

B4259

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

AZ ADDITIV SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK ÉS A LOGARITMUS FÜGGVÉNY KAPCSOLATA

írta

MÁTÉ EÖRS

Szeged, 1972.



Tartalomjegyzék

Bevezetés	1.
Előkészítés	2.
Monoton additív függvények	6.
Aszimptotikusan jó tulajdonságu additív függvények	10.
Lokálisan jó tulajdonságu additív függvények	14.
Lokálisan jó tulajdonságu teljesen additív függvények	23.
Lokálisan "hasonló" teljesen additív függvénpárok	36.
Irodalom	38.

BEVEZETÉS

Egy $f(n)$ számelméleti függvény - azaz egy, a természetes számok halmazán értelmezett függvény additív, ha

$$(a) \quad f(mn) = f(m) + f(n)$$

teljesül minden $(m, n) = 1$ -re, ahol m és n természetes számok, (m, n) pedig az m és n legnagyobb közös osztóját jelöli.

Az $f(n)$ függvény teljesen additív, ha (a) minden természetes számpárra teljesül.

Egy $g(n)$ számelméleti függvény multiplikatív, ha

$$(b) \quad g(mn) = g(m)g(n)$$

teljesül $(m, n) = 1$ -re. $g(n)$ teljesen multiplikatív, ha (b) minden természetes számpárra teljesül. Az előbbiekből feltesszük, hogy egy $g(n)$ multiplikatív függvény semmilyen n -re sem nulla.

Ebben a dolgozatban az additív függvények és a logaritmus függvény kapcsolatával fogunk foglalkozni. Látni fogjuk, hogy egy additív függvény nem viselkedhet túl szabályosan sem lokális, sem aszimptotikus szempontból, csak ha lényegében logaritmus függvény.

A téma felvetése ERDŐS PÁL [1] -től származik.

ELŐKÉSZÍTÉS

A bizonyítások során szükségünk lesz néhány, a számelmélet más fejezeteiből ismert eredményre, továbbá az egyszerűbb írásmód kedvéért egy gyakran használt fogalomra.

Definíció: Legyen $h(n)$ és $k(n)$ tetszőszerinti, minden elég nagy n természetes számra értelmezett függvény, továbbá $k(n) > 0$, minden elég nagy n -re. Akkor mondjuk, hogy $h(n) = O(k(n))$ ($h(n)$ egyenlő nagyságú $k(n)$), ha $h(n)/k(n)$ korlátos.

Legyen a továbbiakban p prímszám. Ekkor érvényes ez alábbi összefüggés:

$$(c) \quad \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Bizonyítás: A bizonyítás $n!$ vizsgálatán alapul.

$$(c.1) \quad n! = \prod_{p \leq n} p^{e_p} \text{ ahol } e_p = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right], \quad n \geq 1$$

($[x]$ x egész részét jelöli). (c.1) érvényességét könnyen beláthatjuk, hiszen az $1, 2, \dots, n$ sorozatból $[n/p]$ szám osztható p -vel, $[n/p^2]$ osztható p^2 -tel stb. Ezeket az értékeket összegezve megkapjuk p kitevőjét $n!$ prímtenyezős előállításában.

Becsüljük meg a

$$\log n! - n \log n$$

különbséget.

$$\log n! = \sum_{k=2}^n \log k \leq \int_2^{n+1} \log x \, dx =$$

$$= (n+1) \log(n+1) - (n+1) - (2 \log 2 - 2) = n \log n + O(n).$$

Másrészt

$$\log n! = \sum_{k=2}^n \log k \geq \int_1^n \log x \, dx = \\ = n \log n - n + 1.$$

Azaz

$$\log n! = n \log n + O(n).$$

Ezt felhasználva és (c.1)-et logaritmálva kapjuk

$$\sum_p \log p \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right] = n \log n + O(n).$$

Ezt másképp írva

$$(c.2) \quad \sum_p \left[\frac{n}{p} \right] \log p + \sum_p \log p \sum_{k \geq 2} \left[\frac{n}{p^k} \right] = n \log n + O(n).$$

Becsüljük meg most a második tagot:

$$(c.3) \quad \sum_p \log p \sum_{k \geq 2} \left[\frac{n}{p^k} \right] \leq n \sum_p \frac{1}{p(p-1)} \log p \leq \\ \leq n \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log m}{m(m-1)} = O(n),$$

mivel

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log m}{m(m-1)} \leq K_1 + \sum_{m=2}^{\infty} m^{-\frac{3}{2}} \leq K_1 + K_2$$

(K_1 és K_2 alkalmas konstansok). Ezt alkalmazva (c.2)-ben,

$$(c.4) \quad \sum_{p \leq n} \left[\frac{n}{p} \right] \log p = n \log n + O(n)$$

összefüggést kapjuk. Mivel minden x -re $x - [x] \leq 1$, érvényes a

$$(c.5) \quad n \log n + O(n) \leq \sum_{p \leq n} \frac{n}{p} \log p \leq \\ \leq n \log n + \sum_{p \leq n} \log p + O(n)$$

egyenlőtlenség. (c) bizonyításához elegendő tehát a

$$\sum_{p \leq n} \log p = O(n)$$

egyenlőséget megmutatni. (c.4)-et alkalmazva $2m$ -re és m -re

$$\begin{aligned} \sum_p \left(\left[\frac{2m}{p} \right] - 2 \left[\frac{m}{p} \right] \right) \log p &= \\ &= 2m \log 2m - 2m \log m + O(2m) = O(m) \end{aligned}$$

adódik. Minden x -re $[2x] - 2[x] \geq 0$, továbbá ha $m < p \leq 2m$, akkor $\left[\frac{2m}{p} \right] - 2 \left[\frac{m}{p} \right] = 1$. Így

$$(c.6) \quad \sum_{m < p \leq 2m} \log p = O(m).$$

Ha most $2^{r-1} < n \leq 2^r$, akkor (c.6) felhasználásával

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq n} \log p &\leq \sum_{p \leq 2^r} \log p = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{2^{k-1} < p \leq 2^k} \log p \right) = \\ &= \sum_{k=1}^r O(2^{k-1}) = O(2^r) = O(2n) = O(n). \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve (c.5)-be

$$n \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} = n \log n + O(n)$$

adódik, és ezzel (c) -t igazoltuk.

Jelöljön q egy tetszőszerinti prímszámhatványt, és legyen p az a prímszám, amelynek q hatványa. (c) és (c.3) felhasználásával könnyen adódik a

$$(d) \quad \sum_{q \leq n} \frac{\log p}{q} = \log n + O(1)$$

összefüggés. Érvényes továbbá a

$$(e) \quad \sum_{x < p \leq ax} \frac{\log p}{p} = \sum_{p \leq ax} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \\ = \log ax - \log x + O(1) = \log a + O(1)$$

és a

$$(f) \quad \sum_{x < q \leq ax} \frac{\log q}{q} = \log a + O(1)$$

egyenlőség.

Bizonyítás nélkül közöljük az ismert

$$(g) \quad \sum_{\substack{q \leq x \\ q \equiv n \pmod{R}}} \frac{\log q}{q} = \frac{1}{\varphi(R)} \log x + O(1)$$

összefüggést /l.pld. [11] 58.old./ ($\varphi(R)$ az R -nél kisebb, R -hez relatív prim számok számát jelöli.)

MONOTON ADDITIV FÜGGVÉNYEK

ERDŐS PÁL [1] közölte a következő tételt:

1.1. tétel: Ha $f(n)$ valós értékű monoton additív számelméleti függvény, akkor $f(n) = c \log n$. (Itt és a továbbiakban c alkalmas konstans jelöl.)

A tételre az [1]-ben adott bizonyítás kicsit komplikált.

J. LAMBEK és L. MOSER [2] egyszerű bizonyítással közölte a következőt:

1.2. tétel: Ha $g(n)$ valós értékű monoton multiplikatív függvény, akkor $g(n) = n^c$.

Mivel mint látni fogjuk - az 1.1. és 1.2. tétel ekvivalens állításokat fejez ki, ezért a [2]-es cikk bizonyítása lényegében az 1.1. tételre adott bizonyítás egyszerűsítését jelenti. Szellemes bizonyítás található az 1.1. tételre még [3]-ban (235-238 o.) is.

Először az 1.1. és az 1.2. tétel ekvivalenciáját mutatjuk meg.

Ha egy $g(n)$ multiplikatív függvény monoton, akkor szükségképpen pozitív, ugyanis $g(n) = g(1) g(n)$ miatt $g(1) = 1$. Ha valamely t -re $g(t) < 0$ lenne, akkor csak monoton csökkenő lehetne, és így $g(t+1) < 0$ továbbá $g(t(t+1)) < 0$ lenne, másrészt $g(t(t+1)) = g(t) g(t+1) > 0$, ami ellentmondásra vezetne. Tehát $g(n)$ valóban pozitív és emiatt $\log g(n)$ monoton és additív, ezért alkalmazható rá az 1.1. tétel, így az 1.1. tételből következik az 1.2. tétel. A fordított irányú következés nyilvánvaló.

Térjünk át az 1.2. tétel LAMBEK - MOSER féle bizonyítására.

Mivel egy monoton multiplikatív függvény szükségképpen pozitív, feltehető, hogy $g(n)$ monoton növekvő - különben a monoton növekvő szintén multiplikatív $1/g(n)$ függvényre alkalmazhatjuk az eljárást.

Legyen $a \geq 3$ és t természetes szám, továbbá

$$R_t = \sum_{i=0}^t a^i \quad \text{és} \quad S_t = a^t - \sum_{i=0}^{t-1} a^i,$$

akkor

$$g(R_t) \geq g(R_{t-1}) = g(a) g(R_{t-1}) \geq \dots \geq (g(a))^t;$$

hasonlóan

$$g(S_t) \leq (g(a))^t.$$

Ha $r \geq 1$ és $a^r < n \leq a^{r+1}$, azaz $r < \log_a n \leq r+1$,
akkor $R_{r-1} < n$, továbbá $S_{r+2} > a^{r+2} - 2a^{r+1} \geq a^{r+1} \geq n$,
mivel $a \geq 3$. Így

$$g(n) \geq g(R_{r-1}) \geq (g(a))^{r-1} \geq (g(a))^{\log_a n - 2}$$

és

$$g(n) \leq g(S_{r+2}) \leq (g(a))^{r+2} \leq (g(a))^{\log_a n + 2},$$

ezért tetszőleges $a, b \geq 3$ -ra

$$(g(a))^{\frac{1}{\log a} + \frac{2}{\log n}} \geq (g(n))^{\frac{1}{\log n}} \geq (g(b))^{\frac{1}{\log b} - \frac{2}{\log n}}.$$

Mivel $n \geq a, b$ tetszőszerinti volt

$$(g(a))^{\frac{1}{\log a}} \geq (g(b))^{\frac{1}{\log b}}.$$

Itt a és b felcserélhetők, így

$$(g(a))^{\frac{1}{\log a}} = (g(b))^{\frac{1}{\log b}}, \text{ ha } a, b > 2$$

ezért $n > 3$ -ra $(g(n))^{1/\log n}$ konstans - jelöljük ezt e^c -vel.

Ekkor

$$g(n) = e^{c \log n} = n^c.$$

$n=2$ -re pedig

$$g(2) = g(6)/g(3) = 6^c/3^c = 2^c, \text{ g. e. d.}$$

A fenti gondolatmenet nyilvánvalóan alkalmas az 1.1. tétel közvetlen bizonyítására is.

Az 1.1. tétel egy általánosításához bevezetünk egy fogalmat.

1.3. definíció: Legyen $u_1 < u_2 < \dots$. Ha

$$\underline{\mathcal{J}}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{u_i \leq n} 1 \quad \text{és} \quad \overline{\mathcal{J}}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{u_i \leq n} 1,$$

akkor azt mondjuk, hogy $\underline{\mathcal{J}}(u)$ az $u_1, u_2, \dots$ sorozat alsó, $\overline{\mathcal{J}}(u)$ pedig felső sűrűsége. Ha $\underline{\mathcal{J}}(u) = \overline{\mathcal{J}}(u) = \mathcal{J}(u)$, akkor a sorozat $\mathcal{J}(u)$ sűrűségű.

A definícióból könnyen következik, hogy ha $u_1 < u_2 < \dots$ és $v_1 < v_2 < \dots$ diszjunkt sorozatok, akkor $\mathcal{J}(u) + \mathcal{J}(v) \leq 1$, ugyanis

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) + \mathcal{J}(v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{u_i \leq n} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v_i \leq n} 1 \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{u_i \leq n} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n - \sum_{u_i \leq n} 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Érvényes az 1.1. tétel alábbi általánosítása:

1.4. tétel: Legyen $n_1 < n_2 < \dots$ a természetes számok egy 1 felső sűrűségű S sorozata. Ha $f(n)$ olyan additív függvény, hogy $f(n_i) \leq f(n_{i+1})$ ($i=1, 2, \dots$), akkor $f(n) = c \log n$.

A tételt ERDŐS [1] sejtette, az alábbi bizonyítás KÁTAI [4]-től ered.

Bizonyítás: Legyen n tetszőszerinti természetes szám. Az

$$(n+1)x - ny = 1, \quad (n+1, x) = 1, \quad (n, y) = 1$$

egyenlet x, y megoldásai pozitív sűrűségű sorozatot alkotnak, így a fenti megjegyzésünket figyelembe véve kapjuk, hogy van olyan x, y megoldás, hogy $x, y, (n+1)x, ny \in S$.

Ekkor

$$f((n+1)x) \geq f(ny), \text{ azaz } f(n+1) + f(x) \geq f(y) - f(x) \geq 0,$$

és az állítást az 1.1. tételre vezettük vissza.

ASZIMPTOTIKUSAN JO TULAJDONSÁGU
ADDITIV FÜGGVÉNYEK

ERDŐS [1] közölte a következő tételt:

2.1. tétel: Ha $f(n)$ olyan additív számelméleti függvény, amelyre

$$f(n+1) - f(n) \rightarrow 0,$$

akkor $f(n) = c \log n$.

A 2.1. tételre RÉNYI [5] adott egyszerű bizonyítást, előbb azonban ERDŐS [6] az 1.1. és a 2.1. tétel következő közös általánosítását közölte:

2.2. tétel: Ha $f(n)$ egy valós értékű additív számelméleti függvény, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n+1) - f(n)) \geq 0,$$

akkor $f(n) = c \log n$.

A 2.2. tétel csak látszólag nem tartalmazza a 2.1. tételt abban az esetben, ha $f(n)$ komplex értékű additív függvény, mert ekkor

$$f(n) = f_1(n) + i f_2(n),$$

ahol $f_1(n)$ és $f_2(n)$ valós értékű függvények, i pedig az imaginárius egység, így a 2.2. tétel értelmében $f_1(n) = c_1 \log n$, $f_2(n) = c_2 \log n$, tehát $f(n) = (c_1 + i c_2) \log n$.

A 2.2. tételt ERDŐS és RÉNYI közösen bizonyította, a bizonyítást nem közölték.

A 2.1. tételre nem adunk külön bizonyítást, a 2.2. tételre adott előbbi bizonyítás KÁTAI [7] -től származik. [8] -ben szintén érdekes bizonyítás található erre a tételre.

A 2.2. tételt a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

Tétel: Legyen $\varepsilon(n)$ egy nullához tartó sorozat. Ha $f(n)$ additív számelméleti függvény és

$$f(n+1) - f(n) \geq -\varepsilon(n),$$

akkor $f(n) = c \log n$.

Bizonyítás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\varepsilon(n)$ nem-negatív, és monoton módon tart nullához.

Először megmutatjuk, hogy $f(n)$ teljesen additív. Legyen p tetszőeszerinti prímszám, és $\varepsilon > 0$. Ekkor van olyan l , hogy

$$(2.1) \quad f(n+1) - f(n) \geq -\varepsilon, \text{ ha } n \geq p^{l-1}.$$

Legyen k olyan nagy, hogy használhassuk (2.1)-t. Ekkor

$$\begin{aligned} f(p^k) &\leq f(p^k + p) + p\varepsilon = f(p) + f(p^{k-1} + 1) + p\varepsilon \leq \\ &\leq f(p) + f(p^{k-1} + p) + p\varepsilon + (p-1)\varepsilon \leq \dots \leq \\ &\leq (k-l)f(p) + f(p^l + 1) + (k-l)p\varepsilon. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} f(p^k) &\geq f(p^k - p) - p\varepsilon \geq \dots \geq \\ &\geq (k-l)f(p) + f(p^l - 1) - (k-l)p\varepsilon. \end{aligned}$$

Ezekből az egyenlőtlenségekkel következik, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(p^k)}{k} = f(p).$$

Használjuk ezt a relációt $p = q^v$ és $p = q$ esetén, ahol q tetszőeszerinti prímszám, ekkor kapjuk, hogy

$$f(q^v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(q^{vk})}{k} = v \lim_{vk \rightarrow \infty} \frac{f(q^{vk})}{vk} = v f(q),$$

azaz $f(n)$ teljesen additív.

Legyen most p prímszám. Legyen n elég nagy, és írjuk a következő formában:

$$n = a_0 p^v + \dots + a_{v-1} p + a_v$$

ahol $v > l$ és $1 \leq a_0 < p$, $0 \leq a_i < p$ ($i = 1, 2, \dots, v$).

(2.1) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(n) &\geq f(a_0 p^v + \dots + a_{v-1} p) - \varepsilon p = \\ &= f(p) - f(a_0 p^{v-1} + \dots + a_{v-1}) - \varepsilon p \geq \dots \geq \\ &\geq (v-l+1) f(p) - f(a_0 p^{l-1} + \dots + a_{l-1}) - \varepsilon (v-l+1) p. \end{aligned}$$

Ha

$$M = \max_{m < p^l} |f(m)|,$$

akkor

$$(2.2) \quad f(n) \geq (v-l+1) f(p) - M - \varepsilon (v-l+1) p.$$

Figyelembe véve a

$$p^v \leq n < p^{v+1}$$

összefüggést,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v}{\log n} = \frac{1}{\log p}$$

adódik. Innen (2.2) -t felhasználva

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n} \geq \frac{f(p)}{\log p}$$

minden p prímszám esetén.

Tegyük fel, hogy van olyan p, q prímszám, hogy $\frac{f(p)}{\log p} > \frac{f(q)}{\log q}$.
Ekkor (2.3) -ból a teljes additivitás felhasználásával az

$$\frac{f(q)}{\log q} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{f(q^\mu)}{\log q^\mu} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n} \geq \frac{f(p)}{\log p}$$

ellentmondásra jutunk.

Tehát $f(p)/\log p$ konstans, ami a tétel állítását igazolja.

LOKÁLISAN JO TULAJDONSÁGU
ADDITIV FÜGGVÉNYEK

ERDŐS [1] sejtette a következő tételt:

3.1. tétel: Ha $f(n)$ additív számelméleti függvény és $f(n+1) - f(n)$ korlátos, akkor $f(n) = c \log n + h(n)$, ahol $h(n)$ korlátos függvény.

[9]-ben sikerült bebizonyítanom a 3.1. tétellel kapcsolatban a következőt:

3.2. tétel: Ha $f(n)$ additív számelméleti függvény és $f(n+1) - f(n)$ korlátos, akkor $f(n) = g(n) + h(n)$, ahol $g(n)$ teljesen additív és $h(n)$ korlátos függvény.

Később WIRSING [10] egyszerű bizonyítást adott a 3.2. tételre és bebizonyította az alábbi tételt is:

4. tétel: Ha $f(n)$ teljesen additív, és $f(n+1) - f(n) \leq M$, akkor $f(n) = c \log n + h(n)$, ahol $h(n)$ korlátos függvény.

A 3.2. és 4. tétel együtt bizonyítja az ERDŐS féle sejtést.

A 3.2. tétel helyett annak egy kissé élesebb alakját fogjuk bebizonyítani. Vezessünk be ehhez egy fogalmat:

3.3. definíció: Az olyan függvényt, melynek az értelmezési tartománya az $n \geq N$ egész számok halmaza, ahol $N > 0$, parciális számelméleti függvénynek nevezzük.

3.4. tétel: Ha $f(n)$ additív parciális számelméleti függvény, és $|f(n+1) - f(n)| \leq M$,

akkor létezik olyan (mindenütt értelmezett) teljesen additív $g(n)$ és parciálisan értelmezett $h(n)$ függvény, hogy $f(n) = g(n) + h(n)$ és $h(n)$ korlátos, nevezetesen $|h(n)| \leq 4M$, ha n elég nagy.

Az előbb közölt bizonyítás a 3.2. tételre adott [9] bizonyítás finomítása.

Legyen $f(n)$ értelmezve az $n \geq N$ egész számokon, és legyen $n > N$.

3.5. lemma: Ha s és $n-1$ relatív primek, akkor

$$|f(n^s) - s f(n)| \leq 2sM.$$

Bizonyítás: Könnyű látni, hogy

$$s = \sum_{i=0}^{s-1} 1 \equiv \sum_{i=0}^{s-1} n^i \pmod{n-1},$$

ez az a lemma feltétele szerint $\sum_{i=0}^{s-1} n^i$ relatív prim $n-1$ -hez, így $(f(n))$ -en nullát érve) egyszerű számítással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |f(n^s) - s f(n)| &\leq |f(n^{s-1}) - s f(n)| + M = \\ &= |f((n-1) \sum_{i=0}^{s-1} n^i) - s f(n)| + M \leq \\ &\leq M + |f(n-1) - f(n)| + |f(\sum_{i=0}^{s-1} n^i) - (s-1)f(n)| \leq \\ &\leq 2M + \left| \sum_{j=1}^{s-1} \left(f\left(\sum_{i=0}^j n^i\right) - f\left(\sum_{i=0}^{j-1} n^i\right) - f(n) \right) \right| \leq \\ &\leq 2M + \sum_{j=1}^{s-1} \left| f\left(\sum_{i=0}^j n^i\right) - f\left(\sum_{i=0}^j n^i - 1\right) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq (s+1)M \leq 2sM, \quad \text{q. e. d.}$$

3.6. lemma: Minden $k \geq 0$ és $n > N$ esetén

$$|f(n^{2^k}) - 2^k f(n)| \leq 4 \cdot 2^k M.$$

Bizonyítás: Ha n páros, akkor az előző lemmából következik az állítás $2 \cdot 2^k M$ -mel a jobboldalon. Ha n páratlan, akkor legyen $2m > N$ és $(2m, n) = 1$, így az előbbi eredményünket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & |f(n^{2^k}) - 2^k f(n)| = \\ & = |f((2mn)^{2^k}) - f((2m)^{2^k}) - 2^k f(2mn) + 2^k f(2m)| \leq \\ & \leq |f((2mn)^{2^k}) - 2^k f(2mn)| + |f((2m)^{2^k}) - 2^k f(2m)| \leq \\ & \leq 2 \cdot 2^k M + 2 \cdot 2^k M = 4 \cdot 2^k M, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

3.7. lemma: Bármely pozitív s és t esetén

$$|f(n^t) - f(n^s)| \leq 2|t-s|n(M + |f(N)|).$$

Bizonyítás: Ha $t = s$, az állítás triviális. Legyen a továbbiakban $t > s$, ekkor

$$\begin{aligned} & |f(n^t) - f(n^s)| \leq 2M + |f(n^t - 1) - f(n^s - 1)| \leq \\ & \leq 2M + \sum_{i=s+1}^t |f(n^i - 1) - f(n^{i-1} - 1) - f(n)| + (t-s)|f(n)| = \\ & = 2M + \sum_{i=s+1}^t |f(n^i - 1) - f(n^i - n)| + (t-s)|f(n)| \leq \\ & \leq 2M + (t-s)(n-1)M + (t-s)|f(n)| \leq \\ & \leq 2M + (t-s)(2(n-1)M + |f(N)|) \leq 2(t-s)(nM + |f(N)|). \end{aligned}$$

Felhasználtuk a triviális

$$|f(n)| \leq \sum_{i=N}^{n-1} |f(i+1) - f(i)| + |f(N)| \leq (n-1)M + |f(N)|$$

összefüggést.

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A tétel bizonyítása A lemmából következik a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(n^t)}{t}$$

limes létezése.

Legyen először $t = 2^k$ alakú. Ekkor, ha $k_1, k_2 \rightarrow \infty$,

kapjuk:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(n^{2^{k_1}})}{2^{k_1}} - \frac{f(n^{2^{k_2}})}{2^{k_2}} \right| \leq \frac{1}{2^{k_1}} \left| f(n^{2^{k_1}}) - \frac{f(n^{2^{k_1+k_2}})}{2^{k_2}} \right| + \\ & + \frac{1}{2^{k_2}} \left| \frac{f(n^{2^{k_2+k_1}})}{2^{k_1}} - f(n^{2^{k_2}}) \right| \leq 4M \left(\frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_2}} \right) \rightarrow 0; \end{aligned}$$

Létezik tehát a

$$g(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(n^{2^k})}{2^k}$$

határérték és érvényes

$$(3.1) \quad \left| \frac{f(n^{2^k})}{2^k} - g(n) \right| \leq \frac{4M}{2^k}.$$

Legyen most k rögzített és s relatív prim $(n^{2^k}-1)$ -hez,
akkor a 3.6. és 3.5. lemma és (3.1) szerint

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(n^s)}{s} - g(n) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{s} \left| f(n^s) - \frac{1}{2^k} f(n^{s2^k}) \right| + \frac{1}{2^k} \left| \frac{1}{s} f(n^{s2^k}) - f(n^{2^k}) \right| + \\ & + \left| \frac{1}{2^k} f(n^{2^k}) - g(n) \right| \leq \frac{4M}{s} + \frac{2M}{2^k} + \frac{4M}{2^k}, \end{aligned}$$

azaz, ha s $(n^{2^k}-1)$ -hez relatív prim, akkor

$$(3.2) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n^s)}{s} - g(n) \right| \leq \frac{6M}{2^k}.$$

Ha most $t \rightarrow \infty$ tetszőszerint, $s \rightarrow \infty$ mint fent és $t \leq s < t + (n^{2^k}-1)$, akkor a 3.7. lemma szerint

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(n^t)}{t} - \frac{s}{t} \frac{f(n^s)}{s} \right| = \frac{1}{t} \left| f(n^t) - f(n^s) \right| \leq \\ & \leq 2(t-s) \frac{Mn + |f(N)|n}{t} \rightarrow 0; \end{aligned}$$

amiből (3.2) és $\frac{s}{t} \rightarrow 1$ felhasználásával

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n^t)}{t} - g(n) \right| \leq \frac{6M}{2^k}$$

adódik.

A baloldalt k -től független, így ha $k \rightarrow \infty$, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n^t)}{t} - g(n) \right| = 0 \quad \text{azaz} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(n^t)}{t} = g(n)$$

adódik. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$g(n^v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(n^{vt})}{t} = v \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(n^{vt})}{vt} = v g(n).$$

Másrészt $g(n)$ additív, hiszen $m, n > N$ és $(m, n) = 1$ esetén

$$g(mn) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f((mn)^t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(m^t) + f(n^t)}{t} = g(m) + g(n).$$

Az utóbbi két eredményünk $g(n)$ teljesen additív voltát igazolja, ha $n > N$.

$g(n)$ értelmezési tartományát kiterjeszthetjük minden természetes számra a következőképpen:

legyen $g(1) = 1$ és $g(m) = \frac{g(m^k)}{k}$, ahol $m^k > N$.

Mivel $g(n)$ teljesen additív, a kiterjesztés egyértelmű, hiszen

$$\frac{g(m^{k_1})}{k_1} = \frac{g(m^{k_1 \cdot k_2})}{k_1 \cdot k_2} = \frac{g(m^{k_2})}{k_2}.$$

Könnyű látni, hogy a kiterjesztett függvény is teljesen additív.

$h(n) = f(n) - g(n)$ korlátos, nevezetesen $|h(n)| \leq 4M$, ha $n > N$, mint ezt (3.1) mutatja, ha $k=0$. Ezzel a 3.4. tételt bebizonyítottuk.

3.8. megjegyzés: A 3.4. tétel birtokában könnyen bebizonyíthatjuk a 2.1. tételt.

Ha $f(n+1) - f(n) \rightarrow 0$, akkor a 3.4. tétel alapján tetszőszerinti $\varepsilon(>0)$ -hoz megadható olyan N és olyan g , hogy $m > N$ esetén

$$|f(m) - g(m)| < \varepsilon.$$

g nyilvánvalóan független ε választásától, hiszen ha két teljesen additív függvény nem azonosan egyenlő, akkor a különbségük nem korlátos.

Legyen n tetszőleges. Keressünk hozzá olyan m -et, hogy $m > N$ és $(m, n) = 1$, ekkor

$$|f(n) - g(n)| \leq |f(mn) - g(mn)| + |f(m) - g(m)| < 2\varepsilon$$

így szükségképpen $f(n) = g(n)$, azaz $f(n)$ teljesen additív.

Legyen most $2^r \geq N$ és $M = \max_{2^r \leq n < 2^{r+1}} |f(n)|$, n^k bináris előállításáig

$$n^k = \sum_{i=0}^{s_k} a_{ki} 2^i, \text{ ahol } a_{ki} = 1 \text{ vagy } 0 \text{ (} a_{k s_k} = 1 \text{),}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{f(n^k)}{k} = \frac{f\left(\sum_{i=0}^{s_k} a_{ki} 2^i\right)}{k} \geq \\ &\geq \frac{f\left(\sum_{i=1}^{s_k} a_{ki} 2^{i-1}\right)}{k} + \frac{1}{k} (f(2) - \varepsilon) \geq \dots \\ &\geq \frac{f\left(\sum_{i=s_k-r}^{s_k} a_{ki} 2^{i-s_k+r}\right)}{k} + \frac{s_k-r}{k} (f(2) - \varepsilon). \end{aligned}$$

Mivel

$$2^r \leq \sum_{i=s_k-r}^{s_k} a_{ki} 2^{i-s_k+r} < 2^{r+1},$$

ezért

$$f(n) \geq \frac{s_k-r}{k} (f(2) - \varepsilon) - \frac{M}{k}.$$

Hasonlóan

$$f(n) \leq \frac{s_k-r}{k} (f(2) + \varepsilon) + \frac{M}{k}.$$

Ha $k \rightarrow \infty$, akkor $\frac{s_k - r}{k} \rightarrow \log_2 n$, tehát

$$\log_2 n (f(2) - \varepsilon) \leq f(n) \leq \log_2 n (f(2) + \varepsilon).$$

Mivel ε tetszőszerintí volt, $f(n) = \log_2 n f(2)$, q.e.d.

A 3.2. tétel WIRSING [10] féle bizonyítása:

Először megmutatjuk, hogy

$$(3.3) \quad f(n^p) = p f(n) + O(p),$$

ha p prímszám.

Ha $p > 2$ és prímszám, akkor vagy $(n-1, p) = 1$ vagy $(n+1, p) = 1$. Ha $(n-1, p) = 1$, akkor a 3.5. lemma miatt igaz az állítás, ha $(n+1, p) = 1$, akkor az állítás a 3.5. lemmához hasonlóan igazolható:

$$\begin{aligned} |f(n^p) - p f(n)| &\leq |f(n^p + 1) - p f(n)| + M = \\ &= |f((n+1) \sum_{i=0}^{p-1} (-n)^i) - p f(n)| + M \leq \\ &\leq M + |f(n+1) - f(n)| + |f(\sum_{i=0}^{p-1} (-n)^i) - (p-1)f(n)| \leq \\ &\leq 2M + \left| \sum_{j=1}^{p-1} \left(f((-1)^j \sum_{i=0}^j (-n)^i) - f((-1)^{j-1} \sum_{i=0}^{j-1} (-n)^i) - f(n) \right) \right| \leq \\ &\leq 2M + \sum_{j=1}^{p-1} \left| f((-1)^j \sum_{i=0}^j (-n)^i) - f((-1)^j \sum_{i=0}^j (-n)^i - 1) \right| \leq \\ &\leq (p+1) M = O(p). \end{aligned}$$

Mivel a $p=2$ eset a 3.6. lemma speciális esete, (3.3)-at igazoltuk.

Általánosítsuk (3.3)-at minden t -re. Ha $t = p_1 p_2 \cdots p_k$, akkor (3.3)-ból teljes indukcióval kapjuk:

$$f(n^t) = t f(n) + O(p_1) + O(p_1 p_2) + \dots + O(p_1 p_2 \cdots p_k).$$

Mivel az összeadás és az O sorrendje felcserélhető, továbbá, mivel $p_i \geq 2$

$$(3.4) \quad f(n^t) = t f(n) + O(2t) = t f(n) + O(t).$$

Ha (3.4)-et a két lehetséges módon alkalmazzuk n^{st} -re, az

$$s f(n^t) + O(s) = f(n^{st}) = t f(n^s) + O(t)$$

egyenlőséget kapjuk, így

$$(3.5) \quad \frac{f(n^t)}{t} - \frac{f(n^s)}{s} = O\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

ami a Cauchy féle konvergencia kritérium szerint a

$$g(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(n^t)}{t}$$

függvény létezését jelenti.

A bizonyítás további része megegyezik az első bizonyítás befejező részével (l. 18-19. oldal).

A 4. tétel bizonyítását a következő fejezetben fogjuk elvégezni.

LOKÁLISAN JO TULAJDONSÁGU TELJESEN ADDITIV FÜGGVÉNYEK

E. WIRSING [1] bizonyította az alábbi, az előző fejezetben már kimondott tételt:

4. tétel: Ha $f(n)$ teljesen additív számelméleti függvény, és

$$(4.1) \quad f(n+1) - f(n) \leq M,$$

akkor $f(n) = c \log n + h(n)$, ahol $h(n)$ korlátos függvény.

A. 4. tétel bizonyításához először megmutatjuk, hogy:

4.1. lemma: Ha $f(n)$ additív számelméleti függvény, és $f(n+1) - f(n) \leq M$ minden n -re, akkor

$$f(n) = O(\log n).$$

(A tétel bizonyításához elegendő lenne az állítást csupán teljesen additív függvényekre bizonyítani.)

Bizonyítás: Legyen $x_0 = n$. Ha már x_i definiálva van, akkor legyen

y_i x_i, x_i+1, x_i+2, x_i+3 közül az, amelyik 2-vel osztható, de 4-gyel nem, x_{i+1} pedig $y_i/2$. Ha $2^k \leq n < 2^{k+1}$, akkor $x_k = 3$. Így

$$\begin{aligned} f(n) &= f(x_0) \geq f(y_0) - 3M = \\ &= f(x_1) + f(2) - 3M \geq \dots \geq f(3) + k(f(2) - 3M). \end{aligned}$$

Hasonlóan: Legyen $x'_0 = n$. Ha x'_i -t már definiáltuk, akkor y'_i legyen $x'_i, x'_i-1, x'_i-2, x'_i-3$ közül az, amelyik 2-vel osztható, de 4-gyel nem, és $x'_{i+1} = y'_i/2$. Ha $2 < 2^k \leq n < 2^{k+1}$, akkor $x'_{k-1} = 1$, vagy $x'_k = 1$.

így:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(x_0') \leq f(y_0') + 3M = \\ &= f(x_1') + f(2) + 3M \leq \dots \leq (k-1)(f(2) + 3M). \end{aligned}$$

A fenti két eredmény a lemma állítását igazolja.

Térjünk át a tétel bizonyítására.

Legyen

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n} \quad \text{és} \quad v = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n},$$

akkor

$$u \leq \frac{f(n)}{\log n} \leq v$$

minden n -re ($n = 1, 2, \dots$), mivel $f(n)$ teljes additivitása miatt

$$\frac{f(n^k)}{\log n^k} = \frac{f(n)}{\log n}.$$

A tételt Indirekt úton fogjuk bizonyítani. Tegyük fel, hogy $u < v$. Ekkor az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $u = -1$ és $v = 1$, mert ellenkező esetben $f(n)$ helyett alkalmas $c_1 f(n) + c_2 \log n$ lineáris kombinációra alkalmazhatnánk az eljárásunkat. Ezzel a normalizációval elértük, hogy

$$|f(n)| \leq \log n.$$

Legyen p_0 prímszám, α egyelőre tetszőszerinti egész szám, és $a = p_0^\alpha$. Tekintsük az

$$S_a(x) := \sum_{n \leq x} \left(\frac{f(an-1)}{an-1} - \frac{f(n)}{an} \right)$$

kifejezést. $S_a(x)$ két féle átalakításával egy fontos egyenlőtlenséghez jutunk.

Átrendezve és (4.1)-et egyedül itt felhasználva kapjuk:

$$S_a(x) = \sum_{n \leq x} \left(\frac{f(an-1)}{an(an-1)} - \frac{f(an) - f(an-1)}{an} + \frac{f(a)}{an} \right) \geq \\ \geq - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(an-1)}{an(an-1)} + \frac{f(a)-M}{a} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}.$$

Mivel az első szumma nyilvánvalóan véges

$$(4.2) \quad S_a(x) \geq \frac{1}{a} (f(a) - M) \log x + O(1).$$

A bizonyítás további részében p^v ($v=1,2,\dots$) helyett q -t fogunk írni. Többször fogunk utalni az Előkészítés részben közölt eredményekre.

$S_a(x)$ másik irányú átalakításhoz felhasználjuk az $f(n)$ teljes additivitásából következő

$$f(n) = \sum_{\substack{p,p' \\ p' | n}} f(p) = \sum_{q|n} f(p)$$

összefüggést. Ez alapján

$$(4.3) \quad S_a(x) = \sum_{n \leq x} \left(\sum_{\substack{q|an-1}} \frac{f(p)}{an-1} - \sum_{q|n} \frac{f(p)}{an} \right) = \\ = \sum_q f(p) \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ q|an-1}} \frac{1}{an-1} - \sum_{\substack{n \leq x \\ q|n}} \frac{1}{an} \right).$$

Az első belső összeg üres, ha $q \geq ax$, a második, ha $q > x$.

Legyen először $x < q \leq ax$. Ilyen q esetén legfeljebb egy olyan n létezik, amelyre $n \leq x$ és $an \equiv 1 \pmod{q}$, és az ilyen n -re $an-1 \geq q$.

Így (d) -t felhasználva:

$$(4.4) \quad \left| \sum_{q > x} f(p) \sum_{\substack{n \leq x \\ q | an-1}} \frac{1}{an-1} \right| \leq \sum_{x < q \leq ax} \frac{|f(p)|}{q} \leq \\ \leq \sum_{x < q \leq ax} \frac{\log p}{q} = \log a + O(1) = O_a(1),$$

ahol $O_a(1)$ x -re vonatkozóan $O(1)$ -t jelent, de a -tól függő.

Most meghatározzuk, hogy p_0 hatványai mennyivel járulnak hozzá $S_a(x)$ értékéhez. $p_0^a = a$ miatt csak a második szummát kell tekintenünk.

$$- \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p_0^v | n \\ v \geq 1}} \frac{f(p_0)}{a n} = - \frac{1}{a} f(p_0) \sum_v \frac{1}{p_0^v} \sum_{m \leq \frac{x}{p_0^v}} \frac{1}{m} = \\ = - \frac{1}{a} f(p_0) \sum_{v \leq \frac{\log x}{\log p_0}} \frac{1}{p_0^v} \left(\log \frac{x}{p_0^v} + O(1) \right) = \\ = - \frac{1}{a} f(p_0) \sum_{v \leq \frac{\log x}{\log p_0}} \frac{1}{p_0^v} \left(\log x - v \log p_0 + O(1) \right) =$$

- mivel a

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{p_0^v} (v \log p_0 + O(1))$$

sor konvergens -

$$(4.5) \quad = - \frac{1}{a} f(p_0) \log x \sum_{v \leq \frac{\log x}{\log p_0}} \frac{1}{p_0^v} + O(1) = \\ = - \frac{f(p_0) \log x}{a(p_0 - 1)} + O(1).$$

Itt felhasználjuk a

$$\sum_{\nu \leq \frac{\log x}{\log p_0}} \frac{1}{p_0^\nu} \leq \left(1 - p_0^{-1 - \frac{\log x}{\log p_0}}\right) \frac{1}{p_0 - 1} =$$

$$= \frac{1}{p_0 - 1} \left(1 - \frac{p_0}{x}\right) = \frac{1}{p_0 - 1} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Összefoglalva a (4.2)-(4.5) eredményeket:

$$(4.6) \quad \left(\frac{f(a)}{a} \left(1 + \frac{1}{a(p_0 - 1)}\right) - \frac{M}{a}\right) \log x \leq$$

$$\leq \sum_{q \leq x, (q, a) = 1} f(p) \left(\sum_{n \leq x, q|an-1} \frac{1}{an-1} - \sum_{n \leq x, q|n} \frac{1}{an} \right) + O_a(1).$$

Az első belső szummában n olyan, hogy

$$n \leq x \quad \text{és} \quad an = 1 + mq.$$

Ha m -t tesszük az összegzés indexévé n helyett, akkor

$$m \leq \frac{ax - 1}{q} \quad \text{és} \quad qm \equiv -1 \pmod{a}$$

-nak kell teljesülnie. Itt $m \leq ax/q$ -t is írhatunk, mert $m = ax/q$ nem megoldása a $qm \equiv -1 \pmod{a}$ kongruenciának. A második belső szumma megfelelő átrendezése triviális. Ez alapján (4.6) jobb oldalát a következő alakba írhatjuk

$$\sum_{\substack{q \leq x \\ (q, a) = 1}} \frac{f(p)}{q} \left(\sum_{\substack{m \leq ax/q \\ qm \equiv -1 \pmod{a}}} \frac{1}{m} - \sum_{\substack{m \leq ax/q \\ m \equiv 0 \pmod{a}}} \frac{1}{m} \right) + O_a(1).$$

A zárójelen belüli összegeket átrendezve egy csökkenő tagokból álló véges alternáló sorozatot kapunk, amelynek első tagja $1/r$, ahol

$$r = r_a(q), \quad q r_a(q) \equiv -1 \pmod{a} \text{ és } 1 \leq r_a(q) \leq a,$$

a másodiktól minden tag $\leq 1/a$. Ezt, $|f(n)| \leq \log n$ -t és (d)-t felhasználva

$$= \sum_{\substack{q \leq x \\ (q,a)=1}} \frac{f(p)}{q} \left(\frac{1}{r_a(q)} + O\left(\frac{1}{a}\right) \right) + O_a(1) =$$

$$= \sum_{\substack{q \leq x \\ (q,a)=1}} \left(\frac{f(p)}{q r_a(q)} + \frac{1}{a} O\left(\frac{\log p}{q}\right) \right) + O_a(1) =$$

$$= \sum_{\substack{q \leq x \\ (q,a)=1}} \frac{f(p)}{q r_a(q)} + O\left(\frac{\log x}{a}\right) + O_a(1).$$

Ezt (4.6)-tal összevetve, alkalmas K -vel a

$$(4.7) \quad \sum_{q \leq x, (q,a)=1} \frac{f(p)}{q} \frac{1}{r_a(q)} \geq \left(f(a) \left(1 + \frac{1}{\alpha(p_0-1)} \right) - K \right) \frac{\log x}{a} + O_a(1)$$

alap egyenlőtlenséghez jutunk.

A $\geq$ reláció az egész levezetés egyetlen pontjáról, a (4.1) felhasználásából ered. Ha a függvényünk (4.1) helyett a

$$(4.1') \quad f(n+1) \geq f(n) - M$$

feltételnek tesz eleget, akkor az analóg

$$(4.7'') \sum_{q \leq x, (q, a)=1} \frac{f(p)}{q} \frac{1}{\tau_a(q)} \leq \left(f(a) \left(1 + \frac{1}{\alpha(p_0-1)} \right) + K \right) \frac{\log x}{a} + O_a(1)$$

egyenlőséget nyerjük.

(4.1) teljesülése esetén is kaphatunk (4.7'')-hez hasonló felső becslést, csak a levezetés során a_n-1 helyett a_n+1 -et kell imunk, és az

$$f(a_n+1) \leq f(a_n) + M$$

egyenlőséget alkalmazni. Az egyetlen különbség az így nyerhető (4.7'') és a (4.7') egyenlőtlenség között, hogy $\tau_a(q)$ helyett $\tau_a^*(q)$ -t kell imunk, ahol

$$\tau^* = \tau_a^*(q), \quad q \tau^* \equiv 1 \pmod{a} \text{ és } 1 \leq \tau^* \leq a.$$

Teljesen hasonlóan, ha (4.1') teljesül (4.7) -ben τ -et τ^* -gal helyettesítve megkapjuk a (4.7'') egyenlőtlenséget.

A bizonyítás következő részében megmutatjuk, hogy "sok" primszám eleget tesz az $f(p) \approx \log p$ összefüggésnek.

p_0 -at így választhattuk. Legyen $a = p_0^\alpha$ és α olyan nagy, hogy

$$f(a) - K \geq (1-2\varepsilon) \log a \quad (\varepsilon > 0).$$

Ekkor (4.7'')-ből

$$(4.8) \sum_{\substack{q \leq x \\ (q, a)=1}} \frac{f(p)}{q \tau_a(q)} \geq (1-2\varepsilon) \frac{1}{a} \log a \log x + O_a(1)$$

következik. Hasonlóan, - mivel a logaritmus függvényre is teljesül

(4.7') - ha α elég nagy, érvényes a

$$\sum_{q \leq x, (q, a) = 1} \frac{\log q}{q \tau_a(q)} \leq (1 + \varepsilon) \frac{1}{a} \log a \log x + O_a(1)$$

összefüggés.

Legyen $\eta = 6\varepsilon$ és

$$B := \{b : b \text{ prim, } f(b) \geq (1 - \eta) \log b\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq x, (q, a) = 1} \frac{f(q)}{q \tau_a(q)} &\leq \eta \sum_{\substack{q \leq x, (q, a) = 1 \\ p \in B}} \frac{\log p}{q \tau_a(q)} + (1 - \eta) \sum_{\substack{q \leq x \\ (q, a) = 1}} \frac{\log q}{q \tau_a(q)} \leq \\ &\leq \eta \sum_{\substack{q \leq x, (q, a) = 1 \\ p \in B}} \frac{\log p}{q \tau_a(q)} + (1 - \eta)(1 + \varepsilon) \frac{1}{a} \log a \log x + O_a(1). \end{aligned}$$

Ezt átrendezve és (4.8) -al összevetve

$$\begin{aligned} \eta \sum_{\substack{q \leq x \\ p \in B}} \frac{\log p}{q} &\geq \eta \sum_{\substack{q \leq x, (q, a) = 1 \\ p \in B}} \frac{\log p}{q \tau_a(q)} \geq \\ &\geq ((1 - 2\varepsilon) - (1 - \eta)(1 + \varepsilon)) \frac{1}{a} \log a \log x + O_a(1) \geq \\ &\geq (\eta - 3\varepsilon) \frac{1}{a} \log a \log x + O_a(1) \end{aligned}$$

adódik. Felhasználva az $\eta = 6\varepsilon$ egyenlőséget, továbbá azt, hogy a magasabb primhatványok csak $O(1)$ -gyel járulnak hozzá az összeghez a

$$(4.9) \quad \sum_{b \in B, b \leq x} \frac{\log b}{b-1} \geq \frac{\log a}{2a} \log x + O_a(1)$$

összefüggéshez jutunk, ami bizonyítja, hogy B bizonyos értelemben pozitív sűrűségű a prímszámok halmazában.

Legyen $B_1 \subset B$ olyan véges halmaz, hogy

$$(4.10) \quad \sum_{b \in B_1} \frac{1}{b-1} \leq \frac{6}{\pi^2} \left(\eta \sum_{b \in B_1} \frac{\log b}{b-1} \right)^2$$

és

$$(4.11) \quad \sum_{b \in B_1} \frac{1}{b-1} \sum_{\tau=1}^{b-1} \frac{1}{\tau} \leq (1-\eta)^{-1} \sum_{b \in B_1} \frac{\log b}{b-1} \quad \text{teljesüljön.}$$

(4.7) jobb oldalára érvényes a következő becslés:

$$\left(f(a) \left(1 + \frac{1}{\alpha(p_0-1)} \right) - K \right) \frac{\log x}{a} + O_a(1) \geq \left(\frac{f(a)}{a-1} - \frac{K}{a} \right) \log x + O_a(1).$$

Összegezzük az utóbbi kifejezésünket a -t végigfuttatva B_1 elemein ($O_b(1)$ helyett írhatunk $O(1)$ -et, mivel B_1 véges)

$$\sum_{b \in B_1} \left(\frac{f(b)}{b-1} - \frac{K}{b} \right) \log x + O(1) \geq$$

$$\geq (1-\eta) \sum_{b \in B_1} \frac{\log b}{b-1} - K \sum_{b \in B_1} \frac{1}{b} \log x + O(1) \geq$$

$$\geq (1-2\eta) \sum_{b \in B_1} \frac{\log b}{b-1} \log x + O(1)$$

adódik. Az utolsó egyenlőtlenség B_1 elég nagyra választásával teljesíthető.

(4.7) baloldalán ugyanezt az összegzést elvégezve a

$$\sum_{q \leq x} \frac{f(p)}{q} \sum_{\substack{b \in B_1 \\ b \nmid q}} \frac{1}{\tau_b(q)}$$

összeget kapjuk, ezt pedig az

$$R := \prod_{b \in B_1} b$$

jelölés bevezetésével írhatjuk a

$$\sum_{q \leq x, (q, R) = 1} \frac{f(p)}{q} \sum_{b \in B_1} \frac{1}{r_b(q)} + O(1)$$

alakban is, mivel B_1 csak véges sok prímszámot tartalmaz, és tetszőszerinti $p \in B_1$ -re a $q = p, p^2, \dots$ számok figyelembevétele csak $O(1)$ -gyel változtatja az összeget.

Most vizsgáljuk meg a

$$W(q) := \sum_{b \in B_1} \frac{1}{r_b(q)} \quad ((q, R) = 1)$$

függvényt. Könnyű látni, hogy W értéke csak a $(\text{mod } R)$ maradékosztálytól függ. Ha q egyenletes eloszlású a $(\text{mod } R)$ maradékosztályokon, $(q, R) = 1$, akkor r_b egyenletes eloszlású az $1, 2, \dots, b-1$ értékeken, W pedig úgy fogható fel, mint a $(\text{mod } R)$ maradékosztályokon értelmezett $1/r_b$ független valószínűségi változók összege. Így W E átlaga és D^2 szórásnégyzete az $1/r_b$ valószínűségi változók átlagának, illetve szórásnégyzetének az összege. Azaz

$$\begin{aligned} E W &= \sum_{b \in B_1} E \frac{1}{r_b} = \sum_{b \in B_1} \frac{1}{b-1} \sum_{r=1}^{b-1} \frac{1}{r} \geq \\ &\geq \sum_{b \in B_1} \frac{\log b}{b-1} \end{aligned}$$

másrészt (4.11) felhasználásával

$$E W \leq (1-\eta)^{-1} \sum_{b \in B_1} \frac{\log b}{b-1} \quad ,$$

Illetve /a szokásos módon $\varphi(n)$ -nel az n -nél kisebb, n -hez relatív prímek számát jelölve/

$$\frac{1}{\varphi(R)} \sum_{\substack{(n,R)=1 \\ n \pmod{R}}} (W(n) - EW)^2 = D^2 W =$$

$$= \sum_{b \in B_1} D^2 \frac{1}{r_b} = \sum_{b \in B_1} \left(E \frac{1}{r_b^2} - \left(E \frac{1}{r_b} \right)^2 \right) \leq$$

$$\leq \sum_{b \in B_1} E \frac{1}{r_b^2} = \sum_{b \in B_1} \frac{1}{b-1} \sum_{r=1}^{b-1} \frac{1}{r^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{b \in B_1} \frac{1}{b-1} \leq$$

$$(4.12) \leq \left(\eta \sum_{b \in B_1} \frac{\log b}{b-1} \right)^2$$

/Felhasználtuk a jól ismert $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ egyenlőséget, és (4.10)-et/.

Alkalmazzuk ezeket az összefüggéseket a (4.7) egyenlőtlenség összegzésében:

$$\sum_{q \leq x, (q,R)=1} \frac{f(p)}{q} W(q) \geq (1-2\eta) \sum_{b \in B_1} \frac{\log b}{b-1} \log x + O(1) \geq$$

$$\geq (1-2\eta)(1-\eta) EW \log x + O(1) \geq$$

$$(4.13) \geq (1-3\eta) EW \log x + O(1).$$

Becsüljük meg mekkora eltérés keletkezik, ha az egyenlőtlenség

baloldalán $W(q)$ helyett EW -t írunk

$$\left| \sum_{\substack{q \leq x \\ (q,R)=1}} \frac{f(p)}{q} (W(q) - EW) \right| \leq \sum_{\substack{n \pmod{R} \\ (n,R)=1}} |W(n) - EW| \sum_{\substack{q \leq x \\ q \equiv n \pmod{R}}} \frac{\log p}{q} \leq$$

Az Előkészítés-ben ismertetett (g) összefüggés felhasználásával

$$\leq \frac{\log x}{\varphi(R)} \sum_{\substack{n \pmod{R} \\ (n, R) = 1}} |W(n) - EW| + O(1) \leq$$

$$\leq \log x \left(\frac{1}{\varphi(R)} \sum_{\substack{n \pmod{R} \\ (n, R) = 1}} (W(n) - EW)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + O(1) =$$

$$= \log x DW + O(1) \leq$$

$$\leq \eta \sum_{b \in B_1} \frac{\log b}{b-1} \log x + O(1) \quad ((4.12) \text{ szerint})$$

$$\leq \eta EW \log x + O(1).$$

Ezt (4.13)-ba behelyettesítve és EW -vel osztva

$$\sum_{q \leq x} \frac{f(p)}{q} = \sum_{\substack{q \leq x \\ (p, R) = 1}} \frac{f(p)}{q} + O(1) \geq (1 - 4\eta) \log x + O(1)$$

adódik. Ha η -t kezdetben elég kicsire választottuk, és x elég nagy akkor

$$(4.14) \quad \sum_{q \leq x} \frac{f(p)}{q} > 0.$$

Ha f helyett a $-f$ függvényt vesszük, akkor $-f$ rendelkezik a (4.1') tulajdonsággal, érvényes tehát a (4.7*) egyenlőtlenség. Ez alapján a

$$\sum_{q \leq x} \frac{-f(p)}{q} > 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk /előg nagy x esetén/. Ez nyilván ellentmond (1.14)-nek. Az ellenmondás a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n}$$

indirekt feltevés következménye, tehát a tételt bebizonyítottuk.

LOKÁLISAN "HASONLO" TELJESEN ADDITIV FÜGGVÉNPÁROK

KÁTAI [12] közölte az alábbi sejtést:

5.1. sejtés: Ha $f(n)$ és $g(n)$ olyan additív számelméleti függvény, hogy $g(n+1) - f(n)$ korlátos, akkor $f(n) = c \log n + u(n)$, $g(n) = c \log n + v(n)$, ahol $u(n)$ és $v(n)$ korlátos függvény.

A sejtéssel kapcsolatban sikerült bebizonyítanom a következő tételt:

5.2. tétel: Ha $f(n)$ és $g(n)$ olyan teljesen additív számelméleti függvény, hogy $g(n+1) - f(n)$ korlátos, akkor $f(n) = g(n) = c \log n$.

Bizonyítás: Legyen $|g(n+1) - f(n)| \leq M$, ekkor $|g(2n+1) - f(2n+1)| \leq$
 $\leq |g(2n+2) - f(2n+1)| + |g(2n+1) - f(2n)| + |f(2n) - g(2n+2)| \leq$
 (5.1) $\leq 2M + |g(n+1) - f(n)| + |g(2) - f(2)| \leq M'$,

ahol M' alkalmas konstans.

Legyen p páratlan prímszám, τ természetes szám. Ekkor (5.1) miatt

$$M' \geq |g(p^\tau) - f(p^\tau)| = \tau |g(p) - f(p)|.$$

Mivel itt τ tetszés szerinti volt - $f(p) = g(p)$.

Most már elegendő csak azt megmutatnunk, hogy $f(2) = g(2)$, ekkor $f(n) = g(n)$ miatt ugyanis az állításunkat a 4. tételre vezettük vissza. Ezt indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy állításunkkal

ellentétben $f(2) > g(2)$ ($f(2) < g(2)$ esetben $-f$ és $-g$ -re alkalmazhatjuk az előzősunkat), és legyen $r \geq 1$ egész.

$$f(2^{r+1}) = g(2^{r+1}) \geq -|g(2^{r+1}) - f(2^r)| + f(2^r) \geq r f(2) - M,$$

$$f(2^{r+1}) \geq -|f(2^{r+1}) - g(2^r)| + g(2^r) \geq r g(2) - M.$$

így

$$(5.2) \quad f(2^{2r}-1) \geq r(f(2) + g(2)) - 2M.$$

Másrészt

$$(5.3) \quad f(2^{2r}-1) \leq |f(2^{2r}-1) - g(2^{2r})| + g(2^{2r}) \leq 2r g(2) + M.$$

(5.2) és (5.3)-ból

$$2r g(2) + M \geq r(f(2) + g(2)) - 2M,$$

ezt átrendezve

$$g(2) \geq f(2) - \frac{3M}{r} \rightarrow f(2), \text{ ha } r \rightarrow \infty$$

adódik, ami ellentmond az $f(2) > g(2)$ indirekt feltevésnek. Ezzel az 5.2. tétel bizonyítását befejeztük.

I R O D A L O M

- [1] ERDŐS, P. On the distribution function of additive functions. *Annals of Math.* 47.1.-20(1946).
- [2] MOSER, L. - LAMBEK, J. On monotone multiplicative functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 4. II. 544-545 (1953).
- [3] ERDŐS, P. - SURÁNYI, J. Válogatott fejezetek a számelméletből, Budapest 1960. 235-238.
- [4] KÁTAI, I. A remark on number-theoretical functions. *Act. Arith.* 14. 409-415 (1968).
- [5] RÉNYI, A. On a theorem of P. Erdős and its application in information theory. *Mathematica, Cluj* 1 (24), 2, 341-344 (1959).
- [6] ERDŐS, P. On the distribution functions of additive arithmetical functions and on some related problems. *Rend. Sem. Mat. Fiz. Milano* 27. 45-49 (1958).
- [7] KÁTAI, I. A remark on additive arithmetical functions. *Ann. Univ. Budapest* 10. 81-83 (1967).
- [8] MÁTÉ, A. A new proof of a theorem of P. Erdős. *Proc. Amer. Math. Soc.* 18. 159-162 (1967).
- [9] MÁTÉ, E. On a problem of P. Erdős. *Acta Sci. Math.* 30. 301-304 (1969).

- [10] WIRSING, E. A characterisation of $\log n$ as an additive arithmetic function.
- [11] SPECHT, W. Elementare beweise der Primzahlsätze. Berlin, 1956.
- [12] KÁTAI, I. Some results and problems in the theory of additive functions. Acta Sci. Math. 30. 305-311. (1969).

V é l e m é n y

Máté Eörs: Az additív számelméleti függvények és a logaritmus függvény kapcsolata c. egyetemi doktori értekezéséről

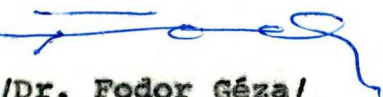
Máté Eörs doktori értekezésében bizonyos additív számelméleti függvényeknek a logaritmus függvény segítségével való előállításával, az additív számelméleti függvények és a logaritmus függvény egyéb kapcsolataival foglalkozik. Erdős Pál kezdte vizsgálni a lokálisan ill. aszimptotikusan "jó tulajdonságu" additív számelméleti függvényeket. A doktori értekezés ennek a témakörnek fontosabb tételeit tartalmazza. Ezek között Erdős egy már 1946-ban közölt sejtésének bizonyítását. Ennek első rész-eredménye Máté Eörstől származik. Bizonyítása egyúttal kiadja Kátai Imre egyik sejtésének speciális esetét is. Ezenkívül több ismert tételt saját bizonyítással közöl.

Értekezésében a jelölt elég nagy számú irodalmat dolgoz fel. Saját eredményeit ügyesen építi be a disszertáció témájával kapcsolatos vizsgálatokba. A dolgozat értékét emeli, hogy a szerzőnek az értekezésben szereplő eredményei közül a legértékesebb már publikációt is nyert az Acta Sci. Math.-ban.

A dolgozat nyelvezete tömör, logikai felépítése világos. Önálló munkaként is olvasható, mert a szerző az értekezésben szereplő mindenegyres tételhez annak bizonyítását is közli.

A disszertáció tartalmi és formai szempontból megfelel a doktori értekezésekkel szemben támasztott követelményeknek, ezért annak elfogadását javasoljuk summa cum laude minősítéssel.

Szeged, 1973. január 8.



/Dr. Fodor Géza/
tanszékvezető egyetemi tanár



/Dr. Gécseg Ferenc/
tanszékvezető egyetemi docens