B2863

KOMŰVELETEK ALGEBRAI VIZSGÁLATA

(egyetemi doktori értekezés)

Készitette:

Székely Zoltán

Bolyai Intézet

1988.

B2863

ELŐSZÓ

Az alábbi dolgozat - , amely a Szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetének Algebra és Számelmélet Tanszékén készült - a koműveletek algebrai elméletének alapjaival, néhány jellegzetes problémával és azok megoldásával ismerteti meg az olvasót.

A koművelet absztrakt algebrai fogalma, mint az algebrában általában használatos műveletfogalom kategória-elméleti duálisa áll elő ([7], [5], [4]). A koműveletek önálló vizsgálata is számos érdekes eredményt szolgáltathat, fő szempontunk e dolgozatban mégis inkább a koműveletek olyan jellemzőinek megkeresése volt, amelyek a (közönséges) műveletek hasonló (duális) tulajdonságainak felelnek meg. Igy - bizonyos problémákra szoritkozva - a műveletek és műveletklónok alkotta struktúrák egy tükörképét kaptuk a megfelelő duális objektumokon. Megjegyezzük, hogy ez a „tükörkép-struktúra" lényegesen egyszerűbbnek és igy áttekinthetőbbnek mutatkozott az eredetinél. (Fölhivjuk a figyelmet, hogy az olvasó az - eredeti - műveletek és klónjaik elméletéről számos munkában olvashat. Itt most csupán Szendrei Ágnes [11] könyvére és a hozzá csatolt irodalomjegyzékre hivatkozunk.)

Dolgozatunk három részre tagolódik. Az első rész elején a koműveletek fogalmának ismertetése és egyszerűbb tulajdonságainak leirása található (pl.: a szuperpozició és a klón fogalmak duálisai, stb.). Ezután egy egyszerű -, ugyanakkor az eredeti, műveletek alkotta struktúrában igen

bonyolult, még megoldatlan - probléma megoldása, a minimális klónok jellemzése következik. Az első rész második felében két olyan problémát érintünk, amelyek bizonyos, a második részben - a 3-elemű halmaz fölötti koműveletek alkotta klónháló, a továbbiakban $K^{(3)}$, leirásánál - alkalmazott megfontolásokat készitenek elő. Önállóan is figyelmet érdemelhet az itt tárgyalt, un. szétválasztható koműveletek néhány jellegzetes tulajdonsága.

A dolgozat második része főként leiró jellegű: a $K^{(3)}$ háló struktúrájának jellemzését, illetve az ehhez szükséges meggondolások vázlatos ismertetését foglalja magában. Mivel a hálószerkezet teljes leirásához aránylag sok, az általánosabb nézőpont számára kevéssé érdekes technikai kérdés tisztázása után jutottunk el, megfontolásaink részletes taglalását mellőztük. Kompaktnak tekinthető leirást adtunk azonban a $K^{(3)}$ háló azon részhálójáról, melynek elemeit a csupa egyváltozós koműveletekből álló klónok alkotják. E részháló lényegében a 3-elemű halmaz transzformációi $S^{(3)}$ félcsoportjának részmonoid-hálója. (Valójában ennél részletesebb leirást adtunk: $S^{(3)}$ részfélcsoportjainak hálóját jellemeztük. Megjegyezzük, hogy e jellemzés elkészitéséhez számitógépes programozásra is szükségünk volt. Programunk a JATE Kalmár László Kibernetikai Laboratóriumának R55-ös számitógépén futott.) A $K^{(3)}$ háló további elemeinek - szintén technikai jellegű - részletes megadását külön mellékletben csatoltuk a dolgozathoz.

A $K^{(3)}$ klónháló ismerete bizonyos, koműveletekre megfogalmazott problémák megoldásában hasznosnak igérkezik. Példaképpen megemlitjük a koművelet-klónok jellemezhetőségének kérdését (alkalmasan definiált) ko-relációk és azok (alkalmasan definiált) megőrzésének segitségével. Ez a probléma ismét egy ismert (és megoldott), műveletklónokra és (közönséges) relációkra vonatkozó probléma duálisaként vethető föl [1] .

Dolgozatunk harmadik részében a művelet-halmazok teljessége - közismert - problémájának koalgebrai duálisát tárgyaljuk. E probléma egyes speciális eseteire Csákány Béla adott megoldást [4] . Az általános eset itt szereplő megoldása egyúttal a maximális koművelet-klónok jellemzését is lehetővé teszi.

A dolgozat egyes részeit römai, ezen belül a fejezeteket arab számokkal jelöltük. A fejezeteken belül 1-től növekvő sorszámmal láttuk el a definiciókat, állitásokat és tételeket. (Kivételek a II. rész leiró jellegű fejezetei.) Az ezekre való - esetleges - későbbi hivatkozás e sorszámok alapján történik. Igy pl. az I/3.7 Tétel az I. rész 3. fejezetének 7-es sorszámú tétele. A römai számot elhagytuk, ha a hivatkozás helye és a hivatkozott sorszám ugyanabban a fejezetben található. A dolgozat végéhez listákat illesztettünk a szövegben szereplő definiciók, állitások, tételek, továbbá az alkalmazott jelölések visszakeresésének megkönnyitésére.

Szeretnék köszönetet mondani Csákány Béla professzornak, aki megismertette velem a kompüveleteket és a velük kapcsolatos alapvető problémákat, s akinek inspiráló támogatása nélkül e munka sem készülhetett volna el. Köszönetemet fejezem ki továbbá a Bolyai Intézet Algebra és Számelmélet Tanszékén dolgozó kollégáimnak továbbgondolni érdemes kérdéseikért és hasznos megjegyzéseikért. Végük szeretném megköszönni Dékány Katalin gondos munkáját, amellyel dolgozatom gépelését végezte.

TARTALOM

I. RÉSZ

Véges halmaz fölötti koműveletek 1

1. fejezet

A koművelet fogalma és egyszerűbb tulajdonságai 1

2. fejezet

Koművelet minimális klónjai 17

3. fejezet

A koműveletek egy speciális osztálya 20

4. fejezet

Klónmetszetek összekapcsolása 31

II. RÉSZ

Koműveletek a 3-elemű halmazon 33

1. fejezet

$\underline{3}$ koműveletei 33

2. fejezet

$\underline{3}$ transzformációinak félcsoportjai 38

3. fejezet

Az $L^{(3)}$ háló jellemzése 41

4. fejezet

$C^{(3)}$ további klónjai 61

III. RÉSZ

Véges halmaz fölötti koműveletek teljes halmazai és maximális klónjai 67

1. fejezet

A probléma megoldása műveletekre. Néhány teljességi föltétel koműveletekre 67

2. fejezet

Maximális koművelet klónok. Egy teljességi kritérium koműveletekre 69

Definiciók jegyzéke 85

Állitások, tételek jegyzéke 87

A dolgozatban használt jelölések és definicióik helye ... 90

Irodalomjegyzék 95

I. RÉSZ

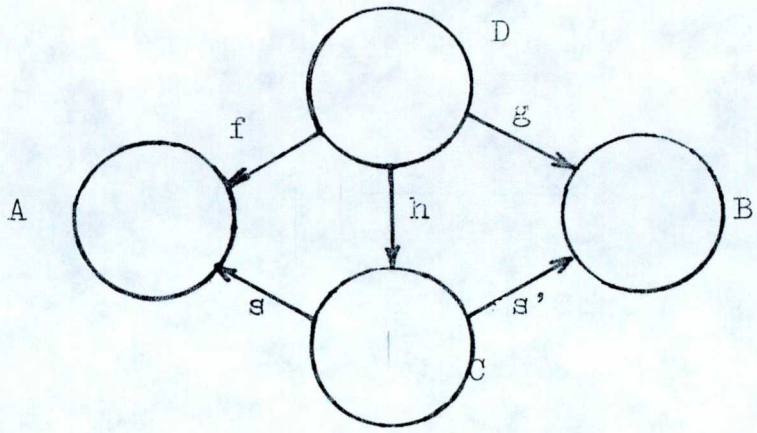
Véges halmaz fölötti koműveletek

1. fejezet

A koművelet fogalma és egyszerűbb tulajdonságai

A koműveletek, mint ismeretes, a közönséges műveletekből keletkeznek kategóriaelméleti dualizálással (ld. [4]). Ebben a fejezetben néhány, a műveletekkel kapcsolatos univerzális algebrai alapfogalom duális megfelelőjét adjuk meg, valamint néhány további olyan fogalmat vezetünk be és olyan tulajdonságokat irunk le a koműveletekkel kapcsolatban, amelyek elkövetkező vizsgálatainkhoz szükségesek.

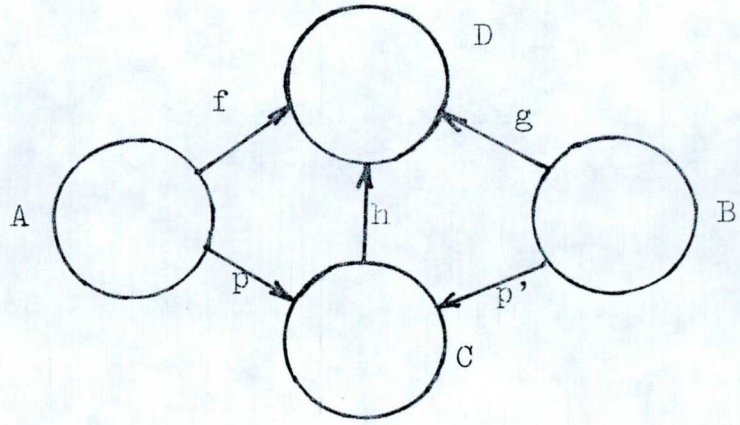
A koművelet-fogalom megalkotásában a halmazok direkt szorzatának és a projekció műveletének alábbi (együttes) kategóriaelméleti definiciójára támaszkodhatunk: Az A és B halmazok direkt szorzata a C halmaz, valamint az $s:C \to A$ és $s':C \to B$ leképezések a C halmaznak az A illetve B halmazra való projekciói, ha teljesül, hogy tetszőleges D halmazra és $f:D \to A$, $g:D \to B$ leképezéspárra megadható olyan $h:D \to C$ leképezés, amire $f=sh$ és $g=s'h$ (1.ábra). Megjegyezzük, hogy e munka keretei között 2 leképezés szorzatát úgy értelmezzük, hogy a szorzat kiszámitásakor előbb a jobb oldali, majd utána a bal oldali leképezést hajtjuk végre.



1.ábra

Direkt szorzat és projekciók

A fenti fogalmak dualizálása során az ábrán látható nyilak megfordulnak. Eszerint a C halmaz az A és B halmazok duális direkt szorzata, valamint a $p:A \to C$ és $p':B \to C$ leképezések az A illetve B halmazoknak a C halmazba való duális projekciói, ha tetszőleges D halmaz és $f:A \to D$, $g:B \to D$ leképezéspár esetén létezik olyan $h:C \to D$ leképezés, amire $f=hp$ és $g=hp'$ teljesül (2.ábra).



2.ábra

A direkt szorzat és a projekció dualizálása

Leolvasható, hogy 2 halmaz direkt szorzatának duálisaként e halmazok diszjunkt uniója adódott, továbbá, hogy a projekció műveletének duálisa - vagyis a megfelelő koprojekció - a hozzá tartozó halmaz identikus leképzését adja a halmaz diszjunkt unióbeli példányára.

A fentiek szerint az A nemüres halmaz m-edik direkt hatványának duálisa az A halmaz m-szeres diszjunkt uniója. Az egyes diszjunkt unióbeli példányokat cimkézéssel fogjuk megkülönböztetni egymástól: a k+1-edik példány cimkéje legyen $k(0 \leq k < m)$. Az m-szeres diszjunkt unióhoz tartozó k-adik koprojekció Λ identikus leképezése A diszjunkt unióbeli k cimkéjű példányára.

Innen már könnyen megkapható a műveletfogalom duálisa: Mivel egy m-változás Λ fölötti művelet Λ m-edik direkt hatványának A-ba való leképezése, valamely m-változás A fölötti koművelet A-nak az m-szeres diszjunkt uniójába való leképezéseként adódik. (Most és a továbbiakban föltesszük, hogy A nemüres és $m \geq 1$. Vegyük észre, hogy 0-változás koműveletnek nincsen értelme. Jelölje továbbá $\underline{\ell}$ a $\{0,1,\ldots,\ell-1\}$ halmazt tetszőleges pozitiv egész ℓ esetén.) A fenti leképezést igy egy $A \to \underline{m}$ és $A \to A$ leképezéspárral adhatjuk meg.

Az eddigiek összefoglalásaként adódik az

1.1 Definició: Legyen A nemüres halmaz, $m \geq 1$ egész szám. Az $f = \langle f_0, f_1 \rangle$ leképezésekből álló rendezett párt A - fölötti m-változós koműveletnek nevezzük, ha $f_0 : A \to \underline{m}$

és $f_1 : A \to A$ tipusú leképezés. (Ezzel ekvivalens módon f-et, mint $A \to \underline{m} \times A$ leképezést is értelmezhetjük.)
Az f komüvelet f_0 és f_1 komponenseit rendre f cimke részének (cimke függvényének) illetve leképező részének (leképező függvényének) nevezzük.
A $p_k^m = (k, id_A)$ komüveletet a k-adik m-változás koprojekciónak fogjuk nevezni ($0 \leq k < m$). Jelölje a továbbiakban $C^{(A)}$ az A-fölötti komüveletek halmazát, ezen belül az m-változásokat pedig $C_m^{(A)}$. Az A-fölötti koprojekciók halmaza legyen $P^{(A)}$.

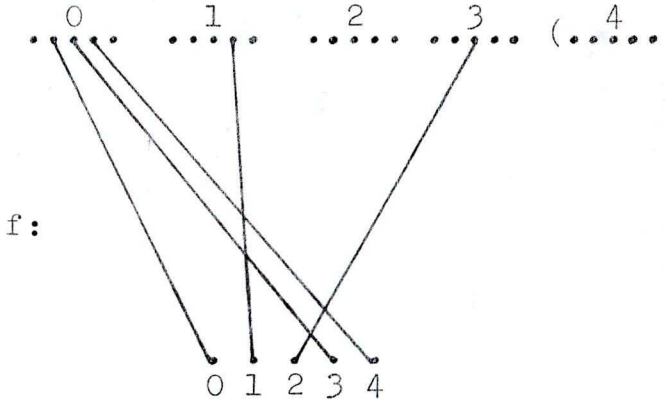
A további dualizációs meggondolásokat nem részletezzük. A leirtakhoz hasonló eljárással a műveletekre használt megfelelő fogalmak duálisaként a következő definiciókat kapjuk:

1.2 Definició: Az $f = \langle f_0, f_1 \rangle$ m-változós A-fölötti komüvelet változói $\underline{m}$ elemei. f lényegében k-változós, ha f_0 értékkészlete k-elemü. Az $i \in \underline{m}$ változó f-nek lényeges változója, ha $f_0(x) = i$ valamely $x \in A$-ra. f lényeges változóinak számát jelölje lény (f). Értelmezzük továbbá f-nek valamely $B \subseteq A$ részhalmazon vett lényeges változóinak számát az $|f_0(B)|$ számmal. (Egy $g : A \to C$ leképezés esetén $B \subseteq A$-ra g(B) a $\{g(x) \in C : x \in B\}$ halmazt jelöli.) Ezt a számot jelölje $\text{lény}_B(f)$. A nem lényeges változókat fiktiv változóknak nevezzük. Két komüvelet azonosnak tekinthető, ha legföljebb fiktiv változókban különböznek egymástól.

Példa: Valamely $f \in C_m^{(A)}$ komüveletet szemléletesen

megjelenithetünk egy olyan ábrán, ahol A elemeit pontokkal ábrázoljuk és valamely $x \in A$-ból pontosan akkor megy él A m-szeres diszjunkt uniójának $\langle i,y \rangle$ elemébe, ha $f_o(x)=i$ és $f_1(x)=y$. Például $A=\underline{5}$ esetén egy $f \in C_4^{(5)}$ komművelet művelettáblázata és ábrája a 3. ábrán látható.

	0	1	2	3	4
f_o	0	1	3	0	0
f_1	1	3	2	2	3



3.ábra

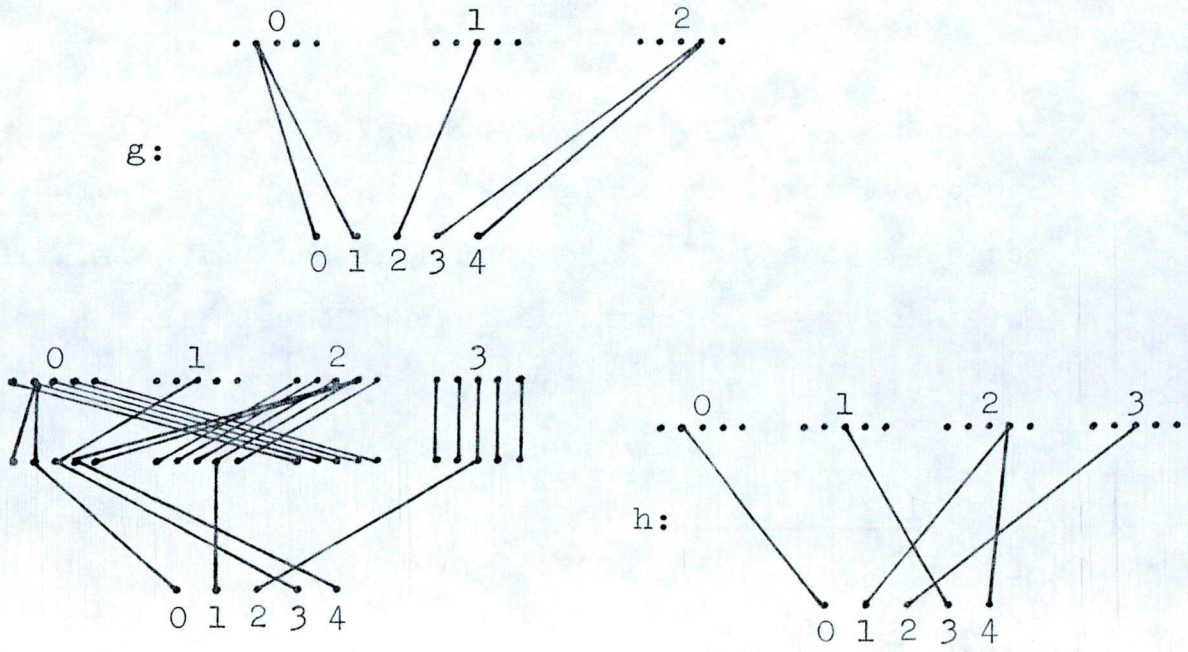
Komművelet ábrája

Leolvasható, hogy f lényegében 3-változós, 0,1 és 3 f lényeges változói, 2 pedig fiktiv változó. Ha f-et 5-változósnak tekintjük, maga a komművelet nem változik, viszont ábrája egy újabb fiktiv változóval egészül ki. Általában is igaz, hogy egy m-változós komművelet tekinthető ℓ-változósnak is, ha $\ell \geq m$. Vagyis ekkor $C_m^{(A)} \subseteq C_\ell^{(A)}$).

1.3 Definició: Tekintsük az $f: A \to \underline{m} \times A$ A-fölötti m-változós komműveletet és a $g^{(o)}: A \to \underline{m}^{(o)} \times A$, $g^{(1)}: A \to m^{(1)} \times A$, ..., $g^{(m-1)}: A \to \underline{m}^{(m-1)} \times A$ komműveleteket ($m^{(k)} \geq 1$, $0 \leq k < m$). Az f és $g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)}$ komműveletek

szuperpozíciója az a $h=f(g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)})$ koművelet, amelyre $h(x)=\langle h_o(x),h_1(x)\rangle = g_o{}^{(f_o(x))}(f_1(x))$, $g_1{}^{(f_o(x))}\ f_1(x))$ teljesül tetszőleges $x\in A$ -ra. h értelemszerűen $m'=\max\limits_{o\leq k<m} m^{(k)}$-változós. f-et a szuperpozició előtagjának nevezzük. (Ezzel ekvivalens módon, a $g=(g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)}):\underline{m}\times A\to\underline{m}'\times A$ vektorművelet bevezetéséve is definiálhatjuk a fönti szuperpoziciót. Ekkor egyszerűen $h=g\circ f$ adódik, ahol „o" a szokásos, „egymás után való végrehajtás" műveletét jelöli. Vagyis $h(x)=g(f(x))=$ $\langle g_o(f_o(x),f_1(x)),g_1(f_o(x),f_1(x))\rangle$ $(x\in A)$.)

Példa: Tekintsük a 3. és 4. ábrán látható f és g koműveleteket. Ekkor az $f(g,p_2^4,p_o^4,p_3^4)$ szuperpozició a 4. ábrán látható módon az ábrájával megadott h koműveletet szolgáltatja.



4.ábra

Koműveletek szuperpoziciója

1.4 Állitás: A szuperpozició művelete asszociativ az alábbi értelemben:
$f(g^{(o)}(h^{(o)},\ldots,h^{(k-1)}),\ldots,g^{(m-1)}(h^{(o)},\ldots,h^{(k-1)}))=$
$=(f(g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)}))(h^{(o)},\ldots,h^{(k-1)})$, ahol f, $g^{(i)}$, $h^{(j)} \in C^{(A)}$ $(0 \leq i < m$ és $0 \leq j < k)$.

Bizonyitás: A $g=(g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)})$ és $h=(h^{(o)},\ldots,h^{(k-1)})$ vektorműveletek alkalmazásával az állitás a triviálisan igaz $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ alakot ölti.

A szuperpozicióban lényeges szerepet játszhat az előtag valamely tulajdonsága. Egy ilyen fontos tulajdonságot ir le az

1.5 Definició: Az $f \in C^{(A)}$ koművelet (x,y)-ragasztónak nevezzük ha az x,y különböző A-beli elemekre $f_o(x) = f_o(y)$ és $f_1(x) = f_1(y)$ teljesül. f ragasztó koművelet ha valamely $x,y \in A$-ra (x,y)-ragasztó. Az $f \in C^{(A)}$ koműveletet továbbá konstansnak nevezzük, ha tetszőleges $x,y \in A$-ra $f_o(x)=f_o(y)$ és $f_1(x)=f_1(y)$. (A konstansok $|A| > 1$ esetén nyilván mind ragasztó koműveletek.)

Közvetlenül adódik a szuperpozició definiciójából az

1.6 Állitás: Ha $f \in C^{(A)}$ (x,y)-ragasztó valamely $x,y \in A$-ra, akkor tetszőleges f előtagú szuperpozició is (x,y)-ragasztó.

A következőkben a koműveletek alapvető fontosságú zárt halmazait - klónjait - definiáljuk, rámutatva e klónok néhány speciális tulajdonságára.

1.7 Definició: A-fölötti koműveletek egy halmazát (koművelet-) klónnak nevezzük, ha tartalmazza az összes

koprojekciókat és zárt a szuperpozició műveletére nézve. Az $M \subseteq C^{(A)}$ koművelet-halmaz által generált (vagyis a legszűkebb, M-et tartalmazó) klónt jelölje C(M). (Ha $M = \{f^{(o)},\ldots,f^{(k-1)}\}$ véges halmaz, akkor használjuk a $C(M) = C(f^{(o)},\ldots,f^{(k-1)})$ jelölést is.) A $P^{(A)}$ és $C^{(A)}$ klónokat triviális klónoknak nevezzük.

Megjegyzés: $C^{(A)}$ részklónjai a tartalmazás relációra nézve hálót alkotnak. E háló legkisebb illetve legnagyobb elemei $P^{(A)}$ és $C^{(A)}$. A részklónok halmazát illetve a megfelelő hálót jelölje $K^{(A)}$.

A továbbiakban föltesszük, hogy A véges alaphalmaz, például $A=\underline{n}$ ($n>1$ egész).

1.8 Állitás: Tetszőleges $L \in K^{(A)}$ klón esetén megadható $C^{(A)}$-beli koműveletek olyan véges $f^{(o)},\ldots,f^{(k-1)}$ halmaza, amelyre a $g \in L \Leftrightarrow g \in C(f^{(i)})$ valamely $0 \leq i < k$-ra ekvivalencia teljesül. (Következésképpen koműveletek tetszőleges klónja végesen generált.)

Bizonyitás: Tekintsük $C^{(A)}$-n az alábbi relációt: $f,g \in C_m^{(A)}$ -re $f \sim g \Leftrightarrow$ az $\underline{m}$ halmaz permutációi $R^{(m)}$ halmazának található olyan r eleme, amire fennáll a $g=f(p^m_{r(o)},\ldots,p^m_{r(m-1)})$ egyenlőség. Mivel a szuperpozició definiciója szerint $g_o(x)=p^m_{r(f_o(x))}(f_1(x))=r(f_o(x))$ és $g_1(x)=p^m_{r(f_o(x))}(f_1(x))=f_1(x)$ ($x \in A$), a definició átfogalmazható a következőképpen: $f \sim g \Leftrightarrow g_1=f_1$ és $g_o=rf_o$ valamely $r \in R^{(m)}$ permutációra. Könnyen látható, hogy $\sim$ ekvivalencia reláció. Nyilván igaz továbbá, hogy ha $f \sim g$, akkor $g \in C(f)$,

s igy $\sim$ bármely $C^{(A)}$-beli osztályát tetszőleges eleme generálja. De akkor $\sim$ bármely T teljes reprezentánsrendszerére és bármely $L \subseteq C^{(A)}$ klónra $L = \bigcup_{f \in L \cap T} C(f)$. (Igaz továbbá az is hogy tetszőleges $L \subseteq C^{(A)}$ klón a $C^{(A)}$-fölötti ekvivalencia reláció bizonyos osztályainak uniójából áll.)

Megmutatjuk, hogy $\sim$ véges indexű. Ebből állitásunk már következik, hiszen ha T véges, akkor $L \cap T$ is az és ekkor a fenti egyenlőség szerint az $\{f \in C^{(A)} : f \in L \cap T\}$ halmaz kielégiti követelményünket.

Tekintsük a $C_n^{(A)}$ halmazt. E halmaz végessége miatt elegendő igazolnunk, hogy tetszőleges $f \in C^{(A)}$-hoz található olyan $g \in C_n^{(A)}$, amire $f \sim g$. Tegyük föl, hogy $m > n$ és $f \in C_m^{(A)}$. Legyen $i_0, \ldots, i_{k-1}$ f egymástól különböző lényeges változóinak egy fölsorolása. Nyilván $1 \leq k \leq n$, hiszen f_0 legföljebb csak n különböző értéket vehet föl. Vegyünk egy olyan $r \in R^{(m)}$ permutációt, amelyre $r(i_0)=0$, $r(i_1)=1, \ldots, r(i_{k-1})=k-1$ áll. Ilyen permutáció m választása miatt biztosan létezik. Ekkor a $g=f(p^m_{r(0)}, \ldots, p^m_{r(m-1)})$ koműveletre $f \sim g$ és $g \in C_n^{(A)}$. Valóban, hiszen $g_0(x)=p^m_{r(f_0(x))}=r(f_0(x)) < k \leq n$ $(x \in A)$.

Tehát $\sim$ véges indexű. Az állitást igazoltuk.

1.9 Következmény: Tetszőleges véges, nemüres A halmaz esetén az A-fölötti koműveletek klónjainak száma véges.

Az 1.8 Állitás fönti bizonyitása indokolttá teszi néhány új fogalom bevezetését.

1.10 Definició: Az f és g A-fölötti m-változós koműveletekről mondjuk azt, hogy egyformák, ha $g_1=f_1$ és $g_o=rf_o$ valamely $r\in R^{(m)}$ permutációra. ($R^{(m)}$ jelöli az m halmaz összes permutációinak halmazát. Általában $R^{(A)}$-val jelöljük egy véges A halmaz permutációinak halmazát.) Az előzőek szerint tehát 2 koművelet pontosan akkor egyforma, ha változóik megfelelő permutációjával egymásba átvihetők. Az „egyformaság" $C^{(A)}$-fölötti ekvivalencia reláció egy T teljes reprezentánsrendszerét nevezzük $C^{(A)}$ törzsének, ha $T\subseteq C_n^{(A)}$. $C^{(A)}$ egy rögzitett T törzse esetén tetszőleges $L\in K^{(A)}$ klón törzse legyen a $T_L=L\cap T$ halmaz.

Fogalmazzuk át az 1.8 Állitás bizonyitásában szereplő egyik észrevételünket.

1.11 Következmény: Legyen T $C^{(A)}$ egy törzse. Ekkor bármely $L\in K^{(A)}$ klónra $L=\{g\in C^{(A)}$: g egyforma f-fel valamely $f\in T_L$-re$\}$. Vagyis f osztályát az egyformaság relációhoz tartozó osztályozásban $\bar{f}$-sal jelölve:

$$L=\bigcup_{f\in T_L}\bar{f}\ .$$

Későbbi meggondolásainkban szerepet fog játszani az imént bevezetett reláció két különbözőféle gyöngitése. Az első esetben csupán a relációban szereplő koműveletek cimke részeire rovunk ki föltételt, melyet kapcsolatba hozunk a cimke részekhez tartozó A-fölötti kisérő osztályozásokkal. A második esetben egy koművelet változóin nem csupán permutációkat, hanem tetszőleges egymásra

vetitést is megengedünk. Eredményül egy rendezési relációt kapunk $C^{(A)}$-n.

1.12 Definició: Az $f,g \in C_m^{(A)}$ koműveletekre mondjuk azt, hogy egyforma cimke függvényűek, ha $g_o = rf_o$ valamely $r \in R^{(m)}$ permutációra. (Az f_o és g_o cimke függvényeket ekkor egyformáknak nevezzük.)

A két definált reláció (a koműveletek, illetve a cimke függvények halmazán) nyilván ekvivalencia reláció.

Jelölje $Q^{(A)}$ A osztályozásainak halmazát. Mivel $Q^{(A)}$ számossága csak $|A| = n$-től függ, jelölje $|Q^{(A)}|$-t $Q(n)$. Természetes módon értelmezhető $Q^{(A)}$-n egy rendezési reláció: $q_1, q_2 \in Q^{(A)}$-ra álljon fönn $q_1 \leq q_2$, ha q_1 finomitása q_2-nek (q_1 minden blokkja része valamely q_2-beli blokknak). $\leq$ nyilván rendezési reláció és tetszőleges $q \in Q^{(A)}$-ra $q^{(o)} \leq q \leq q^{(1)}$, ahol $q^{(o)}$ a legkisebb (csupa 1-elemű blokkból álló), $q^{(1)}$ pedig a legnagyobb (egyetlen blokkból álló) osztályozást jelöli. A q-hoz tartozó ekvivalencia relációt jelölje $\sim_q$. (Vagyis: $x,y \in A$-ra $x \sim_q y$ akkor és csak akkor, ha x és y q-nak azonos blokkjába esik.) Legyen továbbá valamely $f: A \to B$ leképezés kisérő osztályozása A-n $q(f)$.

1.13 Állitás: Két, $f,g \in C_m^{(A)}$ koművelet akkor és csak akkor egyforma cimke függvényű, ha a cimke részükhöz tartozó kisérő osztályozásuk A-n egybeesik.

Bizonyitás: Ha $g_o = rf_o$ valamely $r \in R^{(m)}$-re, akkor

$g_o(x) = g_o(y) \Leftrightarrow r(f_o(x)) = r(f_o(y)) \Leftrightarrow f_o(x) = f_o(y)$ (tetszőleges $x,y \in A$ esetén), tehát a föltétel szükséges.

Tegyük most föl, hogy $g_o(x)=g_o(y) \Leftrightarrow f_o(x)=f_o(y)$ tetszőleges $x,y \in A$-ra áll. Tekintsünk egy olyan $r \in R^{(m)}$ permutációt, amelyre $r(f_o(x))=g_o(x)$ tetszőleges $x \in A$ mellett. Ilyen permutáció létezik, hiszen $g_o(x) \neq g_o(y)$-ból $f_o(x) \neq f_o(y)$ következik $(x,y \in A)$, s igy az előirt értékeken r injektiv. De akkor $g_o=rf_o$, vagyis a föltétel elégséges is.

1.14 Következmény: $C^{(A)}$-nak az egyforma cimkefüggvény szerinti osztályozása Q(n) elemű, az egyformaság szerinti osztályozása - vagyis $C^{(A)}$ tetszőleges T törzse - pedig $Q(n) \cdot n^n$ elemű. Igaz továbbá, hogy az f és $g \in C^{(A)}$ komű-veletek akkor és csak akkor egyformák, ha $g_1=f_1$ és $q(g_o)=q(f_o$

Bizonyitás: Az első állitás közvetlenül adódik 1.13-ból. A második állitás abból következik, hogy az n-elemű A halmazra az $f_1:A \to A$ leképezések száma n^n. A harmadik állitás az 1.10 Definició és az 1.13 Állitás egyszerű átfogalmazása.

1.15 Definició: Mondjuk azt, hogy az $f \in C_m^{(A)}$ komű-veletnek a $g \in C_\ell^{(A)}$ koművelet egy változata (jelben: $f \trianglelefteq g$), ha létezik koprojekcióknak olyan $p^m_{i_o},\ldots,p^m_{i_{m-1}} \in P^{(A)}$ sorozata, amelyre $g=f(p^m_{i_o},\ldots,p^m_{i_{m-1}})$. f változatainak halmazát jelölje V(f). Az $M \subseteq C^{(A)}$ halmaz változatainak halmaza legyen $V(M) := \bigcup_{f \in M} V(f)$.

A definició egy triviális következménye az

1.16 Állitás: Ha valamely $L \in K^{(A)}$ klónra $f \in L$, akkor $V(f) \subseteq L$. (Vagyis: egy klón bármely koművelettel együtt annak változatait is tartalmazza.)

1.17 Állitás: $f,g \in C_m^{(A)}$-re g akkor és csak akkor változata f-nek, ha $g_1=f_1$ és $q(g_o) \geqslant q(f_o)$ (vagyis: ha a leképező részek azonosak és az f_o szerinti kisérő osztályozás finomitása a g_o szerintinek.)

Bizonyitás: Ha $g=f(p^m_{i_o},\ldots,p^m_{i_{m-1}})$, akkor $f_o(x)=f_o(y)$-ból $g_o(x)=p^m_{i_k,o}(f_o(x))=p^m_{i_k,o}(f_o(y))=g_o(y)$ következik valamely $0 \leq k < m$-re és $g_1(x) = p^m_{i_\ell,1}(f_1(x))=f_1(x)$ valamely $0 \leq \ell < m$-re (tetszőleges $x,y \in A$ esetén). A föltétel tehát szükséges.

Ha most $g_1=f_1$ és $q(g_o) \geqslant q(f_o)$, akkor képezzük azt a $h=f(p^m_{i_o},\ldots,p^m_{i_{m-1}})$ szuperpoziciót, amelyben ha valamely $x \in A$-ra $f_o(x)=k$, akkor $i_k=g_o(x)$ $(0 \leq k < m)$. A definició korrekt, hiszen $f_o(x)=f_o(y)$ esetén $g_o(x)=g_o(y)$ is áll $(x,y \in A)$. Ekkor $h_1(x)=p^m_{i_k,1}(f_1(x))=f_1(x)=g_1(x)$ valamely $0 \leq k < m$-re és $h_o(x)=p^m_{i_k,o}(f_1(x))$ ha $k=f_o(x)$ $(0 \leq k < m)$, tehát ekkor $i_k=g_o(x)$, s ezért $h_o(x)=p^m_{g_o(x),o}(f_1(x))=g_o(x)$ (tetszőleges $x \in A$ mellett). Kaptuk, hogy $h=g$, tehát g változata f-nek. Ezzel beláttuk, hogy föltételünk elégséges is.

1.18 Következmény: A koműveletekre bevezetett $\trianglelefteq$ reláció rendezési reláció.

A következő definicióval egy olyan relációt vezetünk be a koműveletek $C^{(A)}$ halmazán, amelynek segitségével fölismerhetőkké válnak $C^{(A)}$ bizonyos egymással izomorf részklónjai.

1.19 Definició: Az $f,g \in C_m^{(A)}$ koműveleteket nevezzük hasonlóknak (jelben: $f \simeq g$), ha valamely $r \in R^{(A)}$ permutációra fennáll a $\langle g_o, g_1 \rangle = \langle f_o r^{-1}, r f_1 r^{-1} \rangle$ egyenlőség. Ha az egyenlőség adott r-re áll fönn, akkor ezt mondjuk úgy, hogy f és g r szerint hasonlók (jelben: $f \simeq_r g$), illetve mondjuk azt is, hogy g az f koművelet r szerinti transzformáltja (jelölje ezt: $g=(r)f$). Mondjuk azt továbbá, hogy az $M_1, M_2 \subseteq C^{(A)}$ halmazok hasonlók (jelben: $M_1 \simeq M_2$), ha valamely $r \in R^{(A)}$-ra $f \in M_1$-ből és $f \simeq_r g$-ből $g \in M_2$, valamint $f \simeq_r g$-ből és $g \in M_2$-ből $f \in M_1$ következik (vagyis, ha $M_1 \simeq_r M_2$

Az alábbi állitások könnyen adódnak a definicióból:

1.20 Állitás: A $\simeq$ reláció ekvivalencia reláció $C^{(A)}$-n. Részletesebben: legyen $f,g,h \in C^{(A)}$; ekkor $f \simeq_{id_A} f$, ha $f \simeq_r g$ akkor $g \simeq_{r^{-1}} f$, és ha $f \simeq_{r_1} g$ és $g \simeq_{r_2} h$ akkor $f \simeq_{r_1 \cdot r_2} h$ $(r, r_1, r_2 \in R^{(A)})$.

1.21 Állitás: A transzformáció alkalmazása fölcserélhető a szuperpozició képzésével: ha az $f \in C_m^{(A)}$ és $g^{(i)} \in C^{(A)}$ $(0 \leq i < m)$ koműveletekre $h=f(g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)})$ és $r \in R^{(A)}$, akkor $(r)h=((r)f)((r)g^{(o)},\ldots,(r)g^{(m-1)})$.

1.22 Következmény: A koműveletek halmazai közötti hasonlóság izomorfizmus. Speciálisan, ha A-fölötti koműveletek két klónjának létezik hasonló generátorrendszere, akkor a két klón izomorf: $M_1, M_2 \subseteq C^{(A)}$-ra ha $M_1 \simeq M_2$, akkor $C(M_1) \cong C(M_2)$.

Mivel a II. részben vizsgálatainkat a koműveletek halmazának valamely rögzitett T törzsén végezzük el,

szükségünk lesz a hasonlósági relációnak is egy gyöngébb változatára:

1.23 Definició: Tekintsük $C^{(A)}$ valamely T törzsét. Mondjuk azt, hogy $f,g \in T$ gyöngén hasonlók ($f \approx g$-vel jelölve), ha g-hez található olyan, hozzá hasonló $f' \in C^{(A)}$ koművelet, amely egyforma f-fel. A valamely $r \in R^{(A)}$ permutáció szerinti gyönge hasonlóság ($f \approx_r g$), illetve T-beli M_1 és M_2 részhalmazok gyönge hasonlóságának ($M_1 \approx_r M_2$-nek) értelmezése az 1.19-ben leirtakkal analóg módon történik.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az 1.20-1.22 alatti tulajdonságok - némi átfogalmazással - a gyönge hasonlóságra is érvényben maradnak. A következőkben klónok egy speciális metszetét definiáljuk.

1.24 Definició: Jelölje az egyváltozós A-fölötti koműveletek halmazát $\bar{S}^{(A)}$. Mivel e halmaz elemei mind egyforma cimke függvényűek, az $\bar{S}^{(A)}$-beli elemek cimke részétől el is tekinthetünk. (Pontosabban az egyváltozós $\langle f_0, f_1 \rangle$ koműveletre azt mondjuk, hogy lényegében megegyezik a leképező részével, f_1-gyel. A „lényeges" jelzőt olykor el is hagyjuk.) Tehát $\bar{S}^{(A)}$ lényegében megegyezik az A-fölötti transzformációk $S^{(A)}$ félcsoportjával. Valamely $L \in K^{(A)}$ klón $\bar{S}^{(A)}$-val vett metszetét nevezzük L talpának és jelöljük S(L)-lel.

1.25 Állitás: Az $L \in K^{(A)}$ klón S(L) talpa L-nek részklónja és $S^{(A)}$-nak részmonoidja.

Bizonyitás: Tekintsünk egy tetszőleges (m-változós) $f \in L$ koműveletet. Ekkor a $h=f(p_o^m,\ldots,p_o^m)$ szuperpozició is L-beli. Ugyanakkor h egyváltozós, ezért $h \in S(L)$ és $h_1=f_1$, vagyis h lényegében megegyezik f_1-gyel. Vagyis S(L) lényegében az L-beli koműveletek leképező részeiből áll. Az állitás ebből már következik.

Végül a klónmetszet fogalmát kitágitva megfogalmazzuk, mit jelent koműveletek közében egy adott koművelet-halmazra való zártsági tulajdonság:

1.26 Definició: Legyen $N \subseteq C^{(A)}$ rögzitett koművelet-halmaz. Valamely $Z \subseteq N$ halmazra azt mondjuk, hogy N-beli klónmetszet, ha valamely klón N-nel vett metszete. Ez jól látható módon ekvivalens a $Z=C(Z) \cap N$ föltétellel (C(Z) a Z által generált klón). Azt is mondjuk ekkor, hogy Z a koműveletek egy N-zárt osztálya. Az N-beli klónmetszetek halmazát jelölje $K^{(A)}/N$.

2. fejezet

Koműveletek minimális klónjai

A műveletek esetében mindmáig megoldhatatlan probléma a tetszőleges véges halmaz fölötti minimális klónok meghatározása. Ennek a problémának - a kételemű halmaz viszonylag egyszerű esetét leszámitva - eddig csak a 3-elemű halmazon született teljes megoldása (ld. Csákány B. [3]). A koműveletek esetében a hasonló kérdés egyszerűen megválaszolhatónak bizonyult, amint ez alább kiderül.

2.1 Definició: A véges, nemüres A halmaz fölötti koműveletek egy L klónját minimálisnak nevezzük, ha egyetlen valódi részklónja a projekciók $P^{(A)}$ klónja. (Vagyis: $L \neq P^{(A)}$, de tetszőleges $M \subseteq C^{(A)}$ klónra $M \subseteq L$-ből $M=P^{(A)}$ vagy $M=L$ következik). Nevezzünk továbbá retrakciónak egy $f:A \longrightarrow A$ műveletet, ha $f^2=f$.

2.2 Állitás: Ha az $L \subseteq C^{(A)}$ klón tartalmaz lényegében legalább kétváltozós olyan koműveletet, amelynek leképező része nem identikus akkor L nem minimális.

Bizonyitás: Tegyük föl, hogy az m-változós $f \in L$ koművelet lényegében legalább kétváltozós és $f_1 \neq id_A$. Tekintsük a $g=f(p_o^m,\ldots,p_o^m)$ koművelet (,amely lényegében megegyezik f_1-gyel) és a C(g) klónt. Az 1.25 Állitás szerint $C(g) \subseteq S(L)$, továbbá $C(g) \neq P^{(A)}$, hiszen g_1 nem identikus. L a föltétel szerint valódi részeként tartalmazza

$S(L)$-et. De akkor $P^{(A)} \subset C(g) \subset L$ is igaz, s igy L nem lehet minimális.

2.3 Állitás: Ha az $L \subseteq C^{(A)}$ klón tartalmaz lényegében legalább kétváltozós koműveletet, akkor érvényes a következő ekvivalencia: L akkor és csak akkor minimális, ha $L=P^{(A)} \cup \bar{f}$, ahol lény $(f) \geqslant 2$ és $f_1=id_A$. ($\bar{f}$ az 1.10 Definicióban szereplő egyformasági relációhoz tartozó osztályozásban f osztályát jelöli.)

Bizonyitás: Ha a fönti f-re $L=P^{(A)} \cup \bar{f}$, akkor - mint egyszerűen látható - L valóban klón és egyetlen valódi részklónja $P^{(A)}$.

Tegyük most föl, hogy L minimális és legyen az (m-változós) $f \in L$-re lény $(f) \geqslant 2$. A 2.2 Állitás szerint ekkor szükségképpen lény $(f)=2$ és $f_1=id_A$. Jelölje f lényeges változóit i és j $(0 \leq i < j < m)$. Megmutatjuk, hogy $L=P^{(A)} \cup \bar{f}$. Tételezzük föl először, hogy valamely $g \in L$-re lény$(g) \geqslant 2$. L minimalitása miatt g-re is lény$(g)=2$ és $g_1=id_A$ teljesül. Ha most f és g nem egyformák, akkor az 1.14 következmény szerint g_o és f_o kisérő osztályozásai A-n különbözőek. Egyszerű látni, hogy ekkor a

$$h=f(\underbrace{p_o^4,\ldots,p_o^4}_{i\text{-szer}},g(p_o^4,p_1^4),\underbrace{p_o^4,\ldots,p_o^4}_{(j-i-1)\text{-szer}},g(p_2^4,p_3^4),\underbrace{p_o^4,\ldots,p_o^4}_{(n-j-1)\text{-szer}})$$

szuperpozicióra lény$(h) \geqslant 3$. Ugyanakkor $h \in L$, ami a 2.2 Állitás miatt ellentmond L minimalitásának.

Ha bármely $g \in L$-re lény$(g)=1$, akkor $g \in S(L)$. Ekkor $C(g) \subseteq S(L)$, de akkor $S(L) \subset L$ miatt $C(g)$ valódi részklón

L-ben, tehát $C(g)=P^{(A)}$. Kaptuk, hogy tetszőleges $g \in L$-re $g \in \bar{f}$ vagy $g \in P^{(A)}$, állitásunk tehát igaz.

Következő állitásunk az egyváltozós (közönséges) műveletek minimális részmonoidjaira vonatkozóan közismert:

2.4 Állitás: Ha az $L \subseteq C^{(A)}$ klón csupa lényegében egyváltozós koműveleteket tartalmaz, akkor érvényes az alábbi ekvivalencia: L akkor és csak akkor minimális, ha $L=C(f)$, ahol f A egy retrakciója - ekkor $L=P^{(A)} \cup \bar{f}$ - vagy A egy primciklusú ciklikus permutációja.

2.5 Következmény: Koműveletek egy $L \subseteq C^{(A)}$ klónja akkor és csak akkor minimális, ha érvényes az alábbi 3 föltétel valamelyike:

a) $L=P^{(A)} \cup \bar{f}$, ahol lény(f)=2 és $f_1=id_A$;

b) $L=P^{(A)} \cup \bar{f}$, ahol lény(f)=1 és f_1 A valamely retrakciója;

c) $L=C(f)$, ahol lény(f)=1 és f_1 A valamely primciklusú ciklikus permutációja.

3. fejezet

A koműveletek egy speciális osztálya

E fejezetben adott véges halmaz fölötti koműveletek egy olyan speciális osztályával foglalkozunk, amelybe eső koműveleteket az un. szétválaszthatósági tulajdonság jellemzi: tetszőleges változójukban legföljebb egy értéket vesznek föl. Megvizsgáljuk az ezen osztályba sorolható koműveletek által generált klónok tulajdonságait és föltételt fogalmazunk meg arra vonatkozóan, hogy e klónokból milyen esetekben nyerhetők újabb klónok egyszerű unió-képzéssel.

3.1 Definició: Mondjuk azt, hogy a véges A (=n) halmaz fölötti $f(=\langle f_0, f_1\rangle)$ koművelet szétválasztható, ha tetszőleges $x,y \in A$-ra $f_0(x)=f_0(y)$-ból $f_1(x)=f_1(y)$ következik, vagyis (az 1.12 Definició szerint) a megfelelő kisérő osztályozásokra fönnáll $q(f_0) \leq q(f_1)$. Valamely $q \in Q^{(A)}$ osztályozás esetén nevezzük f-et q szerint szétválasztható-nak, ha f szétválasztható és $q(f_0)=q$. Az A-fölötti szétválasztható (q szerint szétválasztható) koműveletek halmazát jelölje $H^{(A)}$ (illetve $H_q^{(A)}$). Az $L \in K^{(A)}$ klónt akkor nevezzük (q szerint) szétválaszthatónak, ha (q szerint) szétválasztható koműveletek valamely halmazával generálható. Speciálisan, a $d_0^{(A)}=id_n$ és $d_1^{(A)}=id_A$ egyenlőségekkel definiált $d^{(A)}(\in C_n^{(A)})$ koműveletet A-fölötti diagonális koműveletnek fogjuk hivni.

Megjegyezzük, hogy a lényegében n-változós koműveletek mind szétválaszthatók, mégpedig $q^{(o)}$ (a $Q^{(A)}$ osztályozás-háló legkisebb eleme) szerint.

A továbbiakban hasznos segédeszközeink lesznek a koműveletekhez (illetve klónjaikhoz) rendelt un. leképező gráfok.

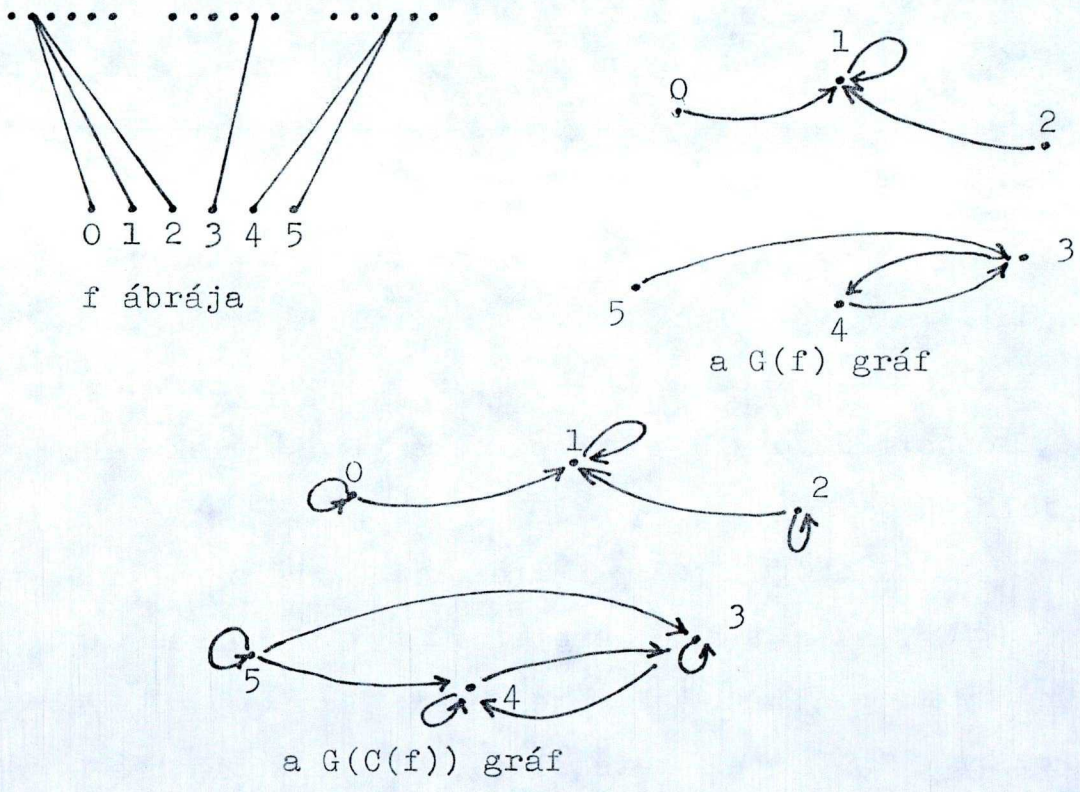
3.2 Definició: Jelölje az (A halmaz elemeiből, mint pontokból álló) n-pontú irányitott gráfok halmazát $G^{(A)}$. Ha valamely $G \in G^{(A)}$-ra és $x,y \in A$-ra az x-ből y-ba mutató irányitott él be van húzva G-ben (,vagyis az (x,y) pár eleme az éleket meghatározó A-fölötti binér relációnak), akkor ezt $x \longrightarrow y \in G$-vel jelöljük, továbbá ha x-ből irányitott élekből álló út vezet y-ba (,vagyis (x,y) eleme a fönti reláció reflexiv, tranzitiv lezártjának), akkor ezt jelölje $x \longmapsto y \in G$. Az $x \longmapsto y$ jelsorozattal szükség esetén a mondott útvonalhoz tartozó irányitott élek halmazát is jelöljük.

A G_1, G_2, $G \in G^{(A)}$ gráfokra G_1 részgráfja G_2-nek ($G_1 \subseteq G_2$) ha $x \longrightarrow y \in G_1$ esetén $x \longrightarrow y \in G_2$, és $G=G_1 \cup G_2$ ha $x \longrightarrow y \in G$ pontosan akkor teljesül, ha $x \longrightarrow y \in G_1$ vagy $x \longrightarrow y \in G_2$ ($x,y \in A$ tetszőlegesek.) Használjuk a $G_1 \cup \{x \longrightarrow y\}$ jelölést is, ha G_2 az egyetlen $x \longrightarrow y$ élet tartalmazza.

Az $f \in C^{(A)}$ koművelet leképező gráfjának azt a $G(f) \in G^{(A)}$ gráfot nevezzük, amelyre $x \longrightarrow y \in G(f)$ pontosan akkor igaz, ha $f_1(x)=y$ ($x,y \in A$). Az $M \subseteq C^{(A)}$ koművelet-halmaz leképező gráfja a $G(M) := \bigcup_{f \in M} G(f)$ gráf.

Vegyük észre, hogy az M által generált L klónra $x \longrightarrow y \in G(L)$ éppen azokra az $x,y \in A$ elemekre teljesül, amelyekre $x \longmapsto y \in G(M)$. (Nyilvánvaló továbbá, hogy $x \longrightarrow x \in G(L)$ bármely $x \in A$-ra).

Példa: Az 5. ábrán fölrajzoltuk egy $f \in H^{(6)}$ komű-velet ábráját, valamint az f-hez és az általa generált klónhoz tartozó leképező gráfokat.



5.ábra

Koművelet és klón leképező gráfjai

A következő definició kapcsolatot teremt a szétválasztható koműveletek és a leképező gráfok között:

3.3 Definició: Legyen $f \in H^{(A)}$ és $G \in G^{(A)}$. Az $(f;G) := \{ g_1 : A \to A : q(f_o) \leqslant q(g_1)$ és $f_1(x) \longmapsto g_1(x) \in G$ bármely $x \in A$-ra$\}$ halmazt az f-ből G által megengedett leképező részek halmazának nevezzük. A definició kiterjesztésével adódik $M \subseteq H^{(A)}$-ra $(M;G) := \bigcup_{f \in M} (f;G)$.

A szétválasztható klónok jól alkalmazható jellemzését adja a

3.4 Állitás: Az $M \subseteq H^{(A)}$ halmaz által generált szétválasztható klónnak a $g \in C^{(A)}$ koművelet akkor és csak akkor eleme, ha g koprojekció vagy található olyan $f \in M$ koművelet, amelyre $q(f_o) \leqslant q(g_o)$ és $g_1 \in (f;G(M))$.

Bizonyitás: Legyen $g \in L \setminus P^{(A)}$ tetszőleges. ($P^{(A)}$ jelöli az A-fölötti koprojekciók halmazát.) Nyilvánvaló, hogy g fölirható olyan $f(g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)})$ alakú szuperpozició alakjában, amelyben az f előtag M-beli (m-változós) koművelet és $g^{(j)} \in L$ ($j \in \underline{m}$-re). Ekkor $f_o(x)=f_o(y)$-ból $i \in \{0,1\}$-re $g_i(x)=g_i^{(f_o(x))}(f_1(x))=g_1^{(f_o(y))}(f_1(y))=g_i(y)$ következik f szétválaszthatósága miatt (bármely $x,y \in A$-ra), vagyis $q(f_o) \leqslant q(g_i)$. Igaz továbbá, hogy $g^{(j)}$ kifejezhető M-beli elemekből álló szuperpozicióval (minden $j \in \underline{m}$-re), s ezért bármely $x \in A$-hoz található olyan ℓ természetes szám és léteznek olyan $h^{(o)},\ldots,h^{(\ell-2)}$, $h^{(\ell-1)}$ M koműveletek, amelyekre $g_1(x)=h_1^{(\ell-1)}(h_1^{(\ell-2)}(\ldots h_1^{(o)}(f_1(x))\ldots))$. De akkor $f_1(x) \longmapsto g_1(x) \in G(M)$ fönnáll, hiszen $x \longrightarrow f_1(x) \in G(M)$, $f_1(x) \longrightarrow h_1^{(o)}(f_1(x)) \in G(M),\ldots,$ $h_1^{(\ell-2)}(\ldots h_1^{(o)}(f_1(x))\ldots) \longrightarrow g_1(x) \in G(M)$. Vagyis f kielégiti a követelményeket.

Forditva, tegyük föl, hogy $f \in M$ (m-változós) és valamely $g \in C^{(A)} \setminus P^{(A)}$-ra $q(f_o) \leqslant q(g_o)$ és $g_1 \in (f;G(M))$. Ekkor bármely $x \in A$-ra $f_1(x) \longrightarrow g_1(x) \in G(M)$. Ezért $f_1(x) \longrightarrow g_1(x) \in G(L)$, s igy valamely (nyilván egyváltozósnak is választható) $h^x \in L$ koműveletre $h_1^x(f_1(x))=g_1(x)$. Az általánosság megszoritása nélkül föltehető, hogy f lényegében k-változós és lényeges változói éppen $\underline{k}$ elemei. Tekintsük a k blokkból álló $q(f_o)$ osztályozás egy teljes $\{x_o,\ldots,x_{k-1}\}$ reprezentánsrendszerét, melyben az elemek indexelése úgy történik, hogy bármely $i \in \underline{k}$-ra $f_o(x_i)=i$ teljesül. Képezzük most az $f':=f(h^{x_o}(p_o^m),\ldots,h^{x_{k-1}}(p_{k-1}^m), p_k^m,\ldots,p_{m-1}^m) \in L$ szuperpoziciót. Nyilván $f_o'=f_o$, s igy $q(f_o') \leqslant q(g_o)$. Továbbá bármely $i \in \underline{k}$-ra $f_1'(x_i)= =h_1^{x_i}(f_1(x_i))=g_1(x_i)$.

Megmutatjuk, hogy $f_1'=g_1$. Legyen $y \in A$ tetszőleges. Valamely $i \in \underline{k}$-ra ekkor $f_o(y)=f_o(x_i)$. De $f \in H^{(A)}$ miatt ebből $f_1(y)=f_1(x_i)$ is következik. Ugyanakkor a $q(f_o) \leqslant q(g_1)$ föltevésből $g_1(y)=g_1(x_i)$ adódik, s igy $f_1'(y)=h_1^{x_i}(f_1(y))=h_1^{x_i}(f_1(x_i))=g_1(x_i)=g_1(y)$.

Az 1.17 Állitás következtében a föntiek alapján $g \in V(f')$, ezért az 1.16 Állitás szerint $g \in C(f') \subseteq L$. Ezzel az állitást bebizonyitottuk.

Vegyük észre, hogy állitásunk algoritmust is szolgáltat valamely $M \subseteq H^{(A)}$ halmaz által generált klón meghatározásához:

(i) megrajzoljuk az M halmazhoz tartozó G(M) leképező gráfot;

(ii) M minden f eleméhez képezzük a - G(M)-ből egyszerű módon leolvasható - (f;G(M)) halmazt;

(iii) ennek fölhasználásával megkonstruáljuk a $H(f,M) := \{g \in C^{(A)}: q(f_o) \leq q(g_o)$ és $g_1 \in (f;G(M))\}$ komű-velet-halmazt;

(iv) végül az L klón az $\bigcup_{f \in M} H(f,M) \cup P^{(A)}$ alakban áll elő.

Még egyszerűbben meghatározható egy szétválasztható klón, ha tartalmazza a diagonális koműveletet.

3.5 Következmény: Ha az $L \in K^{(A)}$ klón tartalmazza az A-fölötti $d^{(A)}$ diagonális koműveletet, akkor L-et egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó G(L) leképező gráf.

Bizonyitás: Vegyük észre, hogy L Λ legkisebb osztályozása (vagyis $q^{(o)}$)szerint szétválasztható. Valóban, hiszen ha $f \in L$, akkor a $g=d^{(A)}(f,\ldots,f)$ szuperpozició is L-beli. De g - könnyen látható módon - lényegében n-változós (és igy $H^{(A)}_{q^{(o)}}$-beli), továbbá f nyilván egy változata g-nek (az 1.15 Definició értelmében), s igy az 1.16 Állitás szerint $f \in C(g)$. Az eljárás bármely $f \in L$-re elvégezhető, s igy megadható olyan $M \subseteq H^{(A)}_{q^{(o)}}$ halmaz, amelyre L=C(M). (Nyilván $d^{(A)} \in M$ választható.)

Legyen most $f \in M$ tetszőleges. Állitásunk igazolásához elegendő belátni, hogy $H(f,M) \subseteq H(d^{(A)},M)$ (lásd a 3.4 Állitás után vázolt algoritmus leirását). Ekkor ugyanis $L=H(d^{(A)},M)$, mivel $P^{(A)} \subseteq H(d^{(A)},M)$ nyilvánvaló módon teljesül, s ez a halmaz $q(d^{(A)}_i)=q^{(o)}$ ($i \in \{0,1\}$) miatt

valóban csak G(M)-től függ: $H(d^{(A)},M)=\{g\in C^{(A)}:$ $x\longmapsto g_1(x)\in G(M)$ bármely $x\in A$-ra$\}$. Az igazolandó reláció teljesüléséhez pedig elegendő megmutatnunk, hogy $(f;G(M))\subseteq(d^A;G(M))$,

Először vegyük észre, hogy bármely $x\in A$-ra $x\longrightarrow f_1(x)\in G(M)$, azaz $d_1^{(A)}(x)\longrightarrow f_1(x)\in G(M)$, s igy $f_1\in(d^{(A)},G(M))$. Másrészt pedig tetszőleges $g,h\in H^{(A)}$ és $G\in G^{(A)}$ esetén $g_1\in(h;G)$-ből $(g;G)\subseteq(h;G)$ következik. Valóban, hiszen $h_1(x)\longmapsto g_1(x)\in G$-ből bármely $g'\in(g;G)$-re $g_1(x)\longmapsto g_1'(x)\in G$ miatt $h_1(x)\longmapsto g_1'(x)\in G$ következik (tetszőleges $x\in A$-ra), vagyis $g'\in(h,G)$. Ezzel a bizonyitást befejeztük.

A következőkben valamely (generáló halmazával adott) szétválasztható klónnak egy adott leképező gráffal való kapcsolatát vizsgáljuk.

3.6 Definició: Legyen $M\subseteq H^{(A)}$ és $G\in G^{(A)}$. Mondjuk azt, hogy G összefér M-mel, ha $(M;G(M))=(M;G(M)\cup G)$. Ez a tulajdonság azt fejezi ki, hogy az M-ből a G(M) leképező gráf által megengedett leképező részek halmaza nem bővül, ha G(M) helyett a bővebb $G(M)\cup G$ gráfot tekintjük. H G-nek egyetlen éle az $x\longrightarrow y$ él, akkor ahelyett, hogy G összefér M-mel azt is mondjuk, hogy $x\longrightarrow y$ összefér M-mel.

Vegyük észre, hogy a G gráf pontosan akkor fér össze M-mel, ha minden éle összefér vele.

Az összeférési tulajdonság fontos szerepére mutat rá az alábbi

3.7 Tétel: Legyenek a $q_0,\dots,q_{k-1} \in Q^{(A)}$ osztályozások páronként összehasonlithatatlanok. Tekintsük az $M_i \subseteq H_{q_i}^{(A)}$ nemüres halmazok által generált $L_i=C(M_i)$ szétválasztható klónokat ($i \in \underline{k}$). Az $L:=L_0 \cup \dots \cup L_{k-1}$ halmaz akkor és csak akkor klón, ha a $G(M_j)$ leképező gráfok és az M_i halmazok páronként összeférnek, azaz ha $(M_i;G(M_i))=(M_i;G(M_i)\cup G(M_j))$ teljesül bármely $i,j \in \underline{k}$-ra.

Bizonyitás: Legyen $M:=M_0 \cup \dots \cup M_{k-1}$. Ekkor nyilván $G(M)=G(M_0)\cup \dots \cup G(M_{k-1})$. A 3.4 Állitás után leirtak szerint érvényesek az $L_i=\bigcup_{f \in M_i} H(f,M_i) \cup P^{(A)}$ egyenlőségek ($i \in \underline{k}$), valamint $C(L)=\bigcup_{f \in M} H(f,M) \cup P^{(A)}$.

Először tegyük föl, hogy a $G(M_j)$ leképező gráfok és az M_i halmazok páronként összeférnek ($i,j \in \underline{k}$). Ekkor $(M_i,G(M_i))=(M_i,G(M))$ is teljesül, hiszen a $G(M)$ gráf élei egyenként összeférnek M_i-vel.

Legyen $g \in C(L) \setminus P^{(A)}$ tetszőleges. A $C(L)$-re vonatkozó fönti egyenlőség szerint valamely $f \in M$-re $g \in H(f,M)$. Jelölje i azt az indexet, amelyre $f \in M_i$. $H(f,M)$ definiciója szerint $q(f_0) \leq q(g_0)$ és $g_1 \in (f;G(M)) \subseteq (M_i;G(M))$. Az előző bekezdésben fölirt egyenlőség miatt igy $g_1 \in (M_i;G(M_i))$ is teljesül, vagyis $g_1 \in (h;G(M_i))$ valamely $h \in M_i$-re. Mivel $M_i \subseteq H_{q_i}^{(A)}$, kapjuk, hogy $q(f_0)=q_i=q(h_0)$, s ezért $g \in H(h,M_i) \subseteq L_i$. De akkor $C(L) \subseteq L$, tehát L valóban klón.

Tegyük most föl, hogy $L=C(L)$. Legyenek $i \in \underline{k}$, $f \in M_i$ és $\bar{g} \in (f;G(M))$ tetszőlegesek. Tekintsünk egy olyan $g \in C^{(A)}$

koműveletet, amelyre $q(g_o)=q_i$ és $q_1=\bar{g}$. Mivel $q(f_o)=q_i$ is teljesül, kapjuk, hogy $g \in H(f,M)$. A $C(L)=L_o \cup \ldots \cup L_{k-1}$ föltevés miatt a bizonyitás elején fölirt egyenlőségek értelmében ekkor valamely $j \in \underline{k}$-ra és $h \in M_j$-re $g \in H(h,M_j)$, s igy $q_j=q(h_o) \leqslant q(g_o)=q_i$. Azonban q_i és q_j csak j=i esetén hasonlithatók össze. Ezért $g \in H(h,M_i)$ és igy $\bar{q}=q_1 \in (h;G(M_i))$. Mivel f-et és $\bar{q}$-t tetszőlegesen választottuk, ez egyúttal azt is jelenti, hogy $(M_i;G(M)) \subseteq$ $\subseteq (M_i;G(M_i))$. De akkor $(M_i,G(M_i))=(M_i;G(M_i) \cup G(M_j))$ is teljesül tetszőleges $i,j \in \underline{k}$-ra. A tétel bizonyitását ezzel befejeztük.

Végezetül egy olyan kritériumot adunk, amelynek segitségével az összeférési tulajdonság teljesülését közvetlenül is vizsgálhatjuk.

3.8 Definició: Legyen adva a $q \in Q^{(A)}$ osztályozás. Az A halmaz valamely részhalmazát q-kompatibilisnek nevezzük, ha az üres, vagy q bizonyos blokkjainak egyesitéseként áll elő.

3.9 Állitás: Tekintsünk egy $M \subseteq H_q^{(A)}$ nemüres koművelet halmazt ($q \in Q^{(A)}$) és legyenek $x,y \in A$ tetszőlegesek. Minden $f \in M$-hez rendeljük hozzá A-nak az $U_x(f) := \{z \in A : f_1(z) \vdash x \in G(M)\}$ q-kompatibilis részhalmazát. Az $x \to y$ él akkor és csak akkor fér össze M-mel, ha bármely $f \in M$-re teljesül az alábbi föltétel: tetszőleges $U' \subseteq U_x(f)$ q-kompatibilis részhalmazhoz létezik olyan $g \in M$, hogy $u \in U'$-re és $v \in A \setminus U'$-re $g_1(u) \vdash y \in G(M)$ és $g_1(v) \vdash f_1(v) \in G(M)$.

Bizonyitás: Először belátjuk, hogy $f \in M$-re $U_x(f)$ q-kompatibilis. Valóban, hiszen $q(f_o)=q$, és ha $z_1 \in U_x(f)$ valamint $f_o(z_1)=f_o(z_2)$ teljesülnek valamely $z_1, z_2 \in A$-ra, akkor $f \in H_q^{(A)}$ miatt $f_1(z_1)=f_1(z_2)$ és igy $z_2 \in U_x(f)$ is triviális módon fönnáll.

Tegyük most föl, hogy $(M;G(M))=(M;G(M) \cup \{x \to y\})$. Legyen $f \in M$ rögzitett és $U' \subseteq U_x(f)$ tetszőleges q-kompatibilis részhalmaz. Tekinsünk egy olyan $h \in C^{(A)}$ koműveletet, amelynek leképező részére $u \in U'$ és $v \in A \setminus U'$ esetén a $h_1(u)=y$ és $h_1(v)=f_1(v)$ egyenlőségek teljesülnek. Vegyük észre, hogy U' q-kompatibilitása következtében $q(f_o) \leqslant q(h_1)$. Ezért $h \in (f;G(M) \cup \{x \to y\})$, hiszen $f_1(u) \longmapsto x \in G(M)$ miatt $f_1(u) \longmapsto h_1(u) \in G(M) \cup \{x \to y\}$ $(u \in U')$. De akkor föltevésünk értelmében $h \in (M;G(M))$, s igy valamely $g \in M$-re $h \in (g;G(M))$. Ezért $u \in U'$-re és $v \in A \setminus U'$-re $g_1(u) \longmapsto h_1(u) \in G(M)$ és $g_1(v) \longmapsto h_1(v) \in G(M)$. A kivánt föltétel tehát teljesül.

A forditott irány igazolásához tegyük föl, hogy az M-re kirótt föltétel teljesül. Igazoljuk, hogy $(M;G(M) \cup \{x \to y\}) \subseteq (M;G(M))$ (a másik irányú tartalmazás triviális). Tekintsük a bal oldali halmaz egy tetszőleges h elemét. Ekkor $h \in (f;G(M) \cup \{x \to y\})$ valamely $f \in M$-re. Ezért bármely $x \in A$-ra $f_1(x) \longmapsto h(x) \in G(M) \cup \{x \to y\}$, továbbá $q(f_o) \leqslant q(h)$. Tekintsük a $V := \{v \in A : f_1(v) \longmapsto h(v) \in G(M)\}$ részhalmazt és legyen $U' := A \setminus V$. Az $U_x(f)$ részhalmaz q-kompatibilitásához hasonlóan látható, hogy V - és igy U' is - q-kompatibilis. $u \in U'$ esetén tehát (U' definiciója miatt) az $f_1(u) \longmapsto h(u)$ út tartalmazza az $x \to y$ élet.

Ezért $f_1(u) \vdash x \in G(M)$ és $y \vdash h(u) \in G(M)$. De akkor $U' \subseteq U_x(f)$ és igy föltételünk értelmében valamely $g \in M$-re $u \in U'$ és $v \in V$ esetén $g_1(u) \vdash y \in G(M)$ és $g_1(v) \vdash f_1(v) \in G(M)$. A kapott utakat egymáshoz csatolva innen $g_1(u) \vdash h(u) \in G(M)$ és $g_1(v) \vdash h(v) \in G(M)$ adódik. Tudjuk továbbá, hogy $q=q(f_o)=q(g_o)$, s igy $q(g_o) \leqslant q(h)$ is teljesül. Ezért $h \in (g;G(M))$. Az állitást bebizonyitottuk.

3.10 Következmény: Legyen $q \in Q^{(A)}$-ra $M \subseteq H_q^{(A)}$ és legyenek $x,y \in A$. Ekkor

(i) ha bármely $f \in M$-re $U_x(f)=\emptyset$, akkor $x \rightarrow y$ összefér M-mel; és

(ii) ha $x \vdash y \notin G(M)$ és valamely $f \in M$-re $f_1(x) \vdash x \in G(M)$, akkor $x \rightarrow y$ nem fér össze M-mel.

Bizonyitás: Föltehető, hogy M nemüres (különben nincs mit bizonyitani). A 3.9 Állitásban megfogalmazott kritérium az (i) esetre triviálisan teljesül. A (ii) esetben a megadott föltételből valamely $f \in M$-re $x \in U_x(f)$ következik. Ha most volna olyan $g \in M$, amire $g_1(x) \vdash y \in G(M)$ teljesülne, akkor $x \rightarrow g_1(x) \in G(g) \subseteq G(M)$ miatt $x \vdash y \in G(M)$ adódna. Ez ellentmondás. Ezért a mondott kritérium nem teljesülhet a fönti f-re és az $U' := U_x(f)$ q-kompatibilis részhalmazra. Igy $x \rightarrow y$ nem fér össze M-mel.

4. fejezet

Klónmetszetek összekapcsolása

Az előző fejezetben példát láttunk arra, hogyan kaphatunk bizonyos klónok uniójaként újabb klónokat. Az alábbiakban azt vizsgáljuk, milyen esetekben állithatunk elő bizonyos klónmetszetek uniójaként bővebb klónmetszeteket. A megfogalmazott összekapcsolási föltételek segitségével lehetőségünk nyilik rá, hogy e klónmetszeteket klónokká egészitsük ki. Igy eljárást kapunk koműveletek klónjai egy széles osztályának előállitására. (Az itt leirtakat alkalmazzuk például a II/4. fejezetben).

4.1 Definició: Tekintsünk valamely nemüres $M,N \subseteq C^{(A)}$ halmazokhoz tartozó Z és Y,M-illetve N-beli klónmetszeteket (ld. az 1.26 Definiciót). Azt mondjuk, hogy Z és Y illeszkednek egymáshoz (az (M,N) párra nézve), ha $C(Z \cup Y) \cap M = Z$ és $C(Z \cup Y) \cap N = Y$.

Legyen $Z \in K^{(A)}/M$-re $X_{M,N}(Z) := \{Y \in K^{(A)}/N : Z$ és Y illeszkednek egymáshoz az (M,N) párra nézve $\}$. Tekintsük a következő - adott (M,N) párhoz tartozó - halmazokat: $Min(Z) := C(Z) \cap N$ és $Max(Z) := \{f \in N : C(Z \cup \{f\}) \cap M = Z\}$. A definiált halmazok kapcsolatára vonatkozik a

4.2 Állitás:

(i) $Min(Z) \in X_{M,N}(Z)$.

(ii) Tetszőleges $Y \in X_{M,N}(Z)$ esetén $Min(Z) \subseteq Y \subseteq Max(Z)$.

Bizonyitás:

(i) Az nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Min}(Z) \in L^{(A)}/N$. Legyen $D := C(Z \cup (C(Z) \cap N))$. Leolvasható, hogy $D = C(Z)$. Ezért $D \cap M = Z$ és $D \cap N = C(Z) \cap N$, tehát $\mathrm{Min}(Z) \in X_{M,N}(Z)$ a 4.1 definició értelmében valóban teljesül.

(ii) $Y \in X_{M,N}(Z)$ esetén $Y = C(Z \cup Y) \cap N \supseteq C(Z) \cap N$ valóban fönnáll. A másik tartalmazási reláció Max(Z) definiciójából közvetlenül adódik.

II. RÉSZ

Koműveletek a 3-elemű halmazon

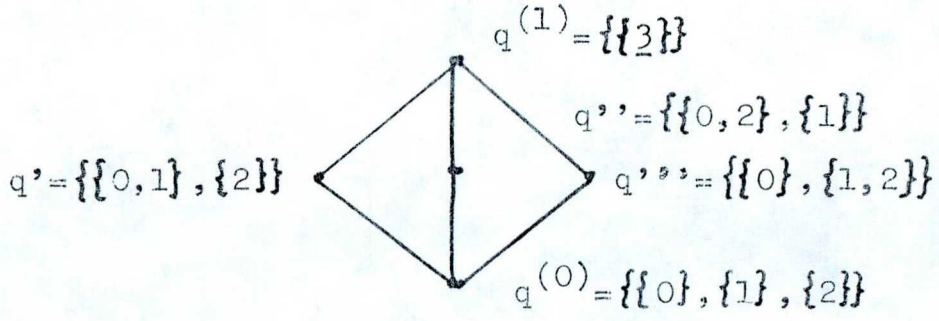
1. fejezet

$\underline{3}$ koműveletei

A 3-elemű $\underline{3}=\{0,1,2\}$ halmaz valamely $f:\underline{3}\to\underline{3}$ transzformációjához rendeljük a $d(f):=9\cdot f(0)+3\cdot f(1)+f(2)$ kódszámot. Nyilván $0 \leqslant d(f) \leqslant 26$.

Vegyük észre, hogy $d(f)$-et hármas számrendszerbe irva a kapott 3-jegyű szám egyes számjegyei rendre az f függvény 0,1 illetve 2 helyen fölvett értékeit adják. (Például a konstansok kódjai 0,13 és 26, az identikus leképezést az 5, a transzpoziciókat a 7, 11 és 21, a 3-ciklusú ciklikus permutációkat pedig a 15 és 19 számok azonositják.)

Kódolásunk segitségével megadjuk $\underline{3}$ koműveletei $C^{(3)}$ halmazának egy - alkalmasan megválasztott - T törzsét. Az I/1.14 Következmény értelmében T elemeinek száma $Q(3)\cdot 3^3=135$. Tekintsük $\underline{3}$ osztályozásainak $Q^{(\underline{3})}$ halmazát. Az I/1.12 Definicióban bevezetett természetes rendezésre nézve $Q^{(\underline{3})}$ az 6. ábrán látható hálót alkotja. Az I/1.13 Állitás



6.ábra

$\underline{3}$ osztályozásainak $Q^{(\underline{3})}$ hálója

alapján $Q^{(\underline{3})}$ minden eleméhez tartozik a T törzsben egy cimkefüggvény. Ezt a kapcsolatot a 7. táblázat irja le.

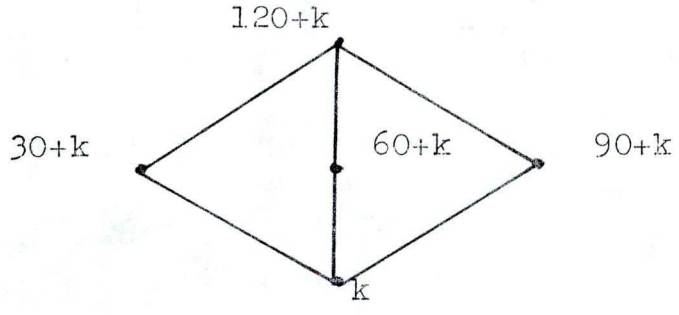
Osztályozás	Cimkefüggvény kódja	Cimkefüggvény jelzőszáma
$q^{(0)}$	0	0
q'	1	1
q''	3	2
q'''	9	3
$q^{(1)}$	5	4

7. táblázat

Osztályozások és cimkefüggvények kapcsolata

Tekintsük a $T:=\{f\in C^{(3)}: d(f_o)\in\{0,1,3,5,9\}\}$ halmazt. A föntiek értelmében T a $C^{(3)}$ klón egy törzse. Kódolja T valamely f elemét a $d(f):=j(f_o)\cdot 30+d(f_1)$ szám, ahol $j(f_o)$ f cimke részének a 7. táblázatban szereplő jelzőszáma. A kódolás „hézagos" ($0\leq d(f)\leq 146$), de ez a továbbiakban nem lesz zavaró. Valamely T-beli koművelet helyett gyakran egyszerűen a kódjára fogunk hivatkozni.

Könnyen látható, hogy az I/1.15 Definicióban bevezetett $\leqslant$ rendezési relácić Hasse-diagramja a T halmazon 27 db. diszjunkt, egymással páronként izomorf olyan diagramra esik szét, amilyen a 8. ábrán látható.



8.ábra

A $\leqslant$ reláció $C^{(3)}$ törzsén

Az ábrán $k \in \underline{26}$ tetszőleges érték, az egymással relációban álló koműveletek közös leképező részének kódszáma.

Vizsgáljuk most meg a T törzsön érvényes gyönge hasonlósági relációt (ld. I/1.23 Definició). E relációt teljesen leirja a transzformációs átmeneteket tartalmazó 9. táblázat.

=	5	7	11	15	19	21	=	5	7	11	15	19	21	=	5	7	11	15	1
=	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	=	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	=	(1)	(2)	(3)	(4)	(5
=	0	0	13	13	26	26	=	30	60	43	103	86	116	=	60	30	103	43	11
=	1	6	12	22	20	17	=	31	66	42	112	80	107	=	61	36	102	52	11
=	2	3	14	4	23	8	=	32	63	44	94	83	98	=	62	33	104	34	11
=	3	2	4	14	8	23	=	33	62	34	104	68	113	=	63	32	94	44	9
=	4	8	3	23	2	14	=	34	68	33	113	62	104	=	64	38	93	53	9
=	5	5	5	5	5	5	=	35	65	35	95	65	95	=	65	35	95	35	9
=	6	1	22	12	17	20	=	36	61	52	102	77	110	=	66	31	112	42	10
=	7	7	21	21	11	11	=	37	67	51	111	71	101	=	67	37	111	51	10
=	8	4	23	3	14	2	=	38	64	53	93	74	92	=	68	34	113	33	10
=	9	18	10	16	24	25	=	39	78	40	106	84	115	=	69	48	100	46	11
=	10	24	9	25	18	16	=	40	84	39	115	78	106	=	70	54	99	55	10
=	11	21	11	7	21	7	=	41	81	41	97	81	97	=	71	51	101	37	11
=	12	20	1	17	6	22	=	42	80	31	107	66	112	=	72	50	91	47	9
=	13	26	0	26	0	13	=	43	86	30	116	60	103	=	73	56	90	56	9
=	14	23	2	8	3	4	=	44	83	32	98	63	94	=	74	53	92	38	9
=	15	19	19	15	15	19	=	45	79	49	105	75	109	=	75	49	109	45	10
=	16	25	18	24	9	10	=	46	85	48	114	69	100	=	76	55	108	54	9
=	17	22	20	6	12	1	=	47	82	50	96	72	91	=	77	52	110	36	10
=	18	9	16	10	25	24	=	48	69	46	100	85	114	=	78	39	106	40	11
=	19	15	15	19	19	15	=	49	75	45	109	79	105	=	79	45	105	49	10
=	20	12	17	1	22	6	=	50	72	47	91	82	96	=	80	42	107	31	11
=	21	11	7	11	7	21	=	51	71	37	101	67	111	=	81	41	97	41	9
=	22	17	6	20	1	12	=	52	77	36	110	61	102	=	82	47	96	50	9
=	23	14	8	2	4	3	=	53	74	38	92	64	93	=	83	44	98	32	9
=	24	10	25	9	16	18	=	54	70	55	99	76	108	=	84	40	115	39	10
=	25	16	24	18	10	9	=	55	76	54	108	70	99	=	85	46	114	48	10
=	26	13	26	0	13	0	=	56	73	56	90	73	90	=	86	43	116	30	10

=	5	7	11	15	19	21	=	5	7	11	15	19	21
=	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	=	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
=	90	90	73	73	56	56	=	120	120	133	133	146	146
=	91	96	72	82	50	47	=	121	126	132	142	140	137
=	92	93	74	64	53	38	=	122	123	134	124	143	128
=	93	92	64	74	38	53	=	123	122	124	134	128	143
=	94	98	63	83	32	44	=	124	128	123	143	122	134
=	95	95	65	65	35	35	=	125	125	125	125	125	125
=	96	91	82	72	47	50	=	126	121	142	132	137	140
=	97	97	81	81	41	41	=	127	127	141	141	131	131
=	98	94	83	63	44	32	=	128	124	143	123	134	122
=	99	108	70	76	54	55	=	129	138	130	136	144	145
=	100	114	69	85	48	46	=	130	144	129	145	138	136
=	101	111	71	67	51	37	=	131	141	131	127	141	127
=	102	110	61	77	36	52	=	132	140	121	137	126	142
=	103	116	60	86	30	43	=	133	146	120	146	120	133
=	104	113	62	68	33	34	=	134	143	122	128	123	124
=	105	109	79	75	45	49	=	135	139	139	135	135	139
=	106	115	78	84	39	40	=	136	145	138	144	129	130
=	107	112	80	66	42	31	=	137	142	140	126	132	121
=	108	99	76	70	55	54	=	138	129	136	130	145	144
=	109	105	75	79	49	45	=	139	135	135	139	139	135
=	110	102	77	61	52	36	=	140	132	137	121	142	126
=	111	101	67	71	37	51	=	141	131	127	131	127	141
=	112	107	66	80	31	42	=	142	137	126	140	121	132
=	113	104	68	62	34	33	=	143	134	128	122	124	123
=	114	100	85	69	46	48	=	144	130	145	129	136	138
=	115	106	84	78	40	39	=	145	136	144	138	130	129
=	116	103	86	60	43	30	=	146	133	146	120	133	120

9. táblázat

Transzformációs átmenetek $C^{(3)}$ törzsén

Itt az egyes permutációkat az 5,7,11,15,19 és 21 kódszámok jelzik (ugyanőket az (1),(2),...,(6) rövidítések is), és az 5-ös alatt lévő oszlop valamely kompozíciójának adott permutáció szerinti gyönge transzformáltja a megfelelő sor és oszlop kereszteződésében áll. (Például a 47-es kompozíciónak a 15-ös permutáció szerinti transzformáltja a (15)47=96-os kompozíció.) A táblázat 5 részre bomlik az 5-féle T-beli címkefüggvénynek megfelelően.

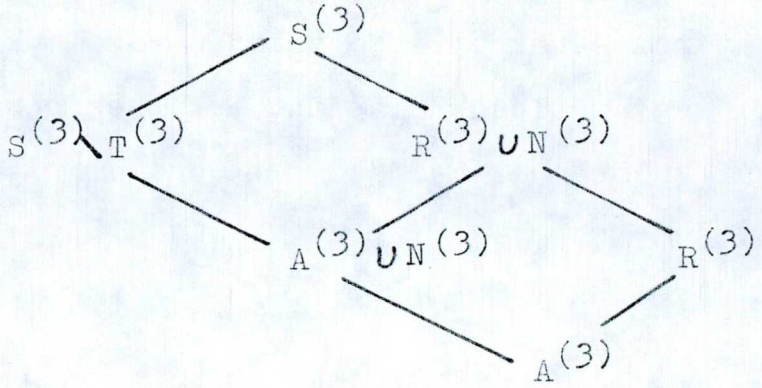
A továbbiakban a 3-fölötti kompozíciók klónjait kívánjuk leírni. Ehhez az I/1.11 Következmény értelmében elegendő e klónok törzseit meghatározni. Először az egyváltozós kompozíciók alkotta klónokat adjuk meg. Ezek törzse éppen 3 egyváltozós műveleteinek (transzformációinak) valamely monoidja lesz. A monoidok meghatározása helyett - kissé általánosabban - leírjuk a 3-fölötti összes transzformáció - félcsoportokat. E félcsoportok hálójának néhány jellegzetes részhálóját föl is rajzoljuk. Ezután a többváltozós kompozíciókból képezhető klónok meghatározásának elvi folyamatát vázoljuk az I. részben leírt meggondolások alapján. E klónok részletesebb leírását külön mellékeljük.

2. fejezet

$\underline{3}$ transzformációinak félcsoportjai

Jelölje $S^{(3)}$ a $\underline{3}$ halmaz transzformációinak (egyváltozós műveleteinek) félcsoportját. E félcsoport műveletét az $(fg)(a)=f(g(a))$ egyenlőségnek megfelelően értelmezzük ($f,g \in S^{(3)}$, $a \in \underline{3}$).

Az alábbiakban vázoljuk azt az eljárást, amelynek segitségével meghatároztuk $S^{(3)}$ összes részfélcsoportjait. Első lépésként azon félcsoportokat kerestük meg, amelyek tartalmazzák $\underline{3}$ alternáló csoporját: $A^{(3)}$-at. Igy 6 félcsoportot kaptunk, amelyek a 10. ábrán látható disztrubutiv részhálót alkotják $S^{(3)}$ összes részfélcsoportjainak - a továbbiakban $L^{(3)}$-mal jelölt - hálójában. ⁎ Az ábrán $N^{(3)}$, $T^{(3)}$ és $R^{(3)}$ rendre a $\underline{3}$ fölötti konstansok, transzpoziciók illetve permutációk halmazát jelöli.



10.ábra

Az $A^{(3)}$ csoportot tartalmazó félcsoportok részhálója

⁎ Ld. a következő fejezet első bekezdését.

Megfigyelésünk az alábbi egyszerű tulajdonságokból könnyen adódik:

Ha az $U \in L^{(3)}$ félcsoportra $A^{(3)} \subseteq U$ és

(i) $U \cap T^{(3)} \neq \emptyset$, akkor $R^{(3)} \subseteq U$;

(ii) $U \cap N^{(3)} \neq \emptyset$, akkor $N^{(3)} \subseteq U$;

(iii) $U \setminus (N^{(3)} \cup R^{(3)}) \neq \emptyset$, akkor $S^{(3)} \setminus T^{(3)} \subseteq U$.

Az $A^{(3)}$-at nem tartalmazó $L^{(3)}$-beli félcsoportok megkeresésében a fő szerepet $S^{(3)}$ bizonyos olyan H részhalmazainak (mint generátorrendszereknek) a vizsgálata jelentette, amelyekre a következő tulajdonságok érvényesek:

1) H elemei függetlenek (tetszőleges $f \in H$-ra $f \notin [H \setminus \{f\}]$);

2) $H \cap N^{(3)} = \emptyset$;

3) $H \cap A^{(3)} = \emptyset$;

4) $|H \cap T^{(3)}| \leq 1$.

Az e tulajdonságokkal rendelkező H halmazok száma elegendően kicsi ahhoz, hogy az összes megvizsgálható legyen számitógéppel. Az ezzel kapcsolatos programozási feladatot elvégezve megkaptuk az ily módon generálható félcsoportok halmazán tekintett hasonlósági osztályozás (ld. I/1.19 Definició) egy teljes reprezentánsrendszerét. (Ez mindössze 76 eleműnek adódott.) Ebből a következő észrevételek alapján kaptuk meg a teljes $L^{(3)}$ hálón tekintett hasonlósági osztályozás egy reprezentánsrendszerét:

(i) Tetszőleges, az identikus műveletet nem tartalmazó ($L^{(3)}$-beli) félcsoporthoz - vagy az üres halmazhoz - e műveletet hozzávéve újabb félcsoportot kapunk.

(ii) Valamely, ($L^{(3)}$-beli) félcsoporthoz - vagy az üres halmazhoz - hozzávéve egy (benne nem szerpelő) konstans műveletet, olyan új félcsoport generálódik, amely a régitől legfőljebb konstans műveletekben tér el.

(iii) Bármely 2 különböző $T^{(3)}$-beli transzpozició szorzata generálja az $A^{(3)}$ alternáló csoportot. Igy bármely, e 2 transzpoziciót tartalmazó félcsoport az első lépésben meghatározott 6 félcsoport valamelyike.

Végeredményben 282, páronként nem hasonló félcsoportot kaptunk, közülük 160 monoidot (az id_3 egységelemmel). Innen egyszerű számolás után adódott, hogy $L^{(3)}$ 1286 elemű és elemei között 693 (id_3 egységelemű) monoid található.

Mivel e vázolt eljárás főként csupán technikai feladatok megoldását követelte meg, további részletezésétől eltekintünk.

3. fejezet

Az $L^{(3)}$ háló jellemzése

Mint ismeretes, az $S^{(3)}$ félcsoport összes részfélcsoportjainak $L^{(3)}$ halmaza természetes módon hálóvá tehető a félcsoportok közötti tartalmazási reláció mint rendezés segítségével. Valójában ki kell egészítenünk $L^{(3)}$-at formálisan egy olyan E félcsoporttal, amelyet $L^{(3)}$ bármely eleme részhalmazának tekintünk. A későbbiekben ezt a szimbolikus E félcsoportot mindig fölvesszük, ha szükség van rá, de $L^{(3)}$ elemeinek összeszámlálásakor nem vesszük figyelembe. E fejezetben az $L^{(3)}$ háló elemeit bizonyos komponensek uniójára bontjuk és az egyes komponensekként előforduló félcsoportok részhálóját diagrammal is megadjuk. Ily módon nyerjük $L^{(3)}$ egy jól használható jellemzését.

Először vizsgáljuk meg $S^{(3)}$ egyes elemeinek néhány jellegzetes tulajdonságát. Jól használható a közismert „egg-box picture" („tojástartó ábrázolás") (ld.[2]). Ezt adjuk meg most $S^{(3)}$-ra.

Valamely $H \subseteq S^{(3)}$ és $f \in S^{(3)}$ esetén jelölje fH és Hf a szokásos komplexusszorzatokat ($fH := \{fh \in S^{(3)} : h \in H\}$ és $Hf := \{hf \in S^{(3)} : h \in H\}$). Legyen I_j (I_b) az a reláció $S^{(3)}$-on, amelyre $f\ I_j\ g$ ($f\ I_b\ g$) pontosan akkor teljesül, ha $fS^{(3)} = gS^{(3)}$ ($S^{(3)}f = S^{(3)}g$), vagyis f és g ugyanazt a jobb- (bal-) ideált generálja $S^{(3)}$-ban. Ismeretes, hogy

az I_j és I_b relációk ekvivalenciák, fölcserélhetők egymással és szorzatuk értéke (mindkét sorrendben) az az $I_{jb}:=I_j \vee I_b$ ekvivalencia relációt, amely pontosan akkor áll fönn f és g között, ha $S^{(3)}fS^{(3)}=S^{(3)}gS^{(3)}$, vagyis ugyanazt a kétoldali ideált generálják. Ismert továbbá, hogy $fI_jg \Leftrightarrow f(\underline{3})=g(\underline{3})$ és $fI_bg \Leftrightarrow q(f)=q(g)$ fönnáll a megfelelő értékkészletekre illetve kisérő osztályozásokra. I_{jb} osztályainak száma 3, melyeket O_i-vel jelölve fönnáll az $O_i=\{f \in S^{(3)}: |f(\underline{3})|=i\}$ egyenlőség (i=1,2,3). O_i elemeit i-edrendű műveleteknek nevezzük. Adott O_i osztályon belül az $I^{jb}:=I_j \cap I_b$ reláció szerint képezhetünk további blokkokat, melyeket olyan rendezett párokkal jellemezhetünk, melyeknek első komponense $\underline{3}$ valamely i-elemű osztályozása (pl.:q), komponense pedig $\underline{3}$ egy i-elemű részhalmaza (mondjuk:B). A (q,B) párhoz tartozó blokk pontosan azokból az i-edrendű $S^{(3)}$-beli műveletekből fog állni, amelyek kisérő osztályozása q és értékkészlete B.

A föntiek alapján az O_1 I_{jb}-osztály 3 további (1-elemű) I^{jb}-blokkra bomlik, amelyek a 0,13 illetve 26 konstans műveletekből állnak. Az O_2 osztály 9 további blokkra bomlik a 11. ábrán látható módon. (A q osztályozás sorának és a B részhalmaz oszlopának találkozásában áll a (q,B) párhoz tartozó I^{jb}-blokk.)

q \ B	{0,1}	{0,2}	{1,2}
{0,1},{2}	1 12	2 24	14 25
{0,2},{1}	3 10	6 20	16 23
{0},{1,2}	4 9	8 18	17 22

11.ábra

Az O_2 osztály belső szerkezete

Az O_3 osztály - melyet $S^{(3)}$ permutációi:5,7,11,15,19 és 21 alkotnak - nem bomlik tovább. Igy összesen 13 I^{jb}-blokkot kaptunk. Adott i esetén az O_i osztályon belüli I^{jb}--blokkok mindegyike azonos számú műveletet tartalmaz. (Vagyis a „tojástartók" egyenlő mértékben vannak tele.) A vázolt csoportositásnak megfelelően a 12. ábrán láthatjuk az $S^{(3)}$ félcsoport „egg-box" struktúráját.

I_{jb}-osztály	I^{jb}-blokkok	elemek száma
O_3	6	1·1·6= 6
O_2	2 2 2 2 2 2 2 2 2	3·3·2=18
O_1	1 1 1	1·3·1= 3
összesen		3^3 =27

12.ábra

Az $S^{(3)}$-hoz tartozó „egg-box picture"

Megjegyezzük, hogy az irodalomban általában forditva használják a jobb- és balideál fogalmát. Ez azonban nem befolyásolja további vizsgálatainkat.

Tekintsük most a $\{0,1\}$ halmazhoz tartozó $I(0,1)= \{f \in S^{(3)}: f(\underline{3}) \subseteq \{0,1\}\} = \{0,1,3,4,9,10,12,13\}$ főideált $S^{(3)}$-ban. Legyen $B:= \{U \in L^{(3)}: U \subseteq I(0,1)\}$. B nyilván részháló $L^{(3)}$-ban *. Az előző fejezetben leirt eljárásból azt kaptuk, hogy B 44-elemű. Definiáljuk hasonlóan $L^{(3)}$-ban a B-vel izomorf S és J részhálókat, mint a $\{0,2\}$ illetve $\{1,2\}$ részhalmazokhoz tartozó $I(0,2)$ és $I(1,2)$ ideálok összes részfélcsoportjainak hálóját. A 13. táblázatban fölsoroltuk a B,S és J halmazok elemeit a bennük lévő műveletek megadásával. Az egyes oszlopokon belül a félcsoportokat 1-től 44-ig megszámoztuk. A 3 oszlopban összesen 129 félcsoportot kaptunk (az 1-elemű 0,13 és 26 félcsoportok 2-szer szerepelnek). Megjegyezzük, hogy az egy sorban lévő félcsoportok hasonlóak, továbbá egy oszlopon belül is hasonló félcsoportokból álló párok alakulnak ki a bal szélen berajzolt vonalaknak megfelelően (ha egy félcsoportból a vonal nem másik félcsoporthoz vezet, akkor e félcsoport önmagának a párja). Adott oszlopon belül külön blokkokat hoztunk létre.

---

* B-hez hozzávesszük még az E szimbólikus legkisebb elemet is.

	B	S	J
1	0	0	26
2	13	26	13
3	0 13	0 26	13 26
4	3	2	23
5	4	8	14
6	0 3	0 2	23 26
7	4 13	8 26	13 14
8	3 13	2 26	13 23
9	0 4	0 8	14 26
10	0 3 13	0 2 26	13 23 26
11	0 4 13	0 8 26	13 14 26
12	3 4	2 8	14 23
13	0 3 4	0 2 8	14 23 26
14	3 4 13	2 8 26	13 14 23
15	0 3 4 13	0 2 8 26	13 14 23 26
16	0 1	0 6	17 26
17	12 13	20 26	13 22
18	0 1 13	0 6 26	13 17 26
19	0 12 13	0 20 26	13 22 26
20	3 10	2 24	16 23
21	4 9	8 18	14 25
22	0 3 10 13	0 2 24 26	13 16 23 26
23	0 4 9 13	0 8 18 26	13 14 25 26
24	0 1 3	0 2 6	17 23 26
25	4 12 13	8 20 26	13 14 22
26	0 1 3 13	0 2 6 26	13 17 23 26
27	0 4 12 13	0 8 20 26	13 14 22 26
28	0 1 4	0 6 8	14 17 26
29	3 12 13	2 20 26	13 22 23
30	0 3 12 13	0 2 20 26	13 22 23 26
31	0 1 4 13	0 6 8 26	13 14 17 26
32	0 1 3 4	0 2 6 8	14 17 23 26
33	3 4 12 13	2 8 20 26	13 14 22 23
34	0 1 3 4 13	0 2 6 8 26	13 14 17 23 26
35	0 3 4 12 13	0 2 8 20 26	13 14 22 23 26
36	0 1 12 13	0 6 20 26	13 17 22 26
37	3 4 9 10	2 8 18 24	14 16 23 25
38	0 3 4 9 10 13	0 2 8 18 24 26	13 14 16 23 25 26
39	0 1 3 12 13	0 2 6 20 26	13 17 22 23 26
40	0 1 4 12 13	0 6 8 20 26	13 14 17 22 26
41	0 1 3 10 12 13	0 2 6 20 24 26	13 16 17 22 23 26
42	0 1 4 9 12 13	0 6 8 18 20 26	13 14 17 22 25 26
43	0 1 3 4 12 13	0 2 6 8 20 26	13 14 17 22 23 26
44	0 1 3 4 9 10 12 13	0 2 6 8 18 20 24 26	13 14 16 17 22 23 25 26

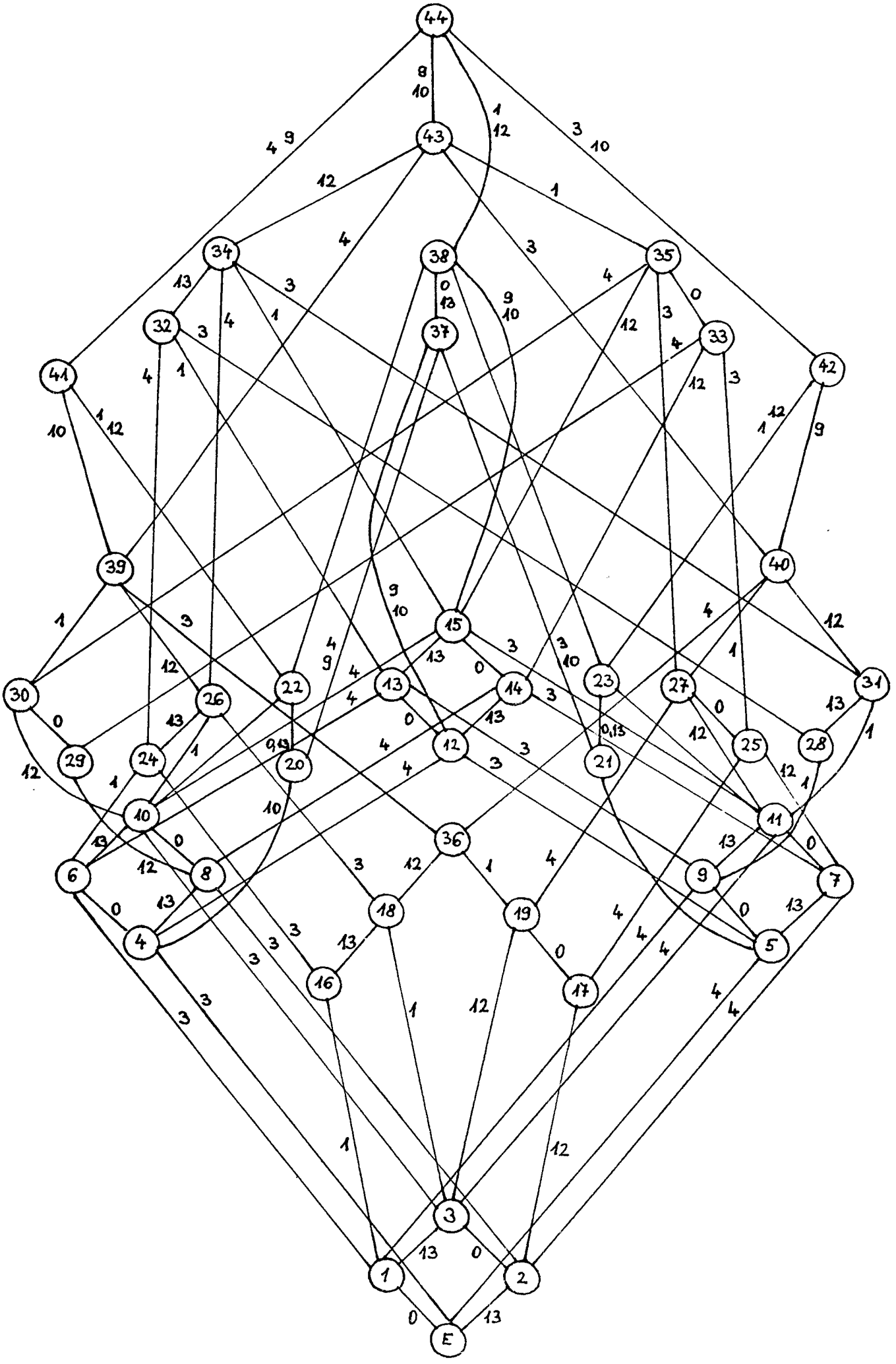
13. táblázat

A B,S és J részhálók elemei

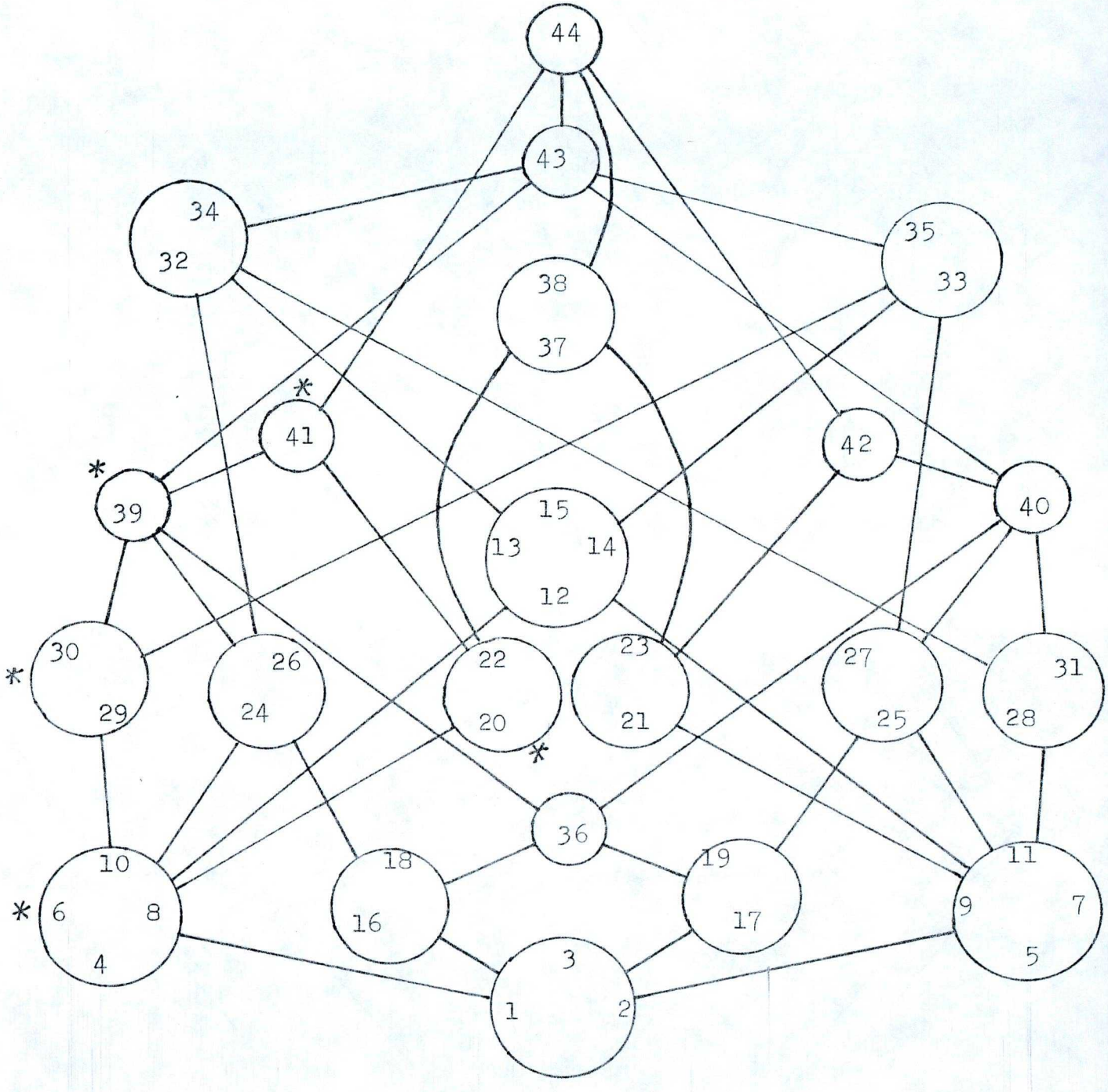
Két félcsoport akkor került egy blokkba, ha valamelyikük kiegészithető konstansokkal úgy, hogy a másikhoz hasonló félcsoportot kapjunk belőle. (Ezek bizonyos értelemben összetartozóak.)

A 14. ábrán fölrajzoltuk a B háló szerkezetét. A hálóban 2 szögpont közötti élre azoknak a műveleteknek a kódjait irtuk, amelyeket az alsó szögpontban lévő félcsoporthoz hozzávéve a fölső félcsoportot (a fedőelemet) kapjuk. A szögpontokba beirtuk a megfelelő B-beli félcsoportok sorszámait. Igy B-nek egy szemléletes, de nehezen átlátható ábrázolását kaptuk.

Egyszerűbb hálószerkezet nyerése céljából vezessük be $L^{(3)}$-on azt a $\leftrightarrow$ relációt, amelyben két félcsoport akkor áll ha egymástól legföljebb konstans műveletekben különböznek. $\leftrightarrow$ nyilván ekvivalencia reláció és a hozzá tartozó osztályozás kompatibilis a hálóműveletekkel. Nevezzük az $L^{(3)}/\leftrightarrow$ faktorháló elemeit „bokrok"-nak, magát a faktorhálót pedig az $L^{(3)}$-hoz tartozó bokorhálónak. Természetesen $L^{(3)}$ bármely részhálójának hasonló módon értelmezhető a bokorhálója. A 15. ábrán fölrajzoltuk a B részhálóhoz tartozó bokorhálót. Az egyes szögpontokban a megfelelő bokor elemeit a B-beli sorszámok fölsorolásával adtuk meg. Az ábrán *-okkal megjelölt N_5-részháló megléte Dedekind tétele értelmében azt jelzi, hogy a $B/\leftrightarrow$ bokorháló nem moduláris, igy tehát $L^{(3)}$ sem lehet az.



14.ábra A B részháló szerkezete



15.ábra

A B/↔ bokorháló szerkezete

Jelölje $L_0^{(3)}$ az $L^{(3)}$ háló azon elemeinek részhalmazát, melyek csupa legföljebb másodrendű $S^{(3)}$-beli elemekből állnak. Könnyen látható, hogy $L_0^{(3)}$ részháló $L^{(3)}$-ban. Legyen $U \in L_0^{(3)}$ tetszőleges és tekintsük az $U \cap I(0,1)$ halmazt. Nyilvánvaló módon két eset lehetséges: ez a halmaz üres, vagy (lévén maga is félcsoport) eleme B-nek. Az U félcsoport B-koordinátájának az első esetben a 0 értéket, a második esetben pedig a metszet félcsoport B-beli sorszámát nevezzük. Hasonlóan adódnak U S- illetve J-koordinátái is. E 3 koordinátából alkotott (b,s,j) rendezett hármas - amelyet az U félcsoport BSJ-koordinátasorának nevezünk - egyértelműen meghatározza U-t.

Mivel a legalább 3 permutációt tartalmazó félcsoportok részhálóját a 2. fejezetben már leirtuk, a továbbiakban $L^{(3)}$ azon $L_1^{(3)}$ részhalmazával foglalkozunk, amelynek elemei legföljebb 2 permutációt tartalmaznak. Vegyük észre, hogy $V \in L_1^{(3)}$ esetén 3 eset lehetséges:

(i) $V \cap R^{(3)} = \emptyset$;

(ii) $V \cap R^{(3)} = 5$ $(= id_3)$;

(iii) $V \cap R^{(3)} \in \{\{5,7\}, \{5,11\}, \{5,21\}\}$.

Igaz továbbá, hogy $U := V \setminus P^{(3)}$ is félcsoport, igy $U \in L_0^{(3)}$, tehát U-hoz BSJ-koordinátasor rendelhető. Ugyanezt a koordinátasort rendeljük V-hez is. A fentiek szerint bármely $V \in L_1^{(3)}$ félcsoport a hozzá rendelt BSJ-koordinátasorral és egy olyan v kiegészitő jelzettel adható meg, amelyre $v \in \{0,5,7,11,21\}$. (v értéke értelemszerűen 0,5

illetve a 7,11 vagy 21 értékek valamelyike attól függően, hogy V-re a fönti (i), (ii) illetve (iii) föltétel teljesül.)

A 16. táblázatban az $L_0^{(3)}$ részhálón értelmezett $\simeq$ hasonlósági reláció egy teljes reprezentánsrendszerét adtuk meg. Egy-egy reprezentáns fölirása két módon történt meg: BSJ-koordinátasorával illetve elemeinek fölsorolásával. A fölirt félcsoportok 3 nagy osztályra tagolódnak aszerint, hogy melyeknek lesznek részhalmazaik az $I(0,1)$, $I(0,1) \cup I(0,2)$, $S^{(3)}$ halmazok közül (,vagyis a 13. táblázat 3 oszlopa közül 1-be, 2-be vagy mind a 3-ba belemetszenek a konstansokon kivül). Vegyük észre, hogy az egyes osztályokba eső félcsoportok (b,s,j) BSJ-koordinátasorára rendre a $0 \leqslant s,j \leqslant 3$; $b,s > 3$, $0 \leqslant j \leqslant 3$; illetve $b,s,j > 3$ föltételek teljesülnek. További tagolást jelent az $L_0^{(3)}/\simeq$ faktorháló reprezentánsainak bokrok szerinti csoportositása. Igaz továbbá, hogy bármely, a táblázatban szereplő félcsoport kiegészitható az 5 kódú identikus művelettel, - ezt külön nem jeleztük - továbbá bizonyosak még a 7, 11 és 21 kódú transzpoziciók valamelyikével is úgy, hogy újabb félcsoportot kapjunk. Ez utóbbiak BSJ-koordinátasora mellett föltüntettük a megfelelő kiegészitő jelzetet. (Egyszerű látni, hogy ha valamely, a táblázatban szereplő félcsoport kiegészitható egy transzpozicióval, akkor a vele egy bokorban lévő félcsoportok is kiegészithetők vele. Ezért a jelzetet bokronként csak egyszer adtuk meg.)

A fönti (i)-(iii) esetek számbavétele után igy a 16. táblázatból leolvasható az $L_1^{(3)}/\simeq$ faktorhalmaz egy reprezentánsrendszere.

BSJ-koordináta-tasor	kieg. jelzet	elemek fölsorolása	$\simeq$-osztály számossága
(0,0,0)	7	-	0,3
(1,1,0)		0	3,3
(2,2,3)		13 26	3,3
(3,3,3)		0 13 26	1,3
(4,0,0)		3	
(6,1,2)		0 3 13	
(6,3,1)		0 3 26	
(8,0,2)		3 13	6
(10,1,2)		0 3 13	
(10,3,3)		0 3 13 26	
(12,0,0)		3 4	
(13,1,0)		0 3 4	
(15,1,2)		0 3 4 13	3
(15,3,3)		0 3 4 13 26	
(16,0,0)		0 1	
(18,1,2)		0 1 13	6
(18,3,3)		0 1 13 26	
(20,0,0)		3 10	
(22,1,2)		0 3 10 13	6
(22,3,3)		0 3 10 13 26	
(24,1,0)		0 1 3	
(26,1,2)		0 1 3 13	6
(26,3,3)		0 1 3 13 26	
(28,1,0)		0 1 4	
(31,1,2)		0 1 4 13	6
(31,3,3)		0 1 4 13 26	

16. táblázat

BSJ-koordináta-sor	kieg. jelzet	elemek fölsorolása	≃-osztály számossága
(32,1,0)		0 1 3 4	
(34,1,2)		0 1 3 4 13	6
(34,3,3)		0 1 3 4 13 26	
(36,1,2)		0 1 12 13	
(36,3,3)	11	0 1 12 13 26	3,3
(37,0,0)		3 4 9 10	
(38,1,2)	11	0 3 4 9 10 13	3,3
(38,3,3)		0 3 4 9 10 13 26	
(39,1,0)		0 1 3 12 13	6
(39,3,3)		0 1 3 12 13 26	
(41,1,2)		0 1 3 10 12 13	6
(41,3,3)		0 1 3 10 12 13 26	
(43,1,2)		0 1 3 4 12 13	3
(43,3,3)		0 1 3 4 é2 é3 26	
(44,1,2)	11	0 1 3 4 9 10 12 13	3,3
(44,3,3)		0 1 3 4 9 10 12 13 26	
(5,5,0)		4 8	
(7,7,3)		4 8 13 26	
(9,9,0)	7	0 4 8	3,3
(11,11,3)		0 4 8 13 26	
(6,6,0)		0 2 3	
(6,10,1)		0 2 3 26	3
(10,10,3)		0 2 3 13 26	
(19,6,2)		0 2 12 13	6
(19,10,3)		0 2 12 13 26	
(21,21,0)		4 8 9 18	
(23,23,3)	7	0 4 8 9 13 18 26	3,3
(22,6,2)		0 2 3 10 13	
(22,10,3)		0 2 3 10 13 26	6
(22,22,3)		0 2 3 10 13 24 26	3
(24,6,0)		0 1 2 3	
(26,6,2)		0 1 2 3 13	6
(26,10,3)		0 1 2 3 13 26	
(24,24,0)		0 1 2 3 6	
(26,26,3)	7	0 1 2 3 6 13 26	3,3
(28,6,0)		0 1 2 4	
(31,6,2)		0 1 2 4 13	6
(31,10,3)		0 1 2 4 13 26	
(28,13,0)		0 1 2 4 8	
(31,15,3)		0 1 2 4 8 13 26	6
(30,6,2)		0 2 3 12 13	
(30,10,3)		0 2 3 12 13 26	6
(30,30,3)		0 2 3 12 13 20 26	3
(32,6,0)		0 1 2 3 4	
(34,6,2)		0 1 2 3 4 13	6
(34,10,3)		0 1 2 3 4 13 26	

16. táblázat

BSJ-koordináta-sor	kieg. jelzet	elemek fölsorolása	$\simeq$-osztály számossága
(32,32,0)	7	0 1 2 3 4 6 8	3,3
(34,34,3)		0 1 2 3 4 6 8 13 26	
(36,6,2)		0 1 2 12 13	6
(36,10,3)		0 1 2 12 13 26	
(36,22,2)		0 1 2 12 13 14 26	6
(39,6,2)		0 1 2 3 12 13	
(39,10,3)		0 1 2 3 12 13 26	6
(39,22,3)		0 1 2 3 12 13 24 26	6
(40,6,2)		0 1 2 4 12 13	
(40,10,3)		0 1 2 4 12 13 26	6
(40,22,3)		0 1 2 4 12 13 24 26	6
(41,6,2)		0 1 2 3 10 12 13	
(41,10,3)		0 1 2 3 10 12 13 26	6
(41,22,3)		0 1 2 3 10 12 13 24 26	6
(41,41,3)	7	0 1 2 3 6 10 12 13 20 24 26	3,3
(42,6,2)		0 1 2 4 9 12 13	
(42,10,3)		0 1 2 4 9 12 13 26	6
(42,22,3)		0 1 2 4 9 12 13 24 26	6
(42,38,3)		0 1 2 4 8 8 12 13 18 24 26	6
(43,6,2)		0 1 2 3 4 12 13	
(43,10,3)		0 1 2 3 4 12 13 26	6
(43,22,3)		0 1 2 3 4 12 13 24 26	6
(44,6,2)		0 1 2 3 4 9 10 12 13	
(44,10,3)		0 1 2 3 4 9 10 12 13 26	6
(44,22,3)		0 1 2 3 4 9 10 12 13 24 26	6
(44,44,3)	7	0 1 2 3 4 6 8 9 10 12 13 18 20 24 26	3,3
(18,6,7)		0 1 2 13 14	6
(18,10,11)		0 1 2 13 14 26	
(30,6,7)		0 2 3 12 13 14	6
(30,10,11)		0 2 3 12 13 14 26	
(30,30,15)		0 2 3 12 13 14 20 23 26	3
(36,6,7)		0 1 2 12 13 14	
(36,10,11)	11	0 1 2 12 13 14 26	3,3
(36,22,23)	11	0 1 2 12 13 14 24 25 26	3,3
(39,6,7)		0 1 2 3 12 13 14	6
(39,10,11)		0 1 2 3 12 13 14 26	
(39,22,23)		0 1 2 3 12 13 14 24 25 26	6
(41,41,38)		0 1 2 3 6 10 12 13 14 16 20 23 24 25 26	3

16. táblázat

BSJ-koordináta-sor	kieg. jelzet	elemek fölsorolása	$\simeq$ -osztály számossága
(42,6,7) (42,10,11)		0 1 2 4 9 12 13 14 0 1 2 4 9 12 13 14 26	6
(42,22,23)		0 1 2 4 9 12 13 14 24 25 26	6
(43,6,7) (43,10,11)		0 1 2 3 4 12 13 14 0 1 2 3 4 12 13 14 26	3
(43,22,23)		0 1 2 3 4 12 13 14 24 25 26	3
(44,6,7) (44,10,11)	11	0 1 2 3 4 9 10 12 13 14 0 1 2 3 4 9 10 12 13 14 26	3,3
(44,22,23)	11	0 1 2 3 4 9 10 12 13 24 25 26	3,3
(44,44,44)	11	0 1 2 3 4 6 8 9 10 12 13 14 16 17 18 20 22 23 24 25 26	1,3

16. táblázat

Az $L_o^{(3)}/\simeq$ háló egy teljes reprezentánsrendszere

Az $L_1^{(3)}/\simeq$ faktorhalmaz ismeretében $L_1^{(3)}$ elemeinek meghatározását egy egyszerű számolással ellenőrizhető észrevétel segitségével végeztük el: Legyen az $U \in L_1^{(3)}$ félcsoport BSJ-koordinátasora (b,s,j), kiegészitő jelzete v, és legyen $r \in R^{(3)}$ tetszőleges permutáció. Jelölje továbbá $1 \leq x \leq 44$ -re $\bar{x}$ a 8. táblázatban az x sorszámú félcsoport (vele vonallal összekötött) párjának sorszámát és legyen x=0-ra $\bar{x}:=0$. (Vegyük észre, hogy az elrendezés miatt $\bar{x} \in \{x-1, x, x+1\}$.) Ekkor az U félcsoport V=(r)U r szerinti transzformáltjának koordinátasora és jelzete a 17. táblázatban foglalt szabály szerint változik.

	BSJ-koordinátasor	jelzet (v)
U jellemzői	(b,s,j)	0 5 7 11 21
permutáció	V=(r)U jellemzői	
5	(b,s,j)	0 5 7 11 21
7	(s,b,$\bar{j}$)	0 5 7 21 11
11	($\bar{b}$,$\bar{j}$,$\bar{s}$)	0 5 21 11 7
15	($\bar{s}$,j,$\bar{b}$)	0 5 21 7 11
19	($\bar{j}$,$\bar{b}$,s)	0 5 11 21 7
21	(j,$\bar{s}$,b)	0 5 11 7 21

17. táblázat

A koordinátasor és jelzet változása transzformáláskor

(Például a (18,6,7) koordinátasorú félcsoport a 19-es permutációval transzformálva a (6,7,19) koordinátasorú félcsoportba megy át. Elemeikre nézve ez a (0 1 2 13 14) $\longrightarrow$ (0 2 12 13 14) átmenetet jelenti.)

A fönti szabály alapján $L_1^{(3)}$ valamely $\simeq$-osztályának egy reprezentánsa segitségével egyszerűen kiszámithatók az osztály többi elemei. A 16. táblázat jobb szélső oszlopában megadtuk az egyes $\simeq$-osztályok (bokronként közös) elemszámát. (Ez a szám függhet a megfelelő félcsoporthoz tartozó kiegészitő jelzettől. Ahol egyetlen számot adtunk meg, ott ez a 0 illetve 5 jelzetekhez tartozó közös érték, ahol számpár szerepel, ott a 2. szám a 2. oszlopban megadott jelzethez tartozik.) Igy tehát a 2. fejezetben az $L^{(3)}$, $L^{(3)}/\simeq$, stb. elemszámára megadott értékek a 16. táblázatból (némi számolás árán) megkaphatók.

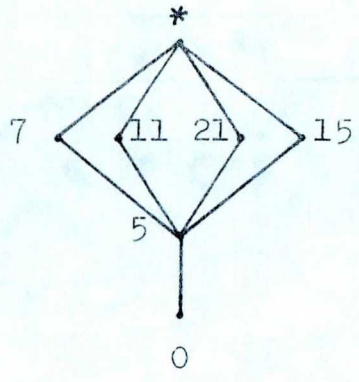
Az $L_1^{(3)}$ halmaz elemeinek koordinátákkal való jellemzése kiterjeszthető az $L^{(3)}$ háló egészére: $U \in L^{(3)} \setminus L_1^{(3)}$ BSJ-koordinátasorát képezzük hasonló módon, mint $L_1^{(3)}$-ben, a kiegészitő jelzet értéke pedig legyen 15, ha $U \cap R^{(3)} = A^{(3)}$ (a 15 permutáció $A^{(3)}$ egy generáló eleme) és legyen „ * ", ha $R^{(3)} \subseteq U$. A 2. fejezetben leirt 6 félcsoport igy kapott jellemzőit a 18. táblázatba foglaltuk.

félcsoport	BSJ-koordinátasor	kiegészitő jelzet
$A^{(3)}$	(0,0,0)	15
$R^{(3)}$	(0,0,0)	*
$A^{(3)} \cup N^{(3)}$	(3,3,3)	15
$R^{(3)} \cup N^{(3)}$	(3,3,3)	*
$S^{(3)} \setminus T^{(3)}$	(44,44,44)	15
$S^{(3)}$	(44,44,44)	*

18. táblázat

Az $L^{(3)} \setminus L_1^{(3)}$ részháló elemeinek jellemzői

Vegyük észre, hogy az $L^{(3)}$ hálóban érvényes rendezési relációt nem csupán a hálóban szereplő félcsoportok elemeinek összehasonlitásával vizsgálhatjuk, hanem ehhez elegendő a BSJ-koordináták és a kiegészitő jelzetek összevetése. Legyen U_1, $U_2 \in L^{(3)}$ és jelölje (b_i,s_i,j_i) illetve v_i az U_i félcsoport koordinátasorát és kiegészitő jelzetét (i=1,2). Jelölje továbbá V(x) $1 \leqslant x \leqslant 44$-re a B halmaz x sorszámú félcsoportját és x=0-ra az üres halmazt. Ekkor egyszerű meggondolás mutatja, hogy $U_1 \leqslant U_2$ pontosan akkor teljesül, ha $V(b_1) \leqslant V(b_2)$, $V(s_1) \leqslant V(s_2)$ és $V(j_1) \leqslant V(j_2)$ (az egységesség kedvéért úgy tekintjük, hogy bármely $V \in L^{(3)}$-ra $\emptyset \leqslant V$), továbbá $v_1 \leqslant v_2$, ahol a jelzetek halmazán a rendezési relációt a 19. ábrán látható Hasse-diagrammal értelmezzük.



19.ábra

Rendezési reláció a jelzetek halmazán

A rendezési relációnak tehát komponensenként és a jelzetre vonatkozóan együttesen kell teljesülnie. Az első föltétel teljesülését a 14. vagy 15. ábráról, a másodikét pedig a 19. ábráról olvashatjuk le.

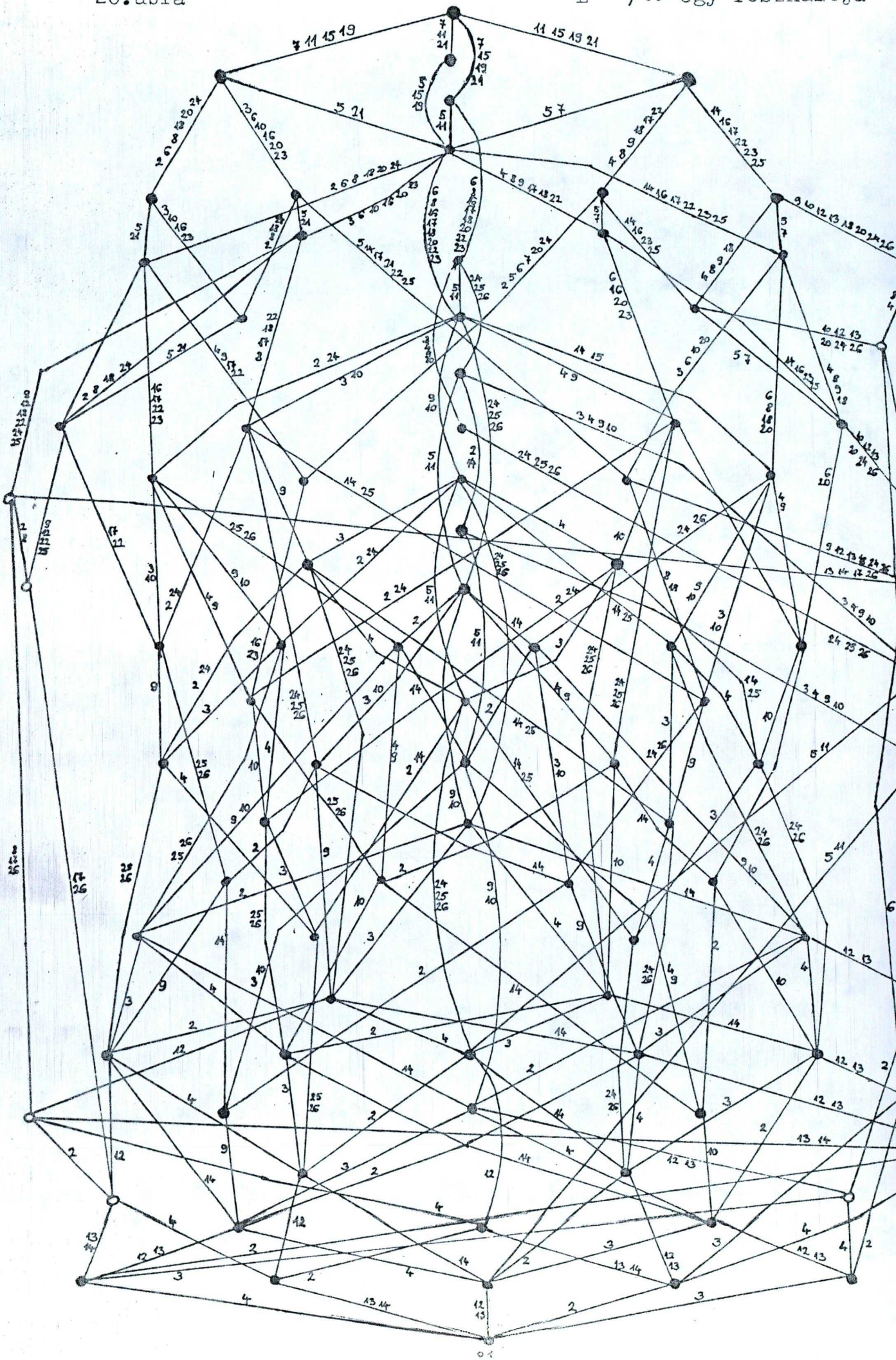
Az $L^{(3)}$ háló szerkezete természetesen túl bonyolult ahhoz, hogy fölrajzolhassuk. Ez nem is célunk, $L^{(3)}$ eddigi jellemzését kielégitőnek találjuk. Csupán érdekességképpen azonban befejezésül fölrajzoltuk a 20. ábrán az $L^{(3)}/\leftrightarrow$ bokorhálónak a $\{0,1\}$ félcsoporttal reprezentált eleme fölötti részhálóját (,vagyis a $[\{0,1\}/\leftrightarrow , S^{(3)}/\leftrightarrow]$ intervallumot). A háló rajza a 14. ábrához hasonlóan készült. E háló valamely eleméhez, vagyis a megfelelő bokorhoz tartozó félcsoportok elemei (a konstansoktól eltekintve) megkaphatók, ha az adott bokrot jelölő szögpontból elindulva végighaladunk egy (tetszőleges) útvonalon a legkisebb elemig, a berajzolt éleken mindig fölülről lefelé haladva és vesszük a bejárt élekre irt műveletek unióját (természetesen a 0,1 műveleteket beleértve).

Vegyük észre, hogy e bokrok legföljebb 4-eleműek.

Megjegyezzük, hogy a tekintett intervallum-részháló a 11-es permutációval való transzformálásra nézve szimmetriát mutat a telitett körrel jelzett szögpontok részhalmazán. Az üres körrel jelzett szögpontok nem tartoznak e szimmetria érvénye alá.

20.ábra

$L^{(3)}/\leftrightarrow$ egy részhálója



4. fejezet

$C^{(3)}$ további klónjai

A $C^{(3)}$ klón részklónjai $K^{(3)}$ hálójának azon elemeit, amelyek csak többváltozós komüveletek segitségével generálhatóak, az I. rész 3. és 4. fejezetei alapján határozzuk meg. Célunk a $\simeq$ hasonlósági relációra nézve (ld.I/1.19) páronként nem hasonló klónok - vagyis e reláció egy teljes $K_o^{(3)}$ reprezentánsrendszere elemeinek - megadása törzseik segitségével. E törzseket $C^{(3)}$-nak az 1. fejezetben megadott T törzsére vonatkozóan képezzük (vö.I/1.10).

A reprezentánsrendszer ismeretében lehetőség nyilik a $K^{(3)}$ háló összes elemének (törzsével való) megadására. Ehhez tetszőleges $L \in K_o^{(3)}$ klón adott T_L törzséből egyszerűen az (I 1.23 Definiciónak megfelelő,) T_L-hez gyöngén hasonló (T-beli) halmazokat kell előállitanunk. E halmazok lesznek az L által reprezentált hasonlósági osztály elemeinek törzsei: $K^{(3)} = \{L' = C(T_L,) \subseteq C^{(3)} : T_L, \approx_r T_L$ valamely $r \in R^{(3)}$-ra és $L \in K_o^{(3)}$-ra$\}$.

A $K_o^{(3)}$ halmazt három (diszjunkt) halmaz uniójaként állitjuk elő: Legyen $K_i^{(3)}$ az $\{L \in K^{(3)}$: valamely $g \in L$-re lény$(g)=i$ és bármely $f \in L$-re lény$(f) \leq i\}$ halmaz - vagyis az un. i-edrendű klónok - egy, a $\simeq$ relációra nézve teljes reprezentánsrendszere (i=1,2,3). Ismeretükben egyszerűen képezhető $K_o^{(3)} := \bigcup_{i=1}^{3} K_i^{(3)}$.

$K_i^{(3)}$ elemei lényegében a talpaikkal, vagyis az $S^{(3)}$ transzformáció-félcsoport $id_{\underline{3}}$ egységelemű részmonoidjaival egyeznek meg (ld. az I/1.24 és I/1.25 alattiakat).

E részmonoidok leirása megtalálható a 2. és 3. fejezetekben. Mivel $K_1^{(3)}$ elemeit páronként nem hasonlóknak kell választanunk, e korábbi vizsgálatok alapján $|K_1^{(3)}| = 160$ adódik. Megjegyezzük, hogy $S^{(3)}$-nak id_3-tól különböző egységelemű részmonoidjai azért nem jöhetnek számitásba, mert - a projekciók tartalmazása miatt - bármely klón talpában szerepel id_3.

$K_2^{(3)}$ és $K_3^{(3)}$ meghatározásában bizonyos klónmetszetek előzetes megkeresése vezetett eredményre (ld. az I/1.26 Definiciót). Tekintsük az $N_i := \{f \in C^{(3)}: \text{lény}(f)=i\}$ $(i=1,2,3)$ halmazokat. A $Z \in K^{(3)}/N_2 \cup N_3$ klónmetszetet másodrendű zárt osztálynak nevezzük, ha $Z \subseteq N_2$. A $K^{(3)}/N_3$ halmazba eső klónmetszetek a harmadrendű zárt osztályok.

Az alábbiakban $K_2^{(3)}$ előállitását kissé részleteseben vázoljuk. Legyen Z valamely másodrendű zárt osztály. Egyszerű meggondolás mutatja, hogy ekkor két eset lehetséges:

(i) a Z-beli koműveletek cimkefüggvényei egyformák (I/1.12-nek megfelelően), vagy

(ii) a Z-beli koműveletek cimkefüggvényei nem mind egyformák, de e koműveletek valamennyien ragasztók (ld. az I/1.5 Definiciót).

Vegyük észre, hogy a 3-fölötti ragasztó koműveletek egyúttal szétválaszthatóak is (az I/3.1 Definició szerint), s igy az általuk generált klónok leirásában az I. rész 3. fejezetének eredményeire támaszkodhatunk. Ennek megfelelően eljárásunk a következő:

(i) Az 1. fejezet elején megadott q',q'' és q''' $\in Q^{(3)}$ osztályozások közül tekintjük q'-t és föltesszük, hogy bármely $f \in Z$-re $q(f_o)=q'$ (ld. az I/1. 13 Állitást). Egyszerű megfontolások és némi számolás után előállitjuk azon (páronként nem hasonló) klónmetszeteket, melyek Z értékéül szóba jöhetnek. Ezek száma 46 lett. Közülük 13 csupa ragasztó koműveletekből áll.

(ii) Tekintsük a szétválasztható koműveletek $H_1:=H_q^{(3)}$, $H_2:=H_{q'}^{(3)} \cup H_{q''}^{(3)}$ és $H_3:=H_{q'}^{(3)} \cup H_{g''}^{(3)} \cup H_{g'''}^{(3)}$ halmazait (vö. az I/3.1 Definicióval).

Azon eseteket, amikor $Z \subseteq H_1$, az (i) pont alatt már számbavettük.

Tegyük most föl, hogy $Z \not\subseteq H_1$, de $Z \subseteq H_2$. Ekkor a C(Z) szétválasztható klón nyilván az $L_1:=C(C(Z) \cap H_{q'}^{(3)})$ és az $L_2:=C(C(Z) \cap H_{q''}^{(3)})$ szétválasztható klónok uniója. Vegyük észre, hogy $C(Z) \cap (N_2 \cup N_3)=Z$ miatt $M_1:=L_1 \cap (N_2 \cup N_3)=H_{q'}^{(3)} \cap Z$ és $M_2:=L_2 \cap (N_2 \cup N_3)=H_{q''}^{(3)} \cap Z$, valamint nyilván $L_j=C(M_j)$ (j=1,2). De akkor, mivel q' és q'' összehasonlithatatlanok, - az I/3.7 Tételt alkalmazva - azt kapjuk, hogy a C(Z) klón pontosan annyiféle lehet, ahányféleképpen az M_1 és M_2 halmazok megválaszthatók úgy, hogy a $G(M_1)$ leképező gráf összeférjen M_2-vel, $G(M_2)$ pedig M_1-gyel. Mivel a mondottak szerint M_j csupa ragasztó koműveletből áll, e halmaz az (i) pont alapján 13 különféle értéket vehet föl (j=1,2). Igy a fönti összeférési tulajdonság teljesülése aránylag kevés számo-

lással ellenőrizhető. Az e tulajdonságot kielégitő (M_1, M_2) párok egy-egy lehetséges értéket adnak Z-re a $Z=M_1 \cup M_2$ összefüggésnek megfelelően. Ezek közül a páronként nem hasonló eseteket kell számbavennünk. Az eljárást végrehajtva 20 lehetséges értéket kaptunk Z-

$Z \not\subseteq H_2$ és $Z \subseteq H_3$ esetén az előző bekezdésben leirtakhoz hasonlóan, az I/3.7 Tételt alkalmazva járhatunk el. Innen Z értékének megválasztására újabb 20 lehetőség adódott.

Az (i) és (ii) esetekből együttesen tehát 86-féle (páronként nem hasonló) másodrendű zárt osztályt kaptunk. Ezek kiegészitése (másodrendű) klónná bizonyos N_1-beli koműveletek hozzávételével az I. rész 4. fejezete alapján lehetséges. Ha ugyanis az L klónra $L=(L \cap N_1) \cup (L \cap N_2)$, akkor $L \cap N_1$ és $L \cap N_2$ illeszkednek egymáshoz az $(N_1, N_2 \cup N_3)$ párra nézve (ld. az I/4.1 Definiciót). Az I/4.2 Állitás által nyújtott egyszerű algoritmussal számolva igy $|K_2^{(3)}| =$ = 250 - féle (páronként nem hasonló) klón állt elő.

Egy alkalmas $K_3^{(3)}$ halmazt az alábbiak szerint állitottunk elő: Legyen Z harmadrendű zárt osztály. Mivel $Z \subseteq N_3$, Z elemei $q^{(o)}$ ($\in Q^{(3)}$) szerint szétválaszthatók, s igy az I. rész 3. fejezetének eredményei újból alkalmazhatók. Tekintsük az alábbi két eshetőséget:

(i) A $d^{(3)} \in C^{(3)}$ diagonális koművelet eleme Z-nek (ld. az I/3.1 Definiciót). Ekkor I/3.5 miatt a C(Z) klón csak a leképező gráfjától függ. A lehetséges $G^{(3)}$-beli leképező gráfokat számbavéve innen 9 (páronként

nem hasonló) zárt osztályt (és egyúttal klónt) kaptunk.

(ii) $d^{(3)} \in Z$ nem teljesül. Ekkor az I/3.4 Állitás alapján diszkutálhatjuk Z lehetséges értékeit. A keletkező 13-féle (páronként nem hasonló) harmadrendű zárt osztályt a $K_2^{(3)}$ halmaz előállitásánál leirt módon előbb N_2-beli koműveletekkel $N_2 \cup N_3$-beli klónmetszetekké, majd ezeket N_1-be tartozó koműveletekkel klónokká egészithetjük ki. A vázolt eljárás 293 újabb (,az előzőekkel és egymással nem hasonló) klónt szolgáltatott.

Végeredményben tehát azt kaptuk, hogy $|K_3^{(3)}| = 302$.

A megadott algoritmus segitségével igy a $K_o^{(3)}$ reprezentánsrendszer elemszámára a $|K_o^{(3)}| = 712$ érték adódott. Ez tehát egyúttal a $\underline{3}$ halmaz fölötti, páronként nem hasonló klónok száma.

A megkonstruált $K_o^{(3)}$ halmazba eső klónok törzseinek részletes megadását - mivel dolgozatunk keretei közé e puszta fölsorolás nem illeszkedik - külön mellékeltük.

III. RÉSZ

Véges halmaz fölötti koműveletek teljes halmazai és maximális klónjai

1. fejezet

A probléma megoldása műveletekre. Néhány teljességi föltétel koműveletekre

A véges halmaz fölötti maximális műveletklónok meghatározása a művelethalmazok teljességének vizsgálatához kapcsolódva bontakozott ki. E.L. Postnak, a kételemű halmazon történt vizsgálatai (1941) után Sz.V.Jablonszkij irta le először a 3-elemű halmaz maximális klónjait (1958). Tetszőleges véges halmazra a maximális klónok teljes leirását I.G.Rosenberg adta meg (1965,1970).(Ld.:[8],[6],[9]

Rosenberg olyan kritériumrendszert alkotott, amelynek egyes elemei a maximális műveletklónok egy-egy osztályát határozzák meg. A kritériumrendszer megfogalmazásában Rosenberg bizonyos relációkat adott meg. Kulcsfontosságú szerepet játszott a műveleteknek az a tulajdonsága, amely szerint valamely reláció „összhangban van" az adott művelettel. Ezt a tulajdonságot a „reláció megőrzése" fogalom irja le. Hasonló fogalmak megalkotása vált célszerűvé a probléma koműveleteken való vizsgálatánál is.

Koműveletekre vonatkozóan teljességi föltételeket Csákány B. adott meg (ld. [4] , 1984-85). Az első ezek

közül egy jól alkalmazható elégséges föltétel az n-elemű halmaz fölötti koműveletek egy lényegében n-változós koműveletet tartalmazó halmazának teljességére. A második eredmény szükséges és elegendő föltételt ad egyetlen koművelet teljességére (Sheffer tulajdonságára) Rousseau műveletekre vonatkozó tételének duálisaként. Egy harmadik, elegendő föltétel az összes egyváltozós koműveleteket tartalmazó valamely halmaz teljességére vonatkozik. Ez Słupecki hasonló tételének koalgebrai duálisa [10].

A fölsorolt teljességi föltételek általánositásaképpen Rosenberg kritériumrendszeréhez hasonló szükséges és elegendő föltételt kaptunk koműveletek egy klónjának maximalitására. Ebből hasonló föltétel kapható koművelet-halmazok teljességére is. A kritérium megfogalmazásában egy, a relációk műveletekkel való megőrzéséhez hasonló, de annál speciálisabb megőrzési tulajdonság megfogalmazása vált szükségessé.

A következő fejezetben a korábbról ismert eredmények rövid összefoglalása után a vázolt maximalitási és teljességi kritériumokat ismertetjük.

2. fejezet

Maximális koművelet klónok. Egy teljességi kritérium koműveletekre

Először néhány, vizsgálatainkhoz szükséges fogalmat definiálunk:

2.1 Definició: Legyen A véges, nemüres, n-elemű halmaz és legyen $B \subseteq A$ nemüres részhalmaz. Azt mondjuk, hogy az $f \in C^{(A)}$ koművelet ragaszt B-ben, ha valamely, két különböző $x,y \in B$ elemre $f_0(x)=f_0(y)$ és $f_1(x)=f_1(y)$. (Az I/1.5 Definició szerint f éppen akkor ragasztó, ha ragaszt A-ban.) Jelöljük $f \| B$-vel, ha f nem ragaszt B-ben.

Az $f \in C^{(A)}$ koműveletet lényegesnek nevezzük, ha $f \| A$ és lény$(f) \geq 2$.

Legyen $B \subseteq A$ nemüres részhalmaz. Azt mondjuk, hogy az $f \in C^{(A)}$ koművelet megőrzi (tiszteli) B-t, ha f_1 leképező része megőrzi B-t: tetszőleges $x \in B$-re $f_1(x) \in B$. Koműveletek egy $M \subseteq C^{(A)}$ halmaza akkor őrzi meg B-t, ha minden eleme megőrzi.

Legyen most q az A halmaz valamely osztályozása. $f \in C^{(A)}$-ra azt mondjuk, hogy megőrzi (tiszteli) q-t, ha $x \sim_q y$ esetén $f_0(x)=f_0(y)$ és $f_1(x) \sim_q f_1(y)$. (Vagyis ha f_1 a szokásos értelemben megőrzi q-t és f_0 $q(f_0)$ kisérő osztályozására $q \leqslant q(f_0)$.) Ha az $M \subseteq C^{(A)}$ halmaz minden elemére teljesül a fönti föltétel, akkor M megőrzi q-t.

Az $M \subseteq C^{(A)}$ halmaz félcsoportjának az $\{f_1 : \langle f_0, f_1 \rangle \in M\}$ transzformáció-halmaz által generált $S(M)$ félcsoportot nevezzük. (Az I/1.23 Definició szerint egy $L \in K^{(A)}$ klón félcsoportja lényegében megegyezik L talpával.) Az M halmazt tranzitivnak nevezzük, ha $S(M)$ tranzitiv, vagyis tetszőleges $x,y \in A$-hoz található olyan $f_1 \in S(M)$ transzformáció, amelyre $f_1(x)=y$.

Az $M \subseteq C^{(A)}$ halmazról továbbá azt mondjuk, hogy teljes, ha az általa generált $C(M)$ klón $C^{(A)}$-val egyezik meg. Az $L \in K^{(A)}$ klónt maximális klónnak nevezzük, ha $C^{(A)}$ egyetlen valódi, L-et tartalmazó részklónja éppen L. (Vagyis: $L \neq C^{(A)}$, de tetszőleges $M \in K^{(A)}$ klónra $L \subseteq M$-ből $M=L$ vagy $M=C^{(A)}$ következik.)

A definiciókból egyszerű módon adódik az alábbi (jól ismert)

2.2 Állitás: Az $L \in K^{(A)}$, $C^{(A)}$-tól különböző klón éppen akkor maximális, ha bármely $f \in C^{(A)} \setminus L$-re $L \cup \{f\}$ teljes. Továbbá az $M \subseteq C^{(A)}$ halmaz pontosan akkor teljes, ha $C^{(A)}$ bármely maximális L klónjára $M \cap (C^{(A)} \setminus L)$ nemüres.

A Csákány B. által megadott teljességi kritériumok a következőképpen szólnak:

2.3 Tétel: Ha az $M \subseteq C^{(A)}$ koművelet halmaz tranzitiv és M tartalmaz legalább egy legalább n-változós koműveletet, akkor M teljes.

2.4 Következmény: Az összes, legföljebb kétváltozós koműveletek halmaza teljes. (Ez Sierpinski közismert tételének koalgebrai megfelelője.)

2.5 Tétel: Az egyetlen $f \in C^{(A)}$ koműveletből álló halmaz akkor és csak akkor teljes, ha f A legkisebb osztályozása kivételével egyetlen más osztályozását továbbá A egyetlen valódi, nemüres részhalmazát sem őrzi meg.

2.6 Tétel: Ha koműveletek egy $M \subseteq C^{(A)}$ halmaza tartalmazza az összes egyváltozós koműveleteket és található benne legalább egy lényeges koművelet, akkor M teljes.

A fönti eredmények általánositásához szükségünk van néhány további fogalom bevezetésére:

2.7 Definició: Jelölje A hatványhalmazát H(A). A $D \subseteq H(A)$ rendszert szabályosnak nevezzük, ha D nemüres, elemei páronként idegenek és egyenlő számosságúak, továbbá D különbözik a csupa egyelemű halmazból álló $\{\{x\} : x \in A\}$ halmaztól. A szabályos részhalmaz-rendszereinek halmazát a továbbiakban jelölje SH(A).

Valamely $D \in SH(A)$ rendszer esetén értelmezzük A-n a $\sim_D$ relációt a következő módon: $x,y \in A$-ra legyen $x \sim_D y$ akkor és csak akkor, ha valamely $B \in D$-re $x,y \in B$. (Szemmel látható, hogy $\sim_D$ ekvivalencia reláció az $\bigcup D = \bigcup_{B \in D} B$ A halmazon.)

Tekintsünk egy $D \in SH(A)$ rendszert. Az $f \in C^{(A)}$ koműveletre azt mondjuk, hogy tiszteli a $B \in D$ részhalmazt D-ben, ha tetszőleges $x,y \in B$-re $f_o(x)=f_o(y)$ és $f_1(x) \sim_D f_1(y)$. Mondjuk továbbá azt, hogy f tiszteli D-t, ha bármely $B \in D$ részhalmazra f tiszteli B-t D-ben. Végül mondjuk azt, hogy f gyöngén tiszteli D-t, ha bármely $B \in D$-re f ragaszt B-ben, vagy tiszteli B-t D-ben. Az $M \subseteq C^{(A)}$ halmazra akkor mondjuk,

hogy (gyöngén) tiszteli D-t, ha M bármely eleme ezt teszi. A D-t gyöngén tisztelő koműveletek halmazát jelölje L_D.

Szükségünk lesz a koműveletek közötti szuperpozició egy szabályosan viselkedő tipusára is:

2.8 Definició: Az $f \in C_m^{(A)}$ és $g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)} \in C^{(A)}$ koműveletek szuperpozicióját nevezzük diszjunktnak, ha különböző i és j esetén $g_o^{(i)}$ és $g_o^{(j)}$ értékkészletei diszjunkt halmazok $(0 \leqslant i, j < m)$.

Legyen most $f \in C_m^{(A)}$ és $g \in C_{m'}^{(A)}$. A diszjunkt szuperpozicióval keletkező $h=f(p_o^k,\ldots,p_{j-1}^k,g(p_j^k,\ldots,p_{j+m'-1}^k),$ $p_{j+m'}^k,\ldots,p_{k-1}^k)$ koműveletre alkalmazni fogjuk a rövid $h=f(\ldots,g,\ldots)_j$ jelölést. (h ekkor $k=m+m'-1$ - változós.)

Az alábbi lemmák a definiciók, illetve egyszerű megfontolások triviális következményei:

2.9 Lemma: Tekintsük a $h=f(g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)})$ diszjunkt szuperpoziciót $(f \in C_m^{(A)}$ és $g^{(i)} \in C^{(A)}$, $0 \leqslant i < m)$ és a $B \subseteq A$ halmazt. Legyen $B_i = \{x \in B: f_o(x)=i\}$ $(0 \leqslant i < m)$. Ha $f \| B$ és bármely fönti i-re $g^{(i)} \| f_1(B_i)$ (speciálisan ha $g^{(i)} \| A$), akkor $h \| B$ és lény(h) $\geqslant$ lény(f).

2.10 Lemma: Ha a $B \subseteq A$ halmazt az $f \in C_m^{(A)}$ és $g \in C^{(A)}$ koműveletek mindegyike megőrzi, akkor a $h=f(\ldots,g,\ldots)_j$ komű velet is megőrzi B-t.

2.11 Lemma: Legyenek B és B' A-nak különböző valódi, nemüres (tehát nemtriviális) részhalmazai és legyen $M=\{f \in C^{(A)}: f$ megőrzi B'-t$\}$. Ekkor az M halmaz klón és nem őrzi meg B-t.

2.12 Lemma: Legyen S az A halmaz önmagába való leképezéseinek egy halmaza. Az S által generált transzformáció - félcsoport akkor és csak akkor tranzitiv, ha S A-nak egyetlen nem-triviális részhalmazát sem őrzi meg.

A következő segédtételek a maximális klónok jellemzésére kimondandó tételünket készitik elő:

2.13 Segédtétel: Tetszőleges $D \in SH(A)$ rendszer esetén az $L_D \subseteq C^{(A)}$ halmaz $C^{(A)}$-tól különböző klón.

Bizonyitás: Megmutatjuk, hogy L_D klón. Mivel a koprojekciók tetszőleges $D \in SH(A)$ rendszert megőriznek, $P^{(A)} \subseteq L_D$. Tehát elegendő igazolnunk, hogy az m-változós $f \in L_D$ és a $g^{(o)},\ldots,g^{(m-1)} \in L_D$ koműveletekre $h=f(g^{(o)},\ldots, g^{(m-1)}) \in L_D$.

Legyen $B \in D$ tetszőleges. L definiciója szerint f ragaszt B-ben vagy tiszteli B-t D-ben. Ha $f(x)=f(y)$ áll a különböző $x,y \in B$ elemekre, akkor $h(x)=g^{(f_o(x))}(f_1(x))= =g^{(f_o(y))}(f_1(y))=h(y)$, vagyis h is ragaszt B-ben. Tegyük most föl, hogy $f \| S$. Ekkor bármely különböző $x,y \in B$ elemekre $f_o(x)=f_o(y)$ (jelölje i ezt a 0 és m-1 közé eső közös értéket), de $f_1(x) \neq f_1(y)$. Ugyanakkor $f_1(x) \sim_D f_1(y)$ miatt valamely $B' \in D$-re $f_1(x)$, $f_1(y) \in B'$. De akkor -,mivel $|B| = |B'|$ - f_1 bijektiv B és B' között. De akkor ha $g^{(i)}$ ragaszt B'-ben, vagyis $g^{(i)}(u)=g^{(i)}(v)$ az $u,v \in B'$ különböző elemekre, akkor léteznek olyan egymástól különböző $x,y \in B$ elemek is, amelyekre $f_1(x)=u$ és $f_1(y)=v$, és ezért $h(x)=g^{(i)}(u)=g^{(i)}(v)=h(y)$, vagyis h is ragaszt B-ben. Ha pedig $g^{(i)} \| B'$, akkor $g^{(i)}$ tiszteli B'-t D-ben, azaz bármely $u,v \in B'$-re $g^{(i)}(u)=g^{(i)}(v)$ és $g_1^{(i)}(u), g_1^{(i)}(v) \in B''$

D egy B''elemére. Ezért $h_o(x)=g_o^{(i)}(f_1(x))=g_o^{(i)}(f_1(y))=h_o(y)$ és $h_1(x)=g_1^{(i)}(f_1(x)) \sim_D g_1^{(i)}(f_1(y))=h_1(y)$ következik tetszőleges $x,y \in B$-re. De akkor h tiszteli B-t D-ben. A föntiek alapján tehát h mindkét esetben gyöngén tiszteli B-t D-ben, amit igazolni kellett.

Az, hogy az L_D klón $C^{(A)}$-tól különbözik, triviális, ugyanis bármely $D \in SH(A)$-hoz könnyen megadható olyan $f \in C^{(A)}$, amely nem tiszteli gyöngén D-t.

2.14 Segédtétel: Tegyük föl, hogy valamely $D \in SH(A)$ rendszer elemei $k>1$ számosságúak. Tekintsünk ekkor egy $f \in C^{(A)} \setminus L_D$ koműveletet, tegyük föl, hogy $f \in C_m^{(A)}$ és legyen $L=C(L_D \cup \{f\})$ az $L_D \cup \{f\}$ halmaz által generált klón. Legyen továbbá $B \in D$ a rendszer tetszőleges olyan eleme, melyet f nem tisztel gyöngén. Ekkor bármely $u,v \in B$ különböző elemekhez található olyan $f^* \in L$, amelyre f^* megőrzi a B halmazt, $f^* \| S$ és $f_o^*(u) \neq f_o^*(v)$.

Bizonyitás: A bizonyitást több lépésben végezzük el. Először megmutatjuk, hogy található olyan $x,y \in B$ és $f' \in L$, amelyekre $f' \| B$ és $f_o'(x) \neq f_o'(y)$. B választása miatt $f \| B$, továbbá vagy $f_o(x) \neq f_o(y)$ áll valamely $x,y \in B$-re (s ekkor f' választható f-nek), vagy bármely $z \in B$-re $f_o(z)$ az $\underline{m}$ halmaz egy rögzitett j eleme és valamely $x,y \in B$-re nem teljesül $f_1(x) \sim_D f_1(y)$. Ez utóbbi esetben szükségünk lesz az alábbi h koműveletre:

..... Tegyük föl, hogy $D=\{B_o,\ldots,B_{q-1}\}$ és $A \setminus \cup D = \{w_o, \ldots, w_{r-1}\}$, ahol $0 \leq r=n-qk \leq n-k$. Legyen ekkor $h \in C_{q+r}^{(A)}$ az

a koművelet, amelyre

$$(*) \qquad h_0(x) = \begin{cases} i \text{ ha } x \in B_i \ (0 \leq i < q) \\ q+j \text{ ha } x = w_j \ (0 \leq j < r), \text{ és} \end{cases}$$

$$h_1 = id_A.$$

Mivel h tiszteli D-t, $h \in L_D$.

A föntiek szerint $h_0(f_1(x)) \neq h_0(f_1(y))$. Képezzük az $f' = f(\ldots,h,\ldots)_j$ diszjunkt szuperpoziciót. 2.9 értelmében ekkor $f' \| B$ és $f_0'(x) = h_0(f_1(x)) \neq h_0(f_1(y)) = f_0'(y)$.

A bizonyitás második részében azt mutatjuk meg, hogy található olyan $x,y \in B$ és $f'' \in L$, amelyekre f'' megőrzi a B halmazt, $f'' \| B$ és $f_0''(x) \neq f_0''(y)$. Tekintsük az első részben leirt x-et, y-t és f'-t. Tegyük föl, hogy f' m'-változós és képezzük az alábbi halmazokat:
$J := \{ j \in \underline{m}' : f_0'(z) = j$ valamely $z \in B$-re$\}$ és minden $j \in J$-re legyen $U_j = \{ u \in A : f_0'(z) = j$ és $f_1'(z) = u$ valamely $z \in B$-re$\}$. Válasszunk továbbá minden $j \in J$-hez egy olyan egyváltozós $h^{(j)} \in C^{(A)}$ elemet, amelyre $h^{(j)} \| U_j$ és $h_1^{(j)}(A) \subseteq B$. Ilyen $h^{(j)}$ koműveletek léteznek, mivel $|U_j| \leq |B|$ és az is világos, hogy $h^{(j)} \in L_D$. Képezzük most azt az $f'' = f'(g^{(o)}, \ldots, g^{(m'-1)})$ diszjunkt szuperpoziciót, amelyre tetszőleges $0 \leq j < m'$ esetén

$$g^{(j)} = \begin{cases} h^{(j)}(p_j^{m'}) \text{ ha } j \in J \text{ és} \\ p_j^{m'} \qquad \text{különben.} \end{cases}$$

A 2.9 Lemmából kapjuk, hogy $f'' \| B$. Mivel pedig $h^{(j)}$ minden $j \in J$-re megőrzi B-t, U_j definiciójából következik, hogy f'' is megőrzi B-t. Továbbá $f_0'' = f_0'$, s ezért $f_0''(x) \neq f_0''(y)$ is teljesül.

A bizonyitás utolsó lépéséhez szükségünk van arra a tényre, mely szerint tetszőleges $\bar{h}:B\to B$ parciális leképezéshez létezik olyan egyváltozós $h' \in L_D$ koművelet, amely megőrzi B-t, $h' \| B$ és a h_1' leképező rész megszoritása $\bar{h}$ értelmezési tartományára egybeesik $\bar{h}$-sal. Ez valóban igaz, hiszen ha $h_o'=0$ konstans és h_1' A egy permutációja, amely identikus az $A \setminus B$ halmazon és amelynek B-re való megszoritása $\bar{h}$ egy kiterjesztése B-re, akkor a $h'=\langle h_o', h_1' \rangle$ koművelet tiszteli D-t ($h \in L_D$), valamint megőrzi B-t és $h' \| B$.

A bizonyitás befejezéséhez tekintsük az $u,v \in B$ különböző elemeket. Válasszuk meg x-et, y-t és f''-t úgy, hogy a bizonyitás második részében leirtak teljesüljenek rájuk. Mivel $x \neq y$, az előző bekezdés értelmében létezik olyan $h' \in L_D$ elem, amelyre $h_1'(u)=x$ és $h_1'(v)=y$. Legyen $f^* := h'(f'')$. Mivel f^* diszjunkt szuperpozicióval keletkezett, a 2.9 és 2.10 Lemmák miatt f^* megőrzi B-t és $f^* \| B$. Továbbá $f_o^*(u)=f_o''(x) \neq f_o''(y)=f_o^*(v)$ is teljesül. Ezzel a segédtételt bebizonyitottuk.

<u>2.15 Segédtétel:</u> Tekintsük a 2.14 Segédtételben szereplő föltételeket. Ekkor bármely olyan i számhoz, amelyre $1 \leq i \leq k$, található olyan $V_i \subseteq B$ részhalmaz és $g^{(i)} \in L$ koművelet, melyekre $g^{(i)}$ tiszteli B-t, $g^{(i)} \| V_i$ és lény$_{V_i}(g^{(i)})=i$.

Bizonyitás: i szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Az állitás i=1-re triviális.

Tegyük föl, hogy $1 \leq i < k$-ra az állitás teljesül $V_i \subseteq B$-re és $g^{(i)} \in L$-re. (Legyen $g^{(i)}$ m_i-változós.) Legyen $x \in B \setminus V_i$ tetszőleges és $V_{i+1}=V_i \cup \{x\}$. Ha $g^{(i)}(z)=g^{(i)}(x)$

egyetlen $z \in V_i$-re sem áll, akkor $\text{lény}_{V_{i+1}}(g^{(i)})=i+1$ és így $g^{(i+1)}$ választható $g^{(i)}$-nek.

Tételezzük most föl, hogy valamely $y \in V_i$-re $g_o^{(i)}(y)=g_o^{(i)}(x)$. A közös értéket jelölje j ($0 \leqslant j < m_i$). Mivel $g^{(i)} \| B$, $u=g_1^{(i)}(x)$-re és $v=g_1^{(i)}(y)$-ra $u \neq v$, s igy a 2.14 Segédtétel értelmében valamely (m^*-változós) $f^* \in L$ koműveletre f^* megőrzi B-t, $f^* \| B$ és $f_o^*(u) \neq f_o^*(v)$. Képezzük a $g^{(i+1)}=g^{(i)}(\ldots,f^*,\ldots)_j$ diszjunkt szuperpoziciót. ($g^{(i+1)}$ $m_{i+1}=m_i+m^*-1$ - változós.) A 2.9 és 2.10 Lemmák értelmében $g^{(j+1)}$ is megőrzi B-t és $g^{(i+1)} \| B$. $g^{(i+1)}$ definiciójából azt kapjuk továbbá, hogy $g_o^{(i+1)}(x)=f_o(u) \neq f_o(v)=g^{(i+1)}(y)$. Mivel $g^{(i+1)}$ diszjunkt szuperpozicióval keletkezett, tetszőleges $z_1, z_2 \in V_i$-re $g_o^{(i)}(z_1) \neq g_o^{(i)}(z_2)$-ből $g_o^{(i+1)}(z_1) \neq g_o^{(i+1)}(z_2)$ következik. De akkor $\text{lény}_{V_{i+1}}(g^{(i+1)})=i+1$. Ezzel az állitást igazoltuk.

2.16 Következmény: A 2.14 Segédtételben szereplő föltételek mellett található az L klónban olyan g koművelet, amelyre $\text{lény}_B(g)=k$.

A fönti előkészületek után megfogalmazzuk a maximális koművelet-klónokat leiró tételt:

2.17 Tétel: Koműveletek egy $M \subseteq C^{(A)}$ halmaza akkor és csak akkor maximális klón, ha megadható A-nak olyan D szabályos részhalmaz-rendszere, amelyre M éppen az összes, D-t gyöngén tisztelő A-fölötti koműveletek J_D halmazával egyezik meg.

Bizonyitás:

1. Elégségesség: Legyen $D \in SH(A)$ tetszőleges. A 2.13 Segédtételből tudjuk, hogy L_D $C^{(A)}$-tól különböző klón. Megmutatjuk, hogy L_D maximális. Legyen $f \in C^{(A)} \setminus L_D$ tetszőleges és $L=C(L_D \cup \{f\})$. Megmutatjuk, hogy $L=C^{(A)}$.

Először tegyük föl, hogy D csupa egyelemű halmazokból áll. Mivel egyelemű halmazban egyetlen koművelet sem lehet ragasztó, kapjuk, hogy $L_D = \{f \in C^{(A)} : f \text{ tiszteli } D\text{-t}\}$. Könnyű látni ugyanakkor, hogy D-t egy koművelet pontosan akkor tiszteli, ha megőrzi a $\bar{D} = \bigcup D$ halmazt. Ezért $L_D = \{f \in C^{(A)} : f \text{ megőrzi } \bar{D}\text{-t}\}$. Ha D' A-nak nem-triviális, $\bar{D}$-tól különböző részhalmaza, akkor a 2.11 Lemmának megfelelően L_D nem őrzi meg D'-t. Ugyanakkor f nem őrzi meg $\bar{D}$-t, igy tehát $L_D \cup \{f\}$ A egyetlen nem-triviális részhalmazát sem őrzi meg. De akkor a 2.12 Lemma értelmében $L_D \cup \{f\}$ tranzitiv. Mivel L_D nyilván tartalmaz lényegében n-változós koműveletet, a 2.3 Tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy a fönti halmaz teljes: $L=C^{(A)}$.

Most tegyük föl, hogy D csupa $k > 1$ elemű halmazból áll. Ekkor L_D tartalmazza az összes $C^{(A)}$-beli konstansokat, hiszen ezek bármelyike ragaszt D bármely B elemében, s igy gyöngén tiszteli D-t. De akkor L_D és igy L is tranzitiv.

Konstruálunk L-ben egy lényegében n-változós koműveletet. Ez elegendő az elégségesség bizonyitásához, hiszen ekkor ismét a 2.13 Tételt alkalmazva $L=C^{(A)}$ adódik.

Legyen $B \in D$ tetszőleges és legyen $\bar{f}: A \to A$ olyan leképezés, amely D minden elemét bijektiven képezi le B-re. Mivel D szabályos, ilyen $\bar{f}$ létezik. Tekintsük most azt az egyváltozós $\tilde{f} \in C^{(A)}$ koműveletet, amelyre

$$\tilde{f}_o = 0 \text{ és}$$

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} x \text{ ha } x \in A \setminus \cup D \text{ és} \\ \bar{f}(x) \text{ különben.} \end{cases}$$

Leolvasható, hogy $\tilde{f} \in L_D$. Vegyük most a 2.14 Segédtétel bizonyitásában (*)-gal definiált $h \in L^D$ és a 2.16 Következményben szereplő $g \in L$ koműveleteket és képezzük fölhasználásukkal a $g^* = h(\tilde{f}(g(p^n_o, \ldots, p^n_{k-1}), \ldots, \tilde{f}(g(p^n_{(q-1)k}, \ldots, p^n_{qk-1})), p^n_{qk}, \ldots, p^n_{qk+r-1})$ L-beli diszjunkt szuperpoziciót. h, $\tilde{f}$ és g tulajdonságai miatt tetszőleges $B' \in D$-re $\text{lény}_{B'}(g^*) = k$. Könnyen látható az is, hogy $\text{lény}_{A \setminus \cup D}(g^*) = \text{lény}_{A \setminus \cup D}(h) = |A \setminus \cup D|$ (=r). Mivel g^* diszjunkt szuperpozicióval keletkezett, lényeges változószámát az összetételben szereplő koműveletek lényeges változószámaiból additivan lehet számolni, vagyis

$$\text{lény}(g^*) = \text{lény}_{(\cup D) \cup (A \setminus \cup D)}(g^*) = \sum_{B' \in D} \text{lény}_{B'}(g^*) + \text{lény}_{A \setminus \cup D}(g^*) =$$

$$= \sum_{B' \in D} |B'| + |A \setminus \cup D| = |\cup D| + |A \setminus \cup D| \ (=qk+r) = |A| = n.$$

Ezzel a kimondott föltétel elégségességét bebizonyitottuk.

2. Szükségesség: Tegyük föl, hogy M maximális klón $C^{(A)}$-ban. Megmutatjuk, hogy ekkor M gyöngén tiszteli A valamely szabályos részhalmaz-rendszerét. Ez elegendő, hiszen ekkor $M \subseteq L_D$ és igy M maximalitása miatt $M = L_D$ (fölhasználva, hogy a 2.13 Segédtétel értelmében $L_D \neq C^{(A)}$).

Ha M nem tranzitiv, akkor a 2.12 Lemma szerint megőrzi A valamely nem-triviális B részhalmazát. De akkor M tiszteli A-nak a $D=\{\{x\}\subset A : x\in B\}$ szabályos részhalmaz-rendszerét is.

A továbbiakban föltesszük, hogy M tranzitiv. Először vegyük észre, hogy az összes $C^{(A)}$-beli ragasztó koműveletek (a projekciókkal kiegészitve) klónt alkotnak, s ez a klón valódi része az összes nem lényeges koműveletekből álló (nem teljes) klónnak. Ezért a maximális M klón föltétlenül tartalmaz nem-ragasztó koműveletet. Ugyanakkor lényegében n-változós koműveletet nem tartalmazhat, hiszen akkor a 2.3 Tétel értelmében teljes volna.

Tekintsünk most egy olyan $f\in M$ nem ragasztó koműveletet, amelynek lényeges változószáma az M-beli nem-ragasztó koműveletek között maximális. (Tegyük föl, hogy f m-változós.) Tekintsük az f cimke részéhez tartozó $q=q(f_o)$ kisérő osztályozást A-n és legyen D_1 q maximális elemszámú osztályainak halmaza. D_1 elemei legalább 2 számosságúak, hiszen ellenkező esetben q a legkisebb osztályozással egyezne meg és ebből lény(f)=n következne. Ezért $D_1\in SH(A)$ is teljesül.

Legyen $B\in D_1$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy f_1 bijektiven képezi le B-t valamely $B'\in D_1$-re. Jelölje j ($0\leq j<m$) f_o B-n fölvett (konstans) értékét. Képezzük az $f'=f(\ldots,f,\ldots,)_j$ diszjunkt szuperpoziciót. Nyilván $f'\in M$ és tetszőleges $z\in A$-ra

$$f_1'(z)=\begin{cases} f_1(f_1(z)) & \text{ha } f_0(z)=j \text{ és} \\ f_1(z) & \text{különben.} \end{cases}$$

A 2.9 Lemmából következően $f' \| A$ és lény$(f') \geqslant$ lény(f). f' képezési szabályából az is leolvasható, hogy lény(f') $>$ lény(f) pontosan akkor teljesül, ha valamely $x,y \in A$-ra $f_0(x)=f_0(y)=j$ és $f_0(f_1(x)) \neq f_0(f_1(y))$, vagyis valamely $x,y \in B$-re nem áll fönn $f_1(x) \sim_q f_1(y)$. f választása miatt azonban lény$(f') \leqslant$ lény(f), ezért bármely $x,y \in B$-re $f_1(x) \sim_q f_1(y)$, vagyis f_1 B-t q-nak ugyanabba az osztályába képezi le. Ha most $f_1(x)=f_1(y)$ állna fönn B két különböző x és y elemére, akkor f (x,y) -ragasztó volna, ami ellentmond f definiciójának. Ezért f_1 injektiv B-n, amiből $|B'| = |B|$, $B' \in D_1$ és f_1 megkövetelt bijektivitása már következik.

Legyen most $D_2 := \{B \in D_1 : f_1(B) \cap B' \neq \emptyset$ valamely $B' \in D_1$-re$\}$ és legyen $D := \{B \in D_1$: valamely $g \in M$ és $B' \in D_2$ esetén g_1 bijektiven képezi le B'-t B-re$\}$.

Vegyük észre, hogy D_2 nemüres. Valóban, hiszen az előzőek szerint bármely $B' \in D_1$-hez és $x \in B'$-höz található olyan $B \in D_1$, amire $f_1(x) \in B$. Ezért D sem üres. Vegyük észre, hogy a definiciók értelmében $D \in SH(A)$ és $D_2 \subseteq D \subseteq D_1$.

Megmutatjuk, hogy M gyöngén tiszteli D-t. Ezt két lépésben fogjuk belátni. Vegyünk egy tetszőleges $B \in D$ elemet. D definiciója szerint ekkor található olyan (ℓ-változós) $g' \in M$ koművelet, amelynek g_1' leképező része D_2 valamely B' elemét bijektiven képezi le B-re. Vegyük

észre, hogy az egyváltozós $g=g'(p_o^{\ell},\ldots,p_o^{\ell}) \in M$ koművelet hasonló tulajdonságú, mivel $g_1=g_1'$. D_2 definiciója és a D_1-re kimondott előbbi tulajdonság alapján ekkor van olyan $B'' \in D_1$, amelyet f_1 bijektiven képez le B'-re. Legyen $k=f_o(S'')$ $(0 \leqslant k < m)$.

Első lépésként azt mutatjuk meg, hogy tetszőleges $h \in M$-re h B-ből az következik, hogy h_o értéke konstans B-n. Képezzük ugyanis az $f''=f(\ldots, g(h),\ldots)_j$ M-beli diszjunkt szuperpoziciót. Ismét leolvasható, hogy tetszőleges $z \in A$-ra

$$f_1''(z)= \begin{cases} h_1(g_1(f_1(z))) & \text{ha } f_o(z)=k \text{ és} \\ f_1(z) & \text{különben.} \end{cases}$$

A 2.9 Lemma értelmében $f'' \| A$ és lény$(f'') \geqslant$ lény(f). Korábbi meggondolásunkhoz hasonlóan lény$(f'') >$ lény(f) pontosan akkor áll fönn, ha valamely $x,y \in B''$-re $h_o(g_1(f_1(x))) \neq h_o(g_1(f_1(y)))$. Mivel f_1 és g_1 injektivek B''-re illetve B'-re megszoritva, ez éppen azt jelenti, hogy $h_o(u) \neq h_o(v)$ valamely $u,v \in B$-re. De f választása miatt lény$(f'') \leqslant$ lény(f). Ebből azt kapjuk, hogy tetszőleges $u,v \in B$-re $h_o(u)=h_o(v)$.

Második lépésünk annak igazolását jelenti, hogy bármely $h \in M$-re $h \| B$-ből következik, hogy h_1 bijektiven képezi le S-et valamely $S_o \in D$-re. Tegyük föl, hogy a $h \in M$ koművelet m_o-változós. Az előző bekezdésben leirtak szerint h_o konstans B-n. Jelölje ezt a konstansot k_o $(0 \leqslant k_o < m_o)$. Képezzük a $h'=h(\ldots,f,\ldots)_k$ M-beli diszjunkt

szuperpoziciót. Leolvasható, hogy tetszőleges $z \in B$-re $h_o(z)=k_o$ és ezért $h_o'(z)=f_o(h_1(z))+k_o$ és $h_1'(z)=f_1(h_1(z))$ áll fönn. A 2.9 Lemmából $h' \| B$ következik, igy az előző bekezdés alapján azt kapjuk, hogy h_o' konstans B-n. De akkor tetszőleges $x,y \in B$-re $f_o(h_1(x))=h_o'(x)-k_o=$ $=h_o'(y)-k_o=f_o(h_1(y))$, vagyis $h_1(x) \sim_q h_1(y)$. Ezért h_1 B-t D_1 valamely B_o elemébe képezi le. Ugyanakkor h_o konstans lévén B-n, a $h \| B$ föltételből az következik, hogy h_1 injektiv B-n. De akkor, fölhasználva hogy B a q osztályozás egy maximális osztálya, azt kapjuk, hogy B h_1 általi leképezése B_o-ba bijektiv. Tekintsük most a $B' \in D_2$ halmazt. A $g(h) \in M$ koművelet leképező része B'-n a g_1 és h_1 bijekciók szorzata, ezért bijektiven képezi le B'-t B_o-ra. De akkor B_o-ra teljesül a D elemeit definiáló föltétel, s igy $B_o \in D$.

Két lépésünk eredményét összevetve azt kapjuk, hogy tetszőleges $h \in M$ koművelet gyöngén tiszteli B-t D-ben. Mivel pedig B tetszőleges elem volt D-ből, ez azt jelenti, hogy M gyöngén tiszteli D-t. A tétel bizonyitását ezzel befejeztük.

2.18 Következmény: Koműveletek egy $M \subseteq C^{(A)}$ halmaza akkor és csak akkor teljes, ha M A-nak egyetlen szabályos részhalmaz-rendszerét sem tiszteli gyöngén.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a 2.3-2.6 Tételek állitásai kritériumunkból is következnek, igy valóban azok egy általánositását kaptuk.

A primalitás és funkcionális teljesség fogalmainak koalgebrai átültetésével tételünket más alakban is kimondhatjuk:

2.19 Definició: Az A nemüres halmazból és az M A-fölötti koművelet-halmazból álló $\langle A;M\rangle$ párt koalgebrának nevezzük. Azt mondjuk, hogy $\langle A;M\rangle$ primál, ha az M halmaz teljes. Jelölje $N_C^{(A)}$ konstans műveleteinek halmazát. Az $\langle A;M\rangle$ koalgebráról akkor mondjuk, hogy funkcionálisan teljes, ha az $M \cup N$ halmaz teljes.

2.20 Következmény: A véges A halmaz fölötti $\langle A;M\rangle$ koalgebra akkor és csak akkor primál, ha M nem tiszteli gyöngén SH(A) egyetlen elemét sem.

2.21 Következmény: Véges A esetén az $\langle A;M\rangle$ koalgebra akkor és csak akkor funkcionálisan teljes, ha M nem tiszteli gyöngén SH(A) egyetlen olyan elemét sem, amely legalább kételemű részhalmazokból áll.

Legutóbbi következményünk bizonyitása egyszerű gyakorló feladat. Végül - szintén - bizonyitás nélkül közlünk egy egyszerű észrevételt, amely a műveletklónok azon jólismert tulajdonságának duálisát fogalmazza meg, amely szerint műveletek egy maximális klónja egyértelműen meghatározott a benne szereplő egyváltozós műveletek (félcsoportja) által.

2.22 Következmény: Véges A halmaz fölötti koműveletek különböző maximális klónjainak különböző a félcsoportjuk.

Definiciók jegyzéke

I. RÉSZ

1.1: koművelet és részei, koprojekció 3
1.2: koművelet változói, lényeges/fiktiv változók .. 4
1.3: koműveletek szuperpoziciója, szuperpozició előtagja 5
1.5: ragasztó koműveletek, konstans koműveletek 7
1.7: koműveletek klónjai, generált klón, triviális klónok 7
1.10: a koműveletek közötti egyformasági reláció, törzs, klón törzse 10
1.12: egyforma cimkefüggvényű koműveletek, véges halmaz osztályozásainak rendezése 11
1.15: koművelet változatai 12
1.19: koműveletek hasonlósága, adott permutáció szerinti hasonlóság és transzformált 14
1.23: koműveletek gyönge hasonlósága 15
1.24: klón talpa 15
1.26: klónmetszetek (koműveletek zárt osztályai) 16
2.1: minimális klón, retrakció 17
3.1: szétválasztható koműveletek, diagonális koművelet 20
3.2: leképező gráfok 21
3.3: gráf által megengedett leképező részek halmaza 23
3.6: összeférés koműveletek egy halmaza és valamely gráf között 26

3.8: adott osztályozással kompatibilis részhalmaz .. 28
4.1: klónmetszetek egymáshoz való illeszkedése 31

II. RÉSZ

transzformáció-félcsoportok „bokrai"; bokorhálók 46
transzformáció-félcsoport BSJ-koordinátái és kiegészitő jelzete speciális esetben 49
a BSJ-koordináták és a kiegészitő jelzetek kiterjesztése 56

III. RÉSZ

2.1: koművelet ragasztása az alaphalmaz egy részhalmazán, lényeges koművelet; részhalmaz és osztályozás megőrzése; koművelet-halmaz félcsoportja, tranzitivitás koműveletekre; teljes koművelet-halmaz és maximális klón 69
2.7: szabályos részhalmaz-rendszer, a hozzá tartozó ekvivalencia; szabályos részhalmaz-rendszer tisztelése és gyönge tisztelése 71
2.8: koműveletek diszjunkt szuperpoziciója 72
2.19: koalgebra; primál és funkcionálisan teljes koalgebra 84

Állitások, tételek jegyzéke

I. RÉSZ

1.4 Áll.: A koműveleteken végrehajtott szuperpozició műveletének „asszociativitása" 7

1.6 Áll.: A ragasztási tulajdonság öröklődése 7

1.8 Áll.: A koművelet-klónok véges generálhatósága . 8

1.9 Köv.: Adott (véges) halmaz fölötti klónok számának végessége 9

1.11 Köv.: Klón, mint egyformasági osztályok uniója . 10

1.13 Áll.: Cimke függvények egyformasága és a hozzájuk tartozó kisérő osztályozások 11

1.14 Köv.: $C^{(A)}$ törzsének számossága és egy föltétel koműveletek egyformaságára 12

1.16 Áll.: Valamely klón bármely eleme összes változatait tartalmazza 13

1.17 Áll.: A koműveletek közötti f változata g-nek reláció fönnállásának egy kritériuma 13

1.18 Köv.: Az f változata g-nek reláció rendezés 13

1.20 Áll.: A koműveletek közötti hasonlóság ekvivalencia reláció 14

1.21 Áll.: Transzformálás és szuperpozició fölcserélhetősége 14

1.22 Köv.: A hasonlósági reláció izomorfizmus 14

1.25 Áll.: Valamely klón talpa részklón e klónban, illetve részmonoid $S^{(A)}$-ban 15

2.2 Áll.: Egy elégséges föltétel valamely klón nem minimális voltára 17
2.3 Áll.: Klón minimalitása egy speciális esetben ... 18
2.4 Áll.: Egyváltozós műveletek minimális klónjai ... 19
2.5 Áll.: Kritérium valamely véges halmaz fölötti klón minimalitására 19
3.4 Áll.: Szétválasztható klón elemeinek jellemzése leképező gráfokkal 23
3.5 Köv.: A diagonális koműveletet tartalmazó klónok jellemzése 25
3.7 Tétel: Szétválasztható klónok uniójáról 27
3.9 Áll.: Az összeférési tulajdonság egy szükséges és elegendő föltétele 28
3.10 Köv.: Összeférés speciális esetekben 30
4.2 Áll.: Illeszkedő koművelet-halmazok egyszerű tulajdonságai 31

III. RÉSZ

2.2 Áll.: Valamely koművelet-halmaz teljességének kapcsolata a maximális koművelet-klónokkal 70
2.3 Tétel: Egy elégséges teljességi föltétel 70
2.4 Köv.: A kétváltozós koműveletek halmaza teljes .. 70
2.5 Tétel: Egyelemű halmaz teljessége (Sheffer tulajdonság) 71

2.6 Tétel:Az egyváltozós koműveletek egy tetszőleges lényeges koművelettel kiegészitve teljes halmazt alkotnak 71

2.9 Lemma:A koműveletek közötti diszjunkt szuperpozició műveletének egy tulajdonsága 72

2.10 Lemma:Diszjunkt szuperpozició és részhalmaz megőrzése 72

2.11 Lemma:Adott részhalmazt megőrző koműveletekről ... 72

2.12 Lemma:Tranzitivitás és részhalmaz megőrzése 73

2.13 Sgt.: Adott szabályos részhalmaz-rendszert gyöngén tisztelő koműveletek klónt alkotnak 73

2.14 Sgt.: Egy speciális koművelet előállitásáról 74

2.15 Sgt.: Egy további speciális koművelet előállitásáról 76

2.16 Köv.: Egy injektiv tulajdonságú koművelet előállitásáról 77

2.17 Tétel:A maximális klónok jellemzésére szolgáló szükséges és elegendő föltétel 77

2.18 Köv.: Teljességi kritérium koműveletekre 83

2.20 Köv.: Koalgebra primálságának föltétele 84

2.21 Köv.: Koalgebra funkcionális teljességének föltétele 84

2.22 Köv.: A maximális klónok jellemezhetősége félcsoportjukkal 84

A dolgozatban használt jelölések

és definicióik helye

$\underline{\ell}$: véges, ℓ-elemű halmaz: $\{0,1,\ldots,\ell-1\}$ 3

A : nemüres alaphalmaz, ... 3

többnyire véges, ekkor $\underline{n}$-nel egyezik meg 8

$f=\langle f_o,f_1\rangle$: komüvelet megadása komponenseivel (cimke rész, leképező rész) 3

p_k^m : k-adik m-változós koprojekció 4

$C^{(A)}$: az A-fölötti komüveletek halmaza 4

$C_m^{(A)}$: az A-fölötti m-változós komüveletek halmaza ... 4

$P^{(A)}$: az A-fölötti koprojekciók halmaza 4

lény(f) : az f komüvelet lényeges változóinak száma .. 4

$\text{lény}_B(f)$: az f komüvelet lényeges változóinak száma az alaphalmaz B részhalmazán 4

(x,y) – ragasztó komüvelet: olyan f komüvelet, amelyre f(x)=f(y) 7

C(M) : az M komüvelet-halmaz által generált klón 8

$K^{(A)}$: az A-fölötti komüvelet-klónok hálója 8

$R^{(A)},R^{(m)}$: az A-fölötti (illetve valamely m-elemü halmaz fölötti) permutációk csoportja 10

T_L : az L klón törzse (a T törzsre vonatkozóan) 10

$Q^{(A)}$: az A halmaz osztályozásainak hálója 11

Q(n) : az $\underline{n}$ halmaz osztályozásainak száma 11

$q^{(o)},q^{(1)}$: a $Q^{(A)}$ háló legkisebb és legnagyobb elemei 11

$\sim_q$: a q osztályozáshoz tartozó ekvivalencia reláció 11

$q(f)$: az f leképezés kisérő osztályozása f értelmezési tartományán 11

$f \leqslant g$: a g változata f-nek reláció jelölése 12

$V(f), V(M)$: az f koművelet (az M koművelet-halmaz) változatainak halmaza 12

$f \backsimeq g$: a g hasonló f-hez reláció jelölése 14

$f \backsimeq_r g$: a g hasonló f-hez az r permutáció szerint reláció jelölése 14

$g=(r)f$:a g koművelet az f koműveletnek az r permutáció szerinti transzformáltja 14

$M_1 \backsimeq M_2, M_1 \backsimeq_r M_2$: az M_2 koművelet-halmaz (az r permutáció szerint) hasonló az M_1 koművelet-halmazhoz 14

$f \approx g$, $f \approx_r g$, $M_1 \approx_r M_2$: a föntiekkel analóg jelölések gyönge hasonlóságra 15

$\bar{S}^{(A)}$: az A-fölötti egyváltozós koműveletek halmaza .. 15

$S(L)$: az L klón félcsoportja 15

$K^{(A)}/N$:az A-fölötti N-beli klónmetszetek halmaza 16

$H^{(A)}$: az A-fölötti szétválasztható koműveletek halmaza 20

$H_q^{(A)}$: az A-fölötti koműveletek azon részhalmaza, melyek a q osztályozás szerint szétválaszthatók 20

$d^{(A)}$: az A-fölötti diagonális koművelet 20

$G^{(A)}$: az A halmaz fölötti irányitott gráfok halmaza . 21

$x \rightarrow y \in G$: a G gráf tartalmazza az $x \rightarrow y$ irányitott élet 21

$x \rightarrowtail y \in G$: a G gráf reflexiv, tranzitiv lezártja tartalmazza az $x \rightarrow y$ irányitott élet 21

G(f) : az f koművelet leképező gráfja 21

G(M) : az M koművelet-halmaz leképező gráfja 21

(f;G),(M;G): az f komüveletből (az M koművelet-halmazból) a G gráf által megengedett leképező részek halmaza 23

H(f,M):az f előtagú M-beli szuperpoziciók lehetséges halmaza 25

$X_{M,N}(Z)$:a Z M-beli klónmetszethez az (M,N) párra nézve illeszthető koművelet-halmazok halmaza 31

Min(Z),Max(Z): a Z-hez minimálisan (maximálisan) illeszthető koművelet-halmaz 31

$C^{(3)}$: a $\underline{3}$-fölötti komüveletek halmaza 33

q',q'',q''' : a $\underline{3}$ halmaz kételemű osztályozásai 34

$S^{(3)}$: a $\underline{3}$ halmaz transzformációinak félcsoportja 38

$A^{(3)}$: a $\underline{3}$ halmaz permutációinak alternáló csoportja . 38

$N^{(3)}$: a $\underline{3}$ halmaz egyváltozós konstans műveleteinek halmaza 38

$T^{(3)}$: a $\underline{3}$ halmaz transzpozicióinak halmaza 38

$L^{(3)}$: $S^{(3)}$ részfélcsoportjainak halmaza 38

E : szimbólikus félcsoport üres alaphalmazzal 41

I_j, I^b: az azonos jobb- (bal-) ideál generálását jelentő binér reláció $S^{(3)}$-ban 41

I_{jb}, I^{jb}: az I_j és I^b ekvivalenciák egyesitése (metszete) 42

O_i (i=1,2,3): $S^{(3)}$ blokkjai az I_{jb} ekvivalencia szerint 42

I(0,1): az $S^{(3)}$ félcsoportnak a $\{0,1\}$ halmazhoz tartozó főideálja 44

B : az I(0,1) félcsoport részfélcsoportjainak halmaza 44

I(0,2), S, I(1,2), J : a föntiekkel analóg jelölések .. 44

$\leftrightarrow$: $L^{(3)}$ egy ekvivalencia relációja 46

$L_o^{(3)}$: a legföljebb másodrendű elemekből álló $S^{(3)}$-beli félcsoportok halmaza 49

$L_1^{(3)}$: a legföljebb 2 permutációt tartalmazó $S^{(3)}$-beli félcsoportok halmaza 49

V(x) : az x sorszámú félcsoport B-ben 57

$K^{(3)}$: $C^{(3)}$ részklónjainak hálója 61

$K_o^{(3)}$: $K^{(3)}$ egy teljes reprezentánsrendszere a hasonlósági relációra nézve 61

$K_i^{(3)}$ (i=1,2,3): $K_o^{(3)}$ fölbontása 3 diszjunkt részre 61

N_i (i=1,2,3) : $C^{(3)}$ lényegében i-változós koműveleteinek halmaza 62

H_i (i=1,2,3): $C^{(3)}$ szétválasztható komüveletei halmazának speciális részhalmazai 63

$f \| B$: az f-koművelet nem ragaszt az alaphalmaz B részhalmazában 69

S(M) : az M koművelet-halmaz félcsoportja 70

$H(A)$: A részhalmazainak halmaza 71

$SH(A)$: az A halmaz szabályos részhalmaz-rendszereinek halmaza 71

$\sim_D$: valamely $D \in SH(A)$ elemhez rendelt ekvivalencia reláció 71

L_D : a $D \in SH(A)$ rendszert gyöngén tisztelő koműveletek halmaza 72

$\langle A;M \rangle$: az A alaphalmazból és M koművelet-halmazból álló koalgebra 84

N : konstans koműveletek halmaza 84

Irodalomjegyzék

[1] Bodnarcsuk-Kaluzsnyin-Kotov-Romov: Galois theory for Post algebras I-II. (orosz nyelven), Kibernetika 3(1969),1-10. oldal és 5(1969), 1-9. oldal, angolul: Cybernetics (1969), 243-252. oldal és 531-539. oldal

[2] Clifford, A.H.-Preston, G.B.: The Algebraic Theory of Semigroups, American Math. Society, Rhode Island (1961)

[3] Csákány Béla: All minimal clones on the three-element set, Acta Cybernetica 6(1983), 227-238. oldal

[4] Csákány Béla: Completeness in coalgebras, Acta Sci. Math. 48(1985), 75-84. oldal

[5] Fried Ervin: Általános algebra, Tankönyvkiadó, Budapest (1981)

[6] Jablonszkij, Sz.V.: On functional completeness in the three-valued calculus (orosz nyelven), Dokl. Akad. Nauk. SSSR 95(1954), 1153-1155. oldal

[7] Kaluzsnyin, L.A.: Bevezetés az absztrakt algebrába, Tankönyvkiadó, Budapest (1979)

[8] Post, E.: The two-valued iterative systems of mathematical logic, Annals of Math. Studies, N^{o}5, Princeton (1941)

[9] Rosenberg, I.G.: Über die funcktionale Vollständigkeit in den mehrvertigen Logiken, Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přir. Věd, 80, 4(1970), 3-93. oldal

[10] Słupecki, J.: Completeness criterion for systems of many-valued propositional calculus (lengyel nyelven), Comptes rendus des Séances de la Soc. des Sci. et des Lettres de Varsovie 32(1939), 102-109. oldal, angolul: Studia Logica 30(1972), 153-157. oldal

[11] Szendrei Ágnes: Clones in universal algebra, Les Presses de l'Université de Montréal (1986)