

NEMKOMPENZATORIKUS PREFERENCIA-STRUKTÚRAK

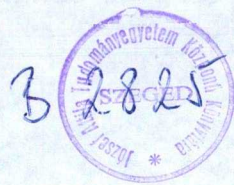
ÉS SÜLYÖZÁSOK

Egyetemi doktori értekezés

SOLYMOSI TAMÁS

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM

SZEGED 1987



TARTALOMJEGYZÉK

<u>Bevezetés</u>	1
<u>1. Problématípusok és megoldási módszerek</u>	3
1.1. A többtényezős döntési probléma	3
1.2. Többcélú programozási módszerek	6
1.3. 'Outranking' módszerek	8
1.4. Additív hasznosságfüggvények illesztései	15
<u>2. Egytényezős értékelések modellezése</u>	18
2.1. Kétváltozós relációk, rendezések	18
2.2. Preferencia, indifferencia, összehasonlíthatatlanság	22
2.3. Teljes preferencia-struktúrák	24
2.4. Parciális preferencia-struktúrák	33
<u>3. Nemkompenzatórikus preferencia-struktúrák</u>	37
3.1. A többtényezős preferencia-struktúra fogalma ..	38
3.2. A nemkompenzatórikusság fokozatai	41
3.3. Altalánosított nemkompenzatórikus struktúrák ..	44
3.4. Teljesen nemkompenzatórikus struktúrák	49
<u>4. Súlyozások</u>	56
4.1. Elméleti megközelítés	57
4.2. Egy súlyozási eljárás, a középponti súlyok	60
<u>Irodalmi hivatkozások</u>	65

BEVEZETÉS

Döntési szituációnak nevezünk egy olyan helyzetet, melyben egy személy, vagy személyek egy csoportja valamely tevékenységével kapcsolatban különböző választási lehetőségekkel kerül szembe. Személyes életünk során szüntelenül találkozunk ilyen helyzetekkel, s tapasztalataink, ismereteink, megérzéseink, másrészt érdekeink, céljaink, vágyaink befolyásolják döntéseinket. A gazdasági, társadalmi élet is számos döntési helyzetet eredményez, és minél nagyobb jelentőségű a probléma, annál inkább szükséges tudatos információgyűjtéssel, rendszerezett gondolkodásmóddal, tudományos módszerek és eredmények felhasználásával megvizsgálni, megalapozni vagy megcáfolni intuíciónkat. A karácsonyi ajándékok vásárlása például nem igényel különösebb előkészületet, egy orvosi diagnózis felállítása és az erre épülő terápia megtervezése viszont nem nélkülözheti az előnyök, illetve hátrányok tudatos mérlegelését, míg egy úthálózattal, vagy egy nagyobb beruházással kapcsolatos jelentőségteljes döntések meghozatalához már matematikai modellek felállítása és számítógépes szimuláció is elengedhetetlen lehet.

A legtöbb döntési helyzetben a döntéshozó, a személy, aki a választást véghezviszi, egyszerre több, egymással konfliktusban álló célját szeretné érvényre juttatni, azaz több egymásnak ellentmondó szempont, ún. értékelési tényező szerint ítéli meg a választási lehetőségeket, az alternatívákat. Meg kell tehát találnia az elérhető, megvalósítható lehetőségek körén belül azt az alternatívát, amely a számára legmegfelelőbb kompromisszumot jelenti eltérő szándékai között. Mivel az ilyen ún. többtényezős döntési problémák megfogalmazásakor általában nem található olyan egyetlen, "természetes" és "kezelhető" szempont, amely a végső döntés alapjául szolgálhatna, ezért az operációkutatás klasszikus, egy célfüggvény szerinti optimalizálási modelljei nem alkalmasak.

Nem fejeződhet tehát be az az elemzési, tanulási, újrafogalmazási folyamat, ami az alternatívák, a kényszerek meghatározásán, az értékelési tényezők definiálásán, a megfelelő mérési skálák kiválasztásán, a szükséges adatok, információk összegyűjtésén keresztül egy formális modell felállításáig, egy eljárás kiválasztásáig, feltételeinek ellenőrzéséig tart, hanem a többtényezős döntési eljárásoknak maguknak is további információkat kell igényelniük a döntéshozótól, hogy ezek hasznosításával hozzásegítsék a probléma, a szándékai közötti ellentétek jobb megértéséhez, a számára legjobb választáshoz. A döntési helyzet felismerésétől a probléma matematikai megfogalmazásáig tartó, az imént címszavakban jelzett tevékenységeket tartalmazó modellépítési folyamat során felmerülő nagyon fontos, de alkalmazásfüggő kérdésekkel kapcsolatban a témában megjelent számos esettanulmányra utalunk, kiragadott példaként megemlítjük Keeney-Raiffa(1976) könyvének 8.fejezetét, vagy a Bell és mtsai (1977) szerkesztésében megjelent kötet alkalmazásokkal foglalkozó részében található cikkeket. Az egyediségeken túli általános mozzanatokot elemzi, és egy egységes módszertani megközelítést javasol könyvében Roy(1985).

A bonyolultságuk és nagy jelentőségük miatt nehéz problémák elemzése, a gyors és eredményes döntések iránti egyre nagyobb igény, a klasszikus optimalizálási modellek alkalmazási nehézségei, valamint a számítógépek egyre hatékonyabb és egyre kényelmesebb felhasználásának lehetősége együtt eredményezte azt, hogy az operációkutatás napjainkban talán leggyorsabban növekvő területévé vált a többtényezős döntések elmélete és gyakorlata.

1. PROBLÉMATÍPUSOK ÉS MEGOLDÁSI MÓDSZEREK

1.1. A többtényezős döntési probléma

Egy többtényezős döntési helyzet elemei

- a döntéshozó: a személy, aki érdekei, az alternatívákra vonatkozó értékrendszere alapján a döntést, választást véghezviszi;
- az alternatívák halmaza: a lehetőségek összessége, amik között a döntéshozó választhat;
- a kritériumok halmaza: azok a tekintetbe vett szempontok, értékelési tényezők, amik segítségével a döntéshozó kifejezi érdekeit, céljait az alternatívák megítélésekor.

Az alternatívák ezután A -val jelölt halmaza lehet véges vagy végtelen, explicit vagy implicit korlátokkal megadható, fix vagy a döntési eljárás során változó. Szokás az alternatívákat bizonyos attribútumaik, tulajdonságaik, jellemzőik kombinációjaként szerepeltetni, azaz meghatározni az egyes tulajdonságok szerint lehetséges "értékek" A_j ($j=1, \dots, m$) halmazát, és a pusztán leíró jellegű $A \rightarrow A_j$ ún. attribútum-leképezéseket. Ilyenkor $a=(a_1, \dots, a_m)$, $a \in A$, $a_j \in A_j$ ($j=1, \dots, m$), azaz $A \subseteq A_1 * \dots * A_m$. A legtöbb döntési helyzetben az A valódi részhalmaz, mivel az $A_1 * \dots * A_m$ tartalmaz megvalósíthatatlan, vagy nem létező attribútum-kombinációkat. Sok formális modellben mégis felteszik, hogy $A = A_1 * \dots * A_m$, vagyis a döntéshozó képes "értelmes" összehasonlításokra bármely két attribútum m -es között.

A kritériumok $C=\{c_1, \dots, c_n\}$ ($n \geq 2$) halmazát, az alternatívahalmaznak azok az értékelést kifejező $c_i: A \rightarrow (C_i, R_i)$ ($i=1, \dots, n$) "leképezései" alkotják, ahol C_i az i -ik értékelési szempont szerint lehetséges "értékek" összességét, míg R_i azt a C_i -n értelmezett kétváltozós relációt jelöli, amely kifejezi, hogy az adott szempontból a döntéshozó mit tekint előnyösebbnek. Egy kritérium tulajdonképpen az alternatívahalmazon ad meg egy értékelést, ezt hangsúlyozandó használ-

tuk a kissé pontatlan jelölést. Az "igazi" $A \rightarrow C_1$ hozzárendeléseket sokszor tekinthetjük attributum-leképezéseknek is, másképpen, az alternatívák jellemzői sokszor magától értetődően értékelési tényezőkké válnak egy "természetes" rendezés által. Egy beruházásnak például lehet jellemzője a szükséges hitel összege, és a szóbajöhethető beruházások közötti választásnál lehet megítélési szempont az, hogy minél kisebb legyen a tartozás.

Kritérium alatt gyakran egy olyan $A \rightarrow R$ függvényt értenek, amely a tekintett megítélési szempontból jobb alternatívához nagyobb függvényértéket rendel, és fordítva, magasabb függvényérték tényleg jobb alternatívát jelöl, lásd pl. Roy-Vincke(1981). Mi az értékelést reprezentáló R_1 relációtól egyelőre nem követeljük meg a valós számokon szokásos $>$ rendezés, mint látni fogjuk "szigorú" tulajdonságait.

A döntéshozó lehet személyek egy csoportja is, nem foglalkozunk azonban a különböző értékrendszerű, eltérő érdeklődésű egyénekből álló csoportok döntéseivel /'group decision making'/, valamint az ún. társadalmi, közösségi választás /'social choice'/ elméleteivel. Ezekben az esetekben nemcsak az értékelési tényezők, hanem az érdekelttek között is ellentétek feszülnek. Az utóbbi témával kapcsolatban Arrow(1963), Sen(1970), Fishburn(1973a) könyvét említjük, míg a csoportok döntési problémáit némely, elsősorban az egyéni választásra kidolgozott módszer megfelelően módosított változataival kezelhetjük, lásd pl. Keeney-Raiffa(1976) 10. fejezetét.

Az irodalomban sokszor előforduló autóvásárlási problémában /lásd pl. Kindler-Papp(1977)/ az alternatívák maguk a döntéshozó számára elérhető piacon lévő autók, jellemzésükre használhatjuk az árat, a teljesítményt, a fogyasztást, a kényelmességet, a színt, az ajtók számát stb.. Az alternatívahalmaz itt véges, implicit korlátokkal, felsorolással megadott, fix. Az imént felsorolt attributumok közül az ár, a teljesítmény, a fogyasztás természetes módon kritériumok is lehetnek feltéve, hogy a döntéshozó előnyben részesíti az

olcsóbb, a nagyobb teljesítményű, ill. a kisebb fogyasztású autókat, míg az ajtók száma, vagy a színek szerinti megítélés már döntéshozónként változhat. Gondot jelent és mérlegelést kíván a választásnál az, hogy egy olcsóbb autó általában kisebb teljesítményű, egy nagyobb teljesítményű többet is fogyaszt, de ha mégsem, akkor viszont biztosan jóval drágább stb.. Meg kell tehát találni a legjobb kompromisszumot ellentétes céljaink között.

A döntési eljárás feladatát egy, az alternatívahalmazon értelmezett olyan kétváltozós R reláció felépítéseként adhatjuk meg, amely tükrözi a döntéshozónak az eljárás során kikristályosodó értékrendszerét. A döntés alapjául szolgáló R reláció megkonstruálásához az egyes kritériumok szerinti értékelések aggregálására, a bennük foglalt információk összeolvasztására van szükség. Ez azonban további, magukra a kritériumokra, pl. egymáshoz viszonyított fontosságukra vonatkozó információkat igényel. A döntéshozó értékrendszeréről nyert ismeretek konkrét formáját, azok hasznosítását, újabb tudássá szervezését a formális modell hipotézisei határozzák meg. Fontos tehát megvizsgálni azt, hogy a könnyebben kezelhető modelleknek a döntéshozóra tett szigorúbb feltevései valóban teljesülnek-e. Úgy tűnik, hogy a többtényezős döntési eljárások eredményessége abból adódik, hogy az eredeti problémát egyszerűbb, könnyebben átlátható részproblémákra bontja, így megoldásukkor egyrészt csökken a figyelembeveendő dolgok száma, másrészt a lényegi mozzanatok kiemelésével a magasabb szintű probléma is átláthatóbbá válik. Ez a tanulási folyamatoknak is szerves része, hiszen pl. Miller (1956) vizsgálatai szerint az emberi agy nem képes 7 ± 2 -nél több dolgot egyidejűleg figyelembe venni.

A következő alfejezetekben a többtényezős döntési problémák megoldásának néhány megközelítési módját ismertetjük. Csak az olyan ún. determinisztikus esetekkel foglalkozunk, melyekben a modell explicit módon nem tartalmaz a döntéssel kapcsolatos bizonytalanságokat reprezentáló elemeket, pl.

valószínűségi eloszlásokat. Ilyenkor a választás következményei ismertek, szemben az ún. sztochasztikus esettel, amelyben a döntés következményei a döntéskor nem ismertek teljes bizonyossággal. Gondoljunk arra, hogy az autóvásárláskor azt a szempontot is határozottan figyelembe vehetjük, hogy az autót mire fogjuk használni. Ugyanis mindennapi használatra, költözködésre, kirándulásra vagy éppen versenyzésre más és más tulajdonságú autók a legmegfelelőbbek. A sztochasztikus esetre vonatkozóan a következőkre utalunk: Neumann - Morgenstern(1947), Fishburn(1970a), Keeney-Raiffa(1976), Pfanzagl(1968), Fishburn(1981).

1.2. Többcélú programozási módszerek

A többtényezős döntési problémát természetes az egy célfüggvény szerinti optimalizálási modellekhez hasonlóan megfogalmazni, az ott elért eredményeket segítségül hívni. Az alternatívahalmazt ilyenkor explicit, matematikai formában kifejezhető korlátokkal adjuk meg az ún. döntéstérben, vagyis $A = \{x \in \mathbb{R}^m : g_k(x) \leq 0 \text{ } k=1, \dots, p\}$, ahol $g_k: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ($k=1, \dots, p$) valamilyen függvények. Az $x = (x_1, \dots, x_m)$ komponenseit döntési változóknak nevezik. Az alternatívahalmaz tehát többattributumos szerkezetű $A_j = \mathbb{R}$ ($j=1, \dots, m$), $A \subseteq A_1 \times \dots \times A_m$, és az alternatívákat azonosítottuk az egyes attributumok szerinti értékek kombinációjával. A kritériumok szintén valós értékű függvényekként adóttak, azaz $C_i \in \mathbb{R}$, $R_i = \mathbb{R}$ ($i=1, \dots, n$). Ez magában foglalja azt a feltevést, hogy az adott szempont szerinti magasabb érték tényleg jobb. A kritériumokat reprezentáló $f_i: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ($i=1, \dots, n$) célfüggvényekkel a következő ún. vektormaximalizálási problémaként fogalmazhatjuk meg az eredeti problémát:

$$\text{"Max"} \quad (f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad x \in A.$$

Mivel az alternatívák képei az ún. céltérben, $\mathbb{R}^n$ -ben, csak

parciálisan rendezettek a fenti "a több, jobb" feltevés alapján, így a vektormaximalizálási probléma matematikailag rosszul definiált, ezért használtunk idézőjelet.

A kritériumok közötti konfliktus úgy nyilvánul meg, hogy az alternatívahalmaz legtöbbször nem tartalmaz ideális megoldást, ami egyszerre jelent optimumot az összes célfüggvény szerint, és aminek az ideális pont a képe a céltérben. Vannak viszont, általában túl sokan is, olyan lehetséges megoldások, melyekhez nem találhatók semmilyen szempontból sem rosszabb, de valamilyen szempontból határozottan jobb lehetséges megoldások. Az ilyen $x^E \in A$ efficiens megoldásokra tehát igaz, hogy nincs olyan $x \in A$, hogy $\forall i \in N: f_i(x) \geq f_i(x^E)$, és $\exists i \in N (:= \{1, \dots, n\}): f_i(x) > f_i(x^E)$ teljesülne. Mivel azt mondjuk, hogy x^1 dominálja x^2 -t, ha $\exists i \in N: f_i(x^1) > f_i(x^2)$ és $\forall i \in N: f_i(x^1) \geq f_i(x^2)$, nem meglepő, hogy az efficiens megoldásokat gyakran nemdominált megoldásoknak is nevezik.

Lehet osztályozni a többcélú programozási módszereket a kritériumok aggregálásához szükséges további információ igénylésének időzítése szerint, lásd pl. Hwang-Masud(1979). Az optimalizálást megelőző információnyújtást megkívánó módszerek tulajdonképpen egy "abszolút" célfüggvény megkonstruálásával "visszavezetik" a feladatot egy egyetlen célfüggvény szerinti optimalizálási problémára. Tehetik ezt egy olyan $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ún. értékfüggvény / 'value function' / meghatározásával, melyre a $v(f_1(x^1), \dots, f_n(x^1)) \geq v(f_1(x^2), \dots, f_n(x^2))$ pontosan akkor teljesül, ha a döntéshozó legalább olyan jó-nak tartja az x^1 alternatívát, mint az x^2 -t; de tehetik kritériumonkénti ún. elvárási szintek, és a szintek el nem érését csökkenéssel, míg minél jelentősebb meghaladásukat egyre nagyobb növekedéssel "jutalmazó" célfüggvény meghatározásával; az ideális ponthoz valamilyen távolságfogalom szerint legközelebb eső lehetséges megoldás megkeresésével; vagy éppen a kritériumok prioritását tükröző lexikografikus rendezés bevezetésével.

A második csoportba az ún. interaktív módszerek tartoz-

nak, melyek az optimalizálás folyamatában, lépésenként igénylik és dolgozzák fel az információkat, de az eredmények közlésével segítik is a döntéshozót a probléma megértésében, továbbá lehetőséget adnak az előzőek módosítására is. Egy lépésben általában egy, az eredeti problémához kapcsolódó egyetlen célfüggvény szerinti optimalizálás történik. Az eredmény ismeretében a döntéshozó további információkat nyújt egy újabb, remélhetően kielégítőbb megoldást adó feladat definiálásához, és így tovább egészen addig, amíg a döntéshozó számára elfogadható megoldást nem kapunk. E módszerek változatos optimalizálási modelleket alkalmaznak és különböznek a megkívánt információ tartalmát és formáját tekintve is.

A harmadik csoportot azok a módszerek alkotják, melyekben először meghatározzák az összes efficiens pontot, de legalábbis kellően sokat, és a döntéshozó utólag választ közülük. Érdekes és sokat vizsgált kérdés az, hogy milyen algoritmusokkal lehet meghatározni az összes efficiens pontot, vagy lineáris kényszerek és lineáris célfüggvények esetén az összes efficiens csúcspontot. Az elméleti alapokkal kapcsolatban utalunk Szidarovszky-Molnár(1986) könyvének 3. fejezetére. E módszerek alkalmazási területét behatárolja az a tény, hogy a túl sok efficiens megoldás közül választás gyakorlatilag kivihetetlen.

További szempontok, pl. lineáris vagy nemlineáris-e a modell; van-e diszkrét döntési változó, vagy mind folytonos; szerinti osztályozást és a konkrét módszerekre vonatkozó irodalmi hivatkozásokat ad Evans(1984). A témában megjelent kézikönyvek közül Chankong-Haimes(1983) és Steuer(1986) munkáját említjük.

1.3. 'Outranking' módszerek

Az implicit korlátokkal, pl. felsorolással megadott,



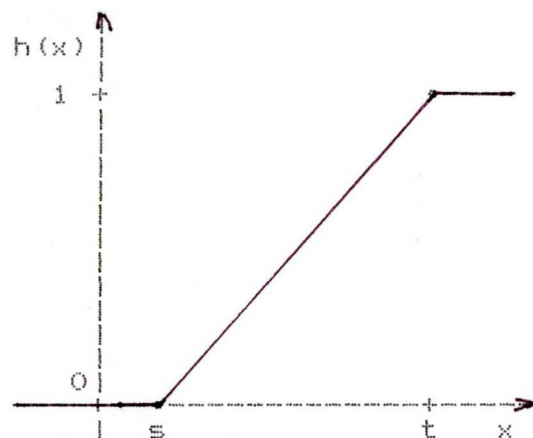
véges és nem túl sok elemet tartalmazó alternatívahalmazon végrehajtandó különböző feladatok, pl. a "legjobb" elem kiválasztása, "jó" elemek részhalmazainak meghatározása, az elemek "jóság" szerinti sorbarendezeése stb., megoldásában segíthetnek a gyakorlatilag könnyen kivitelezhető ún. 'outranking' módszerek.

Közös kiindulási alapjuk az, hogy az alternatívák közötti, az előző alfejezetben definiált, általában túl szegényes dominancia-relációt kell gazdagítani a döntéshozó biztos, határozott ítéleteire támaszkodva anélkül, hogy irreálisan szigorú feltevésekkel éljünk egy egzaktabb matematikai leírhatóság kedvéért. Más szempontból ez azt jelenti, hogy e módszerek heurisztikusak, a rugalmas alkalmazhatóságért és egyszerű kezelhetőségért a matematikai megalapozásról, pl. egy axiomatikus felépítésről kell lemondanunk.

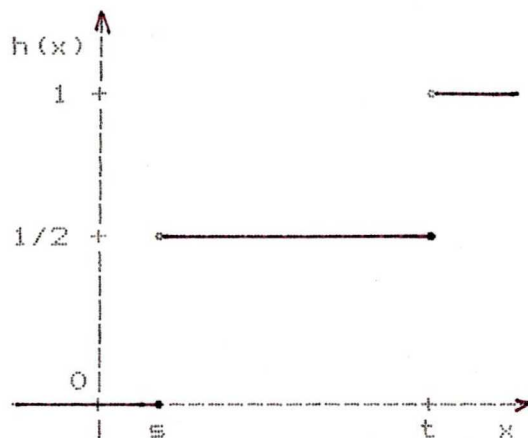
A módszerek alkalmazása az egyes kritériumok felépítésének alapjául szolgáló olyan $f_i: A \rightarrow R$ ($i=1, \dots, n$) ún. skála-függvények megadásával indul, melyeknél az adott szempontból "határozottan jobb" alternatívához nagyobb skálaérték tartozik. Technikai, leíró jellegük miatt tekinthetjük őket attribútum-leképezéseknek is, tágabban értelmezve az 1.1. alfejezetben használt definíciót. Mivel nagyobb skálaérték nem feltétlenül jelent "határozottan jobb" alternatívát, pl. valószínűleg mindegy, hogy egy autó maximális sebessége 120 vagy 130 km/h; továbbá különbség lehet értékítéleteink erősségében, bizonyosságában is, pl. valószínűleg "határozottabban jobb"-nak ítéljük azt az állást, amely 4000, mint amely 2000 Ft-al magasabb fizetést jelent egy harmadik álláslehetőséggel szemben, ezért az 'outranking' módszerek bizonyos küszöbértékek, ill. az értékítéletek határozottságát kifejező preferencia-intenzitás függvények meghatározásával folytatódnak. Ezek felhasználásával alakíthatók kritériumokká a skála-függvények. A döntéshozóval folytatott konzultáció folyamán meg kell tehát határoznunk olyan O_i -t, ill. küszöbértékeket, ill. $h_i: R \rightarrow [0,1]$ ($i=1, \dots, n$) monoton nem csökkenő

függvényeket, melyekre teljesül, hogy $h_1(x)=0$, ha $x \leq s_1$; $0 < h_1(x) < 1$, ha $s_1 < x \leq t_1$; $h_1(x)=1$, ha $t_1 \leq x$; , valamint, hogy az "a $\in A$ preferált a b $\in A$ -hoz képest az i.-ik tényező szerint" ítélet határozottsági fokát a $h_1(f_1(a)-f_1(b)) \in [0,1]$ érték adja meg.

Az s indifferenciaküszöb bevezetésével a nem számottevő skálaértékbeli különbségektől való eltekintés, míg a t preferenciaküszöb segítségével a teljesen bizonyos értékítéleteket eredményező különbségek megadása válik lehetővé. A közbülső tartományon való viselkedés jellemzésére alapvetően két típusú intenzitásfüggvényt használnak, a lineárisat /ld. 1.3.1. ábra/, ill. a lépcsőset /1.3.2. ábra/.



1.3.1. ábra Lineáris



1.3.2. ábra Lépcsős

preferencia-intenzitás függvény $/x=f(.)-f(.)/$

A hagyományos, matematikailag jól kezelhető kritériumok az $s=t=0$ esetként adódnak. Ilyenkor a skálafüggvények reprezentálják a kritériumokat, mint például az előző alfejezetben tárgyalt többcélú programozási módszerekben is.

A tekintettbe vett szempontok szerinti értékeléseket ily módon reprezentálva, azok aggregálása következik. Ez többféleképpen megtehető, de várhatóan mindenképpen eredményesebbek vagyunk, ha jobban támaszkodunk a fontosabb szempontokkal kapcsolatos ítéletekre. Szükség van tehát az értékelési tényezők relatív fontosságát kifejező $w_i \geq 0$ ($i=1, \dots, n$)

$\sum_1 w_i = 1$ súlyok meghatározására is, ugyancsak a döntéshozótól származó információk alapján.

A továbbiakban először a Roy, ill. a Roy és munkatársai által kidolgozott ELECTRE módszerek /ld. pl. Roy(1973,1977), Roy-Vincke(1981)/ közül röviden az ELECTRE-I módszert /ld. Roy(1968), magyarul pl. Kindler-Papp(1977), Szidarovszky-Molnár(1986)/ ismertetjük, főleg a későbbiekben előforduló hivatkozások kedvéért, majd a tudomásunk szerint magyarul még nem ismertetett, Brans és Vincke által kifejlesztett PROMETHEE módszereket /Brans-Vincke(1985), a sztochasztikus esetre való alkalmazását ld. Mareschal(1986)/ tárgyaljuk, elsősorban egyszerű gyakorlati alkalmazhatóságuk miatt.

Az ELECTRE módszerekben az 'outranking' reláció /gondoljunk a "legalább olyan jó, mint" értékelésre és a rövidség kedvéért jelöljük "S"-el/ megkonstruálásánál két alternatíva /mondjuk a és b/ összehasonlításakor meg kell vizsgálnunk, hogy mely kritériumok támasztják alá az a"S"b kijelentést, és melyek mondanak neki ellent.

Az a"S"b állítással összeillőnek tekintenek minden olyan kritériumot, mely szerint a"nem rosszabb"b-nél, és össze nem illőnek az olyanokat, melyek szerint b"határozottan jobb"a-nál. Természetesen számít az érvek, ill. ellenérvek fontossága is, ezeket két különböző elv szerint számított értékkel fejezik ki.

Az ELECTRE-I módszerben, ahol nincs lehetőség kritériumonkénti indifferencia-, ill. preferenciaküszöbök megadására, azaz $s_i = t_i = 0$ ($i=1, \dots, n$), az a"S"b-vel összhangban levő kritériumok jelentőségét a

$$c(a,b) = \sum_{i=1}^n w_i (1 - h_i(f_i(b) - f_i(a)))$$

képlettel definiált ún. konkordancia-indexszel fejezzük ki. Összegezzük tehát a fontosságokat reprezentáló súlyokat, de eltekintünk az egyes kritériumok szerinti skálaértékek különbségeinek nagyságától. A konkordancia-indexre mindig igaz a $0 \leq c(a,b) \leq 1$; minél közelebb van 1-hez, annál jelentősebb

szempontok támasztják alá az $a \succ b$ kijelentést ; értéke 1 , ha a dominálja b -t.

Az ellenérvek fontosságát az ún. diszkordancia-index adja meg, képlete

$$d(a,b) = \max\{w_i g_i (f_i(b) - f_i(a)) : i=1, \dots, n\}$$

, ahol g_i olyan lineáris preferencia-intenzitás függvény, melyre $s_i=0$, $t_i=\max\{f_i(a): a \in A\} - \min\{f_i(a): a \in A\}$ ($i=1, \dots, n$). Itt lényeges szerepet játszik a skálaértékek különbségének nagysága, de az ellenérvek nem erősítik egymást, hatásuk nem összegződik.

Választva egy 1-hez közeli c és egy 0-hoz közeli d küszöbértéket az

$$a \succ b : \Leftrightarrow c(a,b) \geq c \text{ és } d(a,b) \leq d$$

által definiált S reláció várhatóan jól közelíti az " S " értékelést, hiszen elég súlyos érvek szólnak mellette és nincs olyan mértékű ellenérv, amely kijelentésünket megvétőzhatná.

A most ismertetett konkordancia--diszkordancia elv közös az ELECTRE módszerekben, az ezen elv alapján felépített 'outranking' reláció hasznosítása azonban már a különböző feladattípusokra tervezett módszerekben más és más. A 3. fejezetben alaposabban meg fogjuk vizsgálni a kritériumok aggregálására itt használt koncepció tulajdonságait.

A PROMETHEE módszerekben is a h_i preferencia-intenzitás függvényekkel alakítjuk kritériumokká az f_i skálafüggvényeket. Az első lépés ezek, valamint a w_i kritériumsúlyok meghatározása a döntéshozóval folytatott megbeszélés útján. Ezután a

$$p(a,b) = \sum_{i=1}^n w_i h_i (f_i(a) - f_i(b))$$

képlettel definiált ún. preferencia-indexet számítjuk ki minden $a, b \in A$ alternatívapárra. Ez a jellemző is, hasonlóan a konkordancia-indexhez, mindig 0 és 1 közé esik, de egyrészt az a "határozottan jobb, mint" b kijelentés mellett szóló ér-

vek erejének mértékéül szolgál, másrészt ha a dominálja b -t, akkor sem feltétlenül $p(a,b)=1$, viszont biztosan $p(a,b)=0$. Lineáris preferencia-intenzitás függvényt használva arra is módunk van, hogy a skálaértékek különbségeinek nagyságát is figyelembe vegyük. Kaptunk tehát egy olyan nemnegatív elemű mátrixot, melynek főátlójában csupa 0 elem áll, és elemeire teljesül, hogy $p(a,b)+p(b,a) \leq 1 \quad \forall a,b \in A$ -ra. /ld. 1.3.3. ábra/

	a	b	
a	... 0	p(a,b) ...	K(a)
b	p(b,a)	0	K(b)
	B(a)	B(b)	

1.3.3. ábra Preferencia-intenzitás mátrix

Ezzel tulajdonképpen egy nemnegatív súlyú élekkel rendelkező irányított gráfot is kaptunk az A halmazon. Minden alternatívára kiszámítva a

$$K(a) = \sum_{x \in A} p(a,x) \quad , \text{illetve} \quad B(a) = \sum_{x \in A} p(x,a)$$

mennyiségeket, a preferencia-intenzitás mátrix sor-, ill. oszlopösszegeit, másképp a kimenő, ill. bejövő élek összességét, definiálhatunk egy P^1 preferencia-, egy I^1 indifferencia-, és egy H^1 összehasonlíthatatlansági relációt a PROMET-HEE-I módszer szerint a következőképpen:

$$\begin{aligned} aP^1b &: \langle \text{---} \rangle [K(a) > K(b) \text{ és } B(a) \leq B(b)] \quad \text{vagy} \\ & \quad [K(a) \geq K(b) \text{ és } B(a) < B(b)] \quad ; \\ aI^1b &: \langle \text{---} \rangle K(a) = K(b) \text{ és } B(a) = B(b) \quad ; \\ aH^1b &: \langle \text{---} \rangle \text{ egyébként} . \end{aligned}$$

Amennyiben bármely két alternatívát össze akarunk hasonlítani értékszempontból, tehát pl. az olyanokat is, melyeknél az egyikből mind a kimenő, mind a bejövő élek össz-súlya nagyobb, követhetjük a PROMETHEE-II módszerét. Eszerint ugyanis az $N(a) := K(a) - B(a)$ nettó folyamérték segítségével tetszőleges alternatívapárt össze tudunk hasonlítani, és az

$$aP^{II}b : \langle \text{---} \rangle N(a) > N(b) ;$$

$$aI^{II}b : \langle \text{---} \rangle N(a) = N(b)$$

definíciókkal olyan relációkhoz jutunk, melyekre $P^{II} \subseteq P^{II}$, $I^{II} \subseteq I^{II}$ és $P^{II} \cup I^{II}$ teljes. A teljes összehasonlíthatóságért tehát a preferencia-, ill. indifferencia-reláció határozottságának csökkenésével fizettünk.

Az egyszerű megvalósíthatóság mellett a döntéshozó által valamilyen formában meghatározandó paraméterek /súlyok, küszöbértékek/ viszonylag kis száma, és azok tartalmának valamint az eredményre gyakorolt hatásának könnyű értelmezhetősége is a módszer előnyei közé tartozik. A kimenő, ill. bejövő folyamérték definíciója, továbbá az összehasonlításban játszott alapvető szerepük alapján felmerül a kérdés, hogy a felépített relációk függnék-e az alternatívahalmaz választásától. Gyanakvásunk jogosságát igazolja a következő

1.3.1. Példa: Tegyük fel, hogy $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ és két egyformán fontos értékelési tényezőt veszünk figyelembe, $w_1 = w_2 = 1/2$. Az alternatívák paramétereit az alábbi táblázat tartalmazza:

	a	b	c	d	e	f
f_1	2	3/2	1	5/2	3	1/2
f_2	3/2	2	3	1/2	1	5/2

Tegyük fel továbbá, hogy a preferencia-intenzitás függvények lineárisak és az indifferencia-, ill. preferenciaküszöböket is azonosaknak ítéli a döntéshozó, pl. $s_1 = s_2 = 1/4$ $t_1 = t_2 = 5/4$ -nek. Kapjuk, hogy

$$h_1(x) = h_2(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } x \leq 1/4 \\ x-1/4 & , \text{ha } 1/4 < x \leq 5/4 \\ 1 & , \text{ha } 5/4 < x \end{cases}$$

Szűkítsük le először az alternatívahalmazt $A_1=\{a,b,c,d\}$ -re, majd tekintsük az $A_2=\{a,b,c,f\}$ problémát. A megfelelő preferencia-intenzitás mátrixok a következők:

	a	b	c	d	K_1
a	0	1/4	3/4	3/4	7/4
b	1/4	0	1/4	1	6/4
c	1	3/4	0	1	11/4
d	1/4	3/4	1	0	8/4
B_1	6/4	7/4	8/4	11/4	

	a	b	c	d	K_2
a	0	1/4	1/4	1/4	3/4
b	1/4	0	3/4	3/4	7/4
c	3/4	1	0	1	11/4
d	3/4	1/4	1	0	8/4
B_2	7/4	6/4	8/4	11/4	

Mivel $K_1(a) > K_1(b)$ és $B_1(a) < B_1(b)$ így a PROMETHEE-I szerint aP_1^+b , másrészt $K_2(a) < K_2(b)$ és $B_2(a) > B_2(b)$, tehát bP_2^+a . Változatlan egyéb körülmények mellett lett tehát ellentétes két alternatívának a PROMETHEE módszerek szerinti értékelése pusztán attól, hogy milyen más alternatívákat vettünk figyelembe.

1.4. Additív hasznosságfüggvények illesztései

Az előző két alfejezetben ismertetett módszerektől eltérően az itt érintett kérdések jóval szorosabban kapcsolódnak a döntéshozó értékeléseinek reprezentálását megadó formális modellhez, hiszen az elméletileg feltételezett összefüggésekben szereplő mennyiségek gyakorlati meghatározására, becsléseire irányulnak. Éppen ezért részét képezhetik olyan döntési eljárásoknak is, melyek az adott modellen alapsznak. Jó példa erre az 1.2.alfejezetben említett, a tényezőnkénti célfüggvényeket egyetlen célfüggvényé aggregáló, és a



globális értékeléseket kifejező ún. érték-, vagy hasznosság-
függvények konkrét meghatározásának problémája.

Az alternatívákat szerepeltessük most is attribútumaik kombinációjaként, azaz $A=A_1 \times \dots \times A_m$. Feltételezzük, hogy léteznek olyan $u_j: A_j \rightarrow \mathbb{R}$ ($j=1, \dots, m$) függvények, melyekkel a döntéshozó " $a \in A$ legalább olyan jó, mint $b \in A$ " megállapítását a $\sum_j u_j(a) \geq \sum_j u_j(b)$ egyenlőtlenséggel reprezentálhatjuk a kármilyen $a, b \in A$ esetén, tehát a globális hasznosságfüggvényt a tényezőnkénti hasznosságokat kifejező függvények összegeként adhatjuk meg. Egy ilyen felbontást biztosító axiómarendszert elsőnek Debreu(1960) talált végtelen alternatívahalmazra. Fishburn(1970a) könyvében megtalálható az eredeti, topológiai eszközöket használó bizonyítás éppúgy, mint a hasonló eredményt adó algebrai megközelítés, vagy a véges alternatívahalmaz esetén szükséges feltételrendszer. Ez utóbbi két területet tárgyalják Krantz és Tsai(1971) is.

Az általános esetben az u_j függvények meghatározásának alapvetően kétféle megközelítése van. Az egyikben komponensenként külön-külön becslik a hasznosságfüggvényeket, majd alkalmas skálázási súlyok segítségével teszik őket összemérhetővé, a másik megközelítés szerint pedig egy kulcsfontosságú u_j -ből a tényezők kölcsönhatásait kifejező kompenszációs cseréértékek /'tradeoff'/, vagy ún. indifferencia görbék segítségével határozzák meg a többit.

A témában alapvetőnek számít Keeney-Raiffa(1976) munkája, melyben az elméleti eredmények összefoglalása mellett hasznos gyakorlati tanácsokat is találunk a determinisztikus és a sztochasztikus esetre egyaránt, és további /pl. multiplikatív/ reprezentációk lehetőségével is megismerkedhetünk.

Érdemes külön megemlíteni azt az esetet, amikor $A_j = \mathbb{R}$ ($j=1, \dots, m$), vagy amikor az alternatívahalmazt a kritériumfüggvények $c_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($i=1, \dots, n$) segítségével először leképezzük. A Jacquet-Lagrange és Siskos(1982) által javasolt UTA módszer a lineáris programozás segítségével ismert értékíté-

letekhez "legjobban" illeszkedő $\sum_1 w_1 u_1(.)$ formájú olyan hasznosságfüggvényeket határoz meg, amelyekben az $u_1(.)$ -k szakaszonként lineáris, normalizált /azaz $[0,1]$ -re képező/ függvények, a w_1 -k pedig súlyok /azaz nemnegatívak és összegük 1/.

A még egyszerűbb $\sum_1 w_1 x_1$ alakú ún. súlyozott lineáris modellben a kérdés lehet csupán a w_1 súlyok meghatározása különböző feltevések és információk alapján /ld. pl. Churchman-Ackoff(1954), Knoll-Engelberg(1978), Srinivasan-Shocker(1973b)/; vagy a súlyokon kívül az ideális pont, esetleg a kritériumfüggvények hiányában még az alternatívák skálázása is eredményül adódhat, mint pl. Srinivasan-Shocker(1973a) vagy Pekelman-Sen(1974) módszerében.

2. EGYTÉNYEZŐS ÉRTÉKELESEK MODELLEZÉSE

A döntéshozónak az alternatívákra vonatkozó értékítéleteit általában az alternatívahalmazon értelmezett kétváltozós relációkként reprezentálják. E fejezetben Roubens-Vincke (1985), ill. Fishburn (1972) alapján összefoglaljuk az értékrendszerek algebrai jellemzésében szereplő tulajdonságokat, valamint bizonyos relációtípusoknak a valós számegyenesre történő relációtartó leképezéseit. Ezen modellek alapján tudunk egy valós döntési helyzetben az alternatívákhoz a döntéshozó ítéleteinek megfelelő hasznosságértékeket rendelni.

2.1. Kétváltozós relációk, rendezések

Jelöljük A -val a relációk alaphalmazát, és tegyük fel, hogy $A \neq \emptyset$.

2.1.1. Definíció: Azt mondjuk, hogy az A -n értelmezett kétváltozós R reláció

- reflexív , ha aRa
 - irreflexív , ha $\text{nem}(aRa)$
 - szimmetrikus , ha $aRb \rightarrow bRa$
 - antiszimmetrikus , ha $[aRb \text{ és } bRa] \rightarrow a=b$
 - aszimmetrikus , ha $aRb \rightarrow \text{nem}(bRa)$
 - teljes , ha $a \neq b \rightarrow [aRb \text{ vagy } bRa]$
 - erősen teljes , ha $aRb \text{ vagy } bRa$
 - tranzitív , ha $[aRb \text{ és } bRc] \rightarrow aRc$
 - negatívan tranzitív
 , ha $[\text{nem}(aRb) \text{ és } \text{nem}(bRc)] \rightarrow \text{nem}(aRc)$
 - szemitranzitív , ha $[aRb \text{ és } bRc] \rightarrow [aRd \text{ vagy } dRc]$
 - Ferrers-típusú , ha $[aRb \text{ és } cRd] \rightarrow [aRd \text{ vagy } cRb]$
- teljesül minden $a, b, c, d \in A$ -ra.

Az utóbbi három kevésbé ismert tulajdonságra teljesül az a -

lábbi, a definíciókból azonnal adódó

2.1.1.Allítás: Ha az R kétváltozós reláció

- aszimmetrikus és negatívan tranzitív, akkor tranzitív;
- irreflexív és szemitranszitiv, akkor tranzitív;
- irreflexív és Ferrers-típusú, akkor tranzitív;
- irreflexív, tranzitív és teljes, akkor negatívan tranzitív;
- aszimmetrikus és negatívan tranzitív, akkor szemitranszitiv;
- aszimmetrikus és negatívan tranzitív, akkor Ferrers-típusú;
- erősen teljes és tranzitív, akkor szemitranszitiv;
- erősen teljes és tranzitív, akkor Ferrers-típusú.

Rendezéseknek hívjuk a tranzitív relációkat. Célszerű külön nevet adni a fontosabb, gyakrabban előforduló rendezéseknek. Sajnos e területen még nem alakult ki egy egységes névhasználat, ezért szükséges a következő

2.1.2.Definíció: Azt mondjuk, hogy az R tranzitív kétváltozós reláció

- szigorú parciális rendezés ,ha irreflexív;
- intervallum rendezés ,ha irreflexív és Ferrers-típusú;
- szemirendezés ,ha szemitranszitiv intervallum rendezés;
- gyenge rendezés ,ha aszimmetrikus és negatívan tranzitív;
- szigorú teljes rendezés ,ha irreflexív és teljes;
- előrendezés ,ha reflexív;
- teljes előrendezés ,ha erősen teljes;
- parciális rendezés ,ha antiszimmetrikus előrendezés;
- teljes rendezés ,ha antiszimmetrikus teljes előrendezés.

érdemes megvizsgálni az egyes rendezéstípusok között fennálló viszonyt. Alapvetően két nagy, egymástól idegen osztályba sorolhatóak. Az első öt rendezés aszimmetrikus, míg a másik

négy reflexív. Az aszimmetrikusak a felsorolásnak megfelelően egyre szűkebb rendezésoosztályokat alkotnak, azaz

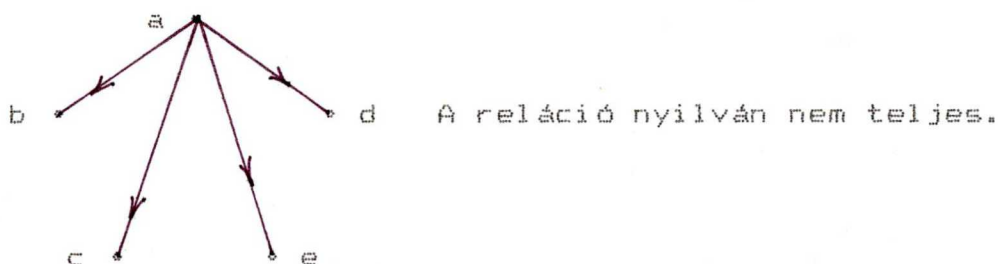
2.1.2. Állítás:

$$\{\text{szigorú teljes r.}\} \subset \{\text{gyenge r.}\} \subset \{\text{szemir.}\} \subset \{\text{intervallum r.}\} \subset \{\text{szigorú parciális r.}\}$$

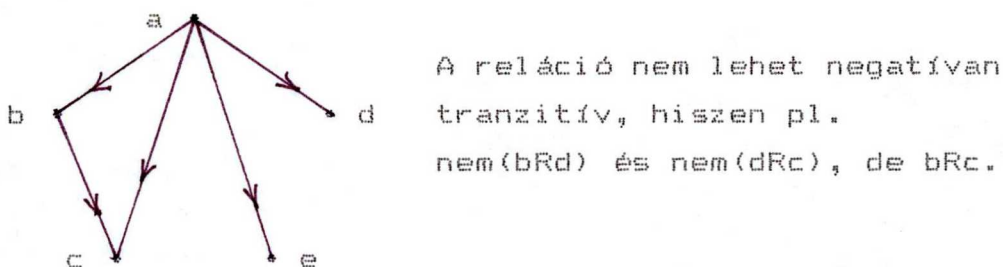
Az állítás azonnal adódik a definíciókból és a 2.1.1. Állításban foglaltakból, a tartalmazások szigorúságának belátásához pedig tekintsük az alábbi példákat.

2.1.1. Példa Legyen $A=\{a,b,c,d,e\}$. Egy R kétváltozós reláció természetes módon definiál egy irányított gráfot az alaphalmazon, és viszont.

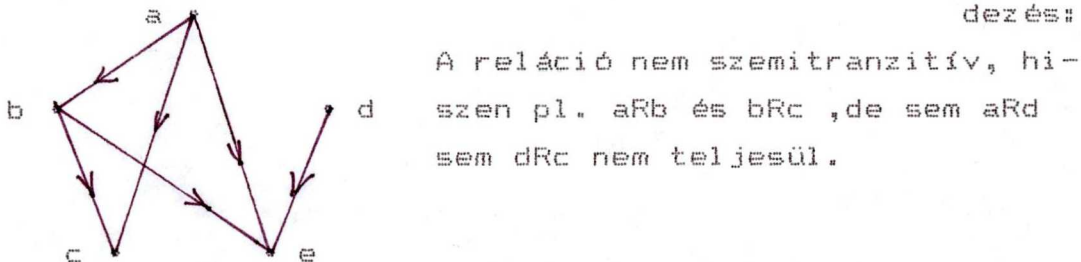
(a) példa gyenge, de nem szigorú teljes rendezésre:



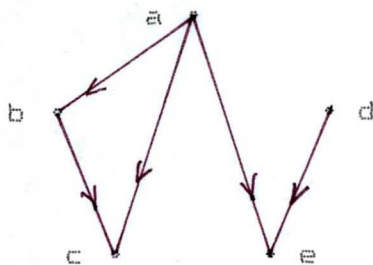
(b) példa szemirendezésre, ami nem gyenge rendezés:



(c) példa olyan intervallum rendezésre, amely nem szemirendezés:



(d) példa szigorú parciális, de nem intervallum rendezésre:



A reláció nem Ferrers-típusú, hiszen pl. bRc és dRe , de sem bRe sem dRc nem igaz.

A reflexív rendezések közötti viszonyt a következőképpen jellemezhetjük.

2.1.3. Allítás:

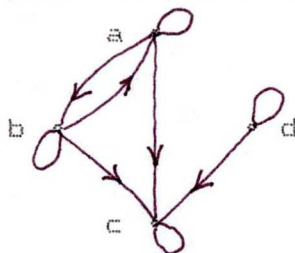
$\{\text{teljes } r.\} \subset \{\text{parciális } r.\} \subset \{\text{előrendezés}\}$

$\{\text{teljes } r.\} \subset \{\text{teljes előr.}\} \subset \{\text{előrendezés}\}$

Most is csak a tartalmazások szigorúsága szorul indoklásra.

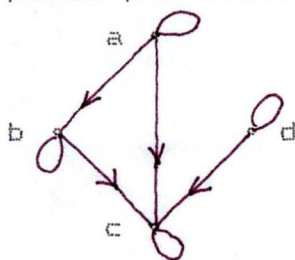
2.1.2. Példa Legyen $A = \{a, b, c, d\}$.

(a) példa olyan előrendezésre, amely se nem parciális, se nem teljes előrendezés:



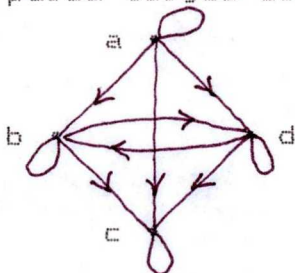
A reláció nem antiszimmetrikus, hiszen aRb és bRa és $a \neq b$, ezenkívül nyilván nem is erősen teljes.

(b) példa parciális rendezésre, amely nem teljes előrendezés:



A reláció nem erősen teljes.

(c) példa teljes előrendezésre, amely nem parciális rendezés:



A reláció nem lehet antiszimmetrikus, hiszen bRd és dRb és $b \neq d$.

2.2. Preferencia, indifferencia, összehasonlíthatatlanság

Szokásos feltevés, hogy a döntéshozó két választási lehetőség összehasonlításakor

- az egyik alternatívát határozottan jobbnak, előnyösebbnek ítéli, azaz preferálja a másikkal szemben;
- a két alternatíva között nem talál lényeges különbséget, vagy bizonytalan a különböző szempontok szerinti előnyök, ill. hátrányok megítélésében, azaz indifferens közöttük;
- nem tartja összehasonlíthatónak a két alternatívát.

Például két azonos áru közül előnyben részesítjük az olcsóbbat, de lehetünk közömbösek, ha az olcsóbbért például sokat kell utazni. Tarthatja egy egyetemista nem összehasonlíthatónak azokat a lehetőségeket, hogy este is tanuljon a vizsgájára vagy megnézzen egy jó filmet, esetleg fusson; de lehet indifferens a mozi és a sportolás között, és lehet neki mindegy az is, hogy futni vagy úszni megy-e. Elképzelhető viszont, hogy mindegyik lehetőséggel szemben előnyben részesíti az alvást.

A fentiek alapján a döntéshozó értékrendszerét három az alternatívahalmazon értelmezett bináris relációval modellezhetjük. A relációkra tett "természetes", "ésszerű" feltevéseket foglalja össze a

2.2.1. Definíció: A (P, I, H) relációhármast preferencia-
-struktúrának nevezzük, ha teljesülnek a következők:

- (i) a P preferencia-reláció aszimmetrikus;
- (ii) az I indifferencia-reláció reflexív és szimmetrikus;
- (iii) a H összehasonlíthatatlansági reláció irreflexív és szimmetrikus;
- (iv) a $P \cup I \cup H$ erősen teljes;
- (v) a P, I, H páronként diszjunktak.

Ezentúl P, I, H -val mindig az előbbieket teljesítő relációkat jelölünk.

Minden preferencia-struktúra jellemezhető egyetlen két-

változós reláció segítségével is, nevezetesen a "preferált vagy indifferens", kevésbé szabatosan a "nem rosszabb, mint" relációval.

2.2.2. Definíció: A (P, I, H) preferencia-struktúra karakterisztikus relációjának nevezzük az $R = P \cup I$ relációt.

A preferencia-struktúra jellemzése a karakterisztikus relációjával nyilvánvalóan a következő:

$aPb \Leftrightarrow aRb \text{ és } \text{nem}(bRa) ;$
 $aIb \Leftrightarrow aRb \text{ és } bRa ;$
 $aHb \Leftrightarrow \text{nem}(aRb) \text{ és } \text{nem}(bRa) .$

Ugyanakkor, kiindulva egy tetszőleges reflexív R relációból, a fenti ekvivalenciákkal definiálható egy preferencia-struktúra, amelynek a karakterisztikus relációja a kiindulási R .

A karakterisztikus reláció néhány azonnal adódó tulajdonságát fogalmazza meg a

2.2.1. Állítás: Egy R karakterisztikus reláció

- mindig reflexív, így sosem aszimmetrikus ;
- akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $P = \emptyset$;
- pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $I = \Gamma = \{(a, a) : \forall a \in A\}$;
- akkor és csak akkor erősen teljes, ha $H = \emptyset$;
- pontosan akkor tranzitív, ha P és I is tranzitív és $P \cdot I \cup I \cdot P \subseteq P$.

/Végig $S \cdot T$ -vel jelöljük az S és T relációk kompozícióját, azaz $S \cdot T = \{(x, y) : \exists z \in A \ xSz \text{ és } zTy\}$; Γ -val pedig az egyenlőségrelációt./

Ha bármely két alternatíva összehasonlítható, $H = \emptyset$, akkor az indifferencia a preferencia hiányát jelenti, vagyis

$aIb \Leftrightarrow \text{nem}(aPb) \text{ és } \text{nem}(bPa) .$

Mivel sokféleképpen lehet indifferens két alternatíva, célszerű külön megvizsgálni, hogy egyáltalán megkülönböztethető-e az adott preferencia-struktúrában, vagy tetszőlegesen

helyettesíthetjük egymást az értéktételekben. Egy ilyen teljes felcserélhetőségi reláció mindig definiálható, egyszerűen megkövetelve, hogy minden elemhez ugyanúgy viszonyuljanak. Az így definiált reláció mindig ekvivalenciareláció, az alternatívahalmaz egy osztályozását adva.

2.2.3. Definíció: Egy (P, I, H) preferencia-struktúra egyformasági relációjának nevezzük a minden $a, b \in A$ -ra
 $aEb : \leftrightarrow \forall c \in A: [aPc \leftrightarrow bPc] \text{ és } [cPa \leftrightarrow cPb] \text{ és}$
 $[aIc \leftrightarrow bIc] \text{ és } [aHc \leftrightarrow bHc]$
 által meghatározott relációt.

Rögtön adódik a

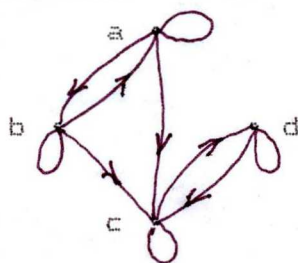
2.2.2. Allítás: Egy preferencia-struktúra egyformasági relációja ekvivalenciareláció; továbbá minden $a, b \in A$ -ra
 $aEb \iff \forall c \in A \text{-ra } [aRc \iff bRc] \text{ és } [cRa \iff cRb]$.

Az egyenlőség, egyformaság és indifferencia közötti viszonyt mondja ki a mindhárom reláció reflexivitásából és szimmetrikusságából adódó

2.2.3. Allítás: Tetszőleges (P, I, H) -ra $\Gamma \subseteq E \subseteq I$.

A következő példa mutatja, hogy a tartalmazások lehetnek szigorúak.

2.2.1. Példa Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és az (A, R) gráf legyen



Itt aEb , de $a \neq b$ és
 cId , de $\text{nem}(cEd)$.

2.3. Teljes preferencia-struktúrák

Ebben az alfejezetben olyan preferencia-struktúrákat

vizsgálunk, melyekben nincs összehasonlíthatatlanság az alternatívák között, azaz $H=\emptyset$, valamint a P preferencia-reláció tranzitív. Ez utóbbi megkötés tekinthető a döntéshozó értékítéletekbeli következetessége megfelelőjének, míg a 2.2.1. definícióban szereplő aszimmetrikusság a preferenciák határozottságának szükségességére utal. Az I indifferencia-relációra megkövetelt tranzitivitás azonban már lehet irreális feltevés, amint azt Armstrong(1939) klasszikus példája is mutatja /idézi Fishburn(1972)/. Lehetünk ugyanis indifferensek között, hogy 100 vagy 101, 101 vagy 102,...,999 vagy 1000 szemcse cukorral isszuk a kávé, de valószínűleg nem mindegy, hogy 100 vagy 1000 szemcsével, ahogy az az indifferencia tranzitivitásából következne /ld. Fishburn(1970c)/.

Vizsgálataink sorrendje megegyezik az indifferencia-relációra tett egyre kevésbé szigorú feltevések, illetve a preferencia-relációknak a 2.2.1. állításban leírt hierarchiájával.

2.3.1. Definíció: Azt mondjuk, hogy a (P, I, H) preferencia-struktúra

- teljes rendezési struktúra, ha az R teljes rendezés;
- teljes előrendezési /vagy rendezési/ struktúra, ha az R teljes előrendezés;
- teljes szemirendezési struktúra, ha az R erősen teljes, Ferrers-típusú, szemitranzitív reláció;
- teljes intervallum rendezési struktúra, ha az R erősen teljes, Ferrers-típusú reláció;

ahol R jelöli a karakterisztikus relációt.

A továbbiakban az A alternatívahalmaz mindig véges lesz a reprezentációtételek hosszadalmas bizonyítását elkerülendő. A végtelen számosságú A esetén érvényes eredményekkel kapcsolatban Fishburn(1970a) munkájára utalunk.

Az előbbi definícióból könnyen adódik a

2.3.1. Állítás: A következők ekvivalensek:

- (i) a (P, I, H) teljes rendezési struktúra;

(ii) a P szigorú teljes rendezés;

(iii) a P tranzitív, $I=\Gamma$, $H=\emptyset$;

Mint látjuk, egy teljes rendezési struktúrában az alternatívák egy lineáris sorrendben vannak, hasonlóan a valós számoknak a szokásos $>$ -ra vonatkozó rendezéséhez, így nem meglepő a

2.3.1.Tétel: Egy (P,I,H) preferencia-struktúrában a P akkor és csak akkor szigorú teljes rendezés, ha létezik olyan $u:A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $\forall a,b \in A$ -ra $[aPb \iff u(a) > u(b)]$ és $[a=b \iff u(a)=u(b)]$.

Bizonyítás: Csak a szükségesség szorul némi indoklásra. Ha $A \neq \emptyset$, akkor $\exists a_1 \in A$, melyre $aPa_1 \ \forall a \neq a_1$ -re. Ha $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, akkor $\exists a_2 \in A \setminus \{a_1\}$, hogy $aPa_2 \ \forall a \neq a_1, a_2$ -re. Hasonlóan folytatva véges lépésben kimerítjük A -t, és $u(a_k) := k$ ($k=1, \dots, n$)-el az állítás nyilván igaz. $\square$

Az u függvényt szokás érték- / 'value' /, vagy hasznosság- / 'utility' / függvénynek hívni. Szigorú teljes rendezés pl. a kosárlabda világbajnokság végeredménye, egy megfelelő hasznosságfüggvény pedig lehet az egyes helyezésekre kiírt pénzdíjak összege. A célfotó bevezetése előtt egy futóversenyen előfordulhatott holtverseny, ahol két /vagy több/ versenyző teljesítménye azonos, így jutalmuk értéke is meg kell, hogy egyezzen. Az ilyen jellegű szituációkat jellemzi a különösebb bizonyítást nem igénylő

2.3.2.Allítás: A következők ekvivalensek:

(i) a (P,I,H) teljes előrendezési struktúra;

(ii) a P gyenge rendezés, $H=\emptyset$;

(iii) a P és az I tranzitívak, $H=\emptyset$;

(iv) $P \cdot I = I \cdot P = P$, $H=\emptyset$;

(v) az I ekvivalencia-reláció és a P szigorú teljes rendezést indukál A/I -n.

Mivel egy teljes előrendezési struktúrában az indifferens

alternatívák preferencia szempontból egyformák is, azaz $I=E$, az értékfüggvénynek is azonosnak kell lenni az indifferens alternatívákon, és fordítva, az azonos értékkel rendelkező alternatíváknak indifferenseknek kell lenni.

2.3.2.Tétel: Egy (P, I, H) preferencia-struktúrában, melyben $H=\emptyset$, a P akkor és csak akkor gyenge rendezés, ha létezik olyan $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy
 $\forall a, b \in A$ -ra $[aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b)]$ és $[aIb \Leftrightarrow u(a) = u(b)]$.

Bizonyítás: Szükségesség: Jelöljük P' -vel a P által az $A' = A/I$ -n indukált szigorú teljes rendezést $\forall a', b' \in A'$ -re $a'P'b' : \Leftrightarrow [aPb \text{ valamilyen } a \in a', b \in b' \text{-re}]$. A 2.3.1.tételből adódó $u': A' \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel legyen $u(a) := u'(a')$, ha $a \in a'$. Az így definiált $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ nyilván a kívánt tulajdonságú.

Elegendőség: nyilvánvaló. □

A tételből azonnal adódik a

2.3.1.Következmény: Egy preferencia-struktúra R karakterisztikus relációja akkor és csak akkor teljes előrendezés, ha létezik olyan $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy
 $\forall a, b \in A$ -ra $aRb \Leftrightarrow u(a) \geq u(b)$.

Hasonló állítást bizonyított Cantor (1895) megszámlálható alaphalmazon értelmezett teljes rendezésre /tehát egy teljes rendezési struktúra karakterisztikus relációjára/, lásd pl. Krantz és Tsai (1971). Ebből következik, hogy a 2.3.1.tétel igaz megszámlálható alaphalmaz esetén is. Az indifferencia-relációval történő faktorizálással pedig kapjuk, hogy minden olyan teljes előrendezési struktúrában, melyben A/I megszámlálható érvényes a 2.3.2.tétel, ill. a 2.3.1.következmény. Mivel a két eddigi struktúra jellemzését adó 2.3.1. és 2.3.2. állítások függetlenek az A számosságától, így az alternatívahalmaz végeességére tett feltevésünk eddig csak kényelmi szempontokkal magyarázható. További indokul szolgál majd a teljes szemirendezési struktúra reprezentációtétele.

Az ilyen struktúrákat jellemzi a könnyen adódó

2.3.3.Állítás: A következők ekvivalensek:

- (i) a (P, I, H) teljes szemirendezési struktúra ;
- (ii) a P szemirendezés, $H=\emptyset$;
- (iii) $P \cdot I \cdot P \subseteq P$, $P^2 \cap I^2 = \emptyset$, $H=\emptyset$;
- (iv) a $P \cdot I \cup I \cdot P$ gyenge rendezés, $H=\emptyset$.

Nézzük meg, hogyan enyhültek a döntéshozó értékítéleteire tett feltevéseink. Alapvető változás, és éppen ezért vezette be Luce(1956) a szemirendezés fogalmát, hogy az indifferencia-reláció nem feltétlenül tranzitív, lásd az alfejezet elején említett példát. Ezért a 2.3.3.Állítás (iii)-ban a Ferrers-séghez, ill. a szemitranzitivitáshoz kapcsolódó jellemzések váltották fel a 2.3.2.Állítás (iii)-beli I -re vonatkozó tranzitivitást. Mint azt a 2.1.1.Állításban meg gondoltuk, a P -re vonatkozó tranzitivitás következmény, míg a 2.1.1(b) példa szerint I -re már ugyanez nem teljesül. Ugyanez a példa mutatja, hogy a 2.3.2.Állítás (iv) sem feltétlenül igaz egy teljes szemirendezési struktúrában, hiszen pl. $bP \cdot Ie$, de bIe ; vagy $dI \cdot Pc$, mégis dIc . Mivel az I általában nem ekvivalenciareláció, így a 2.3.2.Állítás (v)-t teljesen el kellett hagyni.

Mint Armstrong fenti példájában is, az indifferencia intranzitivitását okozhatja a kicsiny különbségek hasznossági szempontból történő elhanyagolása, és ugyanakkor az egy bizonyos határnál nagyobb eltérések határozott előnyben részesítést eredményező figyelembevétel. Egy ilyen küszöbérték létezését mondja ki a

2.3.3.Tétel: Egy (P, I, H) preferencia-struktúrában, melyben $H=\emptyset$, a P akkor és csak akkor szemirendezés, ha létezik olyan $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\delta > 0$ szám, hogy
 $\forall a, b \in A$ -ra $[aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b) + \delta]$ és
 $[aIb \Leftrightarrow |u(a) - u(b)| \leq \delta]$.

Bizonyítás: Az elegendőség most is magától értetődő.

Szükségesség: Felhasználjuk a következő gráfelméleti eredményt /ld. pl. Andrásfai(1983)/: Egy olyan véges irányított gráfban, melyben minden (a,b) élhez egy $v(a,b)$ élhossz van hozzárendelve, akkor és csak akkor nincs pozitív összhosszúságú kör, ha létezik egy olyan a gráf csúcsain értelmezett valós f függvény, hogy minden (a,b) élre $f(a)-f(b) \geq v(a,b)$.

Legyen $\delta > 0$ és $v(a,b) = -\delta : \langle \rightarrow aIb$; $v(a,b) = \delta + \varepsilon : \langle \rightarrow aPb$, ahol $\varepsilon > 0$ és $m\varepsilon < \delta$, ha m jelöli az (A,R) gráf éleinek számát. Megmutatjuk, hogy a most definiált élhosszakkal a gráfban nincs pozitív összhosszúságú kör, tehát létezik olyan függvény, amely teljesíti a tétel követelményeit. Ha van pozitív összhosszúságú kör, akkor legalább annyi P él tartalmaz, mint I él, tehát biztosan léteznek olyan a,b,c,d csúcsok, melyekre vagy $aIbPcPd$, vagy $aPbIcPd$ igaz. A teljes szemirendezési struktúra jellemzéséből következik, hogy mindkét esetben aPd kell legyen. Elhagyva a b,c csúcsokat egy olyan rövidebb kört kapunk, melyben szintén legalább annyi P él van, mint I él. Gondolatmenetünket folytatva véges lépésben egy azonos tulajdonságú legfeljebb négy csúcsot tartalmazó körhöz jutunk. Mivel egy ilyen kör nyilván nem létezhet, így pozitív összhosszúságú kör sem. □

Ezt a tételt Scott és Suppes(1958) bizonyította először. Scott(1964) adott egy másik érdekes, lineáris egyenlőtlenségeket alkalmazó bizonyítást. A konstans pozitív küszöbérték miatt ez a tétel már nem érvényes megszámlálhatóan végtelen alaphalmazra, amint ezt az alábbi példa /ld. Fishburn(1972)/ mutatja. Legyen ugyanis P a szokásos $>$ rendezés a racionális számokon. A P nyilván szemirendezés. Ha a reprezentációtétel igaz lenne, akkor tetszőleges n természetes számra teljesülni kellene az $u(1) > u(0) + n\delta$ egyenlőtlenségnek, hiszen a $(0,1)-n$ is megszámlálhatóan végtelen sok racionális szám van. Mivel $\delta > 0$, így ez semmilyen u függvényre sem állhat fenn.

A tételből most is azonnal adódik a

2.3.2.Következmény: Egy preferencia-struktúra R karakterisztikus relációja akkor és csak akkor erősen teljes, Ferrers-típusú, szemitranzitív reláció, ha létezik olyan $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ és $\delta > 0$, hogy
 $\forall a, b \in A$ -ra $aRb \iff u(a) \geq u(b) - \delta$.

Térjünk rá a teljes intervallum rendezési struktúrák vizsgálatára. Ezek már megengednek olyan szituációkat, hogy $aPcPb$ és $aIdIb$, vagyis a szemitranzitivitás megsértését. Mint látni fogjuk itt is lehetséges a megkülönböztetheetőségi küszöbértékekkel való reprezentáció, de az indifferencia-intervallumok hossza elemenként változik. Nyilvánvaló, hogy a fenti c ill. d elemre ez a különbség szükség szerű is. Könnyű meggondolni, hogy igaz a

2.3.4.Allítás: A következők ekvivalensek:

- (i) a (P, I, H) teljes intervallum rendezési struktúra ;
- (ii) a P intervallum rendezés, $H = \emptyset$;
- (iii) $P \cdot I \cdot P \subseteq P$, $H = \emptyset$;
- (iv) a $P \cdot I$ és az $I \cdot P$ gyenge rendezések, $H = \emptyset$.

A 2.1.1(c) példában is szereplő fenti szituáció mutatja, hogy miért gyengébbek a 2.3.4.allításbeli (iii) ill. (iv) követelmények a teljes szemirendezési struktúrákra vonatkozó hasonlóknál.

Jelöljük most is $K(a)$ -val az a -ból kiinduló, $B(a)$ -val az a -ba beérkező élek számát az (A, P) gráfban, azaz az a -nál határozottan rosszabb ill. jobb alternatívák számát.

2.3.5.Allítás: Egy teljes intervallum rendezési struktúrában minden $a, b \in A$ -ra

- $K(a) > K(b) \iff aP \cdot Ib$;
- $B(a) < B(b) \iff aI \cdot Pb$;
- $K(a) = K(b)$ és $B(a) = B(b) \iff aEb$.

Bizonyítás:

- (i) Ha $K(a) > K(b)$, akkor $\exists c: aPc$ és $\text{nem}(bPc)$, vagyis $aP \cdot (PUI)b$, így mivel $P \subseteq P \subseteq P \cdot I$, ezért $aP \cdot Ib$.
 Ha $aPcIb$, akkor bPd esetén $P \cdot I \cdot P \subseteq P$ miatt aPd , tehát $K(a) \geq K(b)$. Viszont aPc és $\text{nem}(bPc)$, így $K(a) > K(b)$.
- (ii) Teljesen hasonlóan bizonyítható.
- (iii) Ha $K(a) = K(b)$ és $B(a) = B(b)$, akkor $\text{nem}(aP \cdot Ib)$ és $\text{nem}(bP \cdot Ia)$ és $\text{nem}(aI \cdot Pb)$ és $\text{nem}(bI \cdot Pa)$, azaz tetszőleges harmadik elemmel ugyanolyan relációban vannak, vagyis egyformák, aEb .
- A másik irány nyilvánvaló. □

A $P \cdot I$ és az $I \cdot P$ gyenge rendezések érdekes reprezentációját adja az első két állítás, míg a harmadik szerint a két rendezés által generált, általában különböző indifferenciaosztályok metszetei adják az egyformasági osztályokat. Tovább finomíthatjuk a $P \cdot I$ ill. $I \cdot P$ gyenge rendezéseket, ha az egyik szerinti indifferenciaosztályokon a másik szerint rendezünk, és viszont.

Legyen minden $a, b \in A$ -ra

$$aT_K b : \leftrightarrow K(a) > K(b) \text{ vagy } [K(a) = K(b) \text{ és } B(a) < B(b)] ;$$

$$aT_B b : \leftrightarrow B(a) < B(b) \text{ vagy } [B(a) = B(b) \text{ és } K(a) > K(b)] .$$

A finomítás eredményét mondja ki a

2.3.6. Állítás: Egy teljes intervallum rendezési struktúrában a T_K ill. T_B relációk szigorú teljes rendezések az A/E faktorstruktúrán.

Bizonyítás: Az aszimmetria és a tranzitivitás a definíciókból azonnal adódik. A 2.3.5. állításban gondoltuk meg, hogy ha $\text{nem}(aT_K b)$ és $\text{nem}(bT_K a)$, vagyis $K(a) = K(b)$ és $B(a) = B(b)$, akkor aEb .

T_B -re a bizonyítás hasonló. □

A 2.1.1(c) példa tanúsága szerint általában $T_K \neq T_B$. Kizárja viszont az ilyen lehetőségeket a szemitranzitivitás feltételezése.

2.3.7. Allítás: Egy teljes szemirendezési struktúrában

$$T_K = T_B.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\exists a, b \in A$, melyekre $a T_K b$ és $\neg (a T_B b)$. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy $B(a) > B(b)$ vagy $[B(a) \geq B(b) \text{ és } K(a) \leq K(b)]$. Az elsővel egybevetve kapjuk, hogy $K(a) > K(b)$ és $B(a) > B(b)$ kell legyen, azaz $\exists c, d \in A$, hogy $a P c I b I d P a$, ami ellentmond a szemitranszitivitásnak. Kaptuk, hogy $T_K \subseteq T_B$. A másik irányú tartalmazás igazolása hasonló. $\square$

Rátérünk a teljes intervallum rendezési struktúrák reprezentációtételére, amit Fishburn (1970b) igazolt olyan alaphalmazra, melyre A/E megszámlálható.

2.3.4. Tétel: Egy (P, I, H) preferencia-struktúrában, melyben $H = \emptyset$, a P akkor és csak akkor intervallum rendezés, ha léteznek olyan $u: A \rightarrow \mathbb{R}$, ill. $\delta: A \rightarrow (0, \infty)$ függvények, hogy $\forall a, b \in A$ -ra $[a P b \iff u(a) > u(b) + \delta(b)]$ és $[a I b \iff [u(a) \leq u(b) + \delta(b)] \text{ és } [u(b) \leq u(a) + \delta(a)]]$.

Bizonyítás: Az elegendőség nyilvánvaló.

Szükségesség: A 2.3.6. állításból és a 2.3.1. tételből következően $\exists u: A \rightarrow \mathbb{R}$, hogy $\forall a, b \in A$ -ra $a T_K b \iff u(a) > u(b)$ és $a E b \iff u(a) = u(b)$. Legyen $\varepsilon = \min\{|u(a) - u(b)| : a, b \in A\}$. Ha nem minden elem egyforma, akkor $\varepsilon > 0$. Legyen továbbá $\forall b \in A$ -ra $\delta(b) = \max\{u(c) : c I b\} - u(b) + \varepsilon/2$. Mivel I reflexív, így $\delta(b) > 0 \quad \forall b \in A$ -ra. Ha $a P b$, akkor $a T_K c \quad \forall c I b$ -re, azaz $u(a) > u(c) \quad \forall c I b$ -re. Kapjuk tehát, hogy $u(a) > \max\{u(c) : c I b\} + \varepsilon/2$, vagyis $u(a) > u(b) + \delta(b)$. Ha $a I b$, akkor $u(a) + \varepsilon/2 \leq \max\{u(c) : c I b\} + \varepsilon/2 = u(b) + \delta(b)$ tehát $u(a) \leq u(b) + \delta(b)$. Hasonlóan $b I a \implies u(b) \leq u(a) + \delta(a)$. $\square$

A tétel szerint tehát az $a \in A$ elemhez az $[u(a), u(a) + \delta(a)]$ indifferencia-intervallum tartozik. Két elem pontosan akkor indifferens, ha indifferencia-intervallumaik metszete nem üres, míg egy másikkal szemben preferált alternatívához tartozó intervallum teljes egészében a másik indifferencia-in-

tervallum jobb oldalán fekszik. Tetszőleges számosságú alaphalmazon értelmezett intervallum-, ill. szemirendezések különböző intervallumtípusú reprezentációival foglalkozik Fishburn(1973b).

A tételből egyből adódik a

2.3.3.Következmény: Egy preferencia-struktúra R karakterisztikus relációja akkor és csak akkor erősen teljes, Ferrers-típusú reláció, ha léteznek olyan $u:A \rightarrow \mathbb{R}$, ill. $\delta:A \rightarrow (0, \infty)$ függvények, hogy

$$\forall a, b \in A -ra \quad aRb \iff u(a) + \delta(a) \geq u(b) .$$

2.4. Parciális preferencia-struktúrák

Ebben az alfejezetben röviden azzal foglalkozunk, hogy milyen következményekkel jár az, ha a preferencia hiánya nem feltétlenül indifferencia két alternatíva között, hanem előfordulhat az értékelés szempontjából való összehasonlíthatatlanság is. A valós számegyenesen levő teljes rendezésre gondolva a reprezentációtételek eddigi ekvivalenciáit nyilvánvalóan el kell hagyni, de helyettük, mint látni fogjuk, írhatók implikációk. A H tehát ezentúl nem feltétlenül üres.

2.4.1.Definíció: Azt mondjuk, hogy a (P, I, H) preferencia-struktúra

- parciális rendezési struktúra, ha az R parciális rendezés ;
- parciális előrendezési struktúra, ha az R előrendezés ;

ahol R jelöli a karakterisztikus relációt.

Nem foglalkozunk a parciális szemirendezési, illetve a parciális intervallum rendezési struktúrákkal. Definíciójuk és jellemzésük megtalálható Roubens-Vincke(1985)-ben.

A 2.2.1. állításból és a definíciókból rögtön következnek az alábbi jellemzések:

2.4.1. Allítás: A következők ekvivalensek:

- (i) a (P, I, H) parciális rendezési struktúra ;
- (ii) a P szigorú parciális rendezés, $I = \Gamma$.

2.4.2. Allítás: A következők ekvivalensek:

- (i) a (P, I, H) parciális előrendezési struktúra ;
- (ii) a P szigorú parciális rendezés, $I = E$;
- (iii) a P tranzitív, az I tranzitív, $P \cdot I = I \cdot P = P$.

Mindkét rendezési struktúrában a P preferencia-reláció szigorú parciális rendezés. Ha eltekintünk az I indifferencia-relációra tett bármilyen feltevéstől, olyan preferencia-struktúrához jutunk, melynek a tárgyalt összes teljes, ill. parciális struktúra speciális esete. Az alábbi, Szpilrajn (1930)-tól származó tétel szerint minden szigorú parciális rendezés kiterjeszthető szigorú teljes rendezéssé. Eszerint kapjuk a 2.1.2. állításból, hogy

$$\{\text{szigorú parciális } r.\} \dashv\vdash \{\text{intervallum } r.\} \dashv\vdash \{\text{szemir.}\} \dashv\vdash \\ \dashv\vdash \{\text{gyenge } r.\} \dashv\vdash \{\text{szigorú teljes } r.\} ,$$

ahol $\dashv\vdash$ a bal oldali halmaz minden elemének a jobb oldali halmaz valamely elemébe történő beágyazhatóságát jelöli.

2.4.1. Tétel: Ha $<$ egy szigorú parciális rendezés az X tetszőleges számosságú halmazon, akkor létezik az X -n olyan $<'$ szigorú teljes rendezés, hogy $\forall x, y \in X$ -re $x < y \implies x <' y$.

A tétel Zorn-lemmát felhasználó bizonyítása megtalálható Fishburn(1970a)-ban. Hasznos lesz a következő

2.4.3. Allítás: Egy (P, I, H) preferencia-struktúrában ha a P szigorú parciális rendezés, akkor az A/E faktorstruktúrán a $\forall a', b' \in A/E$ -re $a' P' b' : \iff [a P b \text{ valamilyen } a \in a', b \in b' \text{-vel}]$ által definiált P' szigorú parciális rendezés.

Bizonyítás: A P' előbbi definíciójának jogossága abból

következik, hogy egy E reláció pontosan akkor az egyformasági reláció, ha $\Gamma \subseteq E \subseteq I$, $E \cdot P = P \cdot E = P$, $E \cdot H = H \cdot E = H$. Az egyformasági reláció nyilván teljesíti e három követelményt. Fordítva, ha van egy E reláció az előbbi három tulajdonsággal, akkor tetszőleges a, b, c aEb elemek teljesítik a 2.2.3. definíció ekvivalenciáit.

Tegyük most fel, hogy $a'P'b'$ és $b'P'a'$ egyszerre teljesül valamilyen $a', b' \in A/E$ -re. Ekkor $\exists a_1, a_2 \in a'$, $b_1, b_2 \in b'$ hogy a_1Pb_1 és b_2Pa_2 . Viszont $a_2Ea_1Pb_1Eb_2$ -ből a_2Pb_2 következik, ami a P aszimmetriája miatt ellentmondás. A P' tranzitivitása a P tranzitivitásából hasonlóan adódik. $\square$

A parciális rendezési és a parciális előrendezési struktúrák valós reprezentációját együtt mondja ki a

2.4.2. Tétel: Egy (P, I, H) preferencia-struktúrában ha a P szigorú parciális rendezés, akkor létezik olyan $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $\forall a, b \in A$ -ra $[aPb \implies u(a) > u(b)]$ és $[aEb \implies u(a) = u(b)]$.

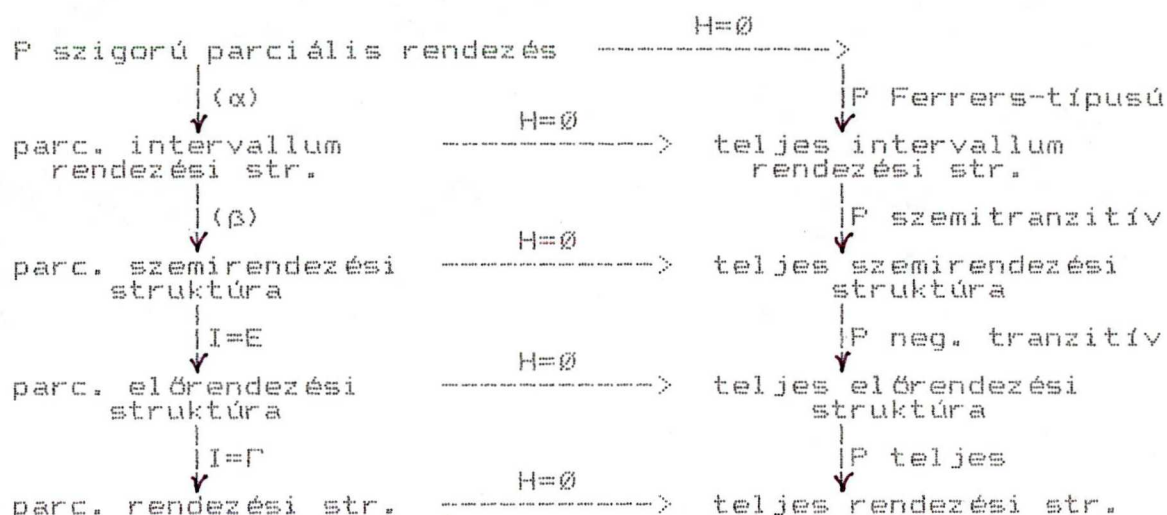
Bizonyítás: Ha a P szigorú parciális rendezés, akkor a 2.4.3. állításban definiált P' is szigorú parciális rendezés A/E -n. A Szpilrajn-tétel miatt létezik az A/E -n egy olyan P'' szigorú teljes rendezés, amely a P' kiterjesztése. A 2.3.1. tétel szerint van olyan $u': A/E \rightarrow \mathbb{R}$, hogy $a'P''b' \iff u'(a') > u'(b')$ és $a'=b' \iff u'(a') = u'(b')$. Defináljuk az $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $u(a) := u'(a')$, $a \in a'$ képlettel $\forall a \in A$ -ra. Kapjuk, hogy $aPb \iff a'P''b' \iff u'(a') > u'(b') \iff u(a) > u(b)$, valamint $aEb \iff a'=b' \iff u'(a') = u'(b') \iff u(a) = u(b)$. $\square$

A karakterisztikus relációra vonatkozó eredményt is együtt fogalmazzuk meg, kihasználva, hogy $I=E$ teljesül mindkét definiált struktúrában, illetve, hogy egy parciális rendezés előrendezés.

2.4.1. Következmény: Ha egy preferencia-struktúra R karak-

terisztikus relációja előrendezés, akkor létezik olyan $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy
 $\forall a, b \in A$ -ra $aRb \implies u(a) \geq u(b)$.

Az alábbi ábrában összefoglaljuk a vizsgált preferencia-
 -struktúrák közötti viszonyt. A nyilak mellé azokat a felté-
 teleket írtuk, amelyek szükségesek és elegendők ahhoz, hogy
 az általánosabb struktúrából megkapjuk a speciálisabbat.



A részletesebben nem vizsgált parciális intervallum-,
 ill. parciális szemirendezési struktúrákat definiáló felté-
 telek a következők:

- (α) P-I aciklikus, azaz nem léteznek olyan $a_1, \dots, a_n \in A$
 elemek, hogy $a_1 P a_2 P a_3 \dots P a_n P a_1$ teljesülne ;
- (β) az $(A, P \cup I)$ gráf minden köre több I mint P típusú
 élt tartalmaz.

Ezen két struktúra reprezentáció-tételére is igaz, hogy a
 megfelelő teljes preferencia-struktúrára vonatkozó tételben
 az ekvivalenciák implikációkra cserélendők. Ez a szoros kap-
 csolat a parciális struktúrák teljessé történő kiterjeszté-
 sére is lehetőséget ad, a valós reprezentánsok közötti vi-
 szony szerinti preferencia vagy indifferencia ítéletek ki-
 mondásával.

3. NEMKOMPENZATORIKUS PREFERENCIA-STRUKTÚRAK

A többtényezős döntési eljárás feladatát egy olyan globális preferenciareláció felépítéseként fogalmaztuk meg, amelyben összevonjuk, aggregáljuk az egyes tényezők szerinti értékeléseket. Ez természetesen sokféleképpen megtehető, így további, a tényezők egymásközi viszonyára vonatkozó információk is szükségesek. Sőt, a probléma részekre bontása, az egyidejűleg csak bizonyos szempontok figyelembevételének lehetősége is igényel a tényezők kapcsolatára tett feltevéseket. Érdemes tehát megkülönböztetni a tényezőkön belüli /intra-attributumos/, illetve a tényezők közötti /inter-attributumos/ információkat.

A tényezőkön belüli információkkal részletesen foglalkoztunk az előző fejezetben. Ezek tehát az egyetlen szempont szerinti értékelések, ezek algebrai jellemzése, a valós reprezentációhoz szükséges feltevések, stb.. A tényezők közötti információk is lehetnek hipotézisek, pl. a tényezők kölcsönhatására, illetve értékelési függetlenségére vonatkozóan, továbbá "valódi" információk, pl. a szempontok relatív fontosságát kifejező összehasonlítások, vagy az ezt kifejező súlyok becslése, stb.. Ezekkel a kérdésekkel részletesebben ebben a fejezetben foglalkozunk.

Először definiáljuk a legtöbb eddig ismert többtényezős döntési módszer közös alapjának tekinthető többtényezős preferencia-struktúra fogalmát, majd alaposabban megvizsgáljuk azokat a típusokat, melyekben bizonyos értékelési szempontok szerinti hátrányok nem egyenlíthetők ki más szempontok szerinti előnyökkel. Mivel a különböző tényezők aggregálásának talán legtermészetesebb módja az előnyök, illetve hátrányok egyetlen dimenzióban történő kifejezése és összevetése, nagyon sok módszer ilyen jellegű modellen alapszik, erre vonatkozóan lásd Jacquet-Lagrange(1982) cikkét. A kompenzálhatóságot ilyen értelemben kizáró aggregációs eljárások érvényességi köre ezért szűkebb, mégis sok esetben hasznosnak és

jól alkalmazhatónak bizonyulnak. A nemkompenzatórikus aggregációs eljárások használatára vonatkozóan MacCrimmon(1973) és Einhorn(1970) cikkére utalunk. Több, elsősorban "szigorúságukat" tekintve különböző struktúrát vizsgálunk meg, ezek magukban foglalják a lexikografikus- /lásd Fishburn(1974)/, illetve a konkordancia-diszkordancia elven alapuló módszereket /lásd 1.3.alfejezet/.

3.1. A többtényezős preferencia-struktúra fogalma

Legyen az alternatívahalmaz többattributumos szerkezetű, és tekintsük az összes attributum kombinációt, azaz $A = A_1 \times \dots \times A_n$, $n \geq 2$. Az aggregációs eljárás során az egyes szempontok szerinti értékeléseket is kifejező (A_j, R_j) ($j=1, \dots, n$) kritériumokból kiindulva határozzuk meg a globális (A, R) preferencia-struktúrát.

Használva az $N = \{1, \dots, n\}$, illetve az $((x)_J, (a)_{N \setminus J}) = (\dots x_j \dots a_k \dots) \in A$, ahol $J \subseteq N$, $x_j \in A_j$, $a_k \in A_k$, $j \in J$, $k \in N \setminus J$ jelölést, minden $\emptyset \subset J \subseteq N$ -re legyen R_J az az $A_J = \prod_{j \in J} A_j$ -n értelmezett kétváltozós reláció, amit az R -ből az

$$(x)_J R_J (y)_J : \Leftrightarrow \forall (a)_{N \setminus J} \in A_{N \setminus J} : ((x)_J, (a)_{N \setminus J}) R ((y)_J, (a)_{N \setminus J})$$

alapján származtatunk. Nyilván $R_N = R$; ha R reflexív, akkor R_J is az, viszont az $R_{\emptyset}$ és R_J közötti kapcsolatról még semmit sem tudunk.

A legtöbb döntési modell használ valamilyen függetlenségi feltevést a tényezők egymásközi viszonyára vonatkozóan. Ezeket, sőt bizonyos típusú függőségi viszonyokat is megengedő modelleket ismertet Fishburn(1978). Talán a legtöbbet használt ilyen fogalom az attributum-részhalmazoknak a komplementektől való preferencia-függetlenségeként is jellemzett /lásd pl. Roy-Vincke(1981)/ függetlenség /vö. Krantz és Lichtenstein(1971) 6.fejezet/.

3.1.1. Definíció: Azt mondjuk, hogy az $A=A_1 \times \dots \times A_n$ halmazon értelmezett R reláció független, ha minden $J \in N$ -re $((x)_J, (a)_{N \setminus J}) R ((y)_J, (a)_{N \setminus J}) \rightarrow ((x)_J, (b)_{N \setminus J}) R ((y)_J, (b)_{N \setminus J})$ fennáll tetszőleges $(a)_{N \setminus J}, (b)_{N \setminus J}$ esetén.

Egy ilyen reláció tehát független az egyenlő komponensek értékétől, így a származtatott R_J relációt jellemezhetjük az

$$(x)_J R_J (y)_J \Leftrightarrow \exists (a)_{N \setminus J} \in A_{N \setminus J}: ((x)_J, (a)_{N \setminus J}) R ((y)_J, (a)_{N \setminus J})$$

összefüggéssel is.

Amennyiben az R reflexív, tehát tekinthető egy az A -n levő preferencia-struktúra karakterisztikus relációjának, akkor a 2.2. alfejezetben megismert értelmezésekkel meghatároz egy-egy P, I és H relációt, az ismert tulajdonságokkal. Az R_J -ből kiindulva hasonlóan kaphatunk egy (P_J, I_J, H_J) preferencia-struktúrát az A_J halmazon, minden $J \in N$ -re. Ha az R független is, akkor könnyű meggondolni, hogy a P -ből a fenti összefüggéssel származtatott reláció megegyezik a P_J -vel, természetesen hasonló igaz az I_J, H_J -re is.

Ezek után nem igényel különösebb indoklást a most következő, Bouyssou (1986)-tól származó definíció első pontja.

3.1.2. Definíció: Az $[(A_1, R_1), \dots, (A_n, R_n)] \rightarrow (A, R)$ -t többszempontú preferencia-struktúrának nevezzük, ha

- (i) az R reflexív, független ;
- (ii) minden $j \in N$ -re az R_j teljes és $R_j = R_{\{j\}}$;
- (iii) minden $J \in N$ -re $[\forall j \in J: x_j P_j y_j] \rightarrow (x)_J P_J (y)_J$.

A második pont szerint a globális relációból akármelyik dimenzióra származtatott reláció megegyezik a megfelelő preferencia-relációval, másképpen, az egyes szempontok szerinti értékeléseket a globális értékelésnek úgy kell tükröznie, hogy két attributumérték viszonyát nem befolyásolhatja az, ha a többi attributum szerint azonos értékekkel kiegészítve, mint attributum-kombinációkat hasonlítjuk őket össze. Ugyanitt követeljük meg azt is, hogy bármely két olyan alternatíva legyen összehasonlítható, amelyek csak egyetlen attribu-



tumban különböznek, vagyis $\forall j \in N$ -re $H_j = \emptyset$.

A (iii)-ban megfogalmazottak alapján a tényezőnként szigorú előnyök együttesen is szigorú előnyt kell, hogy jelentsenek, kizárjuk tehát annak a lehetőségét, hogy egy komponensenként jobb alternatíva összességében rosszabbnak bizonyulhatna egy másiknál. Ez a feltevés is a komponensek egymás közötti viszonyát jellemzi, de nem következik az eddigiekből.

A továbbiakban mindig többtényezős preferencia-struktúrákat vizsgálunk. Először is tetszőleges $x, y \in A$ -ra jelöljük $P(x, y)$ -al az x -et előnyben részesítő szempontok halmazát, azaz $P(x, y) := \{j \in N : x_j P_j y_j\}$, míg $I(x, y) := \{j \in N : x_j I_j y_j\}$ -vel a közömbös szempontokét. A komponensenkénti teljesség miatt nyilván $P(x, y) \cup I(x, y) \cup P(y, x) = N$, míg a preferencia-struktúrák tulajdonságaiból következően bármely kettő diszjunkt.

3.1.3. Definíció: Tetszőleges $(x, y) \in A \times A$ rendezett alternatívapár preferenciaprofiljának nevezzük a $PP(x, y) = (P(x, y), P(y, x))$ rendezett halmazpárt.

3.1.4. Definíció: Azt mondjuk, hogy az (A_j, R_j) tényező lényeges, ha $P_j \neq \emptyset$, azaz $\exists x_j, y_j \in A_j : x_j P_j y_j$.

Mivel az olyan tényezők, amelyek szerint minden alternatíva indifferens, gyakorlatilag elhagyhatók, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy minden tényező lényeges. E feltevés hasznos következményét mondja ki az alábbi könnyen meggondolható

3.1.1. Allítás: Egy többtényezős preferencia-struktúrában minden tényező akkor és csak akkor lényeges, ha teljesül, hogy $\{(J, K) : J, K \subseteq N, J \cap K = \emptyset\} = \{PP(x, y) : x, y \in A\}$.

A továbbiakban gyakran ki fogjuk használni ezt a jellemzést, mely szerint minden diszjunkt attribútum-részhalmaz pár valamely alternatívapár preferenciaprofilja.

3.2. A nemkompenzatorikus fokozatai

Nemkompenzatorikusnak nevezzük az olyan aggregációkat, illetve az általuk létrehozott többtényezős preferencia-struktúrákat, melyekben bizonyos tényezők szerinti, esetleg kismértékű hátrányokat sem egyenlíthetnek ki más tényezőkön elért, esetleg jóval nagyobb mértékű előnyök. Nem léteznek tehát a különböző dimenziók közötti olyan csereértékek /'tradeoff'/, melyek a globális összehasonlításnál az információk egyetlen dimenzióba történő összevonását lehetővé tennék. A nemkompenzatorikus struktúrákat alapvetően jellemzi az alternatívák és az attributum-részhalmazok közötti közvetlen kapcsolat. Ennek alapformáit határozza meg az elnevezéseket nem adó

3.2.1. Definíció: A szokásos jelölésekkel $J, K \in JCN$ esetén

- $J > K : \Leftrightarrow \exists x, y \in A : xPy \text{ és } PP(x, y) = (J, K) ;$
- $J \sim K : \Leftrightarrow \exists x, y \in A : xIy \text{ és } PP(x, y) = (J, K) ;$
- $J \gg K : \Leftrightarrow J \cap K = \emptyset \text{ és } [\forall x, y \in A: PP(x, y) = (J, K) \rightarrow xPy] ;$
- $J \# K : \Leftrightarrow J \cap K = \emptyset \text{ és } [\forall x, y \in A: PP(x, y) = (J, K) \rightarrow xIy] ;$
- $J < > K : \Leftrightarrow J \cap K = \emptyset \text{ és } [\forall x, y \in A: PP(x, y) = (J, K) \rightarrow xHy] .$

A diszjunkt attributum részhalmazok közötti relációkra nyilván teljesülnek a következők: $\gg$ aszimmetrikus ; $\sim, < >, \sim$ szimmetrikus ; $\gg, \sim, < >$ páronként diszjunktak ; $J \gg K \Rightarrow J > K$ és $\text{nem}(K > J)$; $J \# K \Rightarrow J \sim K$ és $\text{nem}(J > K)$ és $\text{nem}(K > J)$; $< > \cap \sim = \emptyset$; $< > \cap \sim = \emptyset$. Megjegyezzük, hogy $>$ nem feltétlenül aszimmetrikus; $\emptyset \sim \emptyset$, de nem biztos, hogy $\emptyset \# \emptyset$. Sőt, elképzelhető $\emptyset > \emptyset$ is, amennyiben tényezőnként jelentéktelen különbségek összességében számottevővé válnak /e tulajdonság nem tévesztendő össze az egydimenziós preferencia-struktúrák indifferencia relációjának intranzitivitásával/. Igaz továbbá, hogy minden nemüres $J \in JCN$ -re $J > \emptyset$; $N \gg \emptyset$, de $J \in JCN$ esetén $J \gg \emptyset$ már nem feltétlenül igaz. E megjegyzésekből is látszik, hogy az egyes szempontok szerinti értékelések általában milyen sokféleképpen befolyásolhatják a globális megítélést. Jóval szigorúbb

tulajdonságokkal rendelkező struktúrát határoz meg a

3.2.2. Definíció: Azt mondjuk, hogy egy többtényezős preferencia-struktúra teljesen nemkompenzatórikus, ha minden $x, y, z, w \in A$ -ra $[PP(x, y) = PP(z, w)] \rightarrow [xRy \leftrightarrow zRw]$.

Ilyen esetben tehát a preferenciaprofil egyértelműen meghatározza két alternatíva viszonyát, vagyis a dimenziónkénti értékeléseknek csak a milyensége számít, míg az esetleges kvantitatív jellemzők lényegtelenek. Érdemes megjegyezni, hogy e tulajdonságból következik a tényezők közötti függetlenség. Nézzük a további következményeket.

3.2.1. Állítás: Egy többtényezős preferencia-struktúra akkor és csak akkor teljesen nemkompenzatórikus, ha bármely $J \cap K = \emptyset$, $J, K \subseteq N$ -re a $J \gg K$, $K \gg J$, $J \approx K$, $J \prec K$ közül pontosan egy teljesül.

Bizonyítás: Az állítás azonnal adódik a $\gg$ aszimmetrikusságából, az említett relációk páronkénti diszjunktságából és abból a tényből, hogy a teljes nemkompenzatórikusság ekvivalens a $\succ = \gg$ és $\sim = \approx$ teljesülésével. $\square$

Szintén adódik, hogy $\emptyset \approx \emptyset$, azaz a komponensenkénti érdektelen eltérések együtt is jelentéktelenek maradnak, továbbá, hogy minden $\emptyset \subset J \subseteq N$ -re $J \gg \emptyset$ fennáll. Ezt szokás regularitásnak hívni /lásd pl. Fishburn(1976)/, utalva arra a gyakorlatban természetes tulajdonságra, hogy általában határozott előnyben részesítjük a hátránnyal semmilyen szempontból nem rendelkező alternatívát.

Valamivel enyhébb struktúrát eredményez a

3.2.3. Definíció: Azt mondjuk, hogy egy többtényezős preferencia-struktúra nemkompenzatórikus, ha $\forall x, y, z, w \in A$ -ra $[PP(x, y) = PP(z, w)] \rightarrow [xPy \rightarrow z(PUH)w \text{ és } xIy \rightarrow z(IUH)w]$.

Az azonos preferenciaprofil tehát itt sem enged meg keveredést a preferenciák, illetve indifferenciák között, tartal-

mazza viszont annak a lehetőségét, hogy mondjuk kirívóan nagy tényezőnkénti különbségek miatt összehasonlíthatatlannak minősítsünk egyébként preferenciát vagy indifferenciát jelentő preferenciaprofillal rendelkező alternatívákat. Mivel $H=\emptyset$ esetén ez kizárt, így ilyen esetben a nemkompenzatórikusság pontosan a teljesen nemkompenzatórikusságot jelenti. Ezt a szoros kapcsolatot jelzi a nemkompenzatórikusság jellemzését adó

3.2.2. Allítás: Egy többtényezős preferencia-struktúra akkor és csak akkor nemkompenzatórikus, ha bármely $J, K \in N$ -re a $J \succ K$, $K \succ J$, $J \sim K$, $J \prec K$ közül pontosan egy igaz.

Bizonyítás: Tulajdonképpen csak azt kell meggondoljuk, hogy a nemkompenzatórikusság ekvivalens a $\succ$ aszimmetrikusságával és a $\succ \cap \sim \neq \emptyset$ teljesülésével, ez pedig a definíciókból azonnal adódik. $\square$

A diszjunkt attributum-részhalmazok között fennálló $\succ, \sim, \prec$ relációk tulajdonságai nagyon hasonlítanak az alternatívák közötti P, I, H relációkhoz. Természetes kivételt jelent a reflexivitás, ami csak $\emptyset \sim \emptyset$ -ként jöhet szóba. Értelmezhetjük a relációhármast a tényező-kombinációk fontossági viszonyainak kifejeződéseként, másképpen $J \succ K$ esetén mondhatjuk, hogy J "fontosabb, mint" K , mert e reláció alapvetően meghatározza a (J, K) preferenciaprofilú alternatívák megítélését.

Azonos preferenciaprofil mellett az eddigieknél nagyobb értékelési keveredést enged meg a

3.2.4. Definíció: Azt mondjuk, hogy egy többtényezős preferencia-struktúra általánosított nemkompenzatórikus, ha $\forall x, y, z, w \in A$ -ra $[PP(x, y) = PP(z, w)] \rightarrow [xPy \rightarrow \text{nem}(wPz)]$.

Itt tehát egyedül a preferencia megfordulását zárjuk ki, így nem meglepő, hogy az eddigi jellemzések közül sok minden érvényét veszti. Nyilvánvaló a

3.2.3. Allítás: Egy többtényezős preferencia-struktúra akkor és csak akkor általánosított nemkompenzatórikus, ha a

$\succ$ reláció aszimmetrikus.

Mivel a $J \succ K$, $K \succ J$, $J \approx K$, $J \succ K$ közül legfeljebb egy igaz bármely diszjunkt $J, K \in N$ -re, így továbbra is tekinthetjük a $\succ$ relációt a "fontosabb, mint" megjelenésének, és persze a $\text{nem}(\emptyset \succ \emptyset)$ is igaz. Elképzelhető viszont /ezt már a nemkompenzatórikusság is megengedte/, hogy $\forall i \in N$ -re $x_i I_1 y_i$ legyen, mégis xHy álljon fenn. Ez egyébként arra is példa, hogy egy általánosított nemkompenzatórikus struktúrában az imént említett négy eset miért nem elegendő az attributum-kombinációk viszonyának jellemzésére.

Érdemes külön összefoglalni a $H = \emptyset$ esetet. Ekkor a nemkompenzatórikusság teljesen nemkompenzatórikusságot jelent, és ekvivalens azzal, hogy $\forall J \cap K = \emptyset$, $J, K \in N$ -re a $J \approx K$, $K \approx J$, $J \approx K$ közül pontosan egy teljesül. Hasonló jellemzés igaz az általánosított nemkompenzatórikus struktúrákra is, mégpedig a $J \succ K$, $K \succ J$, $J \approx K$ relációkkal. Természetesen mindig $\emptyset \approx \emptyset$. Ezek a struktúrák tartalmazzák az 1.3. alfejezetben ismertetett konkordancia-diszkordancia modelleket. E szempontból történő alapos vizsgálatot nyújt Bouyssou-Vansnick (1985) munkája. Más megközelítésből jut hasonló struktúrákhoz Huber (1979).

3.3. Általánosított nemkompenzatórikus struktúrák

Az alábbiakban bizonyos speciális tulajdonságok kapcsolatát vizsgáljuk meg általánosított nemkompenzatórikus preferencia-struktúrákban. A tekintett tulajdonságok és eredmények a Fishburn (1976) által a dolgozatunkban teljesen nemkompenzatórikusnak nevezett struktúrák jellemzésére használtak megfelelői. Először az átmenthető eredményeket tárgyaljuk, majd a következő alfejezetben közöljük a csak a teljesen nemkompenzatórikus struktúrákban érvényes eredmények bizonyítását és példákkal igazoljuk a szigorúbb struktúra szükségességét ezen összefüggésekkel kapcsolatban.

Szükségünk lesz a következő jelölésre. Tetszőleges $J, K, L, M \subseteq N$ és $J \cap K = L \cap M = \emptyset$ esetén $(J, K) \succ (L, M)$ -el fogjuk rövidíteni azt, ha $L \subseteq J$, $K \subseteq M$ és a két tartalmazás közül legalább az egyik szigorú. Két különböző preferenciaprofil tehát akkor van ilyen relációban, ha az előnyöket nem növeljük $/L \subseteq J/$ és a hátrányokat nem csökkentjük $/K \subseteq M/$.

3.3.1. Definíció: Azt mondjuk, hogy az $[(A_1, R_1), \dots, (A_n, R_n)]$

$\rightarrow (A, R)$ többtényezős preferencia-struktúra

-T2 monoton, ha $[(J, K) \succ (L, M) \text{ és } L \supset M] \rightarrow J \succ K$;

-T3 erősen monoton, ha

$[(J, K) \succ (L, M) \text{ és nem } (M \supset L)] \rightarrow J \succ K$;

-T4 additív, ha $[J \cap L = \emptyset \text{ és } (J \cup L) \cap (K \cup M) = \emptyset$

$\text{és } J \succ K \text{ és nem } (M \supset L)] \rightarrow J \cup L \succ K \cup M$;

-T5 szuperadditív, ha $[(J \cup L) \cap (K \cup M) = \emptyset \text{ és}$

$J \succ K \text{ és } L \supset M] \rightarrow J \cup L \succ K \cup M$;

-T6 döntő, ha $[J \cap K = \emptyset \text{ és } (J, K) \neq (\emptyset, \emptyset)] \rightarrow [J \succ K \text{ vagy } K \succ J]$;

-T7 attributum aciklikus, ha a $\succ$ aciklikus;

-T8 aciklikus, ha a P aciklikus;

-T9 parciálisan rendezett, ha a P szigorú parciális

rendezés;

-T10 gyengén rendezett, ha a P gyenge rendezés;

-T11 duplán lényeges, ha $\forall j \in N$ -re $[\exists a_j, b_j, c_j \in A$:

$a_j P_j b_j \text{ és } b_j P_j c_j]$;

-T12 lexikografikus, ha $\exists \sigma$ permutáció az N -n, hogy

$a P b \leftrightarrow [PP(a, b) \neq (\emptyset, \emptyset) \text{ és}$

$\min\{j: \sigma(j) \in PP(a, b)\} < \min\{j: \sigma(j) \in PP(b, a)\}]$,

/értjük $\min \emptyset = +\infty$.

A hiányzó T1 tulajdonság a regularitás esetünkben mindig teljesül, hiszen egy többtényezős preferencia-struktúrában minden $\emptyset \subseteq J \subseteq N$ -re $J \succ \emptyset$ a 3.1.2. definíció (iii) miatt.

A monotonitás szerint ha van olyan $c, d \in A$, melyre $c P d$ és $PP(c, d) = (L, M)$, akkor lennie kell olyan a, b alternatívapárnak is, melyre $a P b$ és $PP(a, b) = (J, K)$, azaz az $a \in A$ legalább annyi előnnyel és legfeljebb annyi hátránnyal rendelkezik a b -vel

szemben, mint a c a d -hez képest. Az erős monotonitásnál ugyanezen következtetéshez elegendő a $\text{nem}(dPc)$ is. A T_4 és T_5 az attributum-részhalmazok egyesítésének két lehetséges módja. Míg az additivitásnál megköveteljük az előnyös tényezők különbözőségét $/J \cap L = \emptyset/$, addig a szuperadditivásban a fontosságokra teszünk szigorúbb feltételeket $/L > M$ a $\text{nem}(M > L)$ helyett/. Ez utóbbi tulajdonság a T_6 és a T_7 -el együtt fontos jellemzője a lexikografikus struktúráknak. A T_8 , T_9 és T_{10} a preferenciarelációra jelent egyre szigorúbb feltevéseket, lásd a 2.fejezetet. A duplán lényegesség megköveteli, hogy minden tényező szerint legyen legalább három, értékelési szempontból is különböző érték. A lexikografikus struktúrákban van a tényezőknek egy olyan dominanciasorrendje, amely az első, a legdominánsabb nem indifferens tényező szerinti preferencia alapján határozza meg a globális értékelést.

A fenti tulajdonságok közötti kapcsolatot foglalja össze a

3.3.Tétel: Egy általánosított nemkompenzatórikus preferencia-struktúrában

- (a) $T_{10} \implies T_4 \implies T_3 \implies T_2$;
- (b) $[T_5 \text{ és } T_6] \implies T_4$;
- (c) $T_{10} \implies T_9 \implies T_8$;
- (d) $T_{12} \implies [T_5 \text{ és } T_6 \text{ és } T_7]$;
- (e) $[T_{10} \text{ és } T_{11}] \implies T_6$;
- (f) $T_{10} \implies T_7$.

Bizonyítás:

$T_3 \implies T_2$: A > aszimmetriája miatt $L > M \implies \text{nem}(M > L)$.

$T_4 \implies T_3$: Tegyük fel, hogy a T_3 -beli feltételek teljesülnek.

Ha $J=L$, akkor $M \setminus K \neq \emptyset$, így $M \setminus K > \emptyset$. Ebből és az indirekt $\text{nem}(J > K)$ feltevésből T_4 alapján $M > J$ adódna, ami viszont ellentmond a $\text{nem}(M > L)$ -nek.

Amennyiben $J \setminus L \neq \emptyset$ és $J \cap M = \emptyset$, akkor $J \setminus L > \emptyset$ és $\text{nem}(M > L)$ -ből

kapjuk, hogy $J > M$. Ez $M = K$ esetén pont az állítás, míg $M \setminus K \neq \emptyset$ esetén az előbbi gondolatmenettel kapjuk az $M \setminus K > \emptyset$ és az indirekt módon feltett $\text{nem}(J > K)$ -ból, hogy $M > J$, ami a $>$ aszimmetrikussága miatt ellentmondás.

A $J \setminus L \neq \emptyset$ és $J \cap M \neq \emptyset$ esetben tételezzük fel, hogy $K > J \setminus M$. Ebből és a nyilvánvaló $\text{nem}(\emptyset > M \setminus K)$ -ból T_4 alapján $M > J \setminus M$ adódik. Ha $J \setminus M = L$, akkor ellentmondásra jutunk a T_3 -beli $\text{nem}(M > L)$ -el. Ha viszont $J \setminus M \setminus L \neq \emptyset$, akkor a $J \setminus M \setminus L > \emptyset$ és $\text{nem}(M > L)$ a $J \setminus M > M$ -hez vezet, ami lehetetlen, ha a $K > J \setminus M$ fennáll. Következésképpen $\text{nem}(K > J \setminus M)$ kell legyen, ez pedig a $J \cap M > \emptyset$ -al együtt éppen a bizonyítandó $J > K$ -t jelenti az additivitás miatt.

$T_{10} \Rightarrow T_4$: A T_4 feltételei mellett kell lennie olyan s, t alternatívapárnak, melyre sPt és $PP(s, t) = (J, K)$. Jelöljük $\forall i \in N$ -re a_i, b_i -vel az egyes tényezők lényegességét biztosító attributumértékeket. Ezekre tehát $\forall i \in N$: $a_i P_i b_i$ igaz, és megválaszthatjuk őket úgy is, hogy $\forall i \in J$ -re $a_i = s_i$, $b_i = t_i$ és $\forall i \in K$ -ra $a_i = t_i$, $b_i = s_i$ legyen.

Tekintsük az $x_i := a_i$, ha $i \in J \cup L$; $x_i := b_i$ különben, illetve az $y_i := a_i$, ha $i \in K \cup L$; $y_i := b_i$ különben meghatározásokkal definiált x, y alternatívákat. Megmutatjuk, hogy xPy . Ugyanis, az s -ből kiindulva az $N \setminus (J \cup K)$ -beli tényezőknél az s_i -t egyenként t_i -re cserélve kapunk egy $s, s', \dots, s''$ sorozatot. A 3.1.2. definíció (ii) szerint $sIs'I...Is''$. hiszen $\forall i \in N \setminus (J \cup K)$ -ra $s_i I_i t_i$. Mivel a P negatívan tranzitív, így sIs'' , és ezért sPt miatt $s''Pt$ kell legyen. Az s'' tehát csak a $J \cup K$ -n különbözik t -től, így kihasználva a P függetlenségét és az egyenlő komponenseket előbb L -n t_i -ről a_i -re, majd $N \setminus (J \cup K \cup L)$ -n t_i -ről b_i -re cserélve kapjuk, hogy xPy .

Legyen $z_i := a_i$, ha $i \in L \cup K \setminus M$; $z_i := b_i$ egyébként. Biztosan $\text{nem}(zPy)$, mivel ha $K \cap M = \emptyset$, akkor $y = z$, míg $K \cap M \neq \emptyset$ esetén $P(y, z) = K \cap M > \emptyset = P(z, y)$.

A $w_i := a_i$, ha $i \in K \cup M$; $w_i := b_i$ különben; által megadott w -re $PP(w, z) = (M, L)$, így mivel $\text{nem}(M > L)$, tehát $\text{nem}(wPz)$. Ezt



összevetve az imént kapott $\text{nem}(zPy)$ -al kapjuk, hogy $\text{nem}(wPy)$. Tudjuk viszont, hogy xPy így megint csak a P negatív tranzitivitásából következik az xPw reláció. Ez pedig állításunkat jelenti, hiszen $PP(x,w)=(JUL,KUM)$.

T5 és T6] $\Rightarrow$ T4 : Összevetve a T4 és T5 feltételeit, nyilván csak a $(JUL) \cap (KUM) = \emptyset$, $J \cap L = \emptyset$, $J > K$, $\text{Inem}(L > M)$ és $\text{nem}(M > L)$ eset az érdekes. Lévéen $L \cap M = \emptyset$, a legutolsó feltevés a T6 mellett csak $(L,M) = (\emptyset, \emptyset)$ esetén teljesülhet. Ekkor viszont az állítás azonos az egyik feltétellel.

T10 $\Rightarrow$ T9 $\Rightarrow$ T8 : A definíciókból nyilvánvaló.

T12 $\Rightarrow$ T5 : A rövidség kedvéért a most következő három pontban tegyük fel, hogy $\sigma(i)=i \ \forall i \in N$ -re.

A T5 feltételeiből következik, hogy $\exists xPy: PP(x,y)=(J,K)$ és $\exists zPw: PP(z,w)=(L,M)$. A lexikografikusság miatt tehát $\min J < \min K$ és $\min L < \min M$, amikből $\min(JUL) < \min(KUM)$ valamint $JUL \neq \emptyset$ is következik. Kell lennie tehát olyan a,b alternatíváknak, melyekre $PP(a,b)=(JUL,KUM) \neq (\emptyset, \emptyset)$ teljesül, így aPb a T12 miatt, vagyis $JUL > KUM$.

T12 $\Rightarrow$ T6 : A T6-ban feltett $J \cap K = \emptyset$ -ből a $\exists a,b: PP(a,b)=(J,K)$, míg a $(J,K) \neq (\emptyset, \emptyset)$ -ből a kizáró értelmű vagy $\min J < \min K$ vagy $\min K < \min J$ következik, azaz vagy aPb és így $J > K$, vagy bPa és ekkor $K > J$ teljesül szintén kizáró értelemben.

T12 $\Rightarrow$ T7 : Indirekt módon tegyük fel, hogy léteznek olyan $J^1, \dots, J^m \in N$ attributum-részhalmazok, hogy $J^1 > J^2 > \dots > J^m > J^1$. Nyilván egyik sem lehet üres. Léteznek tehát olyan x^iPy^i ($i=1, \dots, m$) alternatívák, melyekre $PP(x^i, y^i) = (J^i, J^{i+1})$ / $J^{m+1} := J^1$ /. Ezekből a T12 szerint a $\min J^1 < \min J^2 < \dots < \min J^m < \min J^1$ adódik, ami nyilvánvalóan lehetetlen.

[T10 és T11] $\Rightarrow$ T6 : Tegyük fel indirekten, hogy $J \cap K = \emptyset$, $(J,K) \neq (\emptyset, \emptyset)$, $\text{nem}(J > K)$ és $\text{nem}(K > J)$. Nyilván sem J , sem K nem lehet üres. A duplán lényegesség szerint $\forall j \in N$ -re $\exists a_j, P_j, b_j, P_j, c_j$. Defináljuk az x, y, z alternatívákat a következőképpen: $\forall j \in J$ -re $x_j := b_j$, $y_j := a_j$, $z_j := c_j$; $\forall j \in K$ -ra $x_j := a_j$, $y_j := c_j$, $z_j := b_j$; $\forall j \in N \setminus (J \cup K)$ -ra $x_j := y_j := z_j := c_j$. Lévéen $PP(x,y)=(K,J)$, $PP(y,z)=(J,K)$, a feltevésekből kap-

jük, hogy $x(IUH)y(IUH)z$, így $T10$ miatt $x(IUH)z$ is igaz. Másrészt x -ből kiindulva és a J -beli tényezők szerinti b_j -ket egyenként c_j -re, majd a K -n az a_j -ket ugyancsak egyenként b_j -re cserélve, a tényezőnkénti és a globális preferenciarelációk kapcsolata alapján kapjuk, hogy $xP...Pz$. Ugyancsak a $T10$ miatt teljesül az xPz is, ez viszont ellentmond az indirekt feltevést felhasználó előbbi megállapításunknak.

$T10 \Rightarrow T7$: Indirekt módon tegyük fel, hogy léteznek olyan $J^1, \dots, J^m \subseteq N$ attributum-részhalmozok, hogy $J^1 \succ J^2 \succ \dots \succ J^m \succ J^1$. Nyilván egyik sem lehet üres. Létezik tehát olyan s, t alternatívapár, hogy sPt és $PP(s, t) = (J^1, J^2)$. A tényezők lényegessége miatt $\forall j \in N$ -re $\exists a_j, b_j$, válasszuk J^1 -n az $a_j := s_j$, $b_j := t_j$; míg J^2 -n az $a_j := t_j$, $b_j := s_j$ értékeket. Jelöljük x^i -vel ($i=1, \dots, m$) az $x^i_j := a_j$, ha $j \in J^i$; $x^i_j := b_j$ egyébként; meghatározásokkal megadott alternatívákat. Mivel $PP(x^1, x^{i+1}) = (J^1, J^{i+1})$ / $J^{m+1} := J^1$, $x^{m+1} := x^1$, az indirekt feltevés miatt $x^1(PUIUH)x^2, \dots, x^m(PUIUH)x^1$ kell legyen.

Másrészt t -ből kiindulva és az $N \setminus (J^1 \cup J^2)$ -beli t_j -ket a velük indifferens s_j -kre egyenként kicserélve kapjuk, hogy $sPtIt'I...It$. Mivel a P gyenge rendezés, így sPt . Kihasználva a P függetlenségét, az $N \setminus (J^1 \cup J^2)$ -beli egyenlő komponensek s_j értékeit b_j -kre megváltoztatva x^1Px^2 adódik. Van tehát egy szigorú preferencia a fenti sorozatban, ami a $T10$ miatt x^1Px^2 -t eredményez, ez pedig nyilvánvaló ellentmondás. □

3.4. Teljesen nemkompenzatórikus struktúrák

Ezen alfejezet témája a 3.3.1. definícióban szereplő fogalmak közötti összefüggések vizsgálata teljesen nemkompenzatórikus preferencia-struktúrákban. Mint azt a 3.2.1. állí-

tásban meggondoltuk, ilyenkor a $>$ és $\otimes$, illetve a $\sim$ és $\#$ relációk megegyeznek. Összefoglalóan közöljük a fennálló összefüggéseket, de csak a 3.3.tételből nem következő eredményeket bizonyítjuk, majd példákkal illusztráljuk, hogy ezekhez az összefüggésekhez szükséges a teljes nemkompenzatórikusságból következő szabályosság. Ugyanakkor mi sem adunk olyan példákat, melyek igazolják, hogy az alábbi tételből az implikáció tranzitivitásával nyerhető következtetéseken kívül más összefüggések már nem is teljesülhetnek egy teljesen nemkompenzatórikus struktúrában.

Fishburn(1976)-tól származik a

3.4.Tétel: Egy teljesen nemkompenzatórikus preferenciastruktúrában

- (a) $T_{10} \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$;
- (b) $[T_5 \text{ és } T_6] \Rightarrow T_4$;
- (c) $T_{10} \Rightarrow T_9 \Rightarrow T_8 \Rightarrow T_7$;
- (d) $T_9 \Rightarrow T_2$;
- (e) $[T_9 \text{ és } T_{11}] \Rightarrow T_5$;
- (f) $T_{12} \Leftrightarrow [T_5 \text{ és } T_6 \text{ és } T_7]$;
- (g) $[T_{10} \text{ és } T_{11}] \Rightarrow T_{12}$;

Bizonyítás: A 3.3.tétel miatt nyilván elegendő megmutatni, hogy

$T_8 \Rightarrow T_7$: Tegyük fel indirekten, hogy $>$ nem aciklikus, azaz létezik egy $J^1 > J^2 > \dots > J^m > J^1$ attributum ciklus. Léteznek továbbá az $a_j, b_j \in A_j$, $a_j P_j b_j$ értékek $\forall j \in N$ -re. Legyen x^i ($i=1, \dots, m$) az $x^i_j := a_j$, ha $j \in J^i$; $x^i_j := b_j$ különben; által definiálva. A $> = \otimes$ miatt az indirekt feltevésből kapjuk, hogy $x^1 P x^2 P \dots P x^m P x^1$, ez viszont ellentmond a P aciklikusságának.

$T_9 \Rightarrow T_2$: A T_2 feltételei szerint legyen $(J, K) \otimes (L, M)$. A szokásos $\forall j \in N$: $a_j P_j b_j$ -vel legyen $x_j := a_j$, $j \in J$ -re, $x_j := b_j$ egyébként ; $y_j := a_j$, $j \in L$ -re, $y_j := b_j$ egyébként ; $z_j := a_j$, $j \in M$ esetén, $z_j := b_j$ egyébként ; $w_j := a_j$, $j \in K$ -ra, $w_j := b_j$ egyébként. Lévé $PP(y, z) = (L, M)$ és $L \otimes M$, így $y P z$. Ha $J=L$, nyil-

ván $x=y$. Amennyiben $L \subset J$, akkor a $J \setminus L$ -beli a_j -ket egyenként b_j -kre cserélve kapjuk, hogy $xP \dots Py$. Hasonlóan, $z=w$, ha $K=M$; míg zPw , ha $K \subset M$. A preferencia-reláció tranzitivitásából kapjuk, hogy xPw , s ebből $J \succsim K$ következik.

[T9 és T11] $\Rightarrow$ T5 : A T11 szerint léteznek az a_j, b_j , b_j, c_j értékek $\forall j \in N$ -re, sőt T9-ből következően az a_j, b_j, c_j is fennáll. Nézzük az $x_j := a_j$ $J \setminus L$ -n, $x_j := b_j$ $(K \setminus M) \setminus (K \cap M)$ -n, $x_j := c_j$ egyébként ; $y_j := a_j$ $(L \setminus J) \cup (K \setminus M)$ -n, $y_j := b_j$ $J \cap M$ -n, $y_j := c_j$ egyébként ; $z_j := a_j$ $K \setminus M$ -n, $z_j := b_j$ $(J \setminus L) \setminus (J \cap L)$ -n, $z_j := c_j$ egyébként ; előírásokkal megadott alternatívákat. A T5 alapján feltéve, hogy $(J \setminus L) \cap (K \setminus M) = \emptyset$, $J \succsim K$, $L \succsim M$, a $PP(x, y) = (J, K)$ az xPy -t, a $PP(y, z) = (L, M)$ az yPz -t, míg a T9 az xPz -t eredményezi. Ez pedig a $PP(x, z) = (J \cup L, K \cup M)$ miatt pontosan a $J \cup L \succsim K \cup M$ -t jelenti.

[T5 és T6 és T7] $\Rightarrow$ T12 : A T6 és T7 miatt a $\succsim$ szigorú teljes rendezés a $\{\emptyset, \{1\}, \dots, \{n\}\}$ halmazon, ugyanis a T6-ból a teljesség, a T7-ből az irreflexivitás, a kettőből együtt pedig a tranzitivitás következik. Létezik tehát olyan σ permutáció az N -n, hogy mondjuk $\{\sigma(1)\} \succ \dots \succ \{\sigma(n)\} \succ \emptyset$.

Tekintsünk olyan tetszőlegesen választott $a, b \in A$ -kat, melyekre $PP(a, b) \neq (\emptyset, \emptyset)$. Legyen $j_a := \min\{j : \sigma(j) \in P(a, b)\}$ és $j_b := \min\{j : \sigma(j) \in P(b, a)\}$. Ha $j_a < j_b$, akkor $\{j_a\} \succ \{k\}$ minden $k \in P(b, a)$ -ra, így T5-t kétszer alkalmazva kapjuk, hogy $\{j_a\} \succ P(b, a)$. Ezt esetleg még összevetve a $P(a, b) \setminus \{j_a\} \neq \emptyset$ esetén fennálló $P(a, b) \setminus \{j_a\} \succ \emptyset$ -al szintén T5-ből jön, hogy $P(a, b) \succ P(b, a)$, azaz aPb .

Megfordítva, aPb esetén nyilván $PP(a, b) \neq (\emptyset, \emptyset)$ és $j_a < j_b$, különben az előbbi gondolatmenettel az ellentmondást jelentő bPa -ra jutnánk.

[T10 és T11] $\Rightarrow$ T12 : Allításunk azonnal adódik a tétel (c), (e), (f) pontjaiból és a 3.3.tétel (e) pontjából. $\square$

A továbbiakban példákat adunk olyan nemkompenzatórikus struktúrákra, melyekben a fenti bizonyításban szereplő következtetések valamelyike nem teljesül. A vizsgált tulajdon-

ságok közötti összefüggések szempontjából tehát nincsen különbség a nemkompenzatórikus és az általánosított nemkompenzatórikus struktúrák között, hiszen a 3.3.tétel nyilván igaz nemkompenzatórikusakra is, viszont a teljesen nemkompenzatórikusokra teljesülő, de az általánosított nemkompenzatórikus struktúrákban nem feltétlenül fennálló összefüggések a nemkompenzatórikusokban sem szükségképpen igazak.

3.4.1.Példa: olyan nemkompenzatórikus struktúrára, melyben

$[T10 \text{ és } T11] \neq T12$.

Legyen $A=A_1 \times A_2 = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$. A komponensenkénti R_1, R_2 relációk egyezzenek meg a természetes számok közötti $\geq$ rendezéssel, a globális preferencia struktúrát pedig adjuk meg a következő mátrix segítségével:

		0 1 2	0 1 2	0 1 2	
		0 0 0	1 1 1	2 2 2	
0 0		0 - -	- - -	- - -	a preferenciát +
1 0		+ 0 -	+ - -	H - -	az indifferenciát 0
2 0		+ + 0	+ + -	+ H -	az összehasonlít-hatatlanságot H
0 1		+ - -	0 - -	- - -	a fordított preferenciát -
1 1		+ + -	+ 0 -	+ - -	/xP'y: <-->yPx/
2 1		+ + +	+ + 0	+ + -	
0 2		+ H -	+ - -	0 - -	jelöli.
1 2		+ + H	+ + -	+ 0 -	
2 2		+ + +	+ + +	+ + 0	

Mindenekelőtt vizsgáljuk meg a többtényezős preferenciastruktúra feltételeinek teljesülését /ld. 3.1.2. definíció/. Az R reflexivitása megfelel a főátló 0-val való kitöltésének, a függetlenség pedig a megfelelő elemeknek a blokkon belüli, ill. egy adott pozíció blokkok közötti átlós eltolhatóságának. Az R_1 és R_2 fenti definíciójával, és a főátlóban levő blokkok átló alatti elemeinek, valamint a főátló alatti blokkok diagonális elemeinek + jellel történő kitöltésével nemcsak a 3.1.2. definíció(ii) feltételt és a duplán lényegességet elégítjük ki, hanem kimerítjük a függetlenség minden lehetséges esetét is. A P aszimmetrikusságát az egyidejűleg a főátlóra szimmetrikusan beírt - jellel biztosíthatjuk. A főátló alatti

blokkok átló alatti elemeinek + jellel való kitöltése a (iii) feltétel és a P tranzitivitásának teljesülését is maga után vonja.

Legyen $(10)P(01)$, $(20)P(01)$, $(11)P(02)$, $(21)P(02)$, $(20)P(11)$, $(20)P(02)$, $(21)P(12)$, valamint $(10)H(02)$, $(20)H(12)$. Ezek éppen az $\{1\}, \{2\}$ preferenciaprofilú alternatívapárok, így teljesen megadtuk a globális preferencia-struktúrát. A 2.3.2. állítás alapján könnyen adódik, hogy a P negatívan tranzitív, ami a fent megállapított aszimmetrikussággal együtt a struktúra gyengén rendezettségét jelenti. Megállapíthatjuk, hogy $\{1\} \succ \emptyset$, $\{2\} \succ \emptyset$, $\{1,2\} \succ \emptyset$, $\{1\} \succ \{2\}$. Lineárisan tudjuk tehát rendezni az attribútumokat, legyen tehát $\sigma(j) := j$ ($j=1, \dots, n$). Mivel $\min P((10), (02)) < \min P((02), (10))$ és $(10)H(02)$, így a struktúra nem lehet lexikografikus.

A további példáknál csak a preferencia-struktúrát adjuk meg, és eltekintünk az adott tulajdonságok teljesülésének részletes meggondolásától. Ezek egyébként könnyen megtehetők az alternatívákat rácspontokként, a relációkat pedig irányított élekként ábrázolva is.

3.4.2. Példa: olyan nemkompenzatórikus struktúrára, melyben

$[T5 \text{ és } T6 \text{ és } T7] \neq T12$.

Az alternatívahalmaz legyen $A := \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$, az R_1, R_2 pedig mint az előbbi példában.

		0	1	2		0	1	2
		0	0	0		1	1	1
0	0	0	-	-		-	-	-
1	0	+	0	-		+	-	-
2	0	+	+	0		H	H	-
0	1	+	-	H		0	-	-
1	1	+	+	H		+	0	-
2	1	+	+	+		+	+	-

Az $(10)P(01)$ miatt $\{1\} \succ \{2\}$, így az attribútumokra vonatkozó feltételek teljesülnek. Mivel $(20)H(11)$, így a struktúra nem lehet lexikografikus.

3.4.3. Példa: olyan nemkompenzatórikus struktúrára, melyben

$[T9 \text{ és } T11] \neq T5$.

Legyen $n:=3$, $(A_j, R_j) := (\{0,1,2\}, \geq)$ ($j=1,2,3$). A duplán lényegességet nyilván teljesítő struktúrában legyen $(102)P(200)$ és $(002)P(010)$. Ezek éppen a $\{3\} > \{1\}$, ill. $\{3\} > \{2\}$ -t jelentik. Ha most a 3.4.1. példához hasonlóan vesszük a 3.1.2. definícióban megkívánt relációkat és az összes eddigi preferencia tranzitív lezártját, akkor sem kapunk olyan xPy párt, melyre $PP(x,y) = (\{3\}, \{1,2\})$. Az eddig nem említett párokat összehasonlíthatatlannak minősítve kapjuk, hogy $\text{nem}(\{3\} > \{1,2\})$, ami a szuperadditivitás nem teljesülését jelenti.

Megjegyezzük, hogy a feltételek miatt kisebb méretű hasonló példát nem lehet találni, a rövidség kedvéért viszont eltekintettünk a 27×27 -es mátrix közlésétől.

3.4.4. Példa: olyan nemkompenzatórikus struktúrára, melyben

$T9 \neq T2$.

Legyen $A := \{0,1,2\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$, R_2 és R_3 mint eddig, viszont az első tényezőn $1I_1, 0$, $2I_1, 1$, $2P_1, 0$.

	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0 0 0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1 0 0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2 0 0	+	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0 1 0	+			0	0	-				-	-	-
1 1 0	+	+		0	0	0	+			-	-	-
2 1 0	+		+	+	0	0	H				-	-
0 0 1	+				-	H	0	0	-	-	-	-
1 0 1		+					0	0	0	-	-	-
2 0 1	+		+				+	0	0		-	-
0 1 1	+			+			+			0	0	-
1 1 1	+	+		+	+		+	+		0	0	0
2 1 1	+		+	+		+	+		+	+	0	0

Az $(110)P(001)$ miatt $\{2\} > \{3\}$. Mivel az egyetlen $(\{1,2\}, \{3\})$ preferenciaprofilú alternatívapár összehasonlíthatatlan $(210)H(001)$, így $\text{nem}(\{1,2\} > \{3\})$, jóllehet az additivitás feltételei teljesülnek. Az üresen hagyott

helyeket H -val kitöltve parciálisan rendezett struktúrát kapunk.

3.4.5.Példa: olyan nemkompenzatórikus struktúrára, melyben $T_9 \neq T_7$.

Legyen $n:=3$, $(A_j, R_j) := (\{0,1,2\}, \geq)$ ($j=1,2,3$) ,továbbá $(200)P(010)$, $(020)P(001)$, $(002)P(100)$. Ezek éppen azt jelentik, hogy $\{1\} > \{2\} > \{3\} > \{1\}$. A 3.1.2. definíció feltételeinek és a P tranzitivitásának, ill. aszimmetriájának is eleget tehetünk anélkül, hogy ellentmondásra jutnánk. A hiányzó relációkat minősítsük összehasonlíthatatlannak.

A példából nyilván $T_8 \neq T_7$ is következik, és megállapíthatjuk, hogy még egy duplán lényeges parciálisan rendezett nemkompenzatórikus struktúra sem feltétlenül attributum aciklikus.

Megjegyezzük, hogy az általánosított nemkompenzatórikus struktúráknál a fenti példákban szereplő összehasonlíthatatlanságok tetszés szerint indifferenciára is cserélhetők.

4. SÚLYOZÁSOK

A többtényezős döntési problémákban az alternatívák megítélésekor a tekintett értékelési szempontok általában nem egyformán fontosak a döntéshozó számára, így a döntést segítő eljárásokban is lehetőséget kell adni a különböző tényezők eltérő mértékű figyelembe vételére. Természetesen a választott aggregációs módszer határozza meg ennek konkrét formáját, többek között a szempontok relatív fontosságait kifejező, a döntéshozótól igényelt információk típusát; ezen viszonyok számszerű kifejezését; felhasználási módját; stb.. Nagyon sok módszerben pl. a tényezők fontossági viszonyait a hozzájuk rendelt súlyok arányai fejezik ki, hiszen ezekkel a számokkal a módszerben használt valamely additív mennyiséget szeretnénk modulálni, mégis merőben más kihatásuk és jelentésük van mondjuk az UTA, a PROMETHEE, vagy éppen az ELECTRE módszerben.

Ebben a fejezetben a tényezők súlyozásának néhány kérdésével foglalkozunk. A súlyok meghatározása is az egyes szempontok szerinti értékelések aggregálásához szükséges ún. inter-attributumos információk megszerzésének folyamatába tartozik, ezt a kérdést mégis az alternatívák közötti értékelésekre gyakorolt hatásuk mellőzésével tárgyaljuk. Ehhez alapot az előző fejezetben foglaltak biztosítanak, hiszen ottani megállapításaink nagyon röviden úgy összegezhetők, hogy a nemkompenzatórikus struktúrákban az alternatívák közötti értékeléseket alapvetően az előnyöket, ill. hátrányokat jelentő tényező együttesek fontossági viszonyai határozzák meg. A vizsgált típusok is csak az ezen általános szabálytól való kisebb-nagyobb eltérések lehetőségében különböznek.

4.1. Elméleti megközelítés

Az attributum-részhalmazok közötti fontossági viszonyok vizsgálatában némileg hasonló utat követünk, mint amit az alternatívák közötti értékítéletek jellemzésekor a 2. fejezetben tettünk. Kiindulópontunk a "fontosabb, mint" reláció lesz, s ezt a $>$ jellel fogjuk jelölni. Amennyiben a döntéshozó nem talál érdemi különbséget két attributum-részhalmaz között, akkor erre a $=$ jelölést fogjuk alkalmazni.

4.1.1. Definíció: Az $N = \{1, \dots, n\}$ halmaz részhalmazainak 2^N -el jelölt halmazán értelmezett $>$ kétváltozós reláció

- (i) aszimmetrikus ;
- (ii) "monoton" , azaz $\forall J, K \subseteq N: K \subseteq J \rightarrow J > K$;
- (iii) $\forall J, K \subseteq N: J > K : \leftrightarrow [\text{nem}(J > K) \text{ és } \text{nem}(K > J)]$.

Nyilván a $=$ reflexív és szimmetrikus, tehát pl. $\emptyset = \emptyset$, továbbá $\forall J \subseteq N: J \neq \emptyset \Rightarrow J > \emptyset$. A fenti tulajdonságok mindegyike teljesül az előző fejezetben vizsgált preferencia-struktúrákban, így $>$ értelmezhető az ottani $>$ -ként. A teljesen nem-kompenzatórikus struktúrákban pl. lehet $> = >$, $= = =$.

A gyakorlatban a fenti tulajdonságokkal feltételezetten rendelkező fontossági viszonyokat kell felderíteni és számszerűen kifejezni. Olyan tényleges információkra van szükségünk, melyekkel gazdagabbá tehetjük a "monotonitás"-ból adódó tartalmazás szerinti rendezést. Különösen érdekesek lesznek a diszjunkt attributum-részhalmazok összehasonlításai.

A reprezentáció itt is a valós számokra történő relációtartó leképezést jelent. Egy alkalmasan választott $>_{\lambda, w}$ aszimmetrikus relációval tehát olyan $w: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ függvény meghatározása a cél, melyre $J > K \Rightarrow w(J) >_{\lambda, w} w(K)$ teljesül az összes ismert ítéletre. E súlyfüggvény segítségével azután kibővíthetjük a "fontosabb, mint" relációt a $J > K : \leftrightarrow w(J) >_{\lambda, w} w(K)$ meghatározás által.

Az alábbiakban az additív súlyok esetét tárgyaljuk. Olyan súlyfüggvényt keresünk, melyre a



$$\forall J, K \subseteq N: J \cap K = \emptyset \implies w(J \cup K) = w(J) + w(K)$$

igaz. Ilyenkor a $\succ$ relációt egyértelműen meghatározza az egyes tényezők súlya, hiszen $\forall J \subseteq N: w(J) = \sum_{j \in J} w(\{j\})$. Nyilván $w(\emptyset) = 0$. Vansnick(1986) alapján ismertetünk egy szükséges és elegendő feltételt az additív súlyok létezésére vonatkozóan, amennyiben $\forall x, y \in R: x \succ_{\lambda, \delta} y \iff x \succ \lambda y + \delta$, ahol $\lambda \in Q_1 := \{q \geq 1: q \text{ racionális}\}$. Egy ilyen reprezentációban a $\emptyset \neq \emptyset$ miatt $0 \leq \delta$, és a "monotonitás"-ból adódóan a súlyok a δ -nál nagyobbak, így nemnegatívak.

Szükségünk lesz a következő Motzkin(1936)-tól származó eredményre, melynek Farkas(1902) tételén alapuló bizonyítása megtalálható Martos(1975) munkájában.

4.1.1.Tétel: Legyen $a^1, \dots, a^s, b^1, \dots, b^t \in R^n$ és $1 \leq s, 0 \leq t$.

A következő két állítás közül mindig csak egy teljesül:

(a) létezik olyan $x \in R^n$, melyre

$$x \cdot a^j > 0 \quad (j=1, \dots, s) \quad \text{és} \quad x \cdot b^k \geq 0 \quad (k=1, \dots, t);$$

(b) léteznek olyan nemnegatív $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ számok, melyek közül legalább egy pozitív, és olyan nemnegatív $\beta_1, \dots, \beta_t$ számok, hogy

$$\sum_{j=1}^s \alpha_j a^j + \sum_{k=1}^t \beta_k b^k = 0 \quad (i=1, \dots, n).$$

Továbbá, amennyiben minden a^j, b^k racionális, akkor az (a) teljesülése esetén létezik egész számokból álló $x \in R^n$ is, míg (b) esetén léteznek az ott említett tulajdonságokkal rendelkező egész $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t$ számok is.

E tételt alkalmazó bizonyítás található a véges szemirendezések reprezentációjára /ld. 2.3.3.tétel/ vonatkozóan Scott (1964)-ben.

Jelöljük N_0 -al a nemnegatív egész számok halmazát, és $\forall J \subseteq N$ -re $\mu(J)$ -vel a J karakterisztikus vektorát, azaz $\mu(J)_j := 1$, ha $j \in J$; $\mu(J)_j := 0$, ha $j \notin J$ ($j=1, \dots, n$).

4.1.2.Tétel: Legyen $R_\succ$ és $R_\leq$ két nemüres kétváltozós reláció $2^N \times n$, és $\lambda \in Q_1$.

Akkor és csak akkor léteznek olyan $w_1, \dots, w_n, \delta$ számok,

hogy minden $J, K \in N$ -re

$$(4.1) \quad JR \succ K \implies w(J) > \lambda w(K) + \delta \quad \text{és} \quad JR \preceq K \implies w(J) \leq \lambda w(K) + \delta$$

,ahol $w(J) = \sum_{j \in J} w_j$ és $w(\emptyset) = 0$

,ha minden $m \in N_0$ a

$$(4.2) \quad [\forall k \in M := \{0, 1, \dots, m\} : J_k R \succ K_k \text{ és } M_k R \preceq L_k] \implies$$

$$[\sum_{k=0}^m (\mu(J_k) + \lambda \mu(L_k)) \neq \sum_{k=0}^m (\lambda \mu(K_k) + \mu(M_k))]$$

Bizonyítás: A $W^T := [w_1, \dots, w_n, \delta]$ jelölés bevezetésével a

(4.1)-t átfogalmazhatjuk a vele nyilván ekvivalens

léteznek olyan $w_1, \dots, w_n, \delta$ számok, hogy minden $J, K \in N$ -re

$$(4.1') \quad JR \succ K \implies [\mu(J), 0] \cdot W > [\lambda \mu(K), 1] \cdot W \quad \text{és}$$

$$JR \preceq K \implies [\mu(J), 0] \cdot W \leq [\lambda \mu(K), 1] \cdot W$$

állításra.

Szükségesség: Legyen $m \in N_0$ és $\forall k \in M$ -re $J_k R \succ K_k$ és $M_k R \preceq L_k$.

(4.1') miatt létezik olyan $W \in \mathbb{R}^{n+1}$, hogy $\forall k \in M$ -re

$$[\mu(J_k), 0] \cdot W > [\lambda \mu(K_k), 1] \cdot W \quad \text{és}$$

$$[\lambda \mu(L_k), 1] \cdot W \geq [\mu(M_k), 0] \cdot W.$$

A $2(m+1)$ db egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy

$$[\sum_{k=0}^m (\mu(J_k) + \lambda \mu(L_k)), m+1] \cdot W > [\sum_{k=0}^m (\lambda \mu(K_k) + \mu(M_k)), m+1] \cdot W$$

ami csak akkor állhat fenn, ha

$$\sum_{k=0}^m (\mu(J_k) + \lambda \mu(L_k)) \neq \sum_{k=0}^m (\lambda \mu(K_k) + \mu(M_k)).$$

Ezzel beláttuk, hogy $(4.1') \implies (4.2)$.

Elegendőség: Indirekt módon tegyük fel, hogy (4.1') nem igaz. Tekintsük az összes attributum-részhalmaz párokat, melyekre $E_j R \succ F_j$ ($j=1, \dots, s$) és $C_k R \preceq D_k$ ($k=1, \dots, t$). Mivel $R \succ$ és $R \preceq$ sem üres, ezért biztosan $s, t \geq 1$.

Indirekt feltevésünk szerint nincs olyan $W \in \mathbb{R}^{n+1}$, hogy

$$[\mu(E_j) - \lambda \mu(F_j), -1] \cdot W > 0 \quad (j=1, \dots, s) \quad \text{és}$$

$$[\lambda \mu(D_k) - \mu(C_k), 1] \cdot W \geq 0 \quad (k=1, \dots, t)$$

teljesülne, így a 4.1.1.tétel szerint léteznek olyan

$\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t \in N_0$ számok, hogy az $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ nem

mind nullák, és

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j [\mu(E_j) - \lambda \mu(F_j), -1] + \sum_{k=1}^t \beta_k [\lambda \mu(D_k) - \mu(C_k), 1] = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(E_j) + \lambda \sum_{k=1}^t \beta_k \mu(D_k) = \lambda \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(F_j) + \sum_{k=1}^t \beta_k \mu(C_k) \quad \text{és}$$

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j = \sum_{k=1}^t \beta_k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}.$$

Legyen $m = \sum_{j=1}^m \alpha_j - 1$, továbbá

$$\begin{aligned} J_0 &:= \dots := J_{\alpha_1-1} := E_1, & K_0 &:= \dots := K_{\alpha_1-1} := F_1; \\ J_{\alpha_1} &:= \dots := J_{\alpha_1+\alpha_2-1} := E_2, & K_{\alpha_1} &:= \dots := K_{\alpha_1+\alpha_2-1} := F_2; \\ &\vdots; & & \dots J_m := E_m, & & \dots K_m := F_m; \end{aligned}$$

valamint hasonlóan

$$\begin{aligned} L_0 &:= \dots := L_{\beta_1-1} := D_1, & M_0 &:= \dots := M_{\beta_1-1} := C_1; \\ L_{\beta_1} &:= \dots := L_{\beta_1+\beta_2-1} := D_2, & M_{\beta_1} &:= \dots := M_{\beta_1+\beta_2-1} := C_2; \\ &\vdots; & & \dots L_m := D_t, & & \dots M_m := C_t \end{aligned}$$

Találtunk tehát olyan $m \in \mathbb{N}_0$ számot és $J_k R_{\lambda} K_k$ és $M_k R_{\lambda} L_k$ ($k=0, \dots, m$) részhalmaz párokat, hogy

$$\sum_{k=0}^m (\mu(J_k) + \lambda \mu(L_k)) = \sum_{k=0}^m (\lambda \mu(K_k) + \mu(M_k))$$

,ez pedig pont a (4.2)-beli következtetés tagadása. $\square$

Megjegyezzük, hogy az előbbi tétel inkább elméleti jelentőségű, hiszen a gyakorlatban lehetetlen a (4.2)-ben leírt végtelen sok feltételt ellenőrizni.

4.2. Egy súlyozási eljárás, a középponti súlyok

Ebben az alfejezetben egy olyan eljárást ismertetünk, mely a $\succ$ "fontosabb, mint" reláció additív valós reprezentációjának meghatározására szolgál a döntéshozóval folytatott párbeszéd során kapott, a $\succ$ -ra vonatkozó sorrendi ösz-

szezhasonlítások alapján. Itt csak a főbb jellemzőkkel foglalkozunk, egy részletesebb leírással kapcsolatban Solymosi-Dombi(1986)-ra utalunk.

A módszer alkalmazhatóságának feltétele, hogy a döntéshozó képes legyen a kritériumok diszjunkt részhalmazait relatív fontosságaik alapján összezhasonlítani, továbbá, hogy a $W:2^N \rightarrow [0,1]$ "elméleti" súlyfüggvény additív /ld. az előző alfejezetet/ és standardizált $W(N)=1/$. Feltesszük még, hogy a $>$ szemirendezés, így valós reprezentációja a

$$J > K \iff W(J) > W(K) + \delta \quad \text{és} \quad J \not> K \iff |W(J) - W(K)| \leq \delta$$

valamilyen $\delta \geq 0$ -val, ami megfelel az előző alfejezetben bevezetett $>_{1,\delta}$ -val való ábrázolásnak. Az additivitás miatt elegendő a $W(\{j\})$ ($j=1, \dots, n$) értékeket meghatározni.

Jelöljük w_j -vel a $W(\{j\})$ ($j=1, \dots, n$) becsült értékét és követeljük meg a $w_j \geq 0$, $\delta \geq 0$, $\sum_j w_j = 1$ teljesülését. Kiindulunk tehát a lehetséges súly-, és küszöbértékek

$$L_0 = \{[w, \delta] : [w, \delta] \geq 0, \mathbf{1}^T w = 1\}$$

halmazából.

Minden lépésben két diszjunkt részhalmazt /pl. J, K -t/ hasonlítunk össze, s az ebből kapott információt a következőképpen vesszük figyelembe:

az i -ik lépésben ($i=1, \dots, m$)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j + a_{i,n+1} \delta \leq 0, \quad \text{ahol}$$

$$a_{i,n+1} = \begin{cases} 1 & , \text{ha } J > K ; \\ -1 & , \text{ha nem } (J > K) ; \end{cases} \quad \text{és}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -a_{i,n+1} & , \text{ha } j \in J ; \\ 0 & , \text{ha } j \notin J \cup K ; \\ a_{i,n+1} & , \text{ha } j \in K . \end{cases} \quad (j=1, \dots, n)$$

Az így kapott homogén lineáris egyenlőtlenség rendszer nemnegatív megoldásait a teljes leírás módszerével /ld. pl. Prékopa(1968)/ határozzuk meg úgy, hogy az előforduló nem-

-bázismegoldásokat lépésenként kiszűrjük.

Az i -ik lépésben feltételrendszerünk az

$$L_i = \{ [w, \delta] : [w, \delta] \geq 0, A_i w \leq 0, 1^T w = 1 \}$$

lehetséges megoldáshalmazt eredményezi, ahol A_i a fenti definíciókkal megadott, csak $-1, 0, 1$ elemeket tartalmazó együtthatómátrix.

Ismerve az L_i korlátos, konvex poliéder minden csúcspontját, az eddigi összehasonlításokkal konzisztens minden érték előáll, mint a csúcsok konvex kombinációja. Amennyiben a döntéshozó nem talál elfogadható, vagy elvetendő értékeket a csúcsok között, úgy az egyenlő együtthatókkal képzett kombinációt tekintjük a súlyok és a küszöbérték becslésének.

A csúcspontok egyébként a lehetséges megoldások közül olyan választásokat képviselnek, melyekben bizonyos ítéleteket hangsúlyozunk a többi rovására, és a küszöbérték is a lehető legnagyobb vagy legkisebb. A csúcsok gyakran túl szabályos értékeket jelentenek, az eljárásból és az együtthatómátrix speciális tulajdonságából következően. Éppen ezért nem vezet megfelelő eredményre például egy lineáris célfüggvény /mondjuk a küszöbérték, vagyis a határoló hipersíkoktól való "távolság" maximalizálása/ szerinti optimalizálás.

A csúcsok másik kellemetlen tulajdonsága, hogy a lehetséges halmaz változására, vagyis új összehasonlítások figyelembevételére érzékenyek. Elképzelhető, hogy egy új ítéletet reprezentáló hipersík az eddigi "legjobb" pontot is levágja. Mindezen érvek alapján javasoljuk a "közeppontot", amely stabilabb, és átlagos "távolságra" van a szélsőséges választási stratégiákat képviselő csúcsoktól, melyek ismeretében egyszerűen számítható.

A módszer tetszőleges kérdezői stratégiával használható. A lehetséges megoldáshalmaz lépésenkénti meghatározása lehetőséget ad a dinamikus kérdésfeltevésre éppúgy, mint az addigiaknak ellentmondó ítéletek kijelzésére és a korábbi összehasonlítások felülvizsgálatára. A kérdések csupán a

diszjunkt kritérium-részhalmazok fontosság szerinti sorrendi viszonyaira vonatkoznak, a döntéshozónak tehát nem kell semmilyen számszerű becslést vagy összehasonlítást tennie.

A módszert annál könnyebb alkalmazni, minél kevesebb a kérdések száma, másrészt viszont minél szűkebb a lehetséges megoldások halmaza, annál pontosabb a becslés. Ezen elvárások közötti megfelelő egyensúlyt jelent a következő kérdezősi algoritmus /ld. Churchman-Ackoff(1954), Knoll-Engelberg (1978)/:

Először páronkénti összehasonlításokkal meghatározzuk az egyes kritériumok sorrendjét, azaz az összes $\{j\}, \{k\} \quad j \neq k, j, k \in N$ párra adott információ alapján meghatározott középonti súlyok csökkenő sorrendjének megfelelően sorbaállítjuk a kritériumokat, legyen ez pl. $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$. /Az összehasonlításoknál csak a $>$ megkövetelt tranzitivitását használhatjuk fel a kérdések számának csökkentésére, de mivel a $>$ nem feltétlenül negatívan tranzitív, így abból, hogy $\text{nem}(\{i\} > \{j\})$ és $\text{nem}(\{j\} > \{k\})$ még nem következtethetünk arra, hogy $\text{nem}(\{i\} > \{k\})$. A fenti sorrend csak akkor jelent fontossági sorrendet is valamely $j < k$ -ra, ha $w_j > w_k + \delta$ az aktuális δ -val./

Ezután a kapott sorrendet szisztematikus ellenőrzésnek vetjük alá oly módon, hogy a sorrendben előbb szereplő egyetlen kritériumot a tőle hátrább álló kritériumok kombinációjával vetjük össze, azaz az i -ik lépésben $\{i\}$ -t az $\{i+1, \dots, j\}$ -vel valamely $i+2 \leq j \leq n$ -re a következő módon:

```

1°  $i:=1 ; j:=n$ 
2° ha  $\{i\} > \{i+1, \dots, j\}$ 
    akkor menjünk a 3°-ra
    különben ha  $j > i+2$ 
        akkor  $j:=j-1 ;$  menjünk a 2°-re
        különben menjünk a 3°-ra
3° ha  $i < n-2$ 
    akkor  $i:=i+1 ; j:=n ;$  menjünk a 2°-re
    különben vége .

```

A páronkénti összehasonlítás legfeljebb $n(n-1)/2$, az ellenőrzés legfeljebb $(n-1)(n-2)/2$ kérdést jelent, így összesen legfeljebb $(n-1)^2$ összehasonlításra van szükségünk. A lehetséges megoldások halmazának kiterjedésére, vagyis a becslés hibájára felső korlátot ad a középpont és a csúcsok távolságának maximuma. Érdemes meghatározni a minimális távolságot, és e két mennyiség arányát is, amiből a lehetséges halmaz "szabályosságára" következtethetünk. Mindezen jellemzők könnyen számíthatók a módszer folyamán.

IRODALMI HIVATKOZASOK

- [1] Andrásfai B.: Gráfelmélet - Folyamok, Mátrixok, Akadémiai Kiadó, Budapest(1983).
- [2] Armstrong,W.E.: The determinateness of the utility function, Economic Journal, 49(1939)453-467.
- [3] Arrow,K.J.: Social Choice and Individual Value, /2nd ed./ Wiley, New York(1963). /1st ed. Wiley(1951)/
- [4] Bell,D.E.-Keeney,R.L.-Raiffa,H.(eds.): Conflicting Objectives in Decisions, Wiley, New York(1977).
- [5] Bouyssou,D.: Some remarks on the notion of compensation in MCDM, European Journal of Operational Research 26(1986)150-160.
- [6] Bouyssou,D.-Vansnick,J.C.: Noncompensatory and generalized noncompensatory preference structures, Cahier du LAMSADE No.59 (1985).
- [7] Brans,J.P.-Vincke,Ph.: A preference ranking organization method, the PROMETHEE method, Management Science 31(1985)647-656.
- [8] Cantor,G.: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Mathematische Annalen, 46(1895)481-512.
- [9] Chankong,V.-Haimes,Y.Y.: Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology, North Holland, Amsterdam(1983).
- [10] Churchman,C.W.-Ackoff,R.L.: An approximate measure of value, Operations Research 2(1954)172-187.
- [11] Cochrane,J.L.-Zeleny,M.(eds.): Multiple Criteria Decision Making, University of South Carolina Press, Columbia (1973).
- [12] Debreu,G.: Topological methods in cardinal utility theory, in Arrow-Karlin-Suppes(eds.) Mathematical Methods in Social Sciences 1959, Stanford University Press, Stanford(1960)16-26.
- [13] Einhorn,H.J.: The use of nonlinear, noncompensatory models in decision making, Psychological Bulletin 73(1970)221-230.

- [14] Evans, G.W.: An overview of techniques for solving multiobjective mathematical programs, *Management Science* 30(1984)1268-1282.
- [15] Farkas, J.: Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, *J. für die Reine und Angewandte Mathematik* 124(1902)1-24.
- [16] Fishburn, P.C.: *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York(1970a).
- [17] Fishburn, P.C.: Intransitive indifference with unequal indifference intervals, *Journal of Mathematical Psychology* 7(1970b)144-149.
- [18] Fishburn, P.C.: Intransitive indifference in preference theory: a survey, *Operations Research* 18(1970c)207-228.
- [19] Fishburn, P.C.: *Mathematics of Decision Theory*, Mouton, Paris(1972).
- [20] Fishburn, P.C.: *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, Princeton(1973a).
- [21] Fishburn, P.C.: Interval representations for interval orders and semiorders, *Journal of Mathematical Psychology* 10(1973b)91-105.
- [22] Fishburn, P.C.: Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey, *Management Science* 20(1974)1442-1471.
- [23] Fishburn, P.C.: Noncompensatory preferences, *Synthese* 33(1976)393-403.
- [24] Fishburn, P.C.: A survey of multiattribute/multicriterion evaluation theories, in Zions(1978)181-224.
- [25] Fishburn, P.C.: Subjective expected utility: a review of normative theories, *Theory and Decision* 13(1981)139-199.
- [26] Huber, O.: Nontransitive multidimensional preferences: theoretical analysis of a model, *Theory and Decision* 10(1979)147-165.
- [27] Hwang, C.L.-Masud, A.S.: *Multiple Objective Decision Making, Methods and Applications: A State of the Art Survey*, Springer, Berlin(1979). (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 164)

- [28] Hwang,C.L.-Yoon,K.: Multiple Attribute Decision Making, Methods and Applications: A State of the Art Survey, Springer, Berlin(1981). (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 186)
- [29] Jacquet-Lagrange,E.: Binary preference indices: A new look on multicriteria aggregation procedures, European Journal of Operational Research 10(1982)25-32.
- [30] Jacquet-Lagrange,E.-Siskos,J.: Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method, European Journal of Operational Research 10(1982)151-164.
- [31] Kaufman,A.: A döntés tudománya, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest(1975).
- [32] Keeney,R.L.-Raiffa,H.: Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, Wiley, New York(1976).
- [33] Kindler J.-Papp O.: Komplex rendszerek vizsgálata, Műszaki Könyvkiadó, Budapest(1977).
- [34] Knoll,A.L.-Engelberg,A.: Weighting multiple objectives - the Churchman-Ackoff technique revisited, Computers and Operations Research 5(1978)165-177.
- [35] Krantz,D.H.-Luce,R.D.-Suppes,P.-Tversky,A.: Foundations of Measurement, Volume I, Academic Press, New York(1971).
- [36] Luce,R.D.: Semiordeers and a theory of utility discrimination, Econometrica 24(1956)178-191.
- [37] MacCrimmon,K.R.: An overview of multiple objective decision making, in Cochrane-Zeleny(1973)18-44.
- [38] Mareschal,B.: Stochastic multicriteria decision making and uncertainty, European Journal of Operational Research 26(1986)58-64.
- [39] Martos,B.: Nonlinear Programming: Theory and Methods, Akadémiai Kiadó, Budapest(1975).
- [40] Miller,G.: The magical number seven plus or minus two: some limits on our capacity for processing information, Psychological Review 63(1956)81-97.

- [41] Motzkin, T.: Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen, Dissertation, Basel (1936).
- [42] Neumann, J.-Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behaviour, Princeton University Press, Princeton (1947).
- [43] Pekelman, D.-Sen, S.: Mathematical programming models for the determination of attribute weights, Management Science 20 (1974) 1217-1229.
- [44] Pfanzagl, J.: Theory of Measurement, Physica-Verlag, Würzburg (1968).
- [45] Prékopa A.: Lineáris programozás I, A Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa, Budapest (1968).
- [46] Roberts, F.S.: Measurement Theory with Applications to Decision Making, Utility and Social Sciences, Addison-Wesley, London (1979).
- [47] Roubens, M.-Vincke, Ph.: Preference Modelling, Springer, Berlin (1985). (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 250)
- [48] Roy, B.: Classement et choix en presence de points de vue multiples (la methode ELECTRE), Revue Francaise d'Automatique, Informatique et Recherche Operationelle 8 (1968) 57-75.
- [49] Roy, B.: Partial preference analysis and decision-aid: the fuzzy outranking relation concept, in Bell-Keeney-Raiffa (1977) 40-75.
- [50] Roy, B.: How outranking relation helps multiple criteria decision making, in Cochrane-Zeleny (1973) 179-201.
- [51] Roy, B.: Methodologie multicritere d'aide a la decision, Economica, Paris (1985).
- [52] Roy, B.-Vincke, Ph.: Multicriteria analysis: survey and new directions, European Journal of Operational Research 8 (1981) 207-218.
- [53] Savage, L.J.: The Foundations of Statistics, Wiley, New York (1954).
- [54] Sen, A.K.: Collective Choice and Social Welfare, Holden-Day, San Francisco (1970).

- [55] Scott,D.S.: Measurement structures and linear inequalities, *Journal of Mathematical Psychology* 1(1964)233-247.
- [56] Scott,D.S.-Suppes,P.: Foundation aspects of theories of measurement, *Journal of Symbolic Logic* 23(1958)113-128.
- [57] Solymosi,T.-Dombi,J.: A method for determining the weights of criteria: The centralized weights, *European Journal of Operational Research* 26(1986)35-41.
- [58] Srinivasan,V.-Shocker,A.D.: Linear programming techniques for multidimensional analysis of preferences, *Psychometrika* 38(1973a)337-369.
- [59] Srinivasan,V.-Shocker,A.D.: Estimating the weights for multiple attributes in a composite criterion using pairwise judgments, *Psychometrika* 38(1973b)473-493.
- [60] Steuer,R.E.: Multiple objective linear programming with interval weights, *Management Science* 23(1977)305-316.
- [61] Steuer,R.E.: *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, Wiley, New York(1986).
- [62] Szidarovszky F.-Molnár S.: *Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest(1986).
- [63] Szplirajn,E.: Sur l'extension de l'ordre partiel, *Fundamenta Mathematicae* 16(1930)386-390.
- [64] Vansnick,J.C.: On the problem of weights in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach), *European Journal of Operational Research* 24(1986)288-294.
- [65] Zionts,S.(ed.): *Multicriteria Problem Solving*, Springer, Berlin(1978).

To whom it may concern.

On behalf of Dean of Faculty of
Science of Attila József University
the following statement is made

Tamas Solyomosi
finishing his research project
passed his doctoral examination
in the subject of:

.....
computer science
philosophy
and defended his thesis with the title
of " "

at the Attila József University in Szeged
On the basis of successful examination
and defence he awarded the degree
of "Doctor Universitatis"

Szeged. 19 August 1987

F. Csor