

TRIGONOMETRIKUS SOROK ABSZOLÚT ÉS ERŐS
KONVERGENCIÁJA

DOKTORI DISSZERTÁCIÓ

Témavezető:
Dr. Szalay István
egyetemi docens

Írta:
Dobi János
matematika-fizika tanár

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
BOLYAI INTÉZETE
SZEGED, 1990

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	3
0.A Jelölések, definíciók, előzetes eredmények	5
0.B Előzetes halmazelméleti ismeretek	10
I. fejezet: Denjoy-Luzin-típusú tételek	16
II. fejezet: Abszolút és erősen konvergens Fourier-sor- ral rendelkező függvények Banach tereinek tartalmazási relációi	30
Felhasznált irodalom	59

BEVEZETÉS

A disszertáció témájának kiindulópontja a J. Hyslop által 1952-ben bevezetett illetve N. Tanovic-Miller által 1983-ban felelevenített erős konvergencia és a régóta jól ismert abszolút és közönséges konvergenciák kapcsolata. Az erős konvergencia a két korábbi konvergencia között helyezkedik el. Ez a tény több érdekes kérdéshez vezet el a trigonometrikus sorok erős konvergenciájával kapcsolatban.

Ilyen kérdés például, hogy erős konvergenciára érvényes-e az abszolút konvergenciára illetve abszolút szummálhatóságra bizonyított Denjoy-Luzin-tétel. Ez a témája a disszertáció első részének. Tetszőleges pozitív mértékű illetve második kategóriás halmazon tekintve az erős konvergenciát a trigonometrikus sorok együtthatóira az abszolút konvergencia esetével analóg összefüggések állíthatók fel. (A. Zygmund, Szalay I., N. Tanovic-Miller eredményei.) Ezekhez kapcsolódó eredményünk a disszertáció 1.25. tétele. Eltérő tulajdonság is adódik, pl. egy tetszőleges pozitív mértékű halmazon való erős konvergenciából nem következik a mindenütt való erős konvergencia.

A továbbiakban pedig az abszolút, erősen illetve egyenletesen konvergens Fourier-sorral rendelkező függvények halmazainak vizsgálatára kerül sor. Mindhárom esetben definiálva vannak a megfelelő normák, továbbá más, ekvivalens normák is, amelyekkel a fenti halmazok Banach

tereket alkotnak. Sor kerül ezen terek tartalmazási relációinak vizsgálatára, figyelembe véve az indexelt abszolút illetve az erős konvergencia indexének változását (3. ábra). Ezek a relációk alátámasztják az erős konvergencia köztes jellegét, rámutatnak az erősen konvergens Fourier-sorral rendelkező függvények Banach tereinek és a klasszikus L^p terek egymásba zártságának analógiájára. Az indexelt abszolút konvergens Fourier-sorral rendelkező függvények Banach tereinek konjugáltjaikkal való kapcsolata analóg az L^p tereknél ismert kapcsolattal, azonban ezek a terek nem mutatják az egymásba zártságot, csupán a $\lambda = 1$ indexhez tartozó téren belül (2.32. tétel), míg a különböző indexű abszolút illetve erősen konvergens Fourier-sorral rendelkező függvények terei még a fenti $\lambda = 1$ indexhez tartozó téren belül is összehasonlíthatatlanok (2.37. tétel).

0.A JELÖLÉSEK, DEFINÍCIÓK, ELŐZETES EREDMÉNYEK

A Cauchy-értelemben használt közönséges konvergenciától, illetve annak abszolút változatától eltérő módokon is tulajdoníthatunk egy számsorozatnak határértéket illetve számsornak összeget. Egy ilyen módszer a J. Hyslop által bevezetett majd N. Tanovic-Miller által felelevenített erős konvergencia, melynek definícióját történeti kialakulásában vezetjük be.

Először felidézzük a Cesaro-féle összegzés definícióját. Valamely $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ valós számsort - az $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ részletösszegek $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatát - akkor mondjuk α paraméterű ($\alpha > -1$) Cesaro-szummálhatónak - röviden (C, α) - szummálhatónak - az s összeghez, ha létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(\alpha)} = s$$

határérték, ahol $\sigma_n^{(\alpha)}$ jelöli az α -ad rendű Cesaro-összegeket ($\alpha > -1$), melyek definíciója

$$\sigma_n^{(\alpha)} = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(\alpha)} a_k$$

$$A_n^{(\alpha)} = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } n = 0 \\ \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\dots(n+\alpha)}{n!} & , \text{ ha } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $(C,0)$ -szummálhatóság éppen a közösleges konvergenciát jelenti.

A (C, α) -szummáció abszolút és λ indexes változatát - melyet röviden $|C, \alpha|_\lambda$ -szummációnak írunk - T.M. Flett vezette be 1957-ben ([4]).

A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sorról - az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatról akkor mondjuk, hogy $|C, \alpha|_\lambda$ -szummálható a $\lambda \geq 1$ indexszel és az $\alpha > -1$ paraméterrel, ha fennáll, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |\sigma_n^{(\alpha)} - \sigma_{n-1}^{(\alpha)}|^\lambda < \infty.$$

Látható, hogy a $|C, 0|_1$ -szummálhatóság az abszolút konvergenciát jelenti, ami maga után vonja a konvergenciát is. Nem ugyanez a helyzet azonban $\lambda > 1$ esetben, mert a $|C, 0|_\lambda$ -szummálhatóságból, azaz a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |a_n|^\lambda < \infty$$

feltételből nem következik a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciája.

Például

$$a_n = \log_2 \log_2(n+1) - \log_2 \log_2 n \quad (n=2, 3, \dots),$$

$$s_n = \sum_{k=2}^n (\log_2 \log_2(k+1) - \log_2 \log_2 k) = \log_2 \log_2(n+1) \rightarrow \infty$$

ugyanakkor a Lagrange-tétel alapján

$$0 \leq a_n \leq \frac{K}{n \log_2 n} \quad (K \text{ } n\text{-től független}),$$

így a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^\lambda} < \infty \quad (\lambda > 1)$$

miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor $|C, 0|_\lambda$ -szummálható.

Ezt az eltérést figyelembe véve a $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ sort - az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot - a λ index mellett abszolút konvergensenek - röviden $|C, 0|_\lambda$ konvergensenek - nevezzük, ha konvergens és $|C, 0|_\lambda$ -szummálható.

A "rendes" és abszolút Cesaro-szummálhatóság mellé az erős szummálhatóság értelmezése J. Hyslop nevéhez fűződik. ([5]). Az 1952-ben közölt definíció szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sort - az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot - erősen Cesaro-szummálhatónak - röviden $[C, \alpha]_\lambda$ -szummálhatónak nevezzük a $\lambda > 0$ indexszel és az $\alpha > 0$ paraméterrel az s összeghez, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a_k^{(\alpha-1)} - s|^\lambda = 0.$$

A történeti teljesség kedvéért megemlítjük, hogy a $[C, 1]_1$ -szummálhatóságot Fekete M. 1916-ban ([3]), a $[C, \alpha]_1$ -szummálhatóságot ($\alpha > 0$) pedig C.E. Winn 1933-ban ([18]) már értelmezte.

A "rendes" illetve abszolút Cesaro-szummálhatóságnál láttuk, hogy az $\alpha = 0$ eset a közönséges illetve az abszolút konvergenciát adta. Az erős szummálhatóság esetén a Cesaro-középek értelmezése miatt az $\alpha = 0$ eset és így az "erős konvergencia" nem adódik közvetlenül.

Az $\alpha = 0$ paraméterre az erős Cesaro-szummálhatóságot erős konvergencia elnevezéssel N. Tanovic-Miller terjesztette ki 1983-ban ([15]) a következő módon: a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sorról - az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatról - akkor mondjuk, hogy λ index mellett ($\lambda > 0$) erős értelemben vett összege s - illetve erősen konvergál az s határértékhez - ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |(k+1)(s_k - s) - k(s_{k-1} - s)|^\lambda = 0 \quad (s_{-1} := 0), \quad (0.1)$$

Az erős konvergencia előző definíciójának az eddigi elméletbe történő beilleszkedését igazolja Szalay I. eredménye - a $[C, 0]_\lambda$ -szummálhatóságon most már a fenti erős konvergenciát értve - amelyben megmutatja, hogy a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |(k+1)(\sigma_k^{(\alpha)} - s) - k(\sigma_{k-1}^{(\alpha)} - s)|^\lambda = 0$$

$\alpha \geq 0$ -ra szükséges és elegendő feltétele az $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor - az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat - s számhoz való $[C, \alpha]_\lambda$ -szummálhatóságának. Ez $\alpha = 0$ -ra a (0.1) követelménybe megy át ([11], Property 12).

A továbbiakban az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat λ indexű abszolút, erős illetve közönséges konvergenciáját rendre a

$$s_n \rightarrow s|I|_{\lambda}; \quad s_n \rightarrow s[I]_{\lambda}; \quad s_n \rightarrow sI.$$

szimbólumokkal jelöljük.

Az erős konvergencia könnyebb elbírására, illetve az abszolút és közönséges konvergencia közötti elhelyezkedésére, valamint az indexes erős konvergenciák kapcsolatára mutatnak rá a következő - bizonyítás nélkül közölt - lemmák.

0.2. lemma ([15], statement (vi))

$s_n \rightarrow s[I]_{\lambda} \quad (\lambda \geq 1)$ akkor és csak akkor, ha

$$s_n \rightarrow sI \quad (0.2.a)$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^{\lambda} |s_k - s_{k-1}|^{\lambda} = 0 \quad (0.2.b)$$

Ismét a történeti teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy az erős konvergenciát a (0.2.a) és a (0.2.b) feltételek együttes teljesülésével J. Hyslop már 1952-ben definiálta ([5]).

0.3. lemma ([15], statement (viii))

Ha $\lambda \geq 1$ akkor $s_n \rightarrow s|I|_{\lambda} \Rightarrow s_n \rightarrow s[I]_{\lambda} \Rightarrow s_n \rightarrow sI.$

0.4. lemma ([15], statement (iv))

Ha $\lambda > \mu > 0$ akkor $s_n \rightarrow s[I]_{\lambda} \Rightarrow s_n \rightarrow s[I]_{\mu}.$

(Az állítás azonnal adódik a λ -adik és μ -edik hatványközép közti egyenlőtlenségből.)

0.8 ELŐZETES HALMAZELMÉLETI ISMERETEK

E rövid részben a második kategóriás halmaz fogalmának kialakítását elevenítjük fel, illetve azzal kapcsolatos néhány egyszerű állítást fogalmazunk meg.

0.5 definíció

Egy H halmaz sűrű a $[0,1]$ intervallumon, ha minden $[0,1]$ -beli nyitott intervallumba esik pontja.

0.6. definíció

Egy H halmaz nemsűrű a $[0,1]$ intervallumon, ha a $[0,1]$ bármely nyitott intervallumába esik olyan nyitott intervallum, amelyben H -nak nincs pontja.

Nemsűrű halmazt alkot például véges sok pont a $[0,1]$ intervallumból. Azonban kontinuumszámosságú halmaz is lehet nemsűrű, ilyen például a Cantor-féle triadikus halmaz. Ismert, hogy ez a kontinuumszámosságú halmaz zárt, továbbá nullamértékű ([14], 45-47. oldal).

0.7. lemma

A Cantor-féle halmaz nemsűrű a $[0,1]$ intervallumon.

Bizonyítás:

Ad absurdum tegyük fel, hogy nem igaz az, hogy nemsűrű. Ez azt jelenti, hogy a $[0,1]$ intervallumnak van olyan J_0 nyitott intervalluma, hogy annak bármely részintervallumába esik pont a Cantor-halmazból. Azonban a Cantor-halmaz képzése során bármely intervallumból, így J_0 -ból is marad el intervallum. Ha ugyanis vesszük a $[0,1]$ intervallum triadikus felbontását:

$$0,1_3 ; 0,2_3$$

$$0,01_3 ; 0,02_3 ; 0,11_3 ; 0,12_3 ; 0,21_3 ; 0,22_3$$

.

.

.

mivel a felbontás során keletkező intervallumok hossza $(\frac{1}{3})^n$, az n_0 -edik lépésben J_0 -ba is kerül ilyen triadikus intervallum. Ez vagy elmaradt korábban, vagy ha nem, akkor az (n_0+1) -edik lépésben annak középső harmada marad el. *

0.8. definíció

Azt mondjuk, hogy egy H halmaz első kategóriás a $[0,1]$ intervallumon - röviden első kategóriás - , ha előáll megszámlálható sok, a $[0,1]$ intervallumon nemsűrű halmaz uniójaként.

Első kategóriás például bármely megszámlálható halmaz. Első kategóriás továbbá a Cantor-féle halmaz is, mivel nemsűrű (0.7. lemma). Ez azt jelenti, hogy van kontinuumszámoosságú első kategóriás halmaz.

0.9. lemma

Ha $H_1, H_2, H_3, \dots$ első kategóriásak, akkor $\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$ is első kategóriás.

Bizonyítás:

Legyen $H_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{1k}, H_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{2k}, \dots$, ahol a

$\{H_{1k}\}_{k=1}^{\infty}, \{H_{2k}\}_{k=1}^{\infty}, \dots$ halmazok mindegyike nemsűrű, lévén $H_1, H_2, \dots$ első kategóriásak. Ekkora megszámlálható

$H_{11}, H_{12}, H_{13}, \dots$

$H_{21}, H_{22}, H_{23}, \dots$

.

.

.

nemsűrű halmazok uniójából előáll az $\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$ halmaz, így ez is első kategóriás. *

0.10. definíció

Akkor mondjuk, hogy egy H halmaz második kategóriás a $[0,1]$ intervallumon - röviden második kategóriás -, ha nem első kategóriás a $[0,1]$ intervallumon.

0.11. lemma

Bármely zárt I intervallum második kategóriás.

Bizonyítás:

Ad absurdum tegyük fel, hogy a zárt I intervallum első kategóriás, azaz előáll

$$I = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$$

alakban, ahol $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$ nemsűrű halmazok sorozata. Legyen I_1 az I -nek olyan részintervalluma, amelybe H_1 -nek nem esik pontja. Ilyen van, mert H_1 nemsűrű. Legyen ezután I_2 az I_1 -nek olyan részintervalluma, amelybe H_2 -nek nem esik pontja. Ilyen ismét van, mert H_2 nemsűrű. I_3 legyen I_2 olyan részintervalluma, amelybe H_3 -nak nem esik pontja és így tovább. Feltehető, hogy az $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ intervallumok szigorúan egymásba skatulyázottak és hosszuk 0-hoz tart.

A közös pontjuk legyen x , amelyre $x \in J$. Ez az x azonban nincs egyetlen H_m -ben sem, tehát $x \notin J$, ami ellentmondás. *

0.12. lemma

Ha $H \subset [0,1]$ és $\bar{H}$ a $H[0,1]$ -re vonatkozó komplementere, akkor H és $\bar{H}$ egyidejűleg nem lehetnek első kategóriások.

Bizonyítás

Ha H és $\bar{H}$ is első kategóriás lenne, akkor a 0.9. lemma miatt uniójuk, a $[0,1]$ intervallum is az lenne, de ez a 0.11. lemma miatt nem lehet.

0.13. lemma

Egy első kategóriás halmaz bármely részhalmaza szintén első kategóriás.

Bizonyítás

Ha ugyanis lenne második kategóriás részhalmaza, akkor nem állna elő nemsűrű halmazok uniójaként, ami ellentmond az első kategóriás halmaz 0.8. definíciójának. *

0.14. lemma

Ha egy H halmaz sűrű a $[0,1]$ intervallumon és $H = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$, ahol $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$ nyitott intervallumok sorozata, akkor H második kategóriás.

Bizonyítás

Legyen $\bar{H}$ a H $[0,1]$ -re vonatkozó komplementere. Ekkor $\bar{H} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{H}_m$, ahol $\bar{H}_m$ a H_m -nek $[0,1]$ -re vonatkozó komplementere. A $\{\bar{H}_m\}_{m=1}^{\infty}$ halmazok zártak, nemsűrűek ($\bar{H}_m$ a H sűrűsége miatt nem tartalmazhat intervallumot). Így a $\bar{H}$ első kategóriás, és a 0.12. lemma miatt H második kategóriás. *

0.15. lemma

Legyen $f(x)$ folytonos egy zárt intervallumon. Ekkor azon x -ek H halmaza, amelyekre fennáll, hogy $|f(x)| \leq N$ ($N=1,2,\dots$) zárt halmaz.

Bizonyítás

Be kell látni, hogy H minden torlódási pontját tartalmazza. Legyen x_0 tetszőleges torlódási pontja. Válasszunk ki egy tetszőleges $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, amelyre $x_n \rightarrow x_0$, továbbá $x_n \in H$ minden n esetén. f folytonossága miatt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Fennáll, hogy

$$f(x_n) \leq N$$

$\downarrow$

$$f(x_0) \leq N$$

$$(x_n \rightarrow x_0)$$

ami azt jelenti, hogy $x_0 \in H$, amivel állításunkat igazoltuk.*

0.16. lemma

Ha egy zárt H halmaz sűrű egy intervallumon, akkor tartalmazza az egész intervallumot.

Bizonyítás

Ad absurdum tegyük fel, hogy van olyan x_0 pontja az intervallumnak, amelyre az teljesül, hogy $x_0 \notin H$. Mivel H sűrű, kiválaszthatunk olyan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pontsorozatot, amelyre $x_n \rightarrow x_0$ teljesül, továbbá $x_n \in H$ minden n esetén. Mivel a H zárt, ezért minden torlódási pontját, így x_0 -t is tartalmaznia kell, ami ellentmondás.*



I. FEJEZET

DENJOY-LUZIN-TIPUSÚ TÉTELEK ABSZOLÚT ÉS ERŐS KONVERGENCIÁRA

A fejezet bizonyításai során szükségünk lesz a következő eredményekre, amelyeket most bizonyítás nélkül előrebecsájtunk.

1.1. Jegorov-tétel ([14], 188. oldal)

Ha a mérhető függvényeknek egy $\{f_n(x)\}$ sorozata pontonként konvergál valamely véges mértékű E halmazon, akkor tetszés szerinti kis pozitív δ -t megadva létezik E -nek olyan mérhető E' részhalmaza, amelynek a mértéke E mértékétől δ -nál kevesebbel különbözik, és amelyen a konvergencia egyenletes.

1.2 lemma ([19], 46. oldal)

Ha E a $[0, 2\pi]$ mérhető része, és $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ a valós számoknak egy tetszőleges sorozata, akkor

$$\int_E \cos^2(nx + \xi_n) dx \rightarrow \frac{|E|}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

ahol $|E|$ az E halmaz Lebesgue mértékét jelöli.

Trigonometrikus sorok konvergenciájával kapcsolatos vizsgálatok alapvető eredménye a Denjoy-Luzin-tétel, melynek mondanivalója kettős. Egy trigonometrikus sor pozitív mértékű halmazon való abszolút konvergenciájából egyrészt

feltételt kapunk a trigonometrikus sor együtthatóira, másrészt - épp az együtthatófeltétel következményeként - megállapíthatjuk, hogy egy tetszőleges pozitív mértékű halmazon való abszolút konvergenciából következik a mindenütt való abszolút konvergencia.

1.3. Denjoy-Luzin-tétel ([19], 232. oldal)

Ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.4)$$

trigonometrikus sor abszolút konvergens egy pozitív mértékű halmazon, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty \quad (1.5)$$

1.6. Következmény

Az (1.4) sor pozitív mértékű halmazon való abszolút konvergenciájából következik a mindenütt való abszolút konvergencia.

Valóban, az (1.5) teljesülése a majoráns kritérium miatt maga után vonja az (1.4) sor mindenütt való abszolút konvergenciáját.

A Denjoy-Luzin-tételnek általánosításai is ismertek. Így például a következő eredmény a λ indexű abszolút szummálhatóságra vonatkozik:

1.7 tétel ([8], Теорема 1.(i))

Legyen $\lambda \geq 1$. Ha az (1.4) trigonometrikus sor $|C, 0|_\lambda$ - szummálható egy pozitív mértékű halmazon, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} (|a_n|^\lambda + |b_n|^\lambda) < \infty \quad (1.8)$$

Bizonyítás ($\lambda=1$ esetben az 1.3. tétel bizonyítását adja)

Legyen a feltételben szereplő pozitív mértékű halmaz E .

A $|C, 0|_\lambda$ - szummálhatóság azt jelenti, hogy az E halmaz minden x elemére fennáll, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |a_n \cos nx + b_n \sin nx|^\lambda < \infty \quad (1.9)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \cos \alpha_n = \frac{a_n}{\rho_n}, \quad \sin \alpha_n = -\frac{b_n}{\rho_n}$$

Ezek felhasználásával (1.9) a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |\rho_n \cos \alpha_n \cos nx - \rho_n \sin \alpha_n \sin nx|^\lambda = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |\rho_n \cos(nx + \alpha_n)|^\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} \rho_n |\cos(nx + \alpha_n)|^\lambda < \infty \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ez azt is jelenti, hogy a részletösszegekből képzett függvénysorozat pontonként konvergál az E halmazon. Mivel a részletösszegek sorozata mérhető függvényekből áll, ezért teljesülnek az 1.1. Jegorov-tétel feltételei, így van olyan

pozitív mértékű $H \subset E$ halmaz, amelyen a konvergencia egyenletes. (Az hogy H korlátos, nyilvánvaló. Az is elérhető, hogy zárt legyen. A továbbiakban ilyennek tekintjük.) Jelölje a határfüggvényt $s(x)$. Mivel a sor tagjai folytonosak, és a konvergencia egyenletes, ezért $s(x)$ is folytonos és korlátos, azaz van olyan K_1 szám, hogy a H minden x elemére fennáll:

$$0 \leq s(x) \leq K_1 \quad (1.11)$$

Az (1.10) sor periodicitása miatt feltehető, hogy $H \subset [0, 2\pi]$. Az 1.2. lemma miatt feltehetjük, hogy van olyan n_0 , hogy $n > n_0$ esetén

$$\left\{ \int_H \cos^2(nx + \alpha_n) dx \right\}^\lambda \geq \frac{|H|^\lambda}{2^{\lambda+1}} \quad (1.12)$$

Továbbmenve, az (1.11), (1.12), a Hölder-egyenlőtlenség, valamint a korlátos zárt halmazon folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens függvénysor tagonkénti integrálására vonatkozó tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{\lambda-1} (|a_n|^\lambda + |b_n|^\lambda) &\leq K_2 \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} \rho_n^\lambda n^{\lambda-1} \leq \\ &\leq K_2 \cdot \frac{2^{\lambda+1}}{|H|^\lambda} \sum_{n=n_0}^{\infty} \rho_n^\lambda n^{\lambda-1} \left\{ \int_H \cos^2(nx + \alpha_n) dx \right\}^\lambda \leq \\ &\leq K_2 \cdot \frac{2^{\lambda+1}}{|H|^\lambda} \sum_{n=n_0}^{\infty} \rho_n^\lambda n^{\lambda-1} \left\{ \int_H |\cos(nx + \alpha_n)| dx \right\}^\lambda \leq \end{aligned}$$

$$\leq K_2 \cdot \frac{2^{\lambda+1}}{|H|} \sum_{n=n_0}^{\infty} \rho_n^\lambda n^{\lambda-1} \left\{ \int_H |\cos(nx + \alpha_n)|^\lambda dx \right\} \leq$$

$$\leq K_2 \cdot \frac{2^{\lambda+1}}{|H|} \int_H s(x) dx \leq K_1 \cdot K_2 \cdot 2^{\lambda+1} < \infty \cdot *$$

1.13. Következmény

Az (1.4) sor pozitív mértékű halmazon való $|C, 0|_\lambda$ - szummálhatósága maga után vonja a mindenütt való $|C, 0|_\lambda$ - szummálhatóságot

Valóban, mivel

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |a_n \cos nx + b_n \sin nx|^\lambda &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} (|a_n| + |b_n|)^\lambda \leq \\ &\leq 2^{\lambda-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} (|a_n|^\lambda + |b_n|^\lambda) < \infty \end{aligned}$$

így az (1.8) teljesülése a majoráns kritérium miatt maga után vonja az (1.4) sor mindenütt való $|C, 0|_\lambda$ - szummálhatóságát.

A következő eredmény az előzőek erős konvergenciára vonatkozó megfelelője.

1.14. tétel ([15], Theorem 1.)

Legyen $\lambda \geq 1$. Ha az (1.4) trigonometrikus sor λ index mellett erősen konvergál egy pozitív mértékű halmazon, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n |k a_k|^\lambda = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n |k b_k|^\lambda = 0$$

(1.15.a-b)

Bizonyítás

Az (1.4) sor λ indexes erős konvergenciájából a 0.2. lemma miatt következik, hogy a feltételben szereplő pozitív mértékű halmaz, amelyet jelöljünk E -vel, minden x elemére fennáll:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^\lambda |a_k \cos kx + b_k \sin kx|^\lambda = 0 \quad (1.16)$$

Az 1.7. tétel bizonyításában bevezetett jelölésekkel (1.16) a következő alakú:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^\lambda \rho_k^\lambda |\cos(kx + \alpha_k)|^\lambda = 0 \quad (1.17)$$

Az 1.7. tétel bizonyításához hasonlóan járunk el. Felhasználva az 1.1. Jegorov-tételt, kapjuk, hogy van olyan $H \subset E$ halmaz, ahol a konvergencia egyenletes. Az 1.2. lemma alapján, $k > k_0$ esetben, bármely $\lambda \geq 1$ esetén

$$\left\{ \int_H \cos^2(kx + \alpha_k) dx \right\}^\lambda \geq \frac{|H|^\lambda}{2^{\lambda+1}} \quad (1.18)$$

Az (1.17), (1.18), a Hölder egyenlőtlenség és a tagonkénti integrálásra vonatkozó tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n |k a_k|^\lambda &\leq K_1 \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=k_0}^n k^\lambda \rho_k^\lambda \leq \\
 &\leq K_1 \cdot \frac{2^{\lambda+1}}{|H|^\lambda} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=k_0}^n k^\lambda \rho_k^\lambda \left\{ \int_H \cos^2(kx + \alpha_k) dx \right\}^\lambda \leq \\
 &\leq K_1 \frac{2^{\lambda+1}}{|H|^\lambda} \frac{1}{n+1} \sum_{k=k_0}^n k^\lambda \rho_k^\lambda \left\{ \int_H |\cos(kx + \alpha_k)| dx \right\}^\lambda \leq \\
 &\leq K_1 \frac{2^{\lambda+1}}{|H|^\lambda} \frac{1}{n+1} \sum_{k=k_0}^n k^\lambda \rho_k^\lambda \int_H |\cos(kx + \alpha_k)|^\lambda dx \leq \\
 &\leq K_1 \cdot K_2 \cdot 2^{\lambda+1} \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0. \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

azaz (1.15.a) teljesül. (1.15.b) fennállása ugyanígy látható be. *

Az előző 1.14. tétel a korábbiakkal analógiát mutat: a pozitív mértékű halmazon való erős konvergenciából itt is együtthathatófeltételek adódnak. A további - bizonyítás nélkül közölt - eredmények azonban eltérést mutatnak az abszolút konvergenciától: egy pozitív mértékű halmazon való erős konvergencia csak a majdnem mindenütt való erős konvergenciát vonja maga után.

1.19. tétel ([16], Theorem 2.)

Legyen $\lambda > 1$. Ha az (1.4) trigonometrikus sor λ index mellett erősen konvergál egy pozitív mértékű vagy második kategóriás halmazon, akkor (1.4) egy L^p -beli ($p \geq 1$) függvény Fourier-sora, továbbá az f minden Lebesgue-pontjában $s_n f \rightarrow f$ $[I]_\lambda$.

(Itt L^p jelöli a p -edik hatványon integrálható függvények halmazát, $s_n f$ pedig az f függvény Fourier-sorának n -edik részletösszegét.)

$\lambda = 1$ esetre is vonatkozik az alábbi

1.20. tétel ([15], Theorem 3.(i))

Legyen $\lambda \geq 1$. és $f \in L^1$. Ekkor annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $s_n f \rightarrow f$ $[I]_\lambda$ majdnem mindenütt teljesüljön, az, hogy az f Fourier együtthatói eleget tegyenek az (1.15.a-b) összefüggéseknek.

Azt, hogy az előző tételekben a majdnem mindenütt való erős konvergenciát nem cserélhetjük ki a mindenütt való erős konvergenciára, mutatja a következő példa. Tekintsük a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{k(\ln k)^{1/\lambda}} \quad (1.21)$$

függvénysort, $\lambda \geq 1$. Megmutatjuk, hogy (1.21) a $(0, 2\pi)$ intervallumon erősen konvergens, de a végpontokban nem, vagyis egy pozitív mértékű halmazon való erős konvergenciából nem következik a mindenütt való erős konvergencia

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=2}^n \cos kx \right| &= \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \cos x - \frac{1}{2} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| + |\cos x| + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2|\sin \frac{x}{2}|} + |\cos x| + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $x \neq 0, 2\pi$ esetén a $\left| \sum_{k=2}^n \cos kx \right|$ kifejezés korlátos, továbbá az $\left\{ \frac{1}{k(\ln k)^{1/\lambda}} \right\}_{k=2}^{\infty}$ sorozat monoton 0-hoz tart, ezért a Dirichlet-kritérium miatt az (1.21) sor konvergens minden $x \in (0, 2\pi)$ esetén. Továbbá minden $x \in (0, 2\pi)$ esetén fennáll, hogy

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^n k^{\lambda} \left| \frac{\cos kx}{k(\ln k)^{1/\lambda}} \right|^{\lambda} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1.22)$$

(Zérushoz konvergáló számsorozat számtani közepeiből képzett sorozat szintén zérushoz tart.)

A konvergencia, valamint (1.22) együttes teljesülése a 0.2. lemma miatt éppen az erős konvergenciát jelenti. $x=0, 2\pi$ esetben az (1.21) sor

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{1/\lambda}}$$

alakú. Amiről a

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln k)^{1/\lambda}} = \frac{1}{2(\ln 2)^{1/\lambda}} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^{1/\lambda}} > K + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln k}$$

becslés ($\lambda \geq 1$), továbbá az integrálkritérium alapján látszik, hogy nem is konvergens, azaz a 0.2. lemma alapján nem teljesül az erős konvergencia feltétele.

Az előzőekben pozitív mértékű halmazon való abszolút illetve erős konvergencia következményeit láttuk. Most rátérünk a "közönséges" konvergencia esetére. Ehhez tekintsük azt az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < x < \pi \\ f_k(2x), & \text{ha } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.23)$$

függvényt, amely a $(0, \pi)$ -n azonosan zérus, a $[\pi, 2\pi]$ -n pedig A.N.Kolmogorov azon függvényének erre az intervallumra zsugorított transzformáltja, amelynek Fourier-sora mindenütt divergens ([7]). Ekkor a Riemann-féle első lokalizáció-tétel ([14], 325. oldal) és f_k előzőleg leírt tulajdonsága alapján az (1.23) alatt szereplő f függvényről megállapíthatjuk, hogy Fourier-sora a $(0, \pi)$ -n konvergens, a $[\pi, 2\pi]$ -n divergens. Ez a példánk azt mutatja, hogy egy trigonometrikus sor pozitív mértékű halmazon való közönséges konvergenciájának következményeként nem fogalmazhatunk meg az abszolút illetve az erős konvergencia esetéhez hasonló állítást: általában nem mondhatunk többet az eredeti halmazon történő konvergenciánál.

Összegezve: ahogy a konvergencia fokozatai "gyengülnek", úgy vonnak maguk után egyre "enyhébb" következményeket.

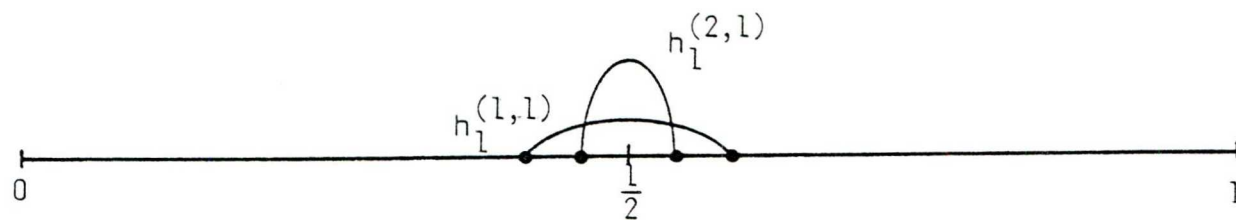
Eddigi tárgyalásunkban egy pozitív mértékű halmazon való konvergenciákból kaptunk eredményeket. Megoldatlan az olyan halmazok teljes leírása, amelyeken az abszolút illetve az erős konvergencia a látott (1.5), (1.15.a-b) eredményekkel azonos összefüggések fennállását vonja maga után. E probléma megoldásához visz közelebb a fejezet további része, a második kategóriás halmaz fogalmának felhasználásával, amelynek fő érdekességét mutatja a következő

1.24. lemma

Létezik nullamértékű második kategóriás halmaz.

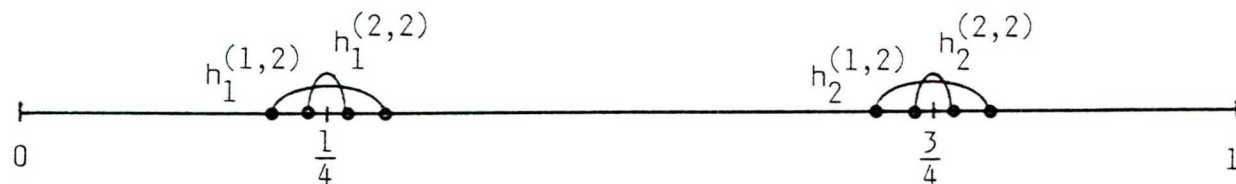
Bizonyítás:

Tekintsük a $[0,1]$ intervallumot. Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton, zérushoz tartó számsorozat. Képezük a H_n halmazokat a következő módon: $H_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_n^{(k)}$, $H_n^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} h_i^{(n,k)}$. Itt $h_i^{(n,k)}$ azt a halmazt jelöli, amelyet úgy kapunk, hogy a $\frac{j}{2^k}$ ($j = 1, 3, 5, \dots, 2^k-1$) pontok közül az i -edikre ($i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$) mint középpontra egy $\frac{a_n}{2^{2^{k-1}}}$ hosszúságú nyitott intervallumot helyezünk (27. oldal, 1. ábra). Ekkor minden n esetén H_n nyitott, sűrű halmaz, amelyre fennáll, hogy $|H_n| \leq a_n$. Képezzük a $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ halmazt! Ekkor a 0.14. lemma miatt H második kategóriás. Továbbá H nullamértékű, mivel bezárható véges összhosszúságú intervallumrendszerbe úgy, hogy a halmaz minden egyes pontja végtelen sok intervallum belsejébe esik. *



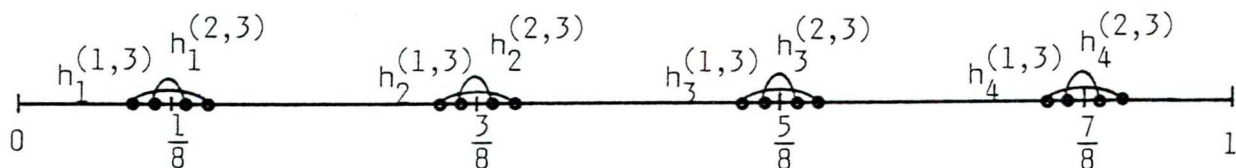
$$H_1^{(1)} = h_1^{(1,1)} \quad , \quad H_2^{(1)} = h_1^{(2,1)}$$

$$|H_1^{(1)}| = \frac{a_1}{2} \quad , \quad |H_2^{(1)}| = \frac{a_2}{2}$$



$$H_1^{(2)} = h_1^{(1,2)} \cup h_2^{(1,2)} \quad , \quad H_2^{(2)} = h_1^{(2,2)} \cup h_2^{(2,2)}$$

$$|H_1^{(2)}| = \frac{a_1}{8} + \frac{a_1}{8} = \frac{a_1}{4} \quad , \quad |H_2^{(2)}| = \frac{a_2}{8} + \frac{a_2}{8} = \frac{a_2}{4}$$



$$H_1^{(3)} = \bigcup_{i=1}^4 h_i^{(1,3)} \quad , \quad H_2^{(3)} = \bigcup_{i=1}^4 h_i^{(2,3)}$$

$$|H_1^{(3)}| = \frac{a_1}{8} \quad , \quad |H_2^{(3)}| = \frac{a_2}{8}$$

⋮

$$H_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_1^{(k)} \quad , \quad H_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_2^{(k)}$$

$$|H_1| \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{4} + \dots = a_1 \quad , \quad |H_2| \leq \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots = a_2$$

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$$

1.25. tétel ($\lambda = 1$ esetben [19], 233. oldal)

Legyen $\lambda \geq 1$. Ha az (1.4) trigonometrikus sor $|C, 0|_\lambda$ - szummálható egy második kategóriás E halmazon (még ha az nullamértékű is), akkor (1.8) fennáll, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} (|a_n|^\lambda + |b_n|^\lambda) < \infty .$$

Bizonyítás:

Ha $|E| > 0$, akkor az 1.7. tétel miatt a bizonyítás kész. Legyen most $|E| = 0$. Az 1.7. tétel bizonyítása során bevezetett jelölésekkel a $|C, 0|_\lambda$ - szummálhatóság azt jelenti, hogy az E halmaz minden elemére

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} \rho_n^\lambda |\cos(nx + \alpha_n)|^\lambda < \infty \quad (1.26)$$

Az 1.7. tétel állítása (ami megegyezik a jelenlegi állításunkkal) a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{\lambda-1} \rho_n^\lambda < \infty \quad (1.27)$$

fennállításából adódott. Ad abszurdum tegyük most fel, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} \rho_n^\lambda = \infty \quad (1.28)$$

Legyen A azon x -ek halmaza, amelyekre az (1.26) kifejezés véges. Fennáll, hogy $E \subset A$. Ekkor a 0.15. lemma miatt előáll zárt halmazok uniójaként. Ezek egyike sem lehet sűrű, mert ekkor a 0.16 lemma miatt $|A| > 0$, de ekkor a 1.7. tétel alapján (1.27) teljesülne, ami ellentmond az (1.28) feltevésünknek. Ekkor tehát A előáll nemsűrű halmazok uniójaként, azaz első kategóriás. Ebből azonban a 0.13. lemma alapján az adódik, hogy E is első kategóriás, ami ellentmondás. *

A fejezet befejezéseként bizonyítás nélkül közöljük az előző tétel erős konvergenciára vonatkozó megfelelőjét.

1.29. tétel ([15], Theorem 2.)

Legyen $\lambda \geq 1$. Ha az (1.4) trigonometrikus sor λ index mellett erősen konvergál egy második kategóriás halmazon (még ha az nullamértékű is), akkor (1.15.a-b) teljesülnek, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n |k a_k|^\lambda = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n |k b_k|^\lambda = 0 .$$

II. FEJEZET

ABSZOLÚT ÉS ERŐSEN KONVERGENS FOURIER-SORRAL RENDELKEZŐ FÜGGVÉNYEK BANACH TEREINEK TARTALMAZÁSI RELÁCIÓI

A folytonos függvények C terének és a p -edik hatványon integrálható függvények L^p ($1 \leq p \leq \infty$) terének értelmezése és beható vizsgálata nyomán, az ezekben a példákban mutatkozó tulajdonságok absztrakciója révén alakult ki a teljes normált lineáris terek vagy Banach-féle terek általános fogalma.

A) Klasszikus függvényterek

Jól ismert, hogy a 2π -szerint periódikus, $[0, 2\pi]$ -n folytonos (valós értékű) függvények C halmaza az

$$\|f\|_C = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$$

normával; a 2π -szerint periódikus, $[0, 2\pi]$ -n p -edik hatványon integrálható függvények L^p halmaza az

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

normával Banach tereket alkotnak, továbbá L^∞ szintén Banach tér az

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$$

normával.

U -val jelöljük a $[0, 2\pi]$ -n egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok összegfüggvényeinek halmazát, amelyről szintén belátható ([6], 11-12. oldal), hogy Banach tér az

$$\|f\|_U = \sup_n \|s_n f\|_C$$

normával, ahol $s_n f$ jelöli az f függvény Fourier-sorának n -edik részletösszegét.

A $[0, 2\pi]$ -n abszolút konvergens trigonometrikus sorok összegfüggvényeinek A halmaza pedig az

$$\|f\|_A = \frac{1}{2} |\hat{f}_C(0)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\hat{f}_C(n)| + |\hat{f}_S(n)| \right)$$

normával alkot Banach teret, sőt Banach algebrát a függvények közönséges szorzására nézve. ([6], 12-14. oldal). (Itt $\hat{f}_C(n)$ és $\hat{f}_S(n)$ jelöli az f függvény n -edik Fourier együtthatóit.)

A fenti terek tartalmazási relációi közül jól ismert az L^p terek szigorú értelemben vett egymásba skatulyázása

$$L^{\infty} \subset L^r \subset L^p \subset L^1. \quad (1 < p < r < \infty) \quad (2.1)$$

Világos továbbá, hogy

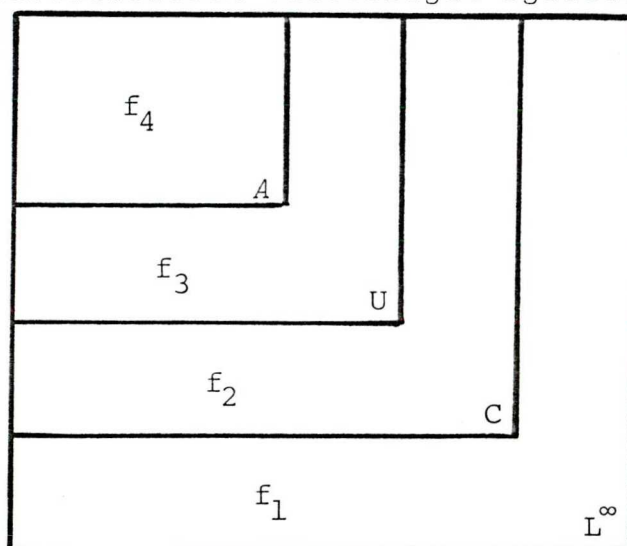
$$A \subset U \subset C \subset L^{\infty} \quad (2.2)$$

A (2.2) összefüggést szemléltetjük a 2. ábrán, ahol az

$$f_1(x) = \frac{\pi-x}{2}, \quad f_2(x), \quad f_3(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}, \quad f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

(f_2 : Fejér folytonos függvénye, melynek Fourier-sora divergens [14], 334. oldal)

függvények a tartalmazások valódiságát igazoló függvények.



2. ábra

A (2.2) összefüggésnek felel meg ($f \in A$ esetben) az előzőleg definiált normák közti egyenlőtlenség ([9], 21-22. oldal)

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_C \leq \|f\|_U \leq \|f\|_A \quad (2.3)$$

A klasszikus eredmények lezárásaként megemlítjük az L^p terek reflexivitását:

$$\left((L^p)^* \right)^* = L^p \quad (2.4)$$

ami azonnal adódik az

$$(L^p)^* = L^q \quad (1 < p < \infty; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

összefüggésből ([14], 308. oldal), ahol B^* jelöli a B lineáris operációinak összességét, a B duálisát.

B) Az A^λ , A^λ , S^λ , S^λ terek

Először a klasszikus A tér általánosítási céljából bevezetett A^λ , A^λ halmazok definíciói:

$$A^\lambda = \{f \in L^1 : s_n f \rightarrow f|I|_\lambda \text{ m.m. a}[0, 2\pi] - n\}$$

$$A^\lambda = \{f \in C : s_n f \rightarrow f|I|_\lambda \text{ egyenletesen a } [0, 2\pi] - n\}$$

Bizonyítás nélkül adunk kritériumot a fent definiált halmazokhoz való hozzátartozásra vonatkozóan:

2.5 tétel Legyen $\lambda \geq 1$.

i) ([12], Theorem 3.)

$f \in A^\lambda$ akkor és csak akkor, ha $f \in C$ és

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{\lambda-1} \left(|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)| \right)^\lambda < \infty \quad (2.6)$$

ii) ([13], Theorem 4.i))

$f \in A^\lambda$ akkor és csak akkor, ha $f \in L^\lambda$ és (2.6) fennáll.

Az előző fejezetben szereplő Denjoy-Luzin-tétel alapján világos, hogy $A^1 = A^1 = A$. Ha pedig $\lambda > 1$, akkor $A^\lambda \subset A^\lambda$, ahol a valódi tartalmazást mutatja az

$$f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{k \ln k} \quad (2.7)$$

függvény, amelyről belátjuk, hogy $f \in A^\lambda \setminus A^\lambda$.

Ehhez ad segítséget a következő

2.8. lemma

Ha $a_k \geq 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) és

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \quad (2.9)$$

továbbá az f függvény Fourier-sora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (2.10)$$

akkor az f függvény nem lehet folytonos az $x=0$ helyen.

Bizonyítás:

Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, azaz azt, hogy f folytonos az $x=0$ helyen. Ekkor Fejér tétele szerint e pontban a Fourier-sor részletösszegei számtani közepeiből képzett

$$\frac{s_0(0) + s_1(0) + \dots + s_n(0)}{n+1} \quad (2.11)$$

sorozat konvergál az $f(0)$ értékhez. (2.10) alapján

$$s_n(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k$$

ezért (2.9) miatt

$$s_n(0) \rightarrow \infty, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Így minden $M(>0)$ számhoz van olyan ν , hogy ha $n > \nu$, akkor

$$s_n(0) > M.$$

Legyen $n > 2\nu+1$, ekkor

$$\begin{aligned} & \frac{s_0(0) + \dots + s_\nu(0) + s_{\nu+1}(0) + \dots + s_n(0)}{n+1} > \\ & > \frac{s_0(0) + \dots + s_\nu(0)}{n+1} + \frac{1}{n+1} (n-\nu)M > \\ & \geq \frac{1}{n+1} (n-\nu)M > \frac{M}{2}, \end{aligned}$$

ami éppen azt jelenti, hogy a (2.11) sorozat valódi divergens. Ez elentmondás, így lemmánk bizonyítást nyert. *
E lemmát alkalmazhatjuk a (2.7) sorra, hiszen $a_0=a_1=a_2=0$,
 $a_k = \frac{1}{k \ln k}$ ($k \geq 3$) esetén $a_k \geq 0$, az integrálkritérium alapján adódik, hogy

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} = \infty$$

így (2.9) teljesül, továbbá a

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln^2 k} < \infty$$

miatt (2.7) a Riesz-Fischer-tétel alapján egy négyzetesen integrálható f függvény Fourier-sora.

Összefoglalva: a 2.8. lemma alapján $f \notin C$, így a 2.5. tétel miatt $f \in A^\lambda \setminus A^\lambda$.

A klasszikus függvénytereknél látott $\|\cdot\|_A$ norma λ indexes változataként bevezethető az

$$\|f\|_A^\lambda = \left(\frac{1}{2} |\hat{f}_C(0)|^\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} (|\hat{f}_C(n)|^\lambda + |\hat{f}_S(n)|^\lambda) \right)^{1/\lambda} \quad (2.12)$$

norma, amelyről belátható, hogy vele az A^λ halmaz Banach teret alkot. ([13], Theorem 6.)

2.13. megjegyzés ([9], 49. oldal)

Ha $f \in A^\lambda$ ($\lambda \geq 1$), akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n f\|_A^\lambda = 0$.

Valóban, figyelembe véve az

$$\begin{aligned} (\hat{s}_n f)_C(k) &= \begin{cases} \hat{f}_C(k) & , k = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & , k = n+1, n+2, \dots \end{cases} \\ (\hat{s}_n f)_S(k) &= \begin{cases} \hat{f}_S(k) & , k = 1, 2, \dots, n \\ 0 & , k = n+1, n+2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

összefüggéseket, a Fourier együtthatók additivitását kihasználva

$$\begin{aligned} \|f - s_n f\|_{A^\lambda} &= \\ &= \left(\frac{1}{2} |\hat{f}_c(0) - (s_n f)_c(0)|^\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda-1} \left(|\hat{f}_c(k) - (s_n f)_c(k)|^\lambda + |\hat{f}_s(k) - (s_n f)_s(k)|^\lambda \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}} = \\ &= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\lambda-1} (|\hat{f}_c(k)|^\lambda + |\hat{f}_s(k)|^\lambda) \right)^{\frac{1}{\lambda}}, \end{aligned}$$

ami lévén a (2.6) sor maradéka, az $f \in A^\lambda$ feltétel miatt zérushoz tart, ha $n \rightarrow \infty$. *

Banach terekkel kapcsolatban gyakran felmerülő kérdés, hogy Hilbert teret alkotnak-e, azaz származtathatjuk-e a normát egy skaláris szorzat-fogalomból. Tudjuk, hogy egy Banach tér akkor és csakis akkor Hilbert tér, ha a Banach térbeli normára, bármely két Banach térbeli f, g elempárra fennáll az ún. paralelogramma-azonosság, azaz

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \quad (2.14)$$

Az A^λ terekkel kapcsolatban egyedül a $\lambda=2$ esetre adhatunk kedvező választ, tehát csak az A^2 tér Hilbert tér. ([10], Theorem 1.)

$\lambda \neq 2$, $\lambda \geq 1$ esetben a válasz tagadó, amelyhez tekintsük az $f(x) \equiv \frac{1}{2}$, $g(x) = \cos x$ függvényeket.

Ekkor (2.12) alapján

$$\|f\|_{A^\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\lambda}, \quad \|g\|_{A^\lambda} = 1, \quad \|f+g\|_{A^\lambda} = \|f-g\|_{A^\lambda} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/\lambda},$$

amikkel a (2.14) paralelogramma-azonosság $\lambda \neq 2$ esetben nem teljesül, tehát A^λ , $\lambda \neq 2$ nem Hilbert tér.

Az A^λ halmazok vonatkozásában nyilvánvaló, hogy az A^1 Banach tér az $\|\cdot\|_{A^1}$ normával.

Természetesen merül fel az a kérdés, vajon az A^λ $\lambda > 1$ esetben is Banach teret alkot-e az $\|\cdot\|_{A^\lambda}$ normával? A válasz tagadó: vegyünk egy $f \in A^\lambda \setminus A^\lambda$ függvényt (ilyen, mint láttuk, létezik), amiről a 2.13. megjegyzés alapján nyilvánvaló, hogy $\{s_n f\}_{n=0}^\infty$ Cauchy-sorozat, ugyanakkor határértéke nem tartozik A^λ -ba, tehát így A^λ nem teljes tér az $\|\cdot\|_{A^\lambda}$ normában. A fenti norma azonban javítható, ezt mutatja a

2.15. tétel ([9], 13.16. tétel)

A^λ Banach teret alkot az

$$\|f\|_{A^\lambda} = \|f\|_{A^\lambda} + \|f\|_C \quad (2.16)$$

normával. ($\lambda \geq 1$, $f \in A^\lambda$)

Hasonló típusú állítások igazolásához ad hasznos segítséget a következő

2.17. lemma

Legyenek A , B , C olyan Banach terek az $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$, $\|\cdot\|_C$ normákkal, amelyekre $(A \cup B) \subset C$, $A \cap B \neq \emptyset$, továbbá bármely $f \in A$, $g \in B$ esetén vannak olyan K_A , K_B konstansok, amelyekre

$$\|f\|_C \leq K_A \|f\|_A, \quad \|g\|_C \leq K_B \|g\|_B. \quad (2.18)$$

Ekkor $A \cap B$ is Banach tér az

$$\|\cdot\|_{A \cap B} = \|\cdot\|_A + \|\cdot\|_B \quad (2.19)$$

normával.

Bizonyítás:

Nyilvánvaló, hogy (2.19) olyan normát definiál $A \cap B$ -n, amellyel az normált lineáris teret alkot. Meg kell mutatni a teljességet is: legyen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-sorozat $A \cap B$ -n az $\|\cdot\|_{A \cap B}$ normában, azaz bármely $\varepsilon (>0)$ esetén van olyan $\nu = \nu(\varepsilon)$, hogy ha $m, n > \nu$, akkor

$$\|f_n - f_m\|_{A \cap B} < \varepsilon$$

fennáll. Ekkor a (2.19) alapján $n, m > \nu$ esetben

$$\|f_n - f_m\|_A < \varepsilon \quad \text{illetve} \quad \|f_n - f_m\|_B < \varepsilon \quad (2.20)$$



Mivel A , B Banach terek a megfelelő normákban, a (2.20) alapján kapjuk, hogy vannak olyan $f_A \in A$, $f_B \in B$ függvények, amelyekre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_A\|_A = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_B\|_B = 0 \quad (2.21)$$

továbbá kihasználva a (2.18) egyenlőtlenségeket

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_A\|_C = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_B\|_C = 0 \quad (2.22)$$

Mivel C értelmezése alapján $f_A, f_B \in C$ is, ezért minden n esetén

$$\|f_A - f_B\|_C \leq \|f_A - f_n\|_C + \|f_n - f_B\|_C,$$

amiből (2.22) alapján $f_A = f_B = f_0$ adódik, de ekkor $f_0 \in A \cap B$ is. De ekkor (2.19) és (2.21) alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\|_{A \cap B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\|_A + \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\|_B$$

ami azt jelenti, hogy az f_0 az $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke az $A \cap B$ térben az $\|\cdot\|_{A \cap B}$ normában, tehát $A \cap B$ a (2.19) alatti normával teljes. *

Visszatérve most a 2.15. tétel bizonyítására, $\lambda = 1$ esetben a (2.16) alatti norma a (2.3) egyenlőtlenség és a látott $A^1 = A^1 = A$ összefüggés miatt ekvivalens a (2.12) alatti

normával, így a tételünk állítása igaz. Legyen $\lambda > 1$. Ekkor a 2.5. tétel alapján nyilvánvaló, hogy $A^\lambda = A^\lambda \cap C$ és $(A^\lambda \cap C) \subset L^\lambda$. Sőt, a [9], 6.21. lemma alapján ebben az esetben az $A^\lambda \subset L^2$ reláció teljesül, továbbá $f \in A^\lambda$ esetén

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 2\pi \|f\|_{A^\lambda}$$

Figyelembe véve még a (2.3) egyenlőtlenséget, teljesülnek a 2.17. lemma feltételei, amelyek maguk után vonják a 2.15. tétel állítását. *

Az A^λ ($\lambda > 1$) halmazt Banach térré tevő normák keresése során merültek fel az alábbiak:

$$\|f\|_{A^\lambda,1} = \sup_n \left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{\lambda-1} |s_k f - s_{k-1} f|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} + |s_n f| \right\|_C$$

$$\|f\|_{A^\lambda,2}^\lambda = \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^{\lambda-1} |s_k f - s_{k-1} f|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right\|_C^\lambda + \|f\|_U^\lambda$$

$$\|f\|_{A^\lambda,3} = \|f\|_{A^\lambda} + \|f\|_U$$

amelyekről igazolást nyert a páronkénti ekvivalencia, és az a tény, hogy bármelyikükkel az A^λ ($\lambda \geq 1$) halmaz Banach teret alkot. ([12], Theorem 5., Theorem 6.i))

Az A^λ terekkel kapcsolatban is felvethető, hogy Hilbert teret alkotnak-e. Szintén az $f(x) \equiv \frac{1}{2}$, $g(x) = \cos x$ függvények segítségével győződhetünk meg arról, hogy a

(2.14) paralelogramma-azonosság még a $\lambda = 2$ esetben sem teljesül, ugyanis

	$\ \cdot\ _{A^\lambda}$	$\ \cdot\ _C$	$\ \cdot\ _{A^\lambda}$
f	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} + 1\right)$
g	1	1	2
$f+g$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} + 1\right)$
$f-g$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} + 1\right)$

így az A^λ Banach terek nem alkotnak Hilbert teret ($\lambda \geq 1$).

Az A^λ , A^λ halmazok mintájára az erős konvergencia esetére bevezethetjük az S^λ , S^λ halmazokat:

$$S^\lambda = \{f \in L^1 : s_n f \rightarrow f[I]_\lambda \text{ m.m.a}[0, 2\pi]-n\}$$

$$S^\lambda = \{f \in C : s_n f \rightarrow f[I]_\lambda \text{ egyenletesen a } [0, 2\pi]-n\}$$

Itt is bizonyítás nélkül adjuk meg a fenti halmazokhoz való hozzátartozás kritériumát:

2.23. tétel ([17], Theorem 1. i), ii))

Legyen $\lambda \geq 1$.

i) $f \in S^\lambda$ akkor és csak akkor ha $f \in C$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^\lambda \left(|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)| \right)^\lambda = 0 \quad (2.24)$$

ii) $f \in S^\lambda$ akkor és csak akkor, ha $f \in L^\lambda$ és (2.24) fennáll.

A 2.23. tétel alapján világos, hogy $S^\lambda \subset S^\lambda(\lambda \geq 1)$, ahol a tartalmazás valódiságát mutatja (2.7) alatt már szerepelt

$$f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{k \ln k}$$

függvény, amelyről láttuk, hogy $f \notin C$, így a 2.23. tétel alapján $f \in S^\lambda \setminus S^\lambda$.

Az $\|\cdot\|_A^\lambda$ megfelelőjeként az

$$\|f\|_{S^\lambda}^\lambda = \sup_n \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (k+1)^\lambda \left(|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)| \right)^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (\lambda > 1)$$

normáról megmutatható, hogy az S^λ halmazt Banach térré teszi. ([13], Theorem 3.)

Az S^λ halmazok vonatkozásában, az A^λ, A^λ halmazokhoz hasonlóan megkérdézhető, hogy Banach teret alkotnak-e az

$\|\cdot\|_{S^\lambda}$ normával. A tagadó válasz az A^λ, A^λ halmazoknál látott gondolatmenettel analóg módon igazolható. Azonban az $\|\cdot\|_{S^\lambda}$ norma itt is módosítható, ezt mutatja a

2.25. tétel ([9], 12.16. tétel)

Az S^λ Banach teret alkot az

$$\|f\|_{S^\lambda} = \|f\|_S + \|f\|_C$$

normával. ($\lambda > 1$, $f \in S^\lambda$)

A bizonyítás most is a 2.17. lemma alapján történhet. A 2.23. tétel alapján nyilvánvaló, hogy $S^\lambda = S^\lambda \cap C$, továbbá $(S^\lambda \cup C) \subset L^\lambda$. Sőt a [9], 11.7. lemma alapján $S^\lambda \subset L^2$, valamint $f \in S^\lambda$ esetén.

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq K_\lambda \cdot \|f\|_{S^\lambda}$$

Figyelembe véve még a (2.3) egyenlőtlenséget, a 2.17. lemma miatt adódik tételünk állítása.*

Az S^λ esetén is merültek fel más alakú normák:

$$\begin{aligned} \|f\|_{S^\lambda,0} &= \sup_n \left\| \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |(k+1)s_k f - k s_{k-1} f|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right\|_C \\ \|f\|_{S^\lambda,1} &= \sup_n \left\| \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^\lambda |s_k f - s_{k-1} f|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} + \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |s_k f|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right\|_C \\ \|f\|_{S^\lambda,2} &= \sup_n \left\| \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^\lambda |s_k f - s_{k-1} f|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right\|_C + \|f\|_U \\ \|f\|_{S^\lambda,3} &= \|f\|_{S^\lambda} + \|f\|_U \quad (\lambda > 1) \end{aligned}$$

amelyekről szintén belátható, hogy ekvivalensek és bármelyikükkel S^λ ($\lambda \geq 1$) Banach teret alkot.

([12], Theorem 1., Theorem 2.i))

Az $\|f\|_{S^1,2}$ bevezetése és $\|f\|_{S^1,0}$ -al való ekvivalenciája található [1]-ben.

Az

$$\|f\|_{S^\lambda,4} = \left(\frac{1}{2} |\hat{f}_C(0)|^\lambda + \sup_{n \geq 1} n^{\lambda-1} \sum_{k=n}^{\infty} \left(|\hat{f}_C(k)|^\lambda + |\hat{f}_S(k)|^\lambda \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

([9], (14.10)) S^λ -n ($\lambda > 1$) értelmezett normával fennáll a

2.26. tétel

Az S^λ Banach teret alkot az

$$\|f\|_{S^\lambda,4} = \|f\|_{S^\lambda,4} + \|f\|_C$$

illetve az

$$\|f\|_{S^\lambda,5} = \|f\|_{S^\lambda,4} + \|f\|_U$$

normákkal ($\lambda > 1$, $f \in S^\lambda$).

A bizonyítás a 2.25. tétel bizonyításához hasonlóan, a 2.17. lemma alapján történhet, figyelembe véve a [9], 14.9. tételt és az ott szereplő (14.11) egyenlőtlenséget.*

A következőkben rátérünk az előzőleg bevezetett terek részletes tartalmazási relációinak vizsgálatára. Az ezzel kapcsolatos első eredmény: a 0.3. lemmán alapuló összefüggés az S^λ , S^λ terek egymásba skatulyázottságára, ami analóg az L^p tereknél már látott (2.1) relációval:

$$S^\lambda \subset S^\mu \quad \text{illetve} \quad S^\lambda \subset S^\mu \quad (\lambda > \mu \geq 1) \quad (2.27)$$

ahol az $s^\lambda \subset s^\mu$ tartalmazás valódiságát a későbbiek során mutatjuk meg a (2.42), (2.43) összefüggések segítségével. Az A^λ , A^μ terek esetén nem állapíthatunk meg hasonló tartalmazkodást, ezt mutatja a

2.28. tétel ([12], Theorem 4.ii); [13], Theorem 4.iii))

Az A^λ és A^μ illetve az A^λ és A^μ összehasonlíthatatlanok. ($\lambda > \mu \geq 1$)

A bizonyítás előtt előrebocsátjuk az alábbi fontos segédeszközt:

2.29. lemma

Ha az $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty$ számsorozat (tágabb értelemben) monoton csökkenve tart zérushoz, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \frac{\sin nx}{n}$$

függvénysor $[0, 2\pi]$ intervallumon egyenletesen konvergens.

Bizonyítás:

Bevezetve az

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n} \quad (N=1, 2, \dots)$$

jelölést, könnyen belátható, hogy

$$\sum_{n=M+1}^N \epsilon_n \frac{\sin nx}{n} = \sum_{k=M+1}^{N-1} (\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) F_k(x) + \epsilon_N F_N(x) - \epsilon_{M+1} F_M(x)$$

Innen, felhasználva, hogy $|F_N(x)| \leq 1 + \pi$ ($N=1,2,\dots$) ([14], 332. oldal) kapjuk, hogy

$$\left| \sum_{n=M+1}^N \varepsilon_n \frac{\sin nx}{n} \right| \leq 2 \varepsilon_{M+1} (1+\pi) < \varepsilon$$

Feltéve, hogy M elég nagy, állításunk adódik a függvénysorok egyenletes konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle kritériumból. *

A 2.28. tétel bizonyítása: (Csak A^λ és A^μ esetére.)

Legyenek

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\cos 2^{\ell} x}{2^{\ell(1-\frac{1}{\lambda})}} \quad \text{és} \quad g(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell x}{\ell(\ln(\ell+1))^{1/\mu}} \quad (2.30)$$

Megmutatjuk, hogy $\lambda > \mu \geq 1$ esetben

$$f \in A^\mu \text{ de } f \notin A^\lambda \text{ illetve } g \notin A^\mu \text{ de } g \in A^\lambda \quad (2.31.a-b)$$

Az f függvényt definiáló függvénysort majorálja a pozitív tagú, konvergens $2^{\frac{1}{\lambda}-1}$ kvóciensű mértani sor, így a majorált függvénysor abszolút és egyenletesen konvergens. A g függvényt definiáló függvénysor a 2.29. lemma miatt konvergál egyenletesen. Mivel folytonos függvényekből álló, egyenletesen konvergens függvénysor összegfüggvénye is folytonos, így $f, g \in C$. Fennáll az is, hogy mindkét függvény definiáló függvénysora, egyben Fourier-sora is, azaz

$$\hat{f}_c(n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\ell(1-\frac{1}{\lambda})}}, & \text{ha } n=2^\ell; \ell=0,1,\dots \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$$\hat{f}_s(n) = 0, \quad n=1,2,\dots$$

Mivel

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\mu-1} |\hat{f}_c(n)|^\mu = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\ell(1-\frac{\mu}{\lambda})}} < \infty, \text{ de } \sum_{n=0}^{\infty} n^{\lambda-1} |\hat{f}_c(n)|^\lambda = \sum_{\ell=0}^{\infty} 1 = \infty$$

így a 2.5. tétel i) alapján (2.31.a) bizonyítás nyert.

Tekintve, hogy

$$\hat{g}_c(n) = 0, \quad n=1,2,\dots \quad \hat{g}_s(n) = \frac{1}{n(\ln(n+1))^{\frac{1}{\mu}}} \quad n=1,2,\dots$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu-1} |\hat{g}_s(n)|^\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)} = \infty, \text{ de } \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |\hat{g}_s(n)|^\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n+1))^{\frac{\lambda}{\mu}}} < \infty$$

ugyancsak a 2.5. tétel i) alapján adódik (2.31.b). *

A 2.28. tétel "összehasonlíthatatlansági" kapcsolatán javít a következő eredményünk:

2.32. tétel ([2], Theorem 1.)

Ha $\lambda > \mu > 1$, akkor

$$A^\lambda \cap A^1 \subset A^\mu \cap A^1, \quad (2.33)$$

ahol a tartalmazás valódi.

Bizonyítás:

Legyen $f \in A^\lambda \cap A^1$, tetszőleges. A $\frac{\lambda-1}{\mu-1}$ és $\frac{\lambda-1}{\lambda-\mu}$ kitevőkre alkalmazott Hölder-egyenlőtlenség alapján nyerhető a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\mu-1} (|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)|)^\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{\mu-1} (|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)|)^{\frac{\lambda(\mu-1)}{\lambda-1}} (|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)|)^{\frac{\lambda-\mu}{\lambda-1}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\mu-1} (|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)|)^{\frac{\lambda(\mu-1)}{\mu-1}} \right)^{\frac{\lambda-1}{\mu-1}} \right)^{\frac{\mu-1}{\lambda-1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)|)^{\frac{\lambda-\mu}{\lambda-1}} \right)^{\frac{\lambda-\mu}{\lambda-1}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda-1} (|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)|)^\lambda \right)^{\frac{\mu-1}{\lambda-1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)|)^{\frac{\lambda-\mu}{\lambda-1}} \right)^{\frac{\lambda-\mu}{\lambda-1}} < \infty \end{aligned}$$

becslés, és így a 2.5. tétel i) alapján $f \in A^\mu$, valamint a már tudott $f \in A^1$ miatt $f \in A^\mu \cap A^1$. A tartalmazás valódiságának igazolásához tekintsük az

$$f_1(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos 2^\ell x}{2^{\ell(1-\frac{1}{\lambda})} \cdot \ell^{\frac{1}{\lambda}}} \quad (2.34)$$

függvényt. A 2.28. tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan mondhatjuk, hogy $f_1 \in C$. Továbbá

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda-1} (|\hat{f}_1)_C(k)|^\lambda = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} = \infty,$$

így a 2.5. tétel i) alapján $f_1 \notin A^\lambda$, de ha $\lambda > \mu \geq 1$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\mu-1} (|\hat{f}_1)_C(k)|^\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ell(1-\frac{\mu}{\lambda})} \ell^{\frac{\mu}{\lambda}}} < \infty,$$

ezért $f_1 \in A^\mu \cap A^1$. *

Az azonos típusú terek után tekintsük a különbözőek kapcsolatát, ami az erős konvergencia köztes jellegét mutatja:

2.35. tétel ([12], Theorem 4. i); [13], Theorem 4. iv))

Legyen $\lambda \geq 1$. Ekkor

$$A^\lambda \subset S^\lambda \subset U, \quad A^\lambda \subset S^\lambda \quad (2.36)$$

ahol a tartalmazások valódiak.

Bizonyítás: (Csak $A^\lambda \subset S^\lambda \subset U$ esetre.)

Először az $A^\lambda \subset S^\lambda$ tartalmazást mutatjuk meg. Legyen $f \in A^\lambda$. Ekkor a 2.5. tétel i) miatt $f \in C$ és a (2.6) feltétel teljesül. Továbbá $\lambda \geq 1$ -re

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^\lambda (|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)|)^\lambda \leq \sum_{k=0}^n k^{\lambda-1} (|\hat{f}_C(k)| + |\hat{f}_S(k)|)^\lambda$$

minden n esetén, ezért (2.6) fennállása maga után vonja (2.24)-et, tehát a 2.23. tétel i) alapján $f \in S^\lambda$, azaz $A^\lambda \subset S^\lambda$.

A tartalmazás valódiságának igazolásához tekintsük a (2.34)-ben szereplő f_1 függvényt. Erről a 2.32. tétel bizonyításában láttuk, hogy $f_1 \notin A^\lambda$, $\lambda > 1$. Most megmutatjuk, hogy $2^N \leq n \leq 2^{N+1}$ választással

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^\lambda |(\hat{f}_1)_C(k)|^\lambda \leq \frac{1}{2^N} \sum_{\ell=0}^N \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} k^\lambda |(\hat{f}_1)_C(k)|^\lambda = \frac{1}{2^N} \sum_{\ell=1}^N \frac{2^\ell}{\ell} \leq$$

$$\leq K \frac{1}{2^N} \frac{2^N}{N} \leq K \frac{1}{\log_2 n} \rightarrow 0$$

azaz (elismételve a 2.28. tételben mondottakat) $f_1 \in S^{\lambda, \lambda \geq 1}$.
Tehát $f_1 \in S^{\lambda} \setminus A^{\lambda}$, $\lambda > 1$ esetén. $\lambda = 1$ -re nézzük az

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k \ln(k+1)}$$

függvényt, amelyről megállapíthatjuk, hogy $f_2 \in C$. Az előző fejezetben szerepelt Denjoy-Luzin-tétel alapján mondhatjuk, hogy $f_2 \notin A^1$. Azonban (a 2.29. lemma segítségével) könnyen ellenőrizhető, hogy $f_2 \in S^{\lambda}$, $\lambda \geq 1$, mivel

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^{\lambda} |(\hat{f}_2)_S(k)|^{\lambda} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(\ln(k+1))^{\lambda}} \rightarrow 0$$

Így $f_2 \in S^1 \setminus A^1$.

Hátra van még az $S^{\lambda} \subset U$ reláció igazolása. A (2.27) összefüggés alapján $S^{\lambda} \subset S^1$ ($\lambda > 1$), így elegendő az $S^1 \subset U$ tartalmazást megmutatni.

$f \in S^1$ esetén az S^1 halmaz definíciója és a 0.3. lemma alapján világos, hogy $f \in U$ is teljesül. Az

$$f_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pm \frac{\cos kx + \sin kx}{k}$$

függvényről pedig megmutatható, hogy a "+", "-" előjelek majdnem minden eloszlása esetén $f_3 \in U \setminus S^1$. ([15], Theorem 4. ii)) (A majdnem minden előjel eloszlás azt jelenti, hogy kihagyjuk azokat az előjeleloszlásokat, amelyekben legfeljebb véges sok "+" vagy véges sok "-" jel szerepel, az ilyenek száma megszámlálhatóan végtelen.)*

Végezetül egy összehasonlíthatatlansági kapcsolat, a már (2.33)-ban látott A^1 -en belüli tartalmazkodásban A^λ nem cserélhető S^λ -ra:

2.37. tétel ([2], Theorem 2.)

Legyen $\lambda > \mu > 1$. Ekkor

$$S^\lambda \cap A^1 \quad \text{és} \quad A^\mu \cap A^1$$

összehasonlíthatatlanok.

Bizonyítás:

Legyen f_1 a (2.30) alatt szereplő f függvény:

$$f_1(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\cos 2^\ell x}{2^{\ell(1-\frac{1}{\lambda})}}$$

amelyről láttuk, hogy $f_1 \in A^\mu$, de $f_1 \notin A^\lambda$, $\lambda > \mu \geq 1$ (2.31.a).

Most megmutatjuk, hogy $f_1 \notin S^\lambda$, $\lambda > \mu \geq 1$. Valóban, ha $2^N \leq n \leq 2^{N+1}$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^\lambda |(\hat{f}_1)_c(k)|^\lambda \geq \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} k^\lambda |(\hat{f}_1)_c(k)|^\lambda = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{\ell=1}^N 2^\ell > \frac{1}{2},$$

ezért a 2.23. tétel i.) alapján $f_1 \notin S^\lambda$.

Legyen most ($\lambda > \mu > 1$)

$$f_2(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos[\ell(\log(\ell+1))^{1+\frac{\mu\varepsilon}{\mu-1+1}}]x}{\ell(\log(\ell+1))^{1+\varepsilon}} \quad 0 < \varepsilon < \frac{\mu-1}{\lambda-\mu}$$

ahol "[]" az "egész rész" jelölésére szolgál. Látható, hogy $f_2 \in A^1$. Mivel

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\mu-1} |(\hat{f}_2)_c(k)|^{\mu} > \sum_{\ell} \ell^{\mu-1} (\log(\ell+1))^{\mu-1+\mu\epsilon} \frac{1}{\ell^{\mu} (\log(\ell+1))^{\mu+\mu\epsilon}} = \infty,$$

így a 2.5. tétel i.) alapján $f_2 \notin A^{\mu}$.

Bevezetve a $k_{\ell} = [\ell (\log(\ell+1))^{1+\frac{\mu\epsilon}{\mu-1}} + 1]$ jelölést, $k_{N-1} \leq n \leq k_N$ választással kapjuk az alábbi becslést:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^{\lambda} |(\hat{f}_2)_c(k)|^{\mu} &\leq \frac{1}{k_{N-1}} \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=k_{\ell-1}+1}^{k_{\ell}} k^{\lambda} |(\hat{f}_2)_c(k)|^{\lambda} = \\ &= \frac{1}{k_{N-1}} \sum_{\ell=1}^N k_{\ell}^{\lambda} |(\hat{f}_2)_c(k_{\ell})|^{\lambda} \leq \frac{1}{k_{N-1}} \sum_{\ell=1}^N \frac{(\ell (\log(\ell+1))^{1+\frac{\mu\epsilon}{\mu-1}} + 1)^{\lambda}}{(\ell (\log(\ell+1))^{1+\epsilon})^{\lambda}} \leq \\ &\leq \frac{1}{k_{N-1}} 2^{\lambda} \sum_{\ell=1}^N (\log(\ell+1))^{\frac{\epsilon\lambda}{\mu-1}} \leq \frac{2^{\lambda}}{k_{N-1}} N (\log(N+1))^{\frac{\epsilon\lambda}{\mu-1}} \leq \\ &\leq 2^{\lambda} \frac{N (\log(N+1))^{\frac{\epsilon\lambda}{\mu-1}}}{(N-1) (\log N)^{1+\frac{\mu\epsilon}{\mu-1}}} \leq K_{\lambda, \mu, \epsilon} \frac{1}{(\log N)^{1-\epsilon \frac{\lambda-\mu}{\mu-1}}} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

innen pedig a 2.23. tétel alapján $f_2 \in S^{\lambda}$.

Összefoglalva: $f_1 \notin S^{\lambda} \cap A^1$, de $f_1 \in A^{\mu} \cap A^1$, míg $f_2 \in S^{\lambda} \cap A^1$, de $f_2 \notin A^{\mu} \cap A^1$, és ezzel a 2.37. tételt bebizonyítottuk.*

Foglaljuk össze a tartalmazásokra vonatkozó eddigi eredményeinket! A (2.27) és a (2.36) összefüggések alapján az

$$\begin{array}{ccc} S^{\lambda} & \subset & S^{\mu} \subset S^1 \subset U \\ U & U & U \\ A^{\lambda} & A^{\mu} & A^1 \end{array} \quad (\lambda > \mu > 1) \quad (2.38)$$

reláció-sorozat adódik, amellyel analóg írható fel az A^λ , S^λ ($\lambda \geq 1$) halmazok esetén is. A (2.24) összefüggésben előforduló kapcsolatokat illusztrálhatjuk a következő függvényekkel, melyek közül néhányat már találkoztunk, de most új indexekkel láttuk el azokat is:

$$f_1(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos 2^\ell x}{2^{\ell(1-\frac{1}{\lambda})} \cdot \ell^{\frac{1}{\lambda}}}$$

$$f_2(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos 2^\ell x}{2^{\ell(1-\frac{1}{\mu})} \cdot \ell^{\frac{1}{\mu}}}$$

$$f_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k(\ln(k+1))^{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

$$f_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k \cdot \ln(k+1)}$$

$$f_5(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(\ln(k+1))^{1/\mu}}$$

$$f_6(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos 2^\ell x}{2^{\ell(1-\frac{1}{\lambda})}}$$

$$f_7(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos 2^\ell x}{2^{\ell(1-\frac{1}{\mu})}}$$

$$f_8(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos[\ell(\log(\ell+1))^{1+\frac{\mu\varepsilon}{\mu-1}+1}x]}{\ell(\log(\ell+1))^{1+\varepsilon}} \quad (0 < \varepsilon < \frac{\mu-1}{\lambda-\mu})$$

$$f_9(x) = f_1(x) + f_5(x)$$

$$f_{10}(x) = f_4(x) + f_6(x)$$

$$f_{11}(x) = f_1(x) + f_4(x)$$

$$f_{12}(x) = f_5(x) + f_6(x)$$

$$f_{13}(x) = f_4(x) + f_7(x)$$

$$f_{14}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pm \frac{\cos kx + \sin kx}{k}, \text{ m.m. előjeleeloszlásra}$$

Ezekről megmutatjuk, hogy

$$f_1 \in A^\mu \cap A^1, \quad f_1 \notin A^\lambda, \quad \lambda > \mu \geq 1 \quad (2.39)$$

$$f_1 \in S^\lambda, \quad \lambda \geq 1 \quad (2.40)$$

$$f_2 \in A^1, \quad f_2 \notin A^\mu, \quad f_2 \in S^\mu, \quad \mu > 1 \quad (2.41)$$

$$f_2 \notin S^\lambda, \quad \lambda > \mu > 1 \quad (2.42)$$

$$f_3 \in \cap_{\lambda \geq 1} A^\lambda \quad (2.43)$$

$$f_4 \in \cap_{\lambda \geq 1} A^\lambda, \quad f_4 \notin A^1 \quad (2.44)$$

$$f_5 \in A^\lambda, \quad f_5 \notin A^\mu, \quad \lambda > \mu \geq 1 \quad (2.45)$$

$$f_6 \in A^\mu, \quad f_6 \notin A^\lambda, \quad \lambda > \mu \geq 1 \quad (2.46)$$

$$f_6 \notin S^\lambda, \quad \lambda > \mu \geq 1 \quad (2.47)$$

$$f_7 \in A^1, \quad f_7 \notin A^\mu, \quad f_7 \notin S^\mu, \quad \mu > 1 \quad (2.48)$$

$$f_8 \in S^\lambda \cap A^1, \quad f_8 \notin A^\mu, \quad \lambda > \mu > 1 \quad (2.49)$$

$$f_9 \in S^\lambda \setminus (A^\lambda \cup A^\mu \cup A^1), \quad \lambda > \mu > 1 \quad (2.50)$$

$$f_{10} \in A^\mu \setminus (A^1 \cup S^\lambda), \quad \lambda > \mu > 1 \quad (2.51)$$

$$f_{11} \in (S^\lambda \setminus A^\lambda) \setminus (A^\mu \setminus A^1), \quad \lambda > \mu > 1 \quad (2.52)$$

$$f_{12} \in (S^\mu \setminus S^\lambda) \setminus (A^\mu \setminus A^1), \quad \lambda > \mu > 1 \quad (2.53)$$

$$f_{13} \in (S^1 \setminus S^\mu) \setminus A^1, \quad \mu > 1 \quad (2.54)$$

$$f_{14} \in U \setminus S^1 \quad (2.55)$$

A 2.32. tétel bizonyításában beláttuk (2.39)-et, most megmutatjuk (2.40)-et. Valóban, ha $2^N \leq n < 2^{N+1}$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^\lambda |(\hat{f}_1)_c(k)|^\lambda &\leq \frac{1}{2^N} \sum_{\ell=0}^N \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} k^\lambda |(\hat{f}_1)_c(k)|^\lambda = \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{\ell=1}^N \frac{2^\ell}{\ell} \leq K \frac{1}{2^N} \frac{2^N}{N} \leq K \frac{1}{\log_2 n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

így a 2.23. tétel i) alapján $f_1 \in S^\lambda$. Mivel f_2 analóg f_1 -el, ezért a (2.39), (2.40)-nek megfelelő (2.41) fennáll. Azonban $2^N \leq n < 2^{N+1}$ esetben

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^\lambda |(\hat{f}_2)_c(k)|^\lambda &\geq \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} k^\lambda |(\hat{f}_2)_c(k)|^\lambda \geq \\ &\geq \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{\ell=1}^N \frac{2^{\frac{\lambda}{\mu}}}{\frac{\lambda}{\ell^\mu}} \geq \frac{1}{2} \frac{2^{N(\frac{\lambda}{\mu}-1)}}{\frac{\lambda}{N^\mu}} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

így $f_2 \notin S^\lambda$, $\lambda > \mu > 1$, azaz (2.42) is teljesül.

Megemlítjük, hogy f_2 mutatja a (2.27)-beli $S^\lambda \subset S^\mu$ tartalmazás valódiságát, a (2.41), (2.42) alapján.

Mivel

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda-1} |(\hat{f}_3)_c(k)|^\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k+1))^{(1+\varepsilon)\lambda}} < \infty$$

a 2.5. tétel i) alapján $f_3 \in A^\lambda$, $\lambda \geq 1$, tehát (2.43) fennáll. Világos, hogy $f_4 \notin A^1$, másrészt ha $\lambda > 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda-1} |(\hat{f}_4)_s(k)|^\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k+1))^\lambda} < \infty,$$

így $f_4 \in A^\lambda$, amivel (2.44)-et is beláttuk.

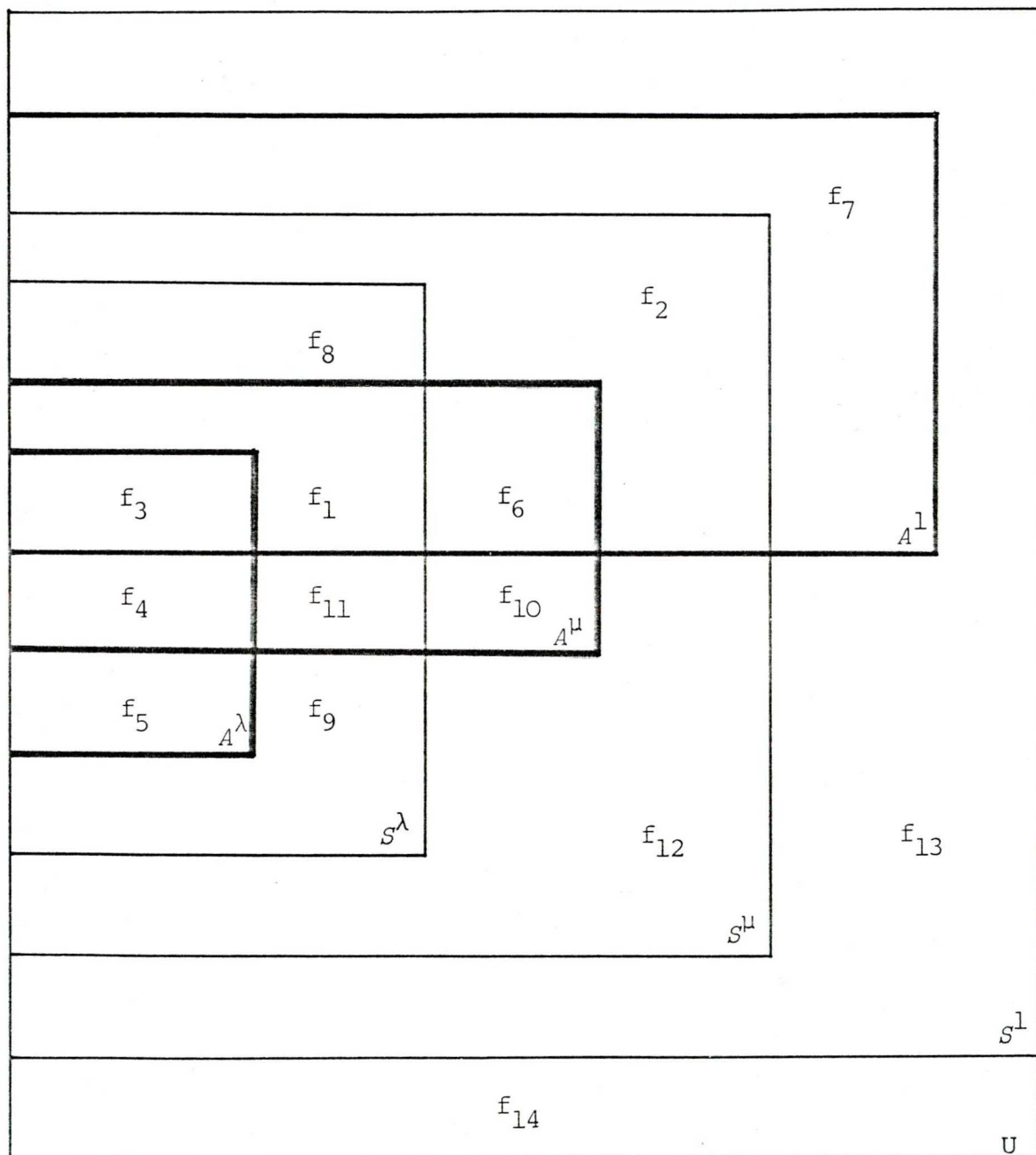
(2.45), (2.46) teljesülését a 2.28. tétel bizonyításában igazoltuk, míg (2.47), (2.48) fennállása a 2.37. tétel bizonyításában szerepel. Mivel f_7 f_6 -tal analóg, ezért (2.48) a (2.46) és (2.47) megfelelője. A (2.50)-(2.54) összefüggések az összeg-típusú függvények tagjainak tulajdonságai alapján adódnak. (2.55)-öt pedig a 2.35. tétel bizonyításában igazoltuk.

A (2.38) relációt a (2.39)-(2.55) kapcsolatok és a 2.32., 2.37. tételek figyelembe vételével illusztrálja a 3. ábra. (58. oldal)

Befejezésül megemlítjük a klasszikus L^p terek (2.4) alatt látott reflexivitásával analóg eredményt, az A^λ ($\lambda > 1$) terek reflexivitását:

$$((A^\lambda)^*)^* = A^\lambda$$

([9], 10.1. tétel; 10.36.; 10.37. következmény)



3. ábra

FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] Dobi J.: A remark on the norm of the Banach space of uniformly strong convergent trigonometric series, Acta Math. Hung., 51(1-2) (1988), 201-203.
- [2] Dobi J.: Inclusion relations between the Banach spaces of absolutely and strongly convergent Fourier series, Radovi Matematicki, Vol.5 (1989), 151-160.
- [3] Fekete M.: Vizsgálatok a Fourier sorokból, Matematikai és természettudományi Értesítő, 34 (1916), 759-786.
- [4] Flett, T.M.: On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley, Proc. London Math. Soc., 7 (1957), 113-141.
- [5] Hyslop, J.: Note on the strong summability of series, Proc. Glasgow Math. Assoc., 1 (1952-53), 16-20.
- [6] Нахан, Ж.П.: Абсолютно сходящиеся ряды Фурье, Мир, Москва 1976.
- [7] Kolmogorov, A.N.: Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, 183 (1926), 1327-1328.
- [8] Салаи, И.: Об абсолютной суммируемости тригонометрических рядов, Мат. Заметки, 30 (1981), 823-837.
- [9] Szalay I.: Cesaro-szummálhatóság, Speciálkollégiumi jegyzet, JATE 1987.

- [10] Szalay I.: On Hilbert space of almost everywhere $|I|_2$ convergent Fourier series, Radovi Matematicki, Vol.4 (1988), 121-131.
- [11] Szalay I.: On the properties of the strong Cesaro summability and strong convergence of series, Anal Math., 15 (1989), 195-209.
- [12] Szalay I. and Tanovic-Miller, N.: On Banach spaces of absolutely and strongly convergent Fourier series, Acta Math. Hung., 55 (1990).
- [13] Szalay I. and Tanovic-Miller, N.: On Banach spaces of absolutely and strongly convergent Fourier series II., Acta Math. Hung., megjelenés alatt
- [14] Szőkefalvi-Nagy B.: Valós függvények és függvénysorok, Tankönyviadó, Budapest 1977.
- [15] Tanovic-Miller, N.: On strong convergence of trigonometric and Fourier series, Acta Math. Hung., 42(1-2) (1983), 35-43.
- [16] Tanovic-Miller, N.: Strongly convergent trigonometric series as Fourier series, Acta Math. Hung., 47 (1986), 127-135.
- [17] Tanovic-Miller, N.: On Banach spaces of strongly convergent trigonometric series, J. of Math. Analysis and Appl., megjelenés alatt
- [18] Winn, C.E.: On strong summability for any positive order, Math. Zeitschrift 37 (1933), 481-492.
- [19] Zygmund, A.: Trigonometric series, Vol.1., Cambridge, 1968.