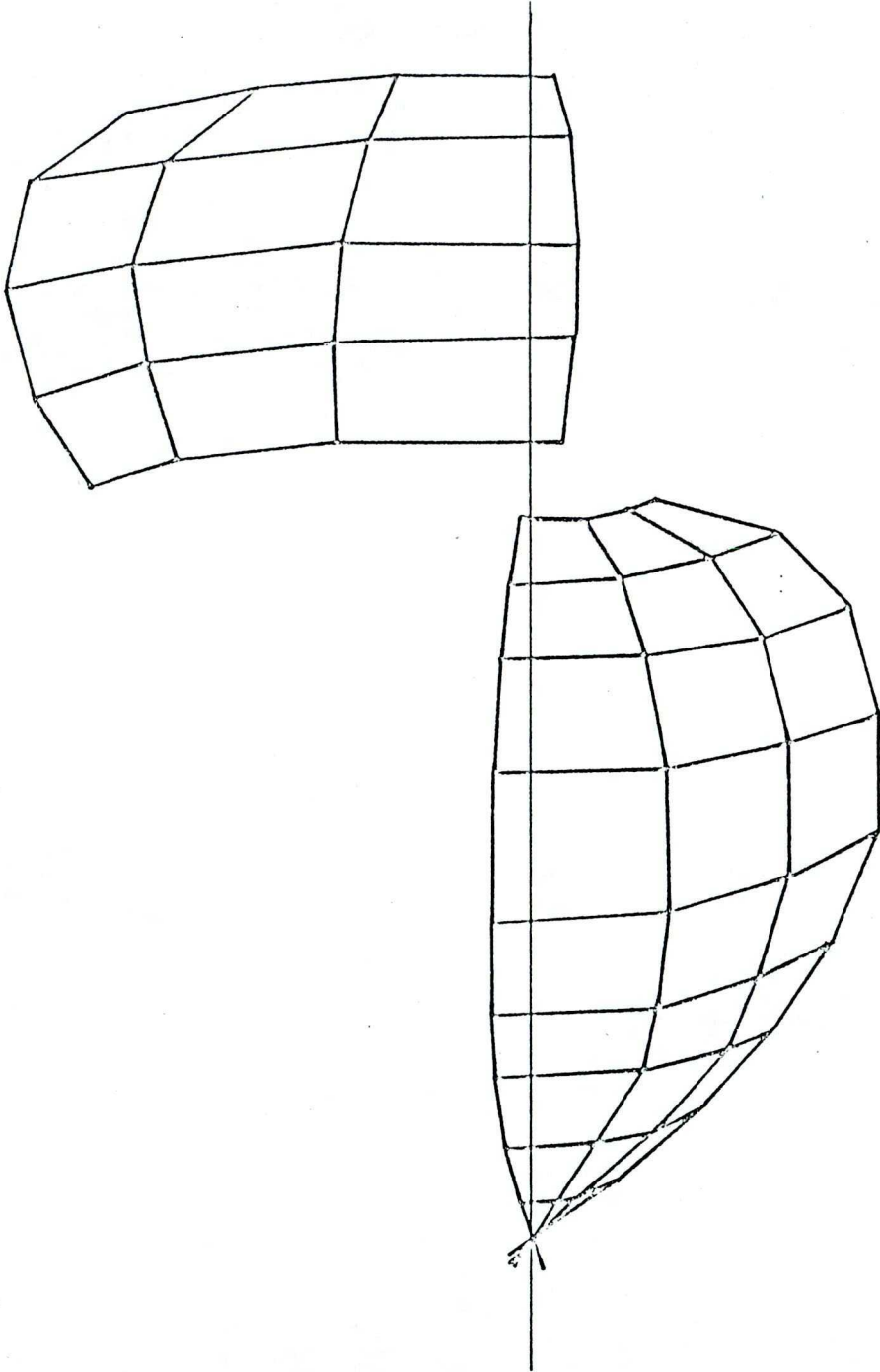


IRODALOMJEGYZÉK

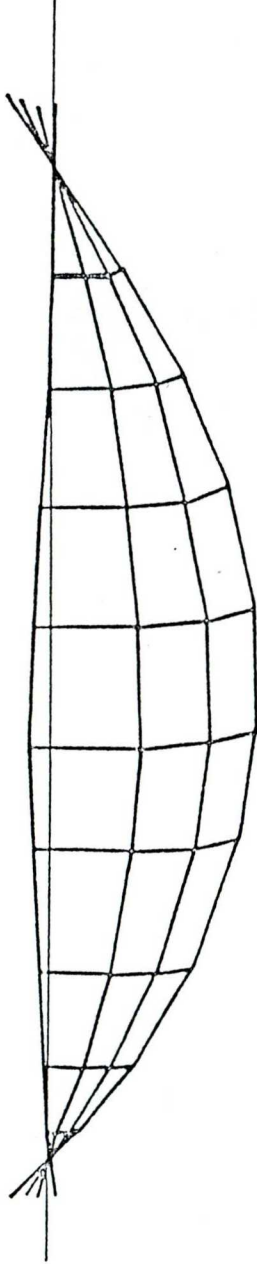
- /1/ R. Sauer: Differenzengeometrie, Springer-Verlag,
Berlin Heidelberg New-York 1970
- /2/ A. D. Alexandrow: Die innere Geometrie der konvexen
Flächen, Akademie-Verlag, Berlin 1955
- /3/ Pólya György: A problémamegoldás iskolája

- 73 -

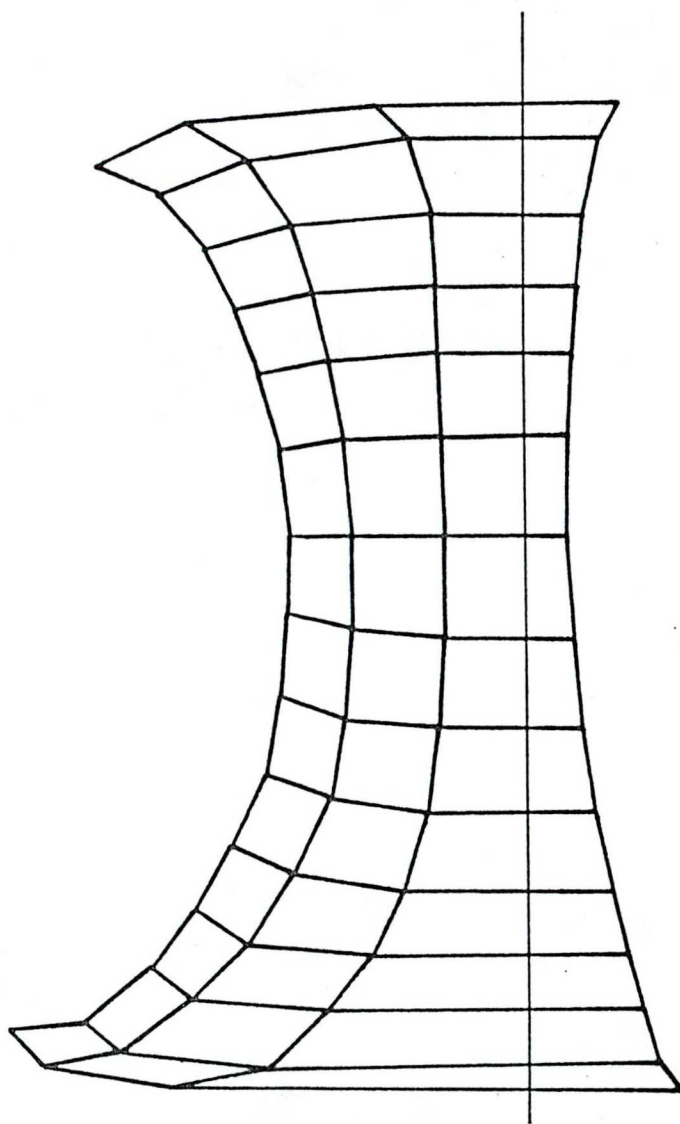
MELLÉKLETEK



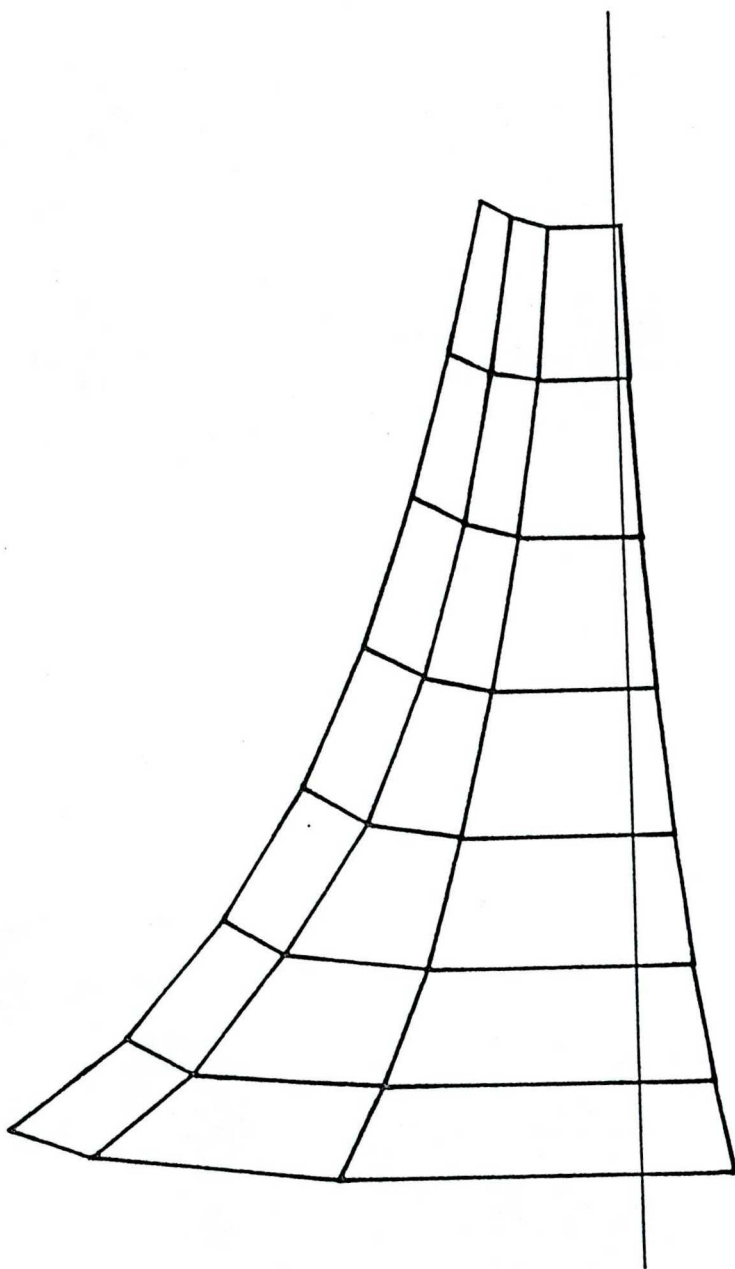
Hiperbolikus és parabolikus pozitív
görbületű felület



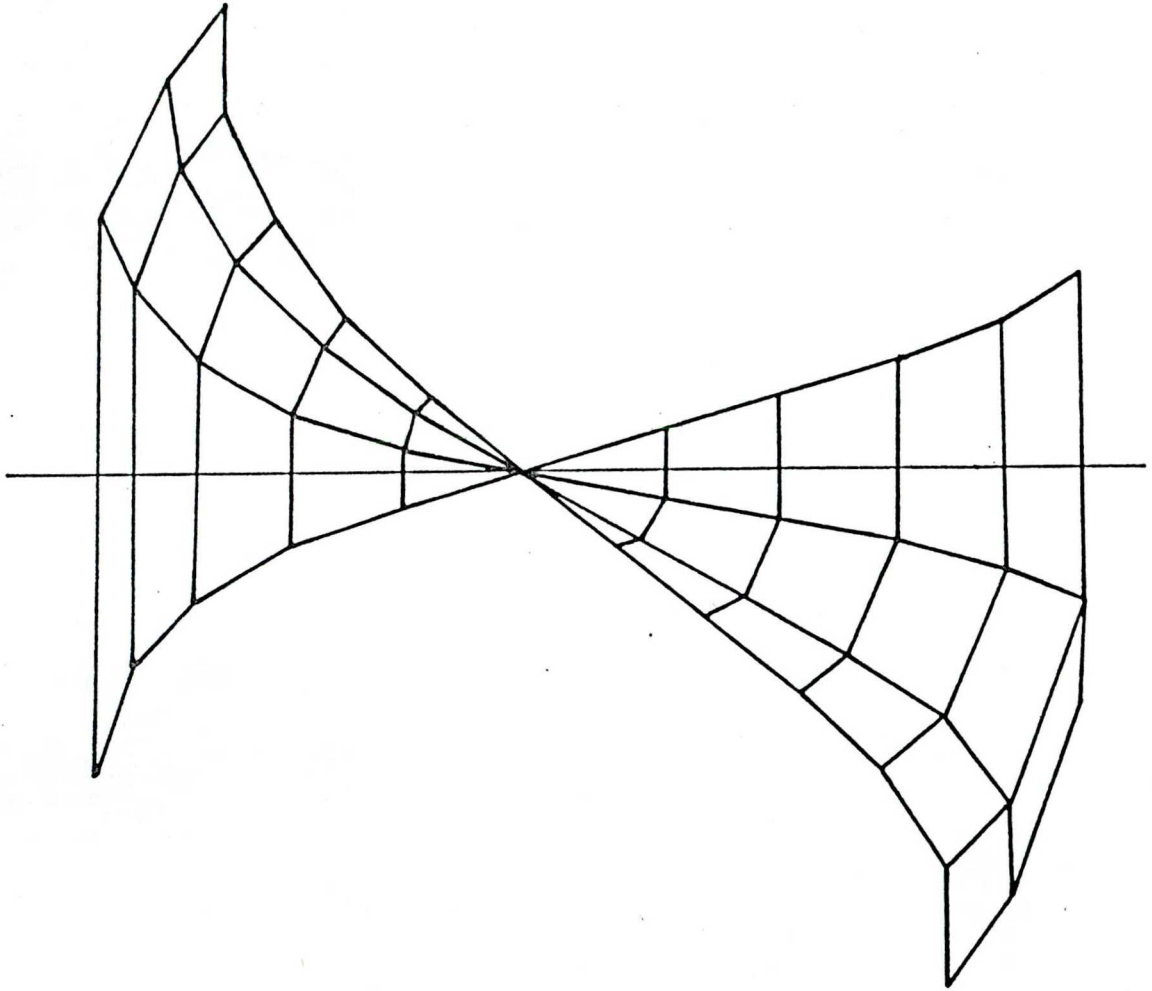
Elliptikus pozitiv görbületű
felület



Hiperbolikus negativ görbületű
felület



Parabolikus negativ görbületű
felület



Elliptikus negativ görbületű
felület