BENKŐ DÁVID

THE EQUILIBRIUM MEASURE AND SAFF'S CONJECTURE

(Az Egyensúlyi Mérték és Saff Sejtése)

TÉZIS

Szegedi Tudományegyetem, 2006 Május

Témavezető: Totik Vilmos, Ph.D.

1 Az Approximáció-Probléma

[28]-ben Totik Vilmos egy alapvető fontosságú kérdést oldott meg a súlyozott polinomokkal való approximáció témakörében: Legyen $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy nemnegatív folytonos függvény, melyre teljesül, hogy $\lim_{x\to\pm\infty} xw(x) = 0$. Definiáljuk $q(x)$-et a $w(x) = \exp(-q(x))$ egyenlettel, és hívjuk $q(x)$-et *külső mezőnek*. Saff kérdése a következő volt: mely $f(x)$ függvények közelíthetők egyenletesen súlyozott $w(x)^n P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ polinomokkal?

Az ilyen típusú approximációnak több alkalmazása is van. Fontos megjegyeznünk, hogy a súly kitevője n (és $n = 0, 1, 2, ...$), így ez a fajta approximáció különbözik a klasszikus súlyozot approximációtól, amelyben nincs kitevő. A probléma nehézségét elsősorban az okozza, hogy a P_n polinomnak ki kell egyensúlyozni a $w^n(x)$ exponenciális változásait.

Először is világos, hogy $f(x)$-nek folytonosnak kell lennie. Majd látni fogjuk, hogy pontosan azok a folytonos függvények közelíthetők $w^n P_n$ súlyozott polinomokkal, amelyek eltűnnek egy w-től függő zárt Z_w halmazon. Ezek után a probléma a Z_w halmaz megtalálására redukálódik.

A probléma érdekessége, hogy egy valószínűségi mérték játszik a megoldásában alapvető szerepet. Ezt a mértéket a w-vel asszociált *egyensúlyi mértéknek* nevezzük, és a tartóját S_w-vel jelöljük. S_w a számegyenes egy kompakt halmaza.

Tegyük fel, hogy $q(x)$ konvex függvény. Saff azt sejtette, hogy ez esetben egy folytonos $f(x)$ függvény akkor és csakis akkor közelíthető meg egyenletesen, ha eltűnik az S_w tartón kívül. Másszóval, Z_w az S_w tartó belsejének a komplementere.

[29]-ben Totik mutatta meg, hogy ez az állítás tetszőleges $q(x)$-ra nem igaz. Ugyanebben a könyvben azt is belátta, hogy Saff sejtése igaz konvex $q(x)$-ra bizonyos simasági feltétel mellett.

Megjegyezzük, hogy a konvex külső mezőknek megvan az a hasznos tulaj-

donsága, hogy S_w egy intervallum.

A teljes számegyenes helyett definiálhatjuk $w(x)$-et a számegyenes egy zárt Σ részhalmazán is. Tegyük fel most, hogy $\Sigma = [0, +\infty)$. Egy ismert tétel szerint ha $xq'(x)$ növekedő függvény, akkor S_w egy intervallum. Ez megint csak egy hasznos állítás, hiszen vannak olyan külső mezők melyek nem konvexek, de $xq'(x)$ növekedő.

Totik vetette fel a következő problémát. Tegyük fel, hogy $xq'(x)$ növekedő $\Sigma := [0, +\infty)$-en. Jelölje $[a, b]$ az S_w tartót. Meg tudunk-e egyenletesen közelíteni minden olyan folytonos függvényt súlyozott $w(x)^n P_n(x)$ polinomokkal, mely eltűnik (a, b)-n kívül? Ez volt az a probléma, mely végül ennek a disszertációnak a megírásához is elvezetett.

A kérdésre a pozitív választ [3]-ben adta meg a szerző. Ott "gyengén konvex" külső mezőkre van megoldva az approximáció-probléma. Ez egy olyan függvényosztály, mely többek között magában foglalja a konvex függvényeket, és azokat is amelyekre $xq'(x)$ növekedő. Példaként tekintsük a $q(x) := x^\lambda$ külső mezőt, ahol $\lambda \in (0, 1)$. Természetesen q nem konvex $[0, +\infty)$-on, de itt $xq'(x)$ növekedő. Tehát S_w egy $[a, b] \subset [0, +\infty)$ intervallum lesz (mely intervallum konkrétan meg is adható a λ paraméter függvényeként). Azok a folytonos függvények melyek eltűnnek (a, b)-n kívül, egyenletesen megközelíthetők súlyozott $w(x)^n P_n(x)$ polinomokkal.

A disszertációban tovább általánosítjuk a fenti eredményeket (4. fejezet). A és B bázispontokra nézve "gyengén konvex" függvényeket definiálunk, és a külső mezőt ebből a függvényosztályból választjuk. Ez a függvényosztály nagyobb, mint a [3]-ban szereplő, ennek ellenére megtartottuk a "gyengén konvex függvények" elnevezést. Azt is megmutatjuk, hogy "gyengén konvex" külső mezők olyan egyensúlyi mértéket hoznak létre, melynek tartója egy intervallum (2. fejezet). Speciálisan, a tartó intervallum lesz, ha $\exp(q(x))$ konvex.

A 3. fejezetben az egységkörön is vizsgáljuk az egyensúlyi problémát. Olyan feltételeket adunk meg, melyek garantálják, hogy az egyensúlyi mérték tartója a körnek egy íve lesz.

2 Logaritmikus Potenciálelmélet

Legyen $\Sigma \subset \mathbb{R}$ egy zárt halmaz. A Σ-n értelmezett w súlyfüggvényt "megengedett"-nek hívunk, ha

(i) w felülről félig folytonos,

(ii) $\{x \in \Sigma : \ w(x) > 0\}$-nek pozitív logaritmikus kapacitása van,

(iii) ha Σ nem korlátos, akkor $|z|w(z) \to 0$ midőn $|z| \to \infty, \ z \in \Sigma$.

Az approximáció-problémában azt is feltesszük, hogy w folytonos, és, hogy Σ reguláris halmaz a $\mathbf{C}\backslash\Sigma$-on tekintett Dirichlet-problémára nézve.

Legyen q a $w(x) =: \exp(-q(x))$ egyenlettel definiálva, így tehát $q : \Sigma \to (-\infty, \infty]$ egy alulról félig folytonos függvény.

Legyen $\mathcal{M}(\Sigma)$ azon pozitív Borel egységmértékek halmaza, melyeknek a tartója Σ-ba eső kompakt halmaz. A $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma)$ mérték *logaritmikus potenciálját*

$$U^{\mu}(x) := \int \log \frac{1}{|x-t|} d\mu(t)$$

definiálja, és a *súlyozott energia integrált* pedig

$$I_w(\mu) := -\int\int \log\Big(|x-y|w(x)w(y)\Big) d\mu(x)d\mu(y).$$

Azt mondjuk, hogy egy tulajdonság kvázi mindenütt teljesül, ha mindenütt teljesül, kivéve egy halmazt, melynek nulla a kapacitása. Szükségünk lesz a következő alapvető tételre ([24], Theorem I.1.3):

Tétel 1 *Legyen w egy megengedett (de nem feltétlenül folytonos) mérték a zárt Σ halmazon és legyen $V_w := \inf\{I_w(\mu) : \ \mu \in \mathcal{M}(\Sigma)\}$. Ekkor*

(a) V_w véges,

(b) egyértelműen létezik $\mu_w \in \mathcal{M}(\Sigma)$, melyre $I_w(\mu_w) = V_w$,

(c) Az $F_w := V_w - \int q d\mu_w$ konstanssal

$$U^{\mu_w}(x) + q(x) \geq F_w$$

kvázi-mindenütt teljesül Σ-n,

(d)

$$U^{\mu_w}(x) + q(x) \leq F_w \tag{1}$$

minden $x \in S_w := \mathrm{supp}(\mu_\mathrm{w})$ értékre.

Megjegyzés A definíciónk szerint minden $\mathcal{M}(\Sigma)$-beli mértéknek kompakt tartója van, így az S_w tartó is kompakt.

A μ_w mértéket a w-vel asszociált *egyensúlyi mértéknek* hívjuk.

Jelölés 2 *Legyen $G \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy egy tulajdonság teljesül a G* belsejében, *ha a tulajdonság teljesül G minden kompakt részhalmazán.*

3 Totik Eredményei

Σ-n a súlyozott $w^n P_n$ polinomokkal való egyenletes approximáció kérdését vizsgáljuk, ahol $degP_n \leq n$. Tétel 3 egy Stone-Weierstrass típusú tétel (lásd [13], vagy [24], Theorem VI.1.1).

Tétel 3 *Található egy olyan $Z = Z(w) \subset \Sigma$ zárt halmaz, melyre fennáll, hogy egy Σ-n folytonos f függvény akkor és csak akkor közelíthető meg egyenletesen $w^n P_n$, $n = 1, 2, ...$ súlyozott polinomokkal, ha f eltűnik Z-n.*

Annak a megválaszolásában, hogy mi a $Z(w)$ halmaz, a μ_w egyensúlyi mérték és a tartója $S_w := \mathrm{supp}(\mu_\mathrm{w})$ játszik fontos szerepet (lásd [29], vagy [13], vagy [24], Theorem VI.1.2):

Tétel 4 *S_w komplementere Z-be tartozik.*

Totik vezette be a sima integrállal rendelkező függvények fogalmát ([28]), mely fogalmat a Saff sejtés megoldásánál használt.

Definíció 5 *Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek sima integrálja van az $R \subset \mathbb{R}$ halmazon, ha $f(x)$ majdnem mindenütt nem-negatív R-en, és*

$$\int_I f = (1 + o(1)) \int_J f \tag{2}$$

ahol $I,\ J \subset R$ két egymáshoz csatlakozó intervallum, melyeknek hossza $0 < \epsilon$, és $\epsilon \to 0$. Az $o(1)$ tag függ ϵ-tól, de nem függ I-től és J-től.

Világos, hogy egy pozitív alsó korláttal rendelkező folytonos függvénynek sima integrálja van. De például $\log(1/|t|)$-nek is sima integrálja van $[-1/2, 1/2]$-en.

A következő három tétel Totik eredménye, [28].

Tétel 6 *Legyen $[a, b]$ az S_w tartó részhalmaza, és tegyük fel, hogy az egyensúlyi mértéknek a sűrűségfüggvénye v létezik $[a, b]$-n, és pozitív alsó korlátja valamint sima integrálja van ott. Akkor $(a, b) \cap Z(w) = \emptyset$.*

Tétel 7 *Legyen $[a, b]$ az S_w tartó részhalmaza, és tegyük fel, hogy q konvex függvény (a, b)-n. Akkor μ_w-nek olyan sűrűségfüggvénye van (a, b)-n, amelynek pozitív alsó korlátja valamint sima integrálja van (a, b) belsejében.*

Ebből a két tételből következik:

Tétel 8 *Legyen $[a,b]$ az S_w tartó részhalmaza, és tegyük fel, hogy q konvex függvény (a,b)-n. Akkor $(a,b) \cap Z(w) = \emptyset$. Speciálisan, minden olyan folytonos függvény mely eltűnik (a,b)-n kívül, egyenletesen közelíthető súlyozott $w^n P_n$ polinomokkal.*

Vegyük észre, hogy Tétel 8 egy lokális eredmény, mivel alkalmazható a tartó azon részintervallumain, ahol q konvex.

4 Fő Eredmények

Jelölés 9 *Az $I = [(a,b)]$ jelölés alatt egy olyan intervallumot értünk, mely lehet nyílt, zárt, vagy félig nyílt. Továbbá* $\mathrm{int}(I)$ *az I belső pontjait jelöli, tehát* $\mathrm{int}(I) = (a,b)$.

Amikor egy $[a,b]$-n értelmezet növekedő függvényről beszélünk, elegendő, hogy a függvény csak "majdnem mindenütt" legyen növekedő. Ezt a fogalmat pontosabban definiáljuk a disszertációban. Ebben az értelemben mondhatjuk, hogy ha q konvex, akkor q' növekedő (noha q' csak m. m. létezik).

Most a "gyengén konvex" függvények osztályát definiáljuk. Megjegyezzük, hogy q konvexitása $\exp(q)$ konvexitását vonja maga után, tehát a gyengén konvex függvények osztálya tartalmazza a konvex függvények osztályát.

Definíció 10 *Egy $q : D \to \overline{\mathbb{R}}$ $(D \subset \mathbb{R})$ függvény gyengén konvex az $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, $A < B$ alappontokkal az $I = [(a,b)] \subset D$ intervallumon $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$, ha mindezek teljesülnek:*

(i) $I \subset [A,B]$,

(ii) q abszolút folytonos (a,b) belsejében (így q' létezik m.m. I-ben),

(iii) ha $a \in I$, akkor

$$\liminf_{x \to a+0} q(x) = q(a),$$

és ha $b \in I$, akkor

$$\liminf_{x \to b-0} q(x) = q(b),$$

(iv) I felírható diszjunkt $I_1, ..., I_n$ intervallumok uniójaként, úgy, hogy minden I_k $(1 \leq k \leq n))$ intervallumra:

$$\exp(q(x)) \qquad \textit{konvex } I_k\textit{-n}\ , \quad \textit{vagy} \tag{3}$$

$$(x - A)(B - x)q'(x) + x \qquad \textit{növekedő } I_k\textit{-n}\ . \tag{4}$$

Ha $-\infty < A$ és $B = +\infty$ akkor (4)-et ezzel helyettesítjük:

$$(x - A)q'(x) \quad \textit{növekedő} \quad I_k\textit{-n}\ . \tag{5}$$

Ha $-\infty = A$ és $B < +\infty$ akkor (4)-et ezzel helyettesítjük:

$$(B - x)q'(x) \quad \textit{növekedő} \quad I_k\textit{-n}\ . \tag{6}$$

Végül, ha $-\infty = A$ és $B = +\infty$ akkor (4)-t figyelmen kívül kell hagyni, tehát ekkor $\exp(q(x))$-nak konvexnek kell lennie az egész I-n.

(v) ha x_0 a végpontja egy I_k-nak, de a és b-től különböző, akkor:

$$\limsup_{x \to x_0^-} q'(x) \leq \liminf_{x \to x_0^+} q'(x), \tag{7}$$

A következő tétel a *főtételünk.*

Tétel 11 *Legyen w egy folytonos megengedett súlyfüggvény $\mathbb{R}$-en. Tegyük fel, hogy q gyengén konvex $[A, B]$-n, a véges A, B alappontokkal, és $S_w \subset (A, B)$. Akkor $Z(w) = (\text{int } S_w)^c$. Tehát egy folytonos $f(x)$ függvény akkor és csak akkor approximálható súlyozott $w^n P_n$ polinomokkal, ha eltűnik S_w-on kívül.*

Ezen kívül megadunk olyan feltételeket is a q külső mezőre, melyek garantálják, hogy az egyensúlyi mérték tartója egy intervallum. A legáltalánosabb ilyen feltételünk:

Tétel 12 *Legyen $w = \exp(-q)$ egy megengedett súlyfüggvény $\mathbb{R}$-on, és tegyük fel, hogy q gyengén konvex az $I \subset \Sigma$ intervallumon az $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ alappontokkal, továbbá $S_w \subset [A, B]$. Akkor $S_w \cap I$ egy intervallum.*

A következő tételben az egyensúlyi mérték sűrűségfüggvényének egy integrál–reprezentációját adjuk meg. Az egyszerűség kedvéért $[-1, 1]$-re mondjuk ki a tételt $[A, B]$ helyett.

Tétel 13 *Legyen $w = \exp(-q)$ egy $\mathbb{R}$-en megengedett súlyfüggvény, melyre $\min S_w = -1$, $\max S_w = 1$. Tegyük fel, hogy q abszolút folytonos a $(-1, 1)$ belsejében és, hogy q' korlátos $[-1, 1]$-en. Tegyük azt is fel, hogy $\liminf_{x \to -1+0} q(x) = q(-1)$, $\liminf_{x \to 1-0} q(x) = q(1)$ és, hogy valamely $-1 \le u \le v \le 1$ konstansokkal*

$$\begin{aligned} q'(x) &\le \frac{-1}{1-x} && (-1, u)\text{-on}, \\ \frac{-1}{1-x} \le\ q'(x) &\le \frac{1}{x+1} && (u, v)\text{-on}, \\ \frac{1}{x+1} \le\ q'(x) & && (v, 1)\text{-on}, \end{aligned}$$

$$(1-x)^2 q'(x) - x \quad \textit{növekedő} \quad (-1, u)\text{-on},$$

$$(1-x^2) q'(x) + x \quad \textit{növekedő} \quad (u, v)\text{-on},$$

$$(x+1)^2 q'(x) - x \quad \textit{növekedő} \quad (v, 1)\text{-on}.$$

Akkor $S_w = [-1, 1]$ és $d\mu_w(t) = v(t)dt$, $t \in [-1, 1]$, ahol $v(t)$ majdnem minden $t \in [-1, 1]$-re így van definiálva:

$t \in (-1, u)$-ra legyen

$$v(t) := \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-t^2}}\Big[\frac{t+1}{1-t}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s)^2q'(s)-s-[(1-t)^2q'(t)-t]}{(s-t)\sqrt{1-s^2}}ds$$

$$+\frac{2}{1-t}(\pi+\int_{-1}^{1}\frac{(1-s)q'(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds)\Big], \tag{8}$$

$t \in (u, v)$-re legyen

$$v(t) := \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s^2)q'(s)+s-[(1-t^2)q'(t)+t]}{(s-t)\sqrt{1-s^2}}ds, \tag{9}$$

$t \in (v, 1)$-re legyen

$$v(t) := \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-t^2}}\Big[\frac{1-t}{t+1}\int_{-1}^{1}\frac{(s+1)^2q'(s)-s-[(t+1)^2q'(t)-t]}{(s-t)\sqrt{1-s^2}}ds$$

$$+\frac{2}{t+1}(\pi-\int_{-1}^{1}\frac{(s+1)q'(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds)\Big]. \tag{10}$$

A 3. fejezetben az egyensúlyi problémát a C egységkörön vizsgáljuk. Az egységkört használva rámutatunk a különböző feltételek között fennálló kapcsolatra is (melyek a számegyenesen értelmezett q-ra vonatkozó feltevések). Egy olyan feltételt is találunk q-ra, melyet a gyenge konvexitás definiciója (Definíció 10) nem tartalmaz.

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ két szög, $|\beta - \alpha| < 2\pi$. Ekkor $\widehat{[\alpha, \beta]}$ jelöli az $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}] \subset C$ ívet, és itt $e^{i\alpha}$-ből $e^{i\beta}$-be az óramutatóval ellentétes irányba megyünk. $\widehat{[\alpha, \alpha + 2\pi]}$ az egész C körívet jelöli.

Az alábbi két tételt bizonyítjuk.

Tétel 14 *Legyen $w(z) = \exp(-q(z))$, $|z| = 1$ egy súlyfüggvény C-n és legyen $I = [(\gamma, \delta)]$ egy intervallum, melyre $0 < \delta - \gamma \leq 2\pi$. Tegyük fel, hogy q abszolút*

folytonos I beljesében, és

$$\liminf_{\substack{x \to y \\ x \in I}} q(x) = q(y) \tag{11}$$

amikor y a végpontja I-nek és $y \in I$. Legyen e^{ic} egy olyan pont mely nem belső pontja $\widehat{I}$-nak. Legyenek $\widehat{[\alpha_1, \beta_1]}, ..., \widehat{[\alpha_k, \beta_k]}$, $0 \leq k$ darab íve C-nek, úgy, hogy $1 \leq i \leq k$-re $0 < \beta_i - \alpha_i \leq 2\pi$ és $(S_w \cup \widehat{I}) \subset \widehat{[\alpha_i, \beta_i]}$. Tegyük még fel, hogy I felírható az $I_1, ..., I_n$ intervallumok diszjunkt uniójaként, és minden fix $1 \leq j \leq n$-re vagy

$$e^{q(\theta)} \Big[2 \sin\Big(\frac{\theta - c}{2}\Big) q'(\theta) - \cos\Big(\frac{\theta - c}{2}\Big) \Big] \operatorname{sgn}\Big(\sin\Big(\frac{\theta - c}{2}\Big)\Big) \tag{2.2}$$

növekedő I_j-n, vagy valamey $1 \leq i \leq k$-re:

$$\sin\left(\frac{\theta - \alpha_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta_i - \theta}{2}\right) q'(\theta) + \frac{1}{4} \sin\left(\theta - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}\right) \tag{2.3}$$

növekedő I_j-n. Végül tegyük fel, hogy

$$\limsup_{\theta \to \theta_0^-} q'(\theta) \leq \liminf_{\theta \to \theta_0^+} q'(\theta),$$

valahányszor θ_0 egy I_j intervallum végpontja ($1 \leq j \leq n$) de nem a végpontja I-nek. Ekkor $S_w \cap \widehat{I}$ a C-nek egy íve.

Fentebb sgn a szignum függvényt jelöli.

Példa:

Legyen $q(\theta) = \cos(5\theta)\sin(3\theta)$, $\Sigma = [2.9, 3.18] \cup [3.95, 4]$-on definiálva. ($w$-t Σ-n kívül nullának tekintjük.) Állítjuk, hogy $S_w \cap \widehat{[2.9, 3.18]}$ és $S_w \cap \widehat{[3.95, 4]}$ C-nek egy-egy íve. (Egyikük esetleg üres halmaz is lehet.)

Legyen $\alpha_1 = 2.9, \beta_1 = 4$ és $\alpha_2 = 3.95, \beta_2 = 3.18 + 2\pi$.

Ellenőrizhető, hogy (2.2) $[2.9, 3.17]$-on teljesül, de nem az egész $[2.9, 3.18]$-on. ((2.2)-ben c-t úgy kell választani, hogy e^{ic} nem belső pontja $\widehat{[2.9, 3.18]}$-nak.) Továbbá, α_1-et és β_1-t használva kapjuk, hogy (2.3) nem teljesül az egész $[2.9, 3.18]$-on. De (2.3) teljesül a $[3.17, 3.18]$ részintervallumon. Így (2.2) és (2.3) kombinációja mutatja, hogy $S_w \cap \widehat{[2.9, 3.18]}$ egy ív. α_2-t és β_2-t használva kapjuk, hogy (2.3) teljesül az egész $[3.95, 4]$-on. Így $S_w \cap \widehat{[3.95, 4]}$ egy ív.

Tétel 15 *Adott $k \in \mathbb{N}^+$-ra legyen*

$$\Sigma := \cup_{i=1}^{k} [A_i, B_i] \subset \mathbb{R}, \quad \textit{ahol} \tag{12}$$

$$-\infty < A_1 \leq B_1 < A_2 \leq B_2 < ... < A_k \leq B_k < +\infty.$$

Legyen $W = \exp(-Q)$ egy súlyfüggvény Σ-n, $I \subset \Sigma$ egy intervallum, és tegyük fel, hogy Q abszolút folytonos az I belsejében és

$$\liminf_{\substack{X \to Y \\ X \in I}} Q(X) = Q(Y), \tag{13}$$

amikor Y az I egy végpontja és $Y \in I$. Feltesszük, hogy I felírható az $I_1, ..., I_n$ intervallumok diszjunkt uniójaként, és minden fix $1 \leq j \leq n$-re vagy

$$e^{Q(X)} \quad \textit{konvex} \;\; I_j - n, \tag{14}$$

vagy valamely $1 \leq i \leq k-1$-re

$$(X - B_i)(A_{i+1} - X)Q'(X) + X \quad \textit{csökkenő} \;\; I_j - n, \tag{15}$$

vagy

$$(X - A_1)(B_k - X)Q'(X) + X \quad \textit{növekedő} \;\; I_j - n. \tag{16}$$

Végül tegyük fel, hogy

$$\limsup_{X \to X_0^-} Q'(X) \leq \liminf_{X \to X_0^+} Q'(X),$$

valahányszor X_0 egy I_j végpontja ($1 \leq j \leq n$) de nem a végpontja I-nek. Ekkor $S_W \cap I$ egy intervallum.

Példa: Legyen $\Sigma := [-2, -1] \cup [1, 2]$, és legyen $Q(X) = \log(X + 1)$, $X \in [1, 2]$, a $[-2, -1]$-en pedig legyen $Q(X)$ tetszőleges alulról félig folytonos függvény. Ekkor $S_W \cap [1, 2]$ egy intervallum lesz. Valóban, $(X - (-1))(1 - X)Q'(X) + X$ azonosan 1 ($X \in [1, 2]$), azaz csökkenő függvény.

5 Lemmák

A Tétel 12 bizonyításában az alábbi lemma játszik fontos szerepet:

Lemma 16 *Legyen $w = \exp(-q)$ egy megengedett súlyfüggvény $\mathbb{R}$-en, és legyen $I \subset \Sigma$ egy intervallum. Legyen μ_w a w-vel asszociált egyensúlyi mérték. Tegyük fel, hogy q abszolút folytonos az I belsejében, és hogy*

$$\liminf_{\substack{x \to z \\ x \in I}} q(x) = q(z), \quad \text{ha } z \text{ végpontja } I\text{-nek és } \ z \in I. \tag{17}$$

Ha valamely $f : \ \mathrm{int}(I) \to \mathbb{R}^+$ függvényre $f(x)\frac{d}{dx}[U^{\mu_w}(x) + q(x)]$ egy szigorúan növekedő függvény $\mathrm{int}(I)$-n, akkor $S_w \cap I$ egy intervallum.

Már említettük, hogy a Tétel 12 egy fontos speciális esete:

Tétel 17 *Legyen $w = \exp(-q)$ egy megengedett súlyfüggvény $\mathbb{R}$-en és tegyük fel, hogy $\exp(q)$ konvex az $I \subset \Sigma$ intervallumon és kielégíti a (17) feltételt. Akkor $S_w \cap I$ egy intervallum.*

Egy másik speciális eset a következő tétel:

Tétel 18 *Legyen* $w = \exp(-q)$ *egy megengedett súlyfüggvény* $\mathbb{R}$*-en, és legyen* $I \subset \Sigma$ *egy intervallum. Tegyük fel, hogy* q *abszolút folytonos* I *belsejében és kielégíti a (17) feltételt. Tegyük még fel, hogy valamely véges* $A < B$*-vel* $I \subset [A, B]$, $S_w \subset [A, B]$ *és* $(x - A)(B - x)q'(x) + x$ *növekedő az* I *intervallumon. Akkor* $S_w \cap I$ *egy intervallum.*

Az alábbi propozíció arra ad választ, hogy mikor gyengébb az "$\exp(q)$ konvex" feltétel, mint az "$(x - A)(B - x)q'(x) + x$ növekedő" feltétel:

Propozíció 19 *Legyen* $J \subset [-1, 1]$ *egy nyílt intervallum, és* q *a* J*-n definiált függvény mely abszolút folytonos* J *belsejében.*

a) Ha

$$q'(x) \in \Big[\frac{-1}{1-x}, \frac{1}{x+1}\Big], \quad x \in J,$$

és $\exp(q(x))$ *konvex* J*-n, akkor* $(1 - x^2)q'(x) + x$ *növekedő* J*-n.*

b) Ha

$$q'(x) \geq \frac{1}{x+1}, \quad x \in J, \quad (\text{ vagy } q'(x) \leq \frac{-1}{1-x}, \quad x \in J),$$

és $(1 - x^2)q'(x) + x$ *növekedő* J*-n, akkor* $\exp(q)$ *konvex* J*-n.*

Megjegyezzük még, hogy ha q'' létezik, akkor:

(3) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$0 \leq (q'(x))^2 + q''(x), \quad x \in I_k,$$

(4) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$0 \leq \frac{1}{(x-A)(B-x)} + \Big(\frac{1}{x-A} - \frac{1}{B-x}\Big)q'(x) + q''(x), \quad x \in I_k, \tag{18}$$

végül (5) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$0 \leq \frac{1}{x-A} q'(x) + q''(x), \quad x \in I_k.$$

Megjegyzés A Tétel 14-ben c értéke nem lényeges. Továbbá, ha $\widehat{I}$ a teljes kör, akkor csak (2.2) teljesülését kell ellenőrizni, és (2.3)-at figyelmen kívül lehet hagyni (mivel az egy erősebb feltevés). Egy egyszerű következménye Tétel 14-nek:

Korollárium 20 *Legyen $w(z) = \exp(-q(z))$, $|z| = 1$ egy súlyfüggvény C-n és legyen $I_1 := (\gamma_1, \gamma_1 + 2\pi)$, $I_2 := (\gamma_2, \gamma_2 + 2\pi)$, ahol $e^{i\gamma_1} \neq e^{i\gamma_2}$. Feltesszük, hogy (2.2) növekedö I_1-en, amikor $c := \gamma_1$, és (2.2) növekedő I_2-n, amikor $c := \gamma_2$. Akkor $S_w = C$.*

Tétel 14-nek egy speciális esete:

Lemma 21 *Legyen $w(z) = \exp(-q(z))$, $|z| = 1$ egy súlyfüggvény C-n, és legyen $I = [(\gamma, \delta)]$ egy intervallum melyre $0 < \delta - \gamma \leq 2\pi$ teljesül. Tegyük fel, hogy q abszolút folytonos I belsejében és teljesíti (11)-et. Legyen e^{ic} egy olyan pont, mely nem belső pontja $\widehat{I}$-nek. Ha*

$$e^{q(\theta)} \Big[2 \sin\Big(\frac{\theta - c}{2}\Big) q'(\theta) - \cos\Big(\frac{\theta - c}{2}\Big) \Big] \operatorname{sgn}\Big(\sin\Big(\frac{\theta - c}{2}\Big)\Big) \tag{19}$$

növekedő függvény I-n, akkor $S_w \cap \widehat{I}$ egy íve C-nek.

Megjegyezzük, hogy ha q kétszer differenciálható, akkor (19) ekvivalens azzal a feltétellel, hogy

$$q'(\theta)^2 + q''(\theta) + \frac{1}{4} \geq 0, \quad \theta \in (\gamma, \delta).$$

Az alábbi néhány definíciót a Tétel 11 bizonyításában használjuk.

Legyen $x \in [-1, 1]$. A $c \in [-1, 1]$ értékétől függően az alábbi integrálok vagy sima Lebesgue integrálok vagy Cauchy főérték integrálok lesznek:

$$v_c(x) := -PV \int_{-1}^{c} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi^2\sqrt{1-x^2}(t-x)} dt,$$

$$h_c(x) := PV \int_{c}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi^2\sqrt{1-x^2}(t-x)} dt.$$

Tetszőleges $0 < \iota$-ra és $a \in \mathbb{R}$ értékekre definiáljuk az alábbiakat:

$$a_\iota^+ := \max(a, \iota) \quad \text{and} \quad a_\iota^- := \max(-a, \iota).$$

Az approximációelméleti probléma bizonyításában fontosak az alábbi lemmák:

Lemma 22 *Legyen $-1 < a < b < 1$ és $0 < \iota$ fix. Ekkor az $\mathcal{F}^+ := \{v_c(x)_\iota^+ : \ c \in [-1,1]\}$ és $\mathcal{F}^- := \{v_c(x)_\iota^- : \ c \in [-1,1]\}$ függvénycsaládoknak egyenletesen sima integrálja van $[a,b]$-n.*

Lemma 23 *Legyen $F(x) = G(x) - H(x)$, ahol $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ egy intervallumon értelmezett majdnem mindenütt nem negatív függvények, $G(x)$-nek és $H(x)$-nek sima integrálja van, és valamely $\eta \in (0,1)$-val $H(x) \leq (1-\eta)G(x)$ majdnem mindenütt. Akkor $F(x)$-nek is sima integrálja van.*

Lemma 24 *Legyen $N(x)$ egy jobbról folytonos függvény $[-1,1]$-en, melynek korlátos változása van. Legyen $f(x) \in L^1([-1,1])$ nem negatív. Akkor*

$$PV \int_{-1}^{1} \frac{f(t)N(t)}{t-x} dt = -N(1)f_1(x) + \int_{(-1,1]} f_t(x) dN(t), \quad m.m.\ x \in [-1,1], \quad (20)$$

ahol a jobb oldali integrál egy Lebesgue-Stieltjes integrál, és

$$f_c(x) := -PV \int_{-1}^{c} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad m.m.\ x \in [-1,1].$$

Definíció 25 *Azt mondjuk, hogy egy $g(x)$ függvény majdnem mindenütt korlátos változású egy $E \subset \mathbb{R}$ halmaz belsejében, ha minden kompakt $F \subset E$ halmazra létezik olyan $G \subset F$, hogy $F \setminus G$-nek zéró mértéke van, és $g(x)$ korlátos változású G-n.*

Lemma 26 *Legyen w egy megengedett súlyfüggvény, mely abszolút folytonos $\mathbb{R}$ belsejében. Legyen $[a_0, b_0]$ az S_w tartó egy részintervalluma. Ha $q'(x)$-nak korlátos változása van majdnem mindenütt (a_0, b_0) belsejében, és az egyensúlyi mértéknek olyan $V(x)$ sűrűségfüggvénye van $[a_0, b_0]$-n, melynek pozitív alsó korlátja van (a_0, b_0) belsejében, akkor $(a_0, b_0) \cap Z(w) = \emptyset$.*

Irodalom

[1] J. Baik, P. Deift, and K. Johansson, On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations, J. Amer. Math. Soc., **12** (1999), pp 1119-1178.

[2] J. Baik, T. Kriecherbauer, K. McLaughlin, and P. Miller, Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a general class of discrete weights and universality results for associated ensembles, arXiv:math.CA/0310278v1.

[3] D. Benko, Approximation by weighted polynomials, J. Approx. Theory 120 (2003), no. 1, pp 153-182.

[4] D. Benko, The support of the equilibrium measure, Acta Sci. Math. (Szeged) 70 (2004), no. 1-2, pp 35–55.

[5] D. Benko, S.B. Damelin, P.D. Dragnev On the support of the equilibrium measure for arcs of the unit circle and for real intervals, Electron. Trans. Numer. Anal. (to appear)

[6] D. Benko, A. Kroó, A Weierstrass-type theorem for homogeneous polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. (submitted)

[7] S. B. Damelin, and A. B. J. Kuijlaars, The support of the equilibrium measure in the presence of a monomial external field on $[-1, 1]$. Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), no. 11, 4561–4584.

[8] S. B. Damelin, P. D. Dragnev, and A. B. J. Kuijlaars, The support of the equilibrium measure for a class of external fields on a finite interval. Pacific J. Math. 199 (2001), no. 2, 303–320.

[9] S. B. Damelin, H. S. Jung and K. H. Kwon, Mean convergence of extended Lagrange interpolation for exponential weights, Acta Appl. Math., **76** (2003), pp 17-36.

[10] P. Deift, T. Kriecherbauer, and K. T.-R. McLaughlin, New results on the equilibrium measure for logarithmic potentials in the presence of an external field. J. Approx. Theory 95 (1998), no. 3, 388–475.

[11] P. Deift, Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach. Courant Lecture Notes in Mathematics, 3. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. viii+273 pp. ISBN: 0-9658703-2-4; 0-8218-2695-6

[12] A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials., Mat. Sb., **125** (1984), pp 117-127 (in Russian). English translation in Math. USSR Sb., **53** (1986), pp 119-130.

[13] A. B. J. Kuijlaars, A note on weighted polynomial approximation with varying weights, J. Approx. Theory 87 (1) (1996) 112-115.

[14] A. B. J. Kuijlaars, The role of the endpoint in weighted polynomial approximation with varying weights, *Constr. Approx.*, **12**(1996), 287–301.

[15] A. B. J. Kuijlaars, and W. Van Assche, A problem of Totik on fast decreasing polynomials(with A.B.J. Kuijlaars), Constr. Approx. 14 (1998), 97-112

[16] A. B. J. Kuijlaars, and P.D. Dragnev, Equilibrium problems associated with fast decreasing polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 4, 1065–1074.

[17] E. Levin and D. S. Lubinsky, Orthogonal Polynomials for Exponential Weights, Springer-Verlag, 2001.

[18] D. S. Lubinsky, An update of orthogonal polynomials and weighted approximation on the real line, Acta Appl. Math., **33** (1993), pp 121-164.

[19] H. N. Mhaskar, Introduction to the Theory of Weighted Polynomial Approximation, World Scientific, 1996.

[20] H. N. Mhaskar, and E.B. Saff, Where does the sup norm of a weighted polynomial live?, Constr. Approx., **1** (1985), 71-91

[21] N. I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations. Dover, New York, 1992

[22] I. Pritsker, Weighted energy problem on the unit circle, Constr. Approx., to appear.

[23] I. Pritsker and R. S. Varga, Weighted polynomial approximation in the complex plane, Constr. Approx., **14** (1998), pp 475-492.

[24] E. B. Saff, V. Totik, Logarithmic Potentials with External Fields, Springer-Verlag, Berlin, 1997

[25] P. Simeonov, A minimal weighted energy problem for a class of admissible weights, Houston J. of Math., **31** (2005), no. 4, pp 1245-1260.

[26] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle I-II, American Mathematical Society Colloquium Publications, 2004.

[27] H. Stahl and V. Totik, General Orthogonal Polynomials, Cambridge University Press, 1992.

[28] V. Totik, Weighted polynomial approximation for convex external fields, Constr. Approx. 16 (2) (2000) 261-281.

[29] V. Totik, Weighted approximation with varying weight. Lecture Notes in Mathematics, 1569. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[30] V. Totik, Weigthed polynomial approximation for weights with slowly varying extremal density