Diadikus Cesàro és Copson operátorok

doktori (PhD) értekezés

Készítette: Eisner Tímea
Témavezetők: Dr. Móricz Ferenc
tanszékvezető egyetemi tanár,
SZTE
Dr. Schipp Ferenc
tanszékvezető egyetemi tanár,
ELTE, PTE

Szegedi Tudományegyetem
Szeged, 2001

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőimnek,

Dr. Móricz Ferenc és **Dr. Schipp Ferenc**

professzor uraknak a tanulmányaim, valamint a dolgozat megírása során nyújtott segítségüket és türelmüket.

Továbbá szeretném megköszönni *Dr. Leindler László* professzor úrnak és *Dr. Németh József* docens úrnak, hogy az egyetemi éveim alatt rámutattak az analízis szépségeire és ezzel felkeltették a témakör iránti érdeklődésemet.

Az ő segítségük nélkül aligha jutottam volna el idáig.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A Fourier-sorok konvergencia kérdéseinek szisztematikus vizsgálata a múlt század közepén kezdődött. A ma már klasszikusnak számító *Dirichlet*-től és *Dini*-től származó konvergencia tételek mellett megjelentek a divergenciával kapcsolatos eredmények is. *Du Bois Raymond* már 1876-ban észrevette, hogy — a sorok szokásos konvergenciáját véve alapul — a folytonos függvények általában nem rekonstruálhatók Fourier-sorukból. Nevezetesen megmutatta, hogy van olyan folytonos függvény, amelynek Fourier-sora valamely pontban divergens. Ez a felismerés arra késztette a témával foglalkozó kutatókat, hogy a sorok hagyományos kiértékelése, azaz a részletösszegek konvergenciája helyett más eljárást használjanak. Fejér Lipót 1900-ban megmutatta, hogy folytonos függvények esetén a trigonometrikus Fourier-sor részletösszegeinek számtani közepei egyenletesen konvergálnak a függvényhez. Hasonló állítás érvényes az Abel-Poisson közepekre is.

A Fejér-féle szummációs eljárás kapcsán felmerül a kérdés, hogy mi történik a Fourier-sorral, ha nem a részletösszegeit, hanem a Fourier-együtthatókat átlagoljuk. Mivel teljes ortogonális rendszer esetén a függvények és Fourier-együtthatóik között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető, ezzel a leképezéssel a Fourier-együtthatók terében egy injektív leképezést értelmezhetünk. Kiindulva a 2π szerint periodikus integrálható függvények $L^1_{2\pi}$ osztályának f eleméből, képezzük a Fourier-együtthatók számtani közepeinek sorozatát és azt vizsgáljuk, hogy van-e olyan $g \in L^1_{2\pi}$ függvény, amelynek a Fourier-együtthatói éppen ezek a mértani közepek.

Ezt a kérdést először Hardy vizsgálta 1928-ban a trigonometrikus rendszerrel kapcsolatban, amikor is bebizonyította, hogy az $L^p_{2\pi}$ $(1 \leq p < \infty)$ terek invariánsak a Fourier-együtthatókra vonatkozó, a fentebb említett átlagolási eljárással szemben (lásd Hardy [24]). Más szóval, ha $f \in L^p_{2\pi}$, akkor a Fourier-együtthatók átlagolásával származtatott g függvény is az $L^p_{2\pi}$-hez tartozik. Az $f \in L^p_{2\pi}$ függvényhez a $g \in L^p_{2\pi}$ függvényt rendelve egy operátort értelmezhetünk. Ezt az operátort *Cesàro operátornak*, míg adjungáltját *Copson operátornak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy az ezzel kapcsolatos szóhasználat nem egységes a szakirodalomban. Vannak (lásd [17-23], [29]), akik a Cesàro operátor helyett a Hardy operátor elnevezést használják.

Az utóbbi években a szóban forgó operátorok vizsgálata ismét előtérbe került. Többek között *Bellman R.*, *Móricz Ferenc*, *Dang Vu Giang*, *Golubov B.I.* , *Sisakis A. G.*, *Stempak K.* és *Rodin V.* további eredményeket értek el ezekkel az operátorokkal kapcsolatban (lásd [4-10], [17-23], [26-27], [37], [38]). Móricz F. és D. V. Giang bevezette például ezeknek az operátoroknak a folytonos változatát a Fourier-sort Fourier-transzformálttal helyettesítve és bebizonyították a megfelelő Cesàro operátor korlátosságát az $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < \infty)$ tereken, valamint a $H^1(\mathbb{R})$ Hardy téren is.

A disszertációban ezeknek az operátoroknak a viselkedését vizsgáljuk a Walsh-Fourier-sorok esetén. Az itt használt módszerek lényegesen különböznek a trigonometrikus sorokra alkalmazott módszerektől. A klasszikus esetben kulcsfontosságú szerepe volt a parciális integrálásnak és a közönséges értelemben vett deriválásnak. Vizsgálatainkban a klasszikus derivált szerepét sok vonatkozásban átveszi a diadikus derivált, az integrálét pedig a diadikus integrál (antiderivált). Több olyan azonosság is van, mint pl. a parciális integrálás szabálya, amelynek megfelelője a diadikus integrálra nem érvényes. A diadikus integrált egy nehezen kezelhető függvénnyel való diadikus konvolúcióként értelmezik, ami miatt jóval bonyolultabb a közönséges integrál operátornál. Ezzel magyarázható, hogy a Walsh-sorokkal kapcsolatos vizsgálatok több ponton is nehezebbek a trigonometrikus-sorokra vonatkozó vizsgálatokhoz képest.

A Cesàro és Copson operátorokat a Walsh-sorok lehető legbővebb részhalmazán értelmezzük, amely a diadikus martingálok terével azonosítható, majd ezeknek az operátoroknak különböző, fontos terekre vonatkozó leszűkítéseit vizsgáljuk. A vizsgálatok során alapvető szerepet játszik a Walsh-Dirichlet-féle magfüggvény egy új előállítása, amelyben felhasználjuk a diadikus deriváltat.

A 2. fejezetben a későbbiekben felhasználásra kerülő martingál terekre vonatkozó legfontosabb ismereteket foglaljuk össze. Ismertetjük a Walsh-rendszerrel kapcsolatos alapvető fogalmakat és tételeket, a diadikus deriváltra és integrálra vonatkozó eredményeket. Ismeretes, hogy a klasszikus harmonikus analízisben fontos szerepet játszik a *Hardy-Littlewood*-féle maximál-függvény és az erre vonatkozó egyenlőtlenségek. A ***diadikus Cesàro operátor*** vizsgálatában felhasználjuk a maximál-függvénynek és az említett egyenlőtlenségeknek a diadikus deriváltra vonatkozó megfelelőit.

A diadikus Cesàro és Copson operátorok négy változatával foglalkozunk, nevezetesen azzal, amely a martingálok terén van értelmezve, az egy- és a kétváltozós integrálható függvények terén értelmezett operátorokkal, valamint ezeknek a félegyenesre való folytonos kiterjesztéseivel. Az első három esetben a Cesàro operátort függvények, illetve martingálok Walsh-Fourier-együtthatóinak átlagolásával értelmezzük. A negyedik esetben a Walsh-Fourier-sort Walsh-Fourier-transzformálttal helyettesítjük. Az alapul szolgáló függvények az $\mathbb{I} := \mathbb{I}^1 := [0,1)$ intervallumon, az $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ egységnégyzeten, ill. az $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$ félegyenesen vannak értelmezve. Ezek az operátorok az L^1 tereken integráloperátorként adhatók meg, amelyek a 3. fejezetben bevezetésre kerülő úgynevezett lokális konvolúciós operátorok speciális esetét alkotják. A továbbiakban a Cesàro operátorok mellett ezeket a lokális konvolúciós operátorokat is vizsgáljuk az $L^1(\mathbb{I}^j)$ $(j = 1,2)$ és az $L^1(\mathbb{R}_+)$ terek mellett a megfelelő L^p tereken, valamint a diadikus Hardy- és BMO-tereken. A lokális konvolúciós operátorok bevezetése révén megfogalmazhatók azok a tulajdonságok, amelyekből a korlátosság következik a vizsgált tereken.

Többek között bebizonyítjuk, hogy a $C : L^p(\mathbb{I}^j) \to L^p(\mathbb{I}^j)$ diadikus Cesàro operátor $1 \leq p < \infty$ és $j = 1,2$ esetén korlátos, $p = \infty$ esetén viszont nem korlátos. Az L^p-terekkel kapcsolatos vizsgálatok egy- és kétváltozós esetben nagyon hasonlóak, és az említett tétel bizonyításában fontos szerepet játszik a diadikus integrál maximálfüggvényére ismert maximál-egyenlőtlenség.

Az egyváltozós martingálok esetén — felhasználva az atomos felbontást és egy új kvázi normát — sikerült igazolnunk, hogy a Cesàro operátor korlátos a diadikus $\mathcal{H}^p$ Hardy-téren, ha $1/2 < p \leq 1$. A $0 < p \leq 1/2$ esetben a kérdés még válaszra vár.

Az ötödik fejezetben az egyváltozós Cesàro operátor viselkedését vizsgáljuk Lipschitz-tereken. Itt az operátor L^p téren való korlátosságát és a Lipschitz-terek egy approximációs tulajdonságát felhasználva elemi eszközökkel igazoljuk, hogy a Cesàro operátor korlátos a $\text{Lip}(\alpha, p)$ téren, ha $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$ és $1/p > \alpha$. Megmutatjuk, hogy ez utóbbi feltétel nem javítható, ha $p > 1$. Az ellenpélda konstrukciójában alapvető szerepet játszanak a diadikus integrált generáló magfüggvény Walsh-Fourier-sorának részletösszegeire vonatkozó normabecslések.

Az utolsó fejezetben bevezetjük a diadikus Cesàro operátor folytonos analogonját. Belátjuk, hogy a Cesàro operátor felírható lokális diadikus wavelet operátorok összegeként. Bebizonyítjuk, hogy a szóban forgó operátor korlátos az $L^p(\mathbb{R}_+)$ $(1 \leq p < \infty)$ téren. A bizonyítás során az $\mathbb{I}$-re vonatkozó változatban használt módszert követjük. Számos technikai jellegű meggondolás mellett bebizonyítjuk és felhasználjuk a diadikus inetgrállal kapcsolatos maximálegyenlőtlenségnek az $\mathbb{R}_+$-ra vonatkozó változatát. A fejezet végén megadjuk a Walsh-Dirichlet-féle magfüggvény folytonos változatának előállítását a diadikus derivált segítségével, amely a korábban $\mathbb{I}$-re igazolt formulát terjeszti ki a félegyenesre.

2. Alapfogalmak

Az egész számok halmazát $\mathbb{Z}$-vel, a nemnegatív egész számok halmazát $\mathbb{N}$-nel, a pozitív egész számok halmazát $\mathbb{P}$-vel, a valós számok halmazát $\mathbb{R}$-rel, a nemnegatív valós számok halmazát $\mathbb{R}_+$-szal, az $\mathbb{I} := [0,1)$ egységintervallumban lévő diadikus racionális számok halmazát $\mathbb{Q}$-val fogjuk jelölni. Tehát $\mathbb{Q}$ minden eleme $p/2^n$ alakú, ahol $p, n \in \mathbb{N}$ és $0 \le p \le 2^n$.

Egy nemüres $\mathbb{X}$ halmaz esetén legyen $\mathbb{X}^1 := \mathbb{X}$, és jelölje $\mathbb{X}^2$ az $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ Descartes-szorzatot. Tehát $\mathbb{N}^2$ jelöli a sík első negyedének rácspontjait, $\mathbb{I}^2$ pedig az egységnégyzetet. Az $\mathbb{R}^2$-ben a következő parciális rendezést fogjuk használni. Valamely $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén akkor mondjuk, hogy $x \le y$, ha $x_1 \le y_1$ és $x_2 \le y_2$, továbbá legyen $x < y$, ha $x_1 < y_1$ és $x_2 < y_2$. Jelölje

$$x^* := x_1 \cdot x_2, \quad \wedge x := \min(x_1, x_2)$$

az $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vektor koordinátáinak szorzatát, ill. minimumát és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $x^* := \wedge x := x$.

Az $\mathbb{R}^2$ szokásos normái közül gyakran az

$$|x| := |x_1| + |x_2| \quad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2) \tag{2.1}$$

normát fogjuk használni. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^2$ esetén legyen $n - 1 := (n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Valós *diadikus intervallumon* egy $[p/2^n, (p+1)/2^n)$ alakú intervallumot értünk, ahol $p, n \in \mathbb{Z}$. Az $\mathbb{I}$ egységintervallumba eső diadikus intervallumokra nyilván $0 \le p < 2^n, n \in \mathbb{N}$ teljesül. Adott $n \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén $I_n(x)$ jelöli azt a 2^{-n} hosszúságú diadikus intervallumot, amely tartalmazza x-et. Az $\mathbb{R}_+$ diadikus intervallumainak halmazát $\mathcal{I}_+$-szal, $\mathbb{I}$ diadikus részintervallumainak összességét pedig $\mathcal{I}$-vel fogjuk jelölni.

A kétdimenziós diadikus intervallumok összességének jelölésére a $\mathcal{I}^2$ szimbólumot használjuk, azaz

$$\mathcal{I}^2 := \{I = I_1 \times I_2 : I_1, I_2 \in \mathcal{I}\}. \tag{2.2}$$

Nyilvánvaló, hogy az $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2$ pontot tartalmazó $\mathbb{I}^2$-beli diadikus intervallumok

$$I_n(x) := I_{n_1}(x_1) \times I_{n_2}(x_2) \tag{2.3}$$

alakúak, ahol $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$.

Az $f_1 : X_1 \to \mathbb{C}, f_2 : X_2 \to \mathbb{C}$ függvények Kronecker-szorzatán az $X_1 \times X_2$ halmazon az

$$(f_1 \times f_2)(x) := f_1(x_1) f_2(x_2) \quad (x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2) \tag{2.4}$$

utasítással értelmezett függvényt értjük. Az $f_1 = f_2 = f$ speciális esetben az $f^{(2)} := f \times f$ jelölést fogjuk használni.

A dolgozatban legtöbbször az $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^2$, ill. az $\mathbb{R}_+$ intervallumon értelmezett, Lebesgue-mérhető függvények osztályát vesszük alapul, és $\mathcal{A}$-val fogjuk jelölni a szóban forgó halmazok Lebesgue-mérhető halmazainak σ-algebráját. Az előforduló L^p tereket — a hozzájuk tartozó függvények értelmezési tartományát feltüntetve — az $L^p(\mathbb{R}^+)$, $L^p(\mathbb{I})$, $L^p(\mathbb{I}^2)$ $(1 \le p \le \infty)$, az L^p tér normáját az $\|\cdot\|_p$, az $A \in \mathcal{A}$ halmaz karakterisztikus függvényét χ_A-val, Lebesgue-mértékét pedig az $|A|$ szimbólummal fogjuk jelölni.

A dolgozatban fontos szerepet játszanak a diadikus martingálok és az ezekkel összefüggő martingál Banach-terek. Az alábbiakban összefoglaljuk az ezekkel kapcsolatos alapvető fogalmakat és jelöléseket és a rájuk vonatkozó azon eredményeket, amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz. Ennek a résznek a leírása során alapvetően a [Sch-W-S-P] és [Weisz] könyvekre támaszkodunk (lásd [30], [41]).

2.1. Martingál L^p, Hardy- és BMO-terek

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{A}^n$ jelentse az $\mathcal{I}$-beli, 2^{-n} hosszúságú diadikus intervallumok által generált atomos σ-algebrát. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{A}^n$ minden eleme $[k/2^n, (k+1)/2^n)$ $(0 \le k < 2^n)$ alakú intervallumok (atomok) véges uniója. Jelölje $L(\mathcal{A}^n)$ az $\mathbb{I}$ intervallumon értelmezett, $\mathcal{A}^n$-mérhető függvények halmazát. Az $L(\mathcal{A}^n)$ elemei olyan lépcsős függvények, amelyek az $\mathcal{A}^n$ atomjain állandók.

Az $\mathcal{A}^n$ σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értéke a σ-algebra atomjaira vonatkozó átlagolásként adható meg. Nevezetesen E_n-nel jelölve az $\mathcal{A}^n$-re vonatkozó feltételes várható érték operátorát, minden integrálható $f \in L^1(\mathbb{I})$ függvényre fennáll az

$$(2.1.1)\qquad (E_n f)(x) := \frac{1}{|I_n(x)|} \int\limits_{I_n(x)} f(t)dt \quad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N})$$

egyenlőség. A most bevezetett jelölést kiterjesztjük az $\mathbb{I}$ intervallum Lebesgue-mérhető részhalmazainak $\mathcal{A}$ σ-algebrájára, a megfelelő feltételes várható érték operátort E_∞-nel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy E_∞ az $L^1(\mathbb{I})$ tér identikus leképezése, továbbá $\mathcal{A}_0 = \{\mathbb{I}, \emptyset\}$ az egyik triviális σ-algebra és $E_0 f = \int_{\mathbb{I}} f(t)dt$ az integrál funkcionál.

Az $I = K \times L$, $|K| = 2^{-p}$ és $|L| = 2^{-q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ kétdimenziós diadikus intervallumok által generált σ -algebrát $\mathcal{A}^{(p,q)}$-val jelöljük. Ha $n \in \mathbb{N}^2$, akkor $L(\mathcal{A}^n)$-nel az $\mathbb{I}^2$-en értelmezett $\mathcal{A}^n$-mérhető függvények összességét jelöljük. Legyen

$$(2.1.2)\qquad \mathcal{A}_-^n := \mathcal{A}^{(n_1-1, n_2-1)} \quad (n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2),$$

ahol $\mathcal{A}^{(-1,-1)} := \mathcal{A}^{(0,0)}$ és $\mathcal{A}^{(-1,i)} := \mathcal{A}^{(0,i)}$, $\mathcal{A}^{(i,-1)} := \mathcal{A}^{(i,0)}$ $(i \in \mathbb{N})$.

Az egydimenziós esetre bevezetett jelölésekhez hasonlóan az integrálható $f \in L^1(\mathbb{I}^2)$ függvénynek az $\mathcal{A}^n$ $(n \in \mathbb{N}^2)$ σ-algebrára vonatkoztatott *feltételes várható értékét* $E_n f$-fel jelöljük. A feltételes várható érték operátora ebben az esetben

$$(E_n f)(x) = \frac{1}{|I_n(x)|} \int\limits_{I_n(x)} f(s,t)\,ds dt \quad (x \in \mathbb{I}^2, n \in \mathbb{N}^2) \tag{2.1.3}$$

alakú.

Az eddig bevezetett jelölésekkel összhangban bevezetjük az $\mathcal{A} \times \mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}$ σ-algebrákra vonatkozó feltételes várható érték operátorokat:

$$(E_{(\infty,k)} f)(x) := \frac{1}{|I_k(x_2)|} \int\limits_{I_k(x_2)} f(x_1, s) ds \quad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2, k \in \mathbb{N}), \tag{2.1.4a}$$

$$(E_{(k,\infty)} f)(x) := \frac{1}{|I_k(x_1)|} \int\limits_{I_k(x_1)} f(t, x_2) dt \quad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2, k \in \mathbb{N}). \tag{2.1.4b}$$

Most ismertetjük az egy- és kétváltozós diadikus martingálokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat. Rögzítsük a változók számát jelentő $j \in \{1, 2\}$ paramétert. Integrálható függvényeknek egy $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j)$ sorozatát *diadikus martingálnak* nevezzük, ha $f_n \in L(\mathcal{A}_n)$ és minden $n, m \in \mathbb{N}^j$, $n \leq m$ esetén

$$E_n f_m = f_n. \tag{2.1.5}$$

A diadikus martingálok összességét a $\mathcal{M}(\mathbb{I}^j)$ szimbólummal jelöljük.

Legyen $0 < p \leq \infty$. Akkor mondjuk, hogy az *F martingál L^p-korlátos*, ha

$$\|F\|_p := \sup_{n \in \mathbb{N}^j} \|f_n\|_p < \infty.$$

Az L^p-korlátos martingálok halmazát $\mathcal{M}^p(\mathbb{I}^j)$-vel jelöljük. Kiindulva az $f \in L^1(\mathbb{I}^j)$ függvényből, képezzük az

$$f_n := E_n f \quad (n \in \mathbb{N}^j) \tag{2.1.6}$$

sorozatot. Könnyen látható, hogy az így kapott $F_f := (f_n, n \in \mathbb{N}^j)$ sorozat martingál. Az F_f-et az f által generált *reguláris martingálnak* nevezzük. Akkor mondjuk, hogy az *F martingál stacionárius*, ha létezik olyan $m \in \mathbb{N}^j$ index, hogy minden $n \in \mathbb{N}^j, m \leq n$ indexre $f_n = f_m$. Könnyen igazolható, hogy *a stacionárius martingálok azonosak a diagonális lépcsősfüggvények által generált reguláris martingálokkal.* A stacionárius martingálok halmazát az $\mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$ szimbólummal fogjuk jelölni. A stacionárius martingálok halmaza az $\mathcal{M}(\mathbb{I}^j)$ térnek egy lineáris altere és az $f \to F_f$ leképezés egy bijekció az $L^1(\mathbb{I}^j)$ diadikus lépcsős függvények tere és $\mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$ között. Ennek alapján a két teret gyakran azonosnak fogjuk tekinteni.

A későbbiek során többször szükségünk lesz az $\mathcal{M}$ bizonyos altereinek duálisára. Ezek előállításához felhasználjuk a következő észrevételt. Ha $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$ és $G = (g_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}(\mathbb{I}^j)$, akkor létezik a

$$\Phi_G(F) := \langle F, G \rangle := \lim_{\wedge n \to \infty} \int_{\mathbb{I}^j} f_n(s) g_n(s)\, ds \tag{2.1.7}$$

határérték. Nyilvánvaló, hogy minden $G \in \mathcal{M}(\mathbb{I}^j)$ martingálra Φ_G lineáris funkcionál az $\mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$ téren. Megfordítva megmutatható, hogy a $\mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$ tér minden lineáris funkcionálja alkalmas G martingállal előállítható Φ_G alakban. Jelölje $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$) az $\mathbb{I}^j$-n értelmezett diadikus lépcsősfüggvények halmazát. Ha $F = (E_n f, n \in \mathbb{N}^j)$ $(f \in L^1(\mathbb{I}^j)$ és $G = (E_n g, n \in \mathbb{N}^j)$ $(g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j))$ reguláris martingálok, akkor a (2.1.7) bilineáris leképezésre

$$\langle F, G \rangle = \int_{\mathbb{I}^j} f(s) g(s)\, ds \tag{2.1.8}$$

teljesül.

Ismeretes, hogy az $f \mapsto F_f$ leképezés az $L^p(I^j)$ tér és az L^p-korlátos martingálok $\mathcal{M}^p(\mathbb{I}^j)$ tere közötti normatartó bijekció, ha $1 < p \le \infty$. Ennek alapján a két tér azonosítható. Az $L^1(\mathbb{I}^j)$ $(j = 1, 2)$ terek — a most említett leképezést alapul véve — az $\mathbb{I}^j$-n egyenletesen integrálható martingálok terével azonosíthatók (lásd Sch-W-S-P [30, 104. old.], Weisz [41, 3. old.], Neveau [28]).

Az $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j)$ martingál *maximál-függvényén* az

$$f^*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}^j} |f_n(x)| \quad (x \in \mathbb{I}^j) \tag{2.1.9}$$

leképezést értjük.

A *diadikus martingál Hardy-tereket* a diadikus martingál maximál függvénnyel szokás értelmezni. Más, ezzel ekvivalens definíciót illetően lásd [Weisz, 41]-et. Legyen $0 < p \le \infty$. Jelölje $\mathcal{H}^p(\mathbb{I})$ azoknak az $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$) martingáloknak az osztályát, amelyre

$$\|F\|_{\mathcal{H}^p} := \|f^*\|_p < \infty. \tag{2.1.10}$$

Ismeretes, hogy $p \ge 1$ esetén minden $\mathcal{H}^p(\mathbb{I})$-beli martingál reguláris, következésképpen azonosítható $L^1(\mathbb{I})$-beli függvénnyel. Ennek alapján a $\mathcal{H}^p(\mathbb{I})$ terek azonosíthatók az $L^1(\mathbb{I})$ bizonyos altereivel. A $\mathcal{H}^1(\mathbb{I})$-nek megfelelő alteret $H^1(\mathbb{I})$-vel fogjuk jelölni. Ismeretes, hogy $H^1(\mathbb{I}^j)$ az $L^1(\mathbb{I}^j)$ térnek valódi altere, továbbá $1 < p \le \infty$ esetén $\mathcal{H}^p(\mathbb{I})$ azonosítható az $L^p(\mathbb{I})$ térrel. Ennek megfelelően

$$H^1(\mathbb{I}) = \{f \in L^1(\mathbb{I}) : \|f\|_{H^1} := \|f^*\|_1 < \infty\}. \tag{2.1.11}$$

Az egydimenziós $H(\mathbb{I})$ Hardy-tér duális tere az ún. *korlátos átlagos oszcillációjú* függvények tere, amelyet az angol elnevezés (bounded mean oscillation) rövidítését használva a $\mathrm{BMO}(\mathbb{I})$ szimbólummal szokás jelölni. Ez a tér azonosítható azoknak az $f \in L^2(\mathbb{I})$ függvényeknek a halmazával, amelyekre

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|(E_n|f - E_n f|^2)^{1/2}\|_\infty < \infty. \tag{2.1.12}$$

A $H^1(\mathbb{I})$ tér minden korlátos lineáris funkcionálja, alkalmasan választott $\varphi \in \mathrm{BMO}(\mathbb{I})$ függvénnyel előállítható a

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(s)(E_n\varphi)(s)\,ds \quad (f \in H^1(\mathbb{I}))$$

alakban és fennáll az ún. *Fefferman-féle egyenlőtlenség*:

$$(2.1.13) \qquad \Big|\int_{\mathbb{I}} f(s)(E_n\varphi)(s)\,ds\Big| \le c\|f\|_{H^1(\mathbb{I})}\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{I})} \quad (n \in \mathbb{N}, f \in L^1(\mathbb{I}), \varphi \in \mathrm{BMO}(\mathbb{I})),$$

ahol c abszolút konstans. A diadikus lépcsős függvények a $\mathrm{BMO}(\mathbb{I})$ térnek lineáris alterét alkotják. Ennek BMO-normában vett lezárását $\mathrm{VMO}(\mathbb{I})$-vel szokás jelölni. Ismeretes, hogy valamely $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{I})$ akkor és csak akkor tartozik a $\mathrm{VMO}(\mathbb{I})$ térhez, ha

$$(2.1.14) \qquad \lim_{n\to\infty} \|(E_n|f - E_nf|^2)^{1/2}\|_\infty = 0.$$

A VMO jelölés ennek a tulajdonságnak az angol nyelven szokásos elnevezésére (vanishing mean oscillation) utal. Ismeretes továbbá, hogy a $\mathrm{VMO}(\mathbb{I})$ térnek duálisa a $H^1(\mathbb{I})$ tér (lásd Sch-W-S-P [30, 107. old., 114. old. Th. 10]).

Az egydimenziós $\mathcal{H}^p(\mathbb{I})$, $(0 < p < 1)$ tér duális tere izomorf a $\mathrm{Lip}_2^-\alpha$ térrel, amelybe olyan integrálható függvények tartoznak, melyekre a

$$(2.1.15) \qquad \|g\|_{Lip_2^-\alpha} := \sup_{n\in\mathbb{N}} 2^{n(\alpha+1/2)}\|(E_n|g - E_{n-1}g|^2)^{1/2}\|_\infty \quad (g \in L^2(\mathbb{I}))$$

norma véges (lásd Weisz [41, Ch. 2.2/Cor.2.23, Ch. 2.3/Th. 2.24, Ch. 2.3/Th. 2.37], Herz [19]).

Tekintsük az alábbi normát (lásd Weisz [41, 7. old.]:

$$(2.1.16) \qquad \|g\|_{Lip_1^-\alpha} := \sup_{n\in\mathbb{N}} 2^{n(\alpha+1)}\|E_n|g - E_{n-1}g|\|_\infty \quad (g \in L^1(\mathbb{I})).$$

Egyszerűen igazolható, hogy a

$$(2.1.17) \qquad \|\cdot\|_{Lip_1^-\alpha} \le \|\cdot\|_{Lip_2^-\alpha}$$

egyenlőtlenség teljesül.

Egy $a \in L^\infty(\mathbb{I})$ függvényt *p-atomnak* nevezünk valamely $0 < p \le 1$ esetén, ha vagy $a = 1$, vagy létezik olyan I diadikus itervallum, amelyre

(i) $\int_0^1 a(x)\,dx = 0$,
(ii) $\|a^*\|_\infty \le |I|^{-1/p}$,
(iii) $\{a \ne 0\} \subset I$.

A $\mathcal{H}^p$ $(0 < p \le 1)$ diadikus Hardy-terek elemei atomok segítségével jellemezhetők. Érvényes az alábbi karakterizációs tétel (lásd Weisz [41 Ch. 2.1/Th.2.5]):

A Tétel. *Ha az $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$ martingál $\mathcal{H}^p$-beli $(0 < p < \infty)$, akkor létezik p-atomoknak olyan (a_k) sorozata, és valós számoknak olyan $\mu = (\mu_k, k \in \mathbb{Z}) \in \ell^p$ sorozata, amelyekere minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k E_n a_k = f_n \tag{2.1.18}$$

és a szóban forgó sor mindenütt konvergens, továbbá

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^p \Big)^{1/p} \le c_p \|F\|_{\mathcal{H}^p}. \tag{2.1.19}$$

Megfordítva, ha $0 < p \le 1$, és az F martingál rendelkezik egy (2.1.18) típusú felbontással, akkor $F \in \mathcal{H}^p$, és

$$\|F\|_{\mathcal{H}^p} \sim \inf \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^p \Big)^{1/p}, \tag{2.1.20}$$

ahol az infimum képzését az F összes lehetséges (2.1.18) típusú felbontására terjesztjük ki.

Megjegyezzük, hogy a (2.1.18) sor tagjai $\mathcal{A}^n$-beli lépcsős függvények lévén azonosíthatók egy 2^n dimenziós tér pontjaival. Következésképpen a pontonkénti konvergencia és a normában vett konvergencia ekvivalens.

2.2. Walsh-függvények, homogén Banach terek

Ebben a részben összefoglaljuk a Walsh-rendszerrel kapcsolatos alapvető fogalmakat és jelöléseket. Ezeket a függvényeket az $\mathbb{I}$, ill. a $\mathbb{R}_+$ intervallumokon vizsgáljuk és nem foglalkozunk a diadikus csoporttal, ill. a diadikus testtel való kapcsolatukkal. Ennek megfelelően az $\mathbb{R}_+$-beli és $\mathbb{I}$-beli számokat diadikus előállításukkal reprezentáljuk. Ismeretes, hogy minden nemnegatív valós szám felírható az

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k 2^{-k-1} \tag{2.2.1}$$

alakban, ahol $x_k \in \{0,1\}$ és $\lim_{k\to-\infty} x_k = 0$. A diadikus racionális számoknak a lehetséges kétféle előállítása közül azt választjuk, amelyben az x_k jegyek egy indextől kezdve mind 0-val egyenlők. Ennek megfelelően az $x \in \mathbb{I}$ számok diadikus előállítása

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-1} \tag{2.2.2}$$

alakú. Speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám egyértelműen felírható az

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k$$

alakban, ahol $n_k \in \{0,1\}$ $(k \in \mathbb{N})$ és $\lim_{k \to \infty} n_k = 0$. Az x_k, ill. n_k számokat az x és n számok *diadikus jegyeinek* vagy *bináris együtthatóinak* nevezzük. Az $x, y \in \mathbb{R}_+$ nemnegatív valós számok, illetve a $n, m \in \mathbb{N}$ természetes számok diadikus összegén az

$$(2.2.3) \qquad x \dotplus y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k-1}, \quad n \oplus m := \sum_{k=0}^{\infty} |n_k - m_k| 2^k,$$

számokat értjük, ahol $x_k, y_k \in \{0,1\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ és $n_i, m_i \in \{0,1\}$ $(i \in \mathbb{N})$ az $x, y \in \mathbb{R}_+$ illetve $n, m \in \mathbb{N}$ számok diadikus jegyei.

A diadikus összeadás természetes módon kiterjeszthető az $\mathbb{R}_+^2$ halmazra:

$$(2.2.4) \qquad x \dotplus y := (x_1 \dotplus y_1, x_2 \dotplus y_2) \quad (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{I}^2).$$

A most bevezetett összeadást felhasználva értelmezhető a τ_x $(x \in \mathbb{I}^j)$ *diadikus transzláció operátora*: tetszőleges $\mathbb{I}^j$ halmazon értelmezett függvényre

$$(2.2.5) \qquad (\tau_x f)(t) := f(x \dotplus t) \quad (x, t \in \mathbb{I}^j).$$

Ismeretes, hogy a Lebesgue-integrál invariáns a diadikus transzlációra vonatkozóan, következésképpen minden $f \in L^p(\mathbb{I}^j)$ függvényre

$$\tau_x f \in L^p(\mathbb{I}^j) \quad \text{és} \quad \|\tau_x f\|_p = \|f\|_p$$

minden $x \in \mathbb{I}^j$ és $0 < p \leq \infty$ esetén. Az L^p tereknek ebből a tulajdonságából kiindulva bevezetjük a *homogén Banach-tér* fogalmát.

Legyen $X \subseteq L^1(\mathbb{I}^j)$ $(j = 1, 2)$ Banach tér az $\|\cdot\|_X$ normával. Akkor mondjuk, hogy X *homogén Banach tér* (a diadikus transzlációra vonatkozóan), ha a diadikus lépcsősfüggvények $\mathcal{P}$ altere sűrű az X térben,

$$(2.2.6) \qquad \|f\|_1 \leq \|f\|_X \quad (f \in X)$$

és az $\|\cdot\|_X$ norma transzláció-invariáns, azaz ha $f \in X$ és $x \in \mathbb{I}^j$, akkor

$$(2.2.7) \qquad \tau_x f \in X \quad \text{és} \quad \|\tau_x f\|_X = \|f\|_X \quad (f \in X).$$

Ez a definició a (2.2.6) feltétel miatt nem pontos megfelelője a klasszikus harmonikus analízisben szokásos fogalomalkotásnak, ahol is ezt a feltételt nem követelik meg. Ennek a feltételnek következményeként minden (a most bevezetet definíció szerinti) homogén Banach-tér automatikusan szeparábilis. Mint ismeretes (lásd Baron-Schipp [1], Sch-W-S-P

[30, 154.old.]) ($1 \le p < \infty$) esetén az $L^p(\mathbb{I}^j)$ terek, a $H^1(\mathbb{I}^j)$ és a $\mathrm{VMO}(\mathbb{I}^j)$ tér is homogén Banach tér.

Az $L^1(\mathbb{I}^j)$-beli függvények *diadikus konvolúcióját* a diadikus összeadás segítségével értelmezzük: tetszőleges $f, g \in L^1(\mathbb{I}^j)$ függvényekre

$$(2.2.8) \qquad (f * g)(x) := \int_{\mathbb{I}^j} f(t) g(x \dot{+} t)\, dt \ (x \in \mathbb{I}^j).$$

Ismeretes, hogy ha $f, g \in L^1(\mathbb{I}^j)$, akkor $f*g \in L^1(\mathbb{I}^j)$ és $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$. Ez az alapvető egyenlőtlenség a következőképpen általánosítható: ha X homogén Banach tér, $f \in L^1(\mathbb{I}^j)$ és $g \in X$, akkor $f * g \in X$ és

$$(2.2.9) \qquad \|f * g\|_X \le \|f\|_1 \|g\|_X$$

(lásd Baron-Schipp [1], Sch-W-S-P [30, 254. old. L. 4.4]).

Jelöljük X'-vel az X homogén Banach tér duális terét. A (2.2.9) egyenlőtlenség nemcsak az X-tér normájával, hanem a duális tér normájával is fennáll. Nevezetesen, ha $f \in L^1(\mathbb{I}^j)$ és $g \in X' \cap L^1(\mathbb{I}^j)$, akkor

$$(2.2.10) \qquad \|f * g\|_{X'} \le \|f\|_1 \|g\|_{X'}$$

is teljesül (lásd Baron-Schipp [1]).

Tekintsük az $\mathbb{I}$-n értelmezett

$$r(x) := \begin{cases} +1, & \text{ha } 0 \le x < 1/2 \\ -1, & \text{ha } 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztését a számegyenesre. Ekkor az úgynevezett *Rademacher függvényeket* az

$$(2.2.11) \qquad r_n(x) := r(2^n x) \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

szabály segítségével definiálhatjuk. Az r_n ($n \in \mathbb{N}$) függvények nyilvánvalóan ortonormált, de nem teljes rendszert alkotnak az $L^2(\mathbb{I})$ függvénytéren a szokásos skaláris szorzatot véve alapul. Ezen függvények véges szorzatainak összessége már teljes. Ezeket a véges szorzatokat a következőképpen rendezzük:

$$(2.2.12) \qquad w_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(x))^{n_k}) = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} n_k x_k} \quad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}),$$

ahol n_k, x_k az n-nek ill. az x-nek a bináris együtthatói.

A fenti szorzat véges minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és a w_n függvények a $[0, 1)$ intrvallumot a $\{-1, 1\}$ halmazba képezik. A w_n ($n \in \mathbb{N}$) függvények rendszerét *Walsh (-Paley) rendszernek* nevezzük. Ez a rendszer ortonormált és teljes az $L^2(\mathbb{I})$ térben (lásd SCH-W-S-P [30, 29. old.]).

A w_n függvények karakter tulajdonságúak a diadikus összadásra vonatkozóan, azaz majdnem minden $x, y \in \mathbb{I}$ számpárra

$$(2.2.13) \qquad w_n(x \dot{+} y) = w_n(x) w_n(y) \quad (x, y \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}),$$

és

$$(2.2.14) \qquad w_{2^n \ell + s}(x) = w_{2^n \ell}(x) w_s(x) \quad (n, \ell \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{I}, 0 \leq s < 2^n).$$

Ismeretes, hogy a $(w_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer teljes az $L^1(\mathbb{I})$ térre vonatkozóan.

A kétdimenziós Walsh rendszert az egydimenziós rendszer Kronecker szorzataként értelmezzük:

$$(2.2.15) \qquad w_n = w_{n_1} \times w_{n_2} \quad (n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2).$$

Ebből az értelmezésből következik, hogy a (2.2.13) azonosság minden $n \in \mathbb{N}^2$ és m.m. $x, y \in \mathbb{I}^2$ pontpárra fennáll.

Az egydimenziós Walsh-sorok mellett vizsgálni fogjuk a

$$(2.2.16) \qquad \sum_{j \in \mathbb{N}^2} a_j w_j(x)$$

alakú kettős Walsh-sorokat, ahol $(a_j, j \in \mathbb{N}^2)$ kétindexű valós számsorozat. Ennek a végtelen kettős sornak a konvergenciáját Pringsheim-féle értelemben vizsgáljuk (lásd Zygmund [43, vol. 2./ Ch. 17.]). Ehhez képezzük a téglalap alakú részletösszegeket, azaz az

$$(2.2.17) \qquad \begin{aligned} S_n(x) &:= 0 \quad (n \in \mathbb{N}^j, \wedge n = 0), \\ S_n(x) &:= \sum_{0 \leq k < n} a_k w_k(x) \quad (n \in \mathbb{P}^j, x \in \mathbb{I}^j, j = 1, 2) \end{aligned}$$

sorozatot és $j = 2$ esetén ennek a Pringsheim-féle határértékeként értelmezzük a (2.2.16) sor összegét. Akkor mondjuk, hogy az $(S_n(x), n \in \mathbb{N}^2)$ kétindexű sorozat Pringsheim-féle értelemben konvergál valamely $f(x)$-hez, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $|S_n(x) - f(x)| < \epsilon$ minden $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, $\min(n_1, n_2) \geq N$ feltételnek eleget tevő indexre.

Ha (2.2.16) sor együtthatóit valamely $f \in L^1(\mathbb{I}^j)$ függvényből kiindulva az

$$(2.2.18) \qquad a_k := \hat{f}(k) := \int_{\mathbb{I}^j} f(x) w_k(x)\, dx \quad (k \in \mathbb{N}^j)$$

szerint választjuk, azaz ha az f függvény $\hat{f}$ *Walsh-Fourier-együtthatóinak sorozatából* indulunk ki, akkor a (2.2.16) sort az f függvény *Walsh-Fourier-sorának* nevezzük. Ilyenkor a (2.2.16)- sor n-edik részletösszegét $(S_n f)(x)$-szel jelöljük. Hasonló értelmezést és jelölést használunk az egyváltozós Walsh-sorok és Walsh-Fourier-sorokkal kapcsolatban is. Ismeretes, hogy $j = 1$ esetén a 2^n indexű, $j = 2$ esetén pedig a $2^n := (2^{n_1}, 2^{n_2})$ indexű részletösszegek kifejezhetők a feltételes várható érték operátorral, nevezetesen $S_{2^n} f = E_n f$, minden $n \in \mathbb{N}^j$ $(j = 1, 2)$ index esetén. Ez az egyenlőség $n_1 = \infty$, ill. $n_2 = \infty$ esetén is fennáll m.m. $x \in \mathbb{I}^2$ pontban, nevezetesen

$$\lim_{n_2 \to \infty} (S_{(2^{n_1}, 2^{n_2})} f)(x) =: (S_{(2^{n_1}, \infty)} f)(x) = (E_{(n_1, \infty)} f)(x),$$
$$\lim_{n_1 \to \infty} (S_{(2^{n_1}, 2^{n_2})} f)(x) =: (S_{(\infty, 2^{n_2})} f)(x) = (E_{(\infty, n_2)} f)(x) \tag{2.2.19}$$

m.m. $x \in \mathbb{I}^2$ pontban.

Tetszőleges (2.2.17) alakú Walsh-sornak képezve az $(S_{2^n}, n \in \mathbb{N}^j)$ alakú részletösszegeit, diadikus martingált kapunk. Megfordítva, a (2.1.7) tulajdonságból következik, hogy tetszőleges $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j)$ diadikus martingál esetén minden $k \in \mathbb{N}^j$ indexre létezik az

$$\hat{F}(k) := \lim_{\wedge m \to \infty} \hat{f}_m(k) \tag{2.2.20}$$

határérték, melyet az F *martingál k-adik Walsh-Fourier-együtthatójának* nevezünk. Egyszerűen igazolható, hogy $\hat{f}_m(k)$ sorozat egy adott indextől kezdve állandó, és így a (2.2.20) határérték nyilvánvalóan létezik. Speciálisan, ha $F_f = (E_n f, n \in \mathbb{N}^j)$ az $f \in L^1(\mathbb{I}^j)$ függvény által generált reguláris martingál, akkor visszakapjuk az f Fourier-együtthatóit:

$$\hat{F}_f(k) = \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{I}^j).$$

A mondottak alapján a Walsh-sorok és a diadikus martingálok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Nevezetesen, ha az F martingálnak megfeltetjük a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^j} \hat{F}(k) w_k$$

Walsh-sort, akkor a diadikus martingálok $\mathcal{M}(\mathbb{I}^j)$ terét bijektív módon képezzük le a Walsh-sorok terére. Ennek a sornak a részletösszegeit — martingálokra kiterjesztve a részletösszegek értelmezését — az $S_m F$ $(m \in \mathbb{N})$ szimbólummal jelöljük. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j)$ diadikus martingálra $(S_{2^n} F, n \in \mathbb{N}^j) = F$, s ezért az említett, diadikus martingálok és Walsh-sorok között létesített megfeleltetés valóban bijekció.

A Walsh-Fourier-együtthatók és a konvolúció között szoros kapcsolat áll fenn, nevezetesen bármely két $f, g \in L^1(\mathbb{I}^j)$ függvényre

$$\widehat{(f * g)}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k) \quad (k \in \mathbb{N}^j) \tag{2.2.21}$$

(lásd Sch-W-S-P [30, 25. old.]).

A Walsh-Fourier-sorok részletösszegei konvolúciós operátor alakjában írhatók fel a D_n $(n \in \mathbb{N}^j)$ Walsh-Dirichlet-féle magfüggvények segítségével. Ezeket az egydimenziós esetben a

$$D_0 := 0, \quad D_n := \sum_{k=0}^{n-1} w_k \quad (n \in \mathbb{P}), \tag{2.2.22}$$

a $j=2$ esetben pedig a

$$D_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^2, \wedge n = 0),\ D_n := \sum_{k<n} w_k \quad (n \in \mathbb{P}^2) \tag{2.2.23}$$

utasítással értelmezzük. Ekkor

$$D_n = D_{n_1} \times D_{n_2} \ (n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2),\ S_n f = f * D_n \quad (f \in L^1(\mathbb{I}^j), n \in \mathbb{N}^j). \tag{2.2.24}$$

Nyilvánvaló, hogy a $(D_{2^n}, n \in \mathbb{N}^j)$ sorozat diadikus martingál, amely a $\sum_{n\in\mathbb{N}^j} w_n$ Walsh-sornak felel meg a fent említett leképezésben. Az is könnyen belátható, hogy

$$D_{2^n}(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(1 + r_i(x)) = \begin{cases} 2^n & \text{ha } 0 \le x < 2^{-n}, \\ 0 & \text{ha } 2^{-n} \le x < 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.2.25}$$

Az egydimenziós Walsh-Dirichlet-féle magfüggvények előállíthatók a következő alakban:

$$D_n = w_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k w_{2^k} D_{2^k} = w_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k (D_{2^{k+1}} - D_{2^k}) \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{2.2.26}$$

ahol n_k $(k \in \mathbb{N})$ az n szám bináris jegyei (lásd Sch-W-S-P [30, 28. old. Th. 8]).

A jól ismert trigonometrikus Fejér-féle magfüggvény megfelelője a

$$K_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k \quad (n \in \mathbb{P}) \tag{2.2.27}$$

függvény. Könyen ellenőrizhető, hogy a Fejér- és a Dirichlet-féle magfüggvény között fennáll a következő kapcsolat:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k w_k = n(D_n - K_n) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.2.28}$$

A dolgozatban fontos szerepet fognak játszani az alábbi, a magfüggvényekre vonatkozó becslések és előállítások. (lásd Sch-W-S-P [30, 46. old., Th. 16; 28.old., Th. 8], Simon [28])

$$D_{2^n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k(x) D_{2^k}(x) + 1, \tag{2.2.29}$$

$$\begin{aligned} 0 \le K_{2^n}(x) &= \frac{1}{2}\Big(2^{-n} D_{2^n}(x) + \sum_{j=0}^{n} 2^{j-n} D_{2^n}(x \dot{+} 2^{-j-1})\Big) = \\ &=: (2^{-n-1} + \frac{1}{2}) D_{2^n}(x) + \widetilde{K}_{2^n}(x), \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

ahol

$$\widetilde{K}_{2^n}(x) := \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-n} D_{2^n}(x \dotplus 2^{-j-1}).$$

Legyen $2^\ell \le j < 2^{\ell+1}$. Ekkor a $K_j(x)$ magfüggvény abszolút értékét a következőképpen becsüljük:

$$(2.2.31) \qquad \begin{aligned} |K_j(x)| &\le \sum_{\nu=0}^{\ell} 2^{\nu-\ell-1} \sum_{\mu=\nu}^{\ell} (D_{2^\mu}(x) + D_{2^\mu}(x \dotplus 2^{-\nu-1})) = \\ &= 2^{-\ell-1} \sum_{\mu=0}^{\ell} \sum_{\nu=0}^{\mu} (2^\nu D_{2^\mu}(x) + 2^\nu D_{2^\mu}(x \dotplus 2^{-\nu-1})) \le \\ &\le \sum_{\mu=0}^{\ell} 2^{\mu-\ell} D_{2^\mu}(x) + \sum_{\mu=0}^{\ell} 2^{\mu-\ell} K_{2^\mu}(x) = \\ &= \sum_{\mu=0}^{\ell} 2^{\mu-\ell}(2^{-\mu-1} + \frac{3}{2}) D_{2^\mu}(x) + \sum_{\mu=0}^{\ell} 2^{\mu-\ell} \widetilde{K}_{2^\mu}(x), \end{aligned}$$

illetve

$$(2.2.32) \qquad |K_j| \le \sum_{i=0}^{\ell-1} 2^{i-\ell} K_{2^i}.$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy

$$(2.2.33) \qquad \|D_{2^n}\|_1 = 1, \quad \|K_{2^n}\|_1 = 1 \text{ és } \quad \|K_n\|_1 \le 4 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A konvolúció fogalmát kiterjeszthetjük az $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j), G = (g_n, n \in \mathbb{N}^j)$ diadikus martingálokra:

$$(2.2.34) \qquad F * G := (f_n * g_n, n \in \mathbb{N}^j).$$

Minthogy $n \le m$ esetén a konvolúció asszociativitása, kommutativitása és (2.2.24) alapján

$$\begin{aligned} E_n(f_m * g_m) &= (f_m * g_m) * D_{2^n} = f_m * (g_m * D_{2^n}) = (f_m * g_n) = \\ &= f_m * (g_n * D_{2^n}) = (f_m * D_{2^n}) * g_n = f_n * g_n, \end{aligned}$$

következésképpen $F * G$ is diadikus martingál és fennáll a (2.2.21) megfelelője:

$$(\widehat{F * G})(k) = \hat{F}(k)\hat{G}(k) \ (k \in \mathbb{I}^j).$$

Innen látható, hogy a részletösszegek (2.2.24) előállítása akkor is fennáll, ha az f függvényt az F martingállal helyettesítjük.

2.3. A diadikus derivált és diadikus integrál

A dolgozatban jelentős szerepe lesz a *diadikus deriváltnak*. Az $\epsilon_y(x) := \exp(ixy)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ komplex trigonometrikus függvények a $(Df)(x) := f'(x)$ közönséges differenciáloperátor sajátfüggvényei:

$$D\epsilon_y = iy\epsilon_y \quad (y \in \mathbb{R}). \tag{2.3.1}$$

Hasonló kapcsolat áll fenn a diadikus derivált és a Walsh-függvények között. A diadikus derivált értelmezéséhez — a differenciahányados analogonjaként — minden $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ függvényre és $n \in \mathbb{N}$ számra bevezetjük a

$$(\Delta_n f)(x) := \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1}(f(x) - f(x \dot{+} e_j)) \quad (x \in \mathbb{I}) \tag{2.3.2}$$

diadikus differencia operátorokat, ahol $e_j = 2^{-j-1}$ $(j \in \mathbb{N})$. Akkor mondjuk, hogy az f függvény *diadikusan differenciálható* az $x \in \mathbb{I}$ pontban (lásd Sch-W-S-P [30, Ch. 1.7.]), ha létezik az

$$f^{[1]}(x) := \lim_{n\to\infty}(\Delta_n f)(x) \tag{2.3.3}$$

véges határérték. Az $f^{[1]}(x)$ számot az f függvény x helyen vett diadikus deriváltjának nevezzük.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy

$$\Delta_n w_k = (\sum_{j=0}^{n-1} k_j 2^j) w_k \quad (n \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}). \tag{2.3.4}$$

Innen következik, hogy a Walsh-függvények diadikusan differenciálhatók és fennáll a (2.3.1) összefüggés analogonja:

$$w_k^{[1]}(x) = k w_k(x) \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{I}). \tag{2.3.5}$$

A kétváltozós diadikus differenciaoperátorokat — az intervallumfüggvények differenciálhatóságának értelmezését mintául véve — a következőképpen definiáljuk. Minden, az $\mathbb{I}^2$ egységnégyzeten értelmezett f függvény, $n \in \mathbb{P}^2$ és $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2$ esetén legyen

(2.3.6)

$$\Delta_n f(x) :=$$

$$:= \sum_{j<n} 2^{|j|-2}(f(x_1, x_2) - f(x_1 \dot{+} e_{j_1}, x_2) - f(x_1, x_2 \dot{+} e_{j_2}) + f(x_1 \dot{+} e_{j_1}, x_2 \dot{+} e_{j_2})).$$

Akkor mondjuk, hogy az $f : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény *diadikusan differenciálható* az $x \in \mathbb{I}^2$ pontban, ha Pringsheim-féle értelemben létezik az

$$f^{[1]}(x) := \lim_{\wedge(n_1,n_2)\to\infty} (\Delta_n f)(x) \tag{2.3.7}$$

véges határérték. Az $f^{[1]}(x)$ számot az f függvény kétdimenziós diadikus deriváltjának nevezzük az x pontban (lásd Schipp [32]).

Könnyen belátható, hogy ha $f = g \times h$ alakú és $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, akkor

$$\Delta_n f = \Delta_{n_1} g \times \Delta_{n_2} h,$$

következésképpen

$$\Delta_n w_m = m_1 m_2 w_m \quad (m \leq 2^n, m, n \in \mathbb{N}^2). \tag{2.3.8}$$

Innen nyilvánvalóan következik, hogy a w_n $(n \in \mathbb{N}^2)$ kétváltozós Walsh-függvények diadikusan differenciálhatók, és

$$w_m^{[1]} = m_1 m_2 w_m \quad (m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2). \tag{2.3.9}$$

A diadikus derivált inverz operátora a *diadikus integrál operátor* (antiderivált), amely diadikus konvolúciós operátorként adható meg. Ismeretes, hogy létezik olyan $W \in L^1(\mathbb{I})$ függvény, amelynek Walsh-Fourier-együtthatóira

$$\hat{W}(0) = 0, \quad \hat{W}(k) = \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{P}) \tag{2.3.10}$$

teljesül (lásd Sch-W-S-P [30, Ch. 1.7., 43. old.]). Ez a függvény az I diadikus integrál operátor generátorfüggvénye, hiszen I felírható az

$$If = f * W \quad (f \in L^1(\mathbb{I})) \tag{2.3.11}$$

alakban. Továbbá a W függvény Walsh-Fourier-sora L^1-normában és, az $x \neq 0$ pontot kivéve, minden $x \in \mathbb{I}$ helyen pontonként konvergál a W függvényhez, sőt $W \in L^p(\mathbb{I})$ minden $1 \leq p < \infty$ esetén (lásd Sch-W-S-P [30, 44. old., Th.15]). Érvényes a

$$|W| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k+2} D_{2^k} \tag{2.3.12}$$

becslés (lásd Sch-W-S-P [30, 44. old., Th. 15]). Jelöljük W_n-nel a W Walsh-Fourier-sorának 2^n-edik részletösszegét. Ekkor érvényes a

$$\|W - W_n\| = \|\sum_{k=2^n}^{\infty} \frac{w_k}{k}\|_1 = O(2^{-n}) \quad (n \to \infty) \tag{2.3.13}$$

becslés, valamint a $W - W_n$ függvény előállítható a következő alakban (lásd Sch-W-S-P [30, 48. old., Th. 17]):

$$W - W_n = \sum_{k=2^n+1}^{\infty} K_k\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{K_{2^n-1}}{2^n+1} - \frac{D_{2^n}}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.3.14}$$

Ismeretes továbbá, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre a $\Delta_n W$ függvény felbontható

$$\Delta_n W = D_{2^n} + R_n \tag{2.3.15}$$

alakban, ahol az R_n függvény Walsh-Fourier-együtthatóira $\hat{R}_n(k) = 0$ $(k < 2^n)$ teljesül, továbbá (lásd Sch-W-S-P [30, 48.old., Th. 17])

$$\sup_{m,n \in \mathbb{N}} \|S_{2^m}(R_n)\|_1 < \infty. \tag{2.3.16}$$

Lebesgue ismeretes tétele szerint bármely $f \in L^1(\mathbb{I})$ függvény

$$F(x) := \int_0^x f(s)\,ds \quad (x \in \mathbb{I})$$

integrálfüggvénye majdnem mindenütt differenciálható és m. m. $x \in \mathbb{I}$ pontban

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s)\,ds = f(x). \tag{2.3.17}$$

A Fourier-analízisben igen hasznos fogalomnak bizonyult az

$$(Mf)(x) := \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(s)|\,ds \quad (x \in \mathbb{I}, f \in L^1(\mathbb{I})) \tag{2.3.18}$$

Hardy-Littlewood-féle maximál-operátor. Ismertes, hogy az M operátor gyengén $(1,1)$- és erősen (p,p)-típusú, ha $1 < p \le \infty$ (lásd Zygmund [43, I./13., 29. old.]).

A most idézett állításoknak az alábbi, diadikus megfelelője alapvető szerepet játszik a Cesàro operátor vizsgálatában. A $\Delta_n(If) = f * \Delta_n W$ helyett induljunk ki a $|\Delta_n W|$ sorozattal képzett

$$I_* f := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f| * |\Delta_n W| \tag{2.3.19}$$

operátorból, amely az M maximál operátor diadikus megfelelője. Ismeretes, hogy I_* gyengén $(1,1)$-típusú és erősen (p,p)-típusú, ha $1 < p \le \infty$, azaz

$$\begin{aligned} &i)\ |\{x \in \mathbb{I} : (I_* f)(x) > \lambda\}| \le C\|f\|_1/\lambda \quad (\lambda > 0, f \in L(\mathbb{I}^1)), \\ &ii)\ \|I_* f\|_p \le C_p \|f\|_p \quad (f \in L^p(\mathbb{I}), 1 < p \le \infty), \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

ahol C abszolút, C_p pedig csak p-től függő konstans. Érvényes továbbá az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel következő analogonja: minden $f \in L^1(\mathbb{I})$ függvényre és m.m. $x \in \mathbb{I}$ pontban

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_n(If))(x) = f(x). \tag{2.3.21}$$

A most ismertetett tételek kétváltozós megfelelőinek megfogalmazása előtt emlékeztetünk arra, hogy az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel analogonja csak bizonyos további megszorítás mellett érvényes. Nevezetesen, ha az f-re az integrálhatóság helyett a szigorúbb

$$\int_{\mathbb{I}^2} |f(s,t)| \log_+ |f(s,t)|\, ds\, dt < \infty \tag{2.3.22}$$

feltétel teljesül, akkor m. m. $(x,y) \in \mathbb{I}^2$ pontban

$$\lim_{(h,k)\to(0.0)} \frac{1}{hk}\int_x^{x+h}\int_y^{y+k} f(s,t)\, ds\, dt = f(x,y). \tag{2.3.23}$$

Speciálisan, ha $f \in L^p(\mathbb{I}^2)$ és $p > 1$, akkor fennáll (2.3.23). A kétváltozós

$$(Mf)(x,y) := \sup_{h,k>0} \frac{1}{hk}\int_x^{x+h}\int_y^{y+k} |f(s,t)|\, ds\, dt \quad ((x,y) \in \mathbb{I}^2) \tag{2.3.24}$$

Hardy-Littlewood-féle maximál operátor erősen (p,p)-típusú, ha $1 < p \le \infty$.

A kétvátozós diadikus integrál operátor a

$$W^{(2)} := W \times W \tag{2.3.25}$$

függvénnyel adható meg

$$I^{(2)}f = f * W^{(2)}$$

alakban.

Az egydimenziós esetből nyilvánvalóan következik, hogy

$$W^{(2)} \in L^1(\mathbb{I}^2), \quad \|\Delta_n W^{(2)}\|_1 = \|\Delta_{n_1} W \times \Delta_{n_2} W\|_1 = O(1) \ (n \in \mathbb{P}^2). \tag{2.3.26}$$

Az egydimenziós (2.3.12) felbontás alapján könnyen adódik $\Delta_n W^{(2)}$-re az alábbi összefüggés:

$$\Delta_n W^{(2)} = D_{2^n} + R_n + R_{n_1} \times D_{2^{n_2}} + D_{2^{n_1}} \times R_{n_2} \quad (n = (n_1, n_2) \in \mathbb{P}^2), \tag{2.3.27}$$

ahol $\hat{R}_n(k) = 0$, ha $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}$ és $k_1 \le 2^{n_1}$ vagy $k_2 \le 2^{n_2}$ és

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}^2} \|S_{2^m}(R_n)\|_1 < \infty. \tag{2.3.28}$$

Valóban, felhasználva (2.3.15)-t és a kétváltozós diadikus differencia-operátor definícióját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Delta_n W^{\langle 2\rangle} &= (\Delta_{n_1} W) \times (\Delta_{n_2} W) = (D_{2^{n_1}} + R_{n_1}) \times (D_{2^{n_2}} + R_{n_2}) = \\ &= D_{2^n} + R_{n_1} \times D_{2^{n_2}} + D_{2^{n_1}} \times R_{n_2} + R_{n_1} \times R_{n_2} = \\ &=: D_{2^n} + R_n + R_{n_1} \times D_{2^{n_2}} + D_{2^{n_1}} \times R_{n_2}.\end{aligned}$$

Minthogy minden $m, n \in \mathbb{N}^2$ esetén

$$S_{2^m}(R_n) = S_{2^{m_1}}(R_{n_1}) \times S_{2^{m_2}}(R_{n_2}),$$

ezért (2.3.16)-ból (2.3.28) már következik.

A (2.3.23) diadikus analogonja a következő állítás (lásd Weisz [42]): minden $f \in L^p(\mathbb{I}^2)$ függvényre $p > 1$ esetén

$$\lim_{\wedge n \to \infty} \Delta_n(I^{\langle 2\rangle} f) = \lim_{\wedge n \to \infty} f * \Delta_n W^{\langle 2\rangle} = f$$

m.m. $\mathbb{I}^2$ pontban. A kétváltozós Hardy-Littlewood-féle maximál operátor diadikus megfelelőjeként bevezetjük az0

$$I_*^{\langle 2\rangle} f := \sup_{n \in \mathbb{P}^2} |f| * |\Delta_n W^{\langle 2\rangle}|$$

maximál operátort. Ez az operátor minden $p > 1$ esetén erősen (p,p)-típusú, azaz létezik olyan, csak p-től függő $C_p > 0$ szám, hogy

(2.3.29) $$\|I_*^{\langle 2\rangle} f\|_p \le C_p \|f\|_p \quad (f \in L^p(\mathbb{I}^2), p > 1).$$

Ez az állítás a (2.3.20) ii)-ből az alábbi, kétváltozós konvolúciós operátorokra vonatkozó állításból következik (lásd Schipp [31], Weisz [42]).

B. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\phi_n^{\langle 1\rangle} \in L^1(\mathbb{I})$ $(n \in \mathbb{N})$ függvényekkel képzett egyváltozós*

$$\Phi^{\langle 1\rangle} g := \sup_{n \in \mathbb{N}} |g| * |\phi_n^{\langle 1\rangle}|$$

operátorok valamely $1 \le p \le \infty$ számra (p,p)-típusúak. Ekkor a

$$\Phi^{\langle 2\rangle} f := \sup_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} |f| * (|\phi_n^{\langle 1\rangle}| \times |\phi_n^{\langle 1\rangle}|) \quad (f \in L^p(\mathbb{I}^2))$$

maximál operátor is (p,p)-típusú.

A Δ_n mellett használni fogjuk az egydimenziós diadikus differencia-operátor alábbi, módosított alakját: minden $x \in \mathbb{I}$ és $n \in \mathbb{P}$ esetén legyen

(2.3.30)

$$(\Delta_n^- f)(x) := \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1}\big(f(x) - f(x \dotplus e_j)\big) - 2^{n-1}\big(f(x) - f(x \dotplus e_n)\big).$$

Mivel $\Delta_k^- f = \Delta_k f - (\Delta_{k+1} f - \Delta_k f) = 2\Delta_k f - \Delta_{k+1} f$, következésképpen

(2.3.31) $$\sup_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{P}} \|S_{2^n}(\Delta_k^- W\|_1) < \infty.$$

A módosított diadikus differencia-operátor segítségével a Walsh-Dirichlet-mag a következő, jól használható alakban írható fel.

2.1. Lemma.. *A D_n Walsh-Dirichlet-féle magfüggvények a $t \in J_s := [2^{-s}, 2^{-s+1})$ $(s \in \mathbb{P})$ pontokban előállítható a*

$$D_n(t) = \Delta^-_{s-1} w_n(t) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.3.32}$$

alakban.

Bizonyítás. Felhasználva a (2.2.12), (2.2.26) és (2.3.30) összefüggéseket, a Walsh-Dirichlet-féle magfüggvény felírható a

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{w_n(t)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (-1)^{n_k}) w_{2^k}(t) D_{2^k}(t) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (w_n(t) - w_n(t \dotplus e_k)) w_{2^k}(t) D_{2^k}(t) \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

alakban. Mivel

$$w_{2^k}(t) D_{2^k}(t) = \begin{cases} 2^k, & \text{ha } 0 \le t < 2^{-k-1} \\ -2^k, & \text{ha } 2^{-k-1} \le t < 2^{-k} \\ 0, & \text{ha } 2^{-k} \le t < 1, \end{cases} \tag{2.3.34}$$

ezért a $t \in [2^{-s}, 2^{-s+1})$ pontban

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{s-2} 2^k (w_n(t) - w_n(t \dotplus e_k)) - 2^{s-2}(w_n(t) - w_n(t \dotplus e_{s-1})),$$

s így (2.3.32) valóban fennáll. □

A kétdimenziós esetben a Dirichlet-féle magfüggvény definíciója és (2.3.32) alapján következik, hogy a $t \in J_s := [2^{-s_1}, 2^{-s_1+1}) \times [2^{-s_2}, 2^{-s_2+1})$ $(s = (s_1, s_2) \in \mathbb{P}^2)$ pontban minden $n \in \mathbb{P}^2$ esetén

$$D_n(t) = (D_{n_1} \times D_{n_2})(t) = \Delta^-_{s_1-1} w_{n_1}(t_1) \Delta^-_{s_2-1} w_{n_2}(t_2) =: \Delta^-_{s-1} w_n(t) \tag{2.3.35}$$

összefüggés teljesül. Mivel

$$\begin{aligned} &\Delta^-_s = 2\Delta_s - \Delta_{s+1} \quad (s \in \mathbb{N}), \\ &\Delta^-_s W^{(2)} = \Delta^-_{s_1} W \times \Delta^-_{s_2} W = \\ &= 4\Delta_{s_1} W \times \Delta_{s_2} W - 2\Delta_{s_1} W \times \Delta_{s_2+1} W - 2\Delta_{s_1+1} W \times \Delta_{s_2} W + \Delta_{s_1+1} W \times \Delta_{s_2+1} W, \end{aligned}$$

ezért (2.3.20) ii) és (2.3.29) alapján következik, hogy a

$$J^{(j)} f := \sup_{n \in \mathbb{P}^j} |f| * |\Delta^-_n W^{(j)}| \quad (f \in L^p(\mathbb{I}^j)) \tag{2.3.36}$$

maximál operátor $j = 1$ és $j = 2$ esetén is (p,p) típusú, ha $1 < p \le \infty$. Más szóval létezik olyan, csak p-től függő $C_p > 0$ szám, hogy

$$\|J^{(j)} f\|_p \le C_p \|f\|_p \quad (f \in L^p(\mathbb{I}^j), 1 < p \le \infty, j = 1, 2). \tag{2.3.37}$$

3. A diadikus Cesàro és Copson operátorok L^p-tereken

Ebben a pontban bevezetjük a *diadikus Cesàro* és *Copson operátorokat.* Az egy és kétváltozós esetet –ahol csak lehet– együtt tárgyaljuk. Ebben a fejezetben szereplő tételek a [11]-es és a [12]-es cikkekben találhatók meg.

A címben jelzett operátorokat a szóbajöhető lehető legtágabb téren, a diadikus martingálok $\mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ alterén értelmezzük. A $j = 1$ esetben

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{I}) := \{F \in \mathcal{M}(\mathbb{I}) : \hat{F}(0) = 0\}, \tag{3.1}$$

a $j = 2$-nek megfelelő kétváltozós esetben pedig legyen

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{I}^2) := \{F \in \mathcal{M}(\mathbb{I}^2) : \hat{F}(k,\ell) = 0 \quad k,\ell \in \mathbb{N}, \min(k,\ell) = 0\}. \tag{3.2}$$

Az F diadikus martingál Walsh-sorát az

$$f \sim S(F) := \sum_{k \in \mathbb{N}^j} \hat{F}(k) w_k \quad (j = 1,2) \tag{3.3}$$

szimbólummal jelöljük. Mivel a Walsh-sorok, az együttható-sorozatok, ill. a diadikus martingálok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, ezért minden $F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ diadikus martingál esetén pontosan egy olyan $G \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ diadikus martingál létezik, amelynek Walsh-Fourier-együtthatója az F diadikus martingál Walsh-Fourier-együtthatóinak átlagával egyenlő, azaz amelyre

$$\hat{G}(n) := 0 \ (n \in \mathbb{N}^j, \wedge n = 0), \ \hat{G}(n) := \frac{1}{n^*} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{F}(k) \quad (n \in \mathbb{P}^j), \tag{3.4}$$

ahol $n^* = n_1 \cdot n_2$. A

$$\widetilde{C}F := G \quad (F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)) \tag{3.5}$$

utasítással értelmezett $\widetilde{C} : \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j) \to \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ leképezést *diadikus Cesàro operátornak nevezzük.* Nyilvánvaló, hogy ezzel egy lineáris operátort értelmeztünk az $\mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ téren.

A $\widetilde{C}$ operátor $\widetilde{C}^*$ adjungáltját első lépésben az $\mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$ stacionárius martingálok alterén értelmezzük. A $G := \widetilde{C}^*F$ $(F \in \mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j))$ martingált úgy definiáljuk, hogy a Walsh-együtthatói legyenek

$$\hat{G}(n) := \sum_{k : n < k} \frac{\hat{F}(k)}{k^*} \quad (n \in \mathbb{N}^j). \tag{3.6}$$

Minthogy véges sok $k \in \mathbb{N}^j$ indextől eltekintve valamennyi $k \in \mathbb{N}^j$ indexre $\hat{F}(k) = 0$, ezért a fenti végtelen összegnek van értelme. A $\widetilde{C}^*$ leképezést *Copson operátornak* nevezzük. Az adjungált operátor elnevezést támasztja alá az alábbi állítás:

3.1. Lemma. *A $\widetilde{C}$ Cesàro operátornak a (2.1.7) bilineáris funkcionálra vonatkozó adjungáltja a (3.6) alatt értelmezett $\widetilde{C}^*$ Copson operátor, azaz*

$$\langle \widetilde{C}F, G\rangle = \langle F, \widetilde{C}^*G\rangle \quad (F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j), G \in \mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)). \tag{3.7}$$

Bizonyítás. A $G \in \mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$ feltételből következik, hogy véges sok $k \in \mathbb{N}^j$ indextől eltekintve $\hat{G}(k) = 0$. A (2.1.7) bilineáris leképezés értelmezése alapján

$$\langle \widetilde{C}F, G\rangle = \sum_{0<k} \frac{\hat{G}(k)}{k^*} \sum_{\ell:\ell<k} \hat{F}(\ell).$$

Ebben a véges összegben felcserélve az összegezés sorrendjét azt kapjuk, hogy

$$\langle \widetilde{C}F, G\rangle = \sum_{\ell\in\mathbb{P}^j} \hat{F}(\ell) \sum_{k:\ell<k} \frac{\hat{G}(k)}{k^*} = \sum_{\ell\in\mathbb{P}^j} \hat{F}(\ell) \left(\widetilde{C}^*G\right)^\wedge(\ell),$$

s ezzel a (3.7) állítást igazoltuk. □

Ebben a dolgozatban a $\widetilde{C}$ és $\widetilde{C}^*$ operátorokat vizsgáljuk a diadikus martingálok különböző alterein. Mindenekelőtt a Cesàro operátort egy integráloperátor alakjában állítjuk elő. Megmutatjuk, hogy a $\widetilde{C}F = G = (g_n, n \in \mathbb{N}^j)$ martingál előállítható a

$$g_n(x) = \int_{\mathbb{I}^j} f_n(t) K_n^{\langle j\rangle}(x,t)\, dt \quad (x \in \mathbb{I}^j, F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)) \tag{3.8}$$

alakban, ahol a $K_n^{\langle j\rangle}$ magfüggvény kifejezhető a módosított diadikus differencia operátor segítségével. Nevezetesen jelölje χ_s a J_s ($s \in \mathbb{P}^j$) intervallum karakterisztikus függvényét. A $W^{\langle j\rangle}$ függvények 2^n indexű részletösszegeit továbbra is jelöljük a

$$W_n^{\langle j\rangle} := S_{2^n}(W^{\langle j\rangle}) \quad (n \in \mathbb{N}^j) \tag{3.9}$$

szimbólummal. Megmutatjuk, hogy $K_n^{\langle j\rangle} \in L^1(\mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j)$ magfüggvény előállítható a következő formában:

$$K_n^{\langle j\rangle}(x,t) := \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \chi_s(t)(\Delta_{s-1}^- W_n^{\langle j\rangle})(x \dotplus t) \quad (x,t \in \mathbb{I}^j). \tag{3.10}$$

Mivel a χ_s függvények tartói páronként diszjunktak, ezért a (3.10) sor minden $(x,t) \in \mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j$ pontban abszolút konvergens. Mivel a Lebesgue-integrál a diadikus transzlációval szemben invariáns, ezért (2.3.16) és (2.3.28) alapján

$$\sum_{s\in\mathbb{P}^j} \int_{\mathbb{I}^j}\int_{\mathbb{I}^j} \chi_s(t)|(\Delta_{s-1}^- W_n^{\langle j\rangle})(t \dotplus x)|\, dtdx = \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \int_{\mathbb{I}^j} \left(\chi_s(t) \int_{\mathbb{I}^j} |(\Delta_{s-1}^- W_n^{\langle j\rangle})(t \dotplus x)|\, dx\right) dt$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \int_{\mathbb{I}^j} \chi_s(t)\|(\Delta_{s-1}^- W_n^{\langle j\rangle}\|_1\, dt = \sup_{s\in\mathbb{P}^j} \|\Delta_{s-1}^-(W_n^{\langle j\rangle})\|_1 \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \int_{\mathbb{I}^j} \chi_s(t)\, dt =$$

$$= \sup_{s\in\mathbb{P}^j} \|\Delta_{s-1}^-(W_n^{\langle j\rangle})\|_1 = O(1),$$

következésképpen a (3.10) sor az $L^1(\mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j)$-normában konvergens és $K_n^{\langle j\rangle} \in L^1(\mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j)$.

A most bevezetett magfüggvények mellett használni fogjuk a

$$(3.10') \qquad K^{\langle j\rangle}(x,t) := \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \chi_s(t)(\Delta_{s-1}^- W^{\langle j\rangle})(x \dot{+} t) \quad (x,t \in \mathbb{I}^j)$$

függvényt is. Az előzőhöz hasonlóan látható be, hogy $K^{\langle j\rangle} \in L^1(\mathbb{I}^j)$. Ezek segítségével értelmezzük az alábbi integrál-operátorokat:

$$(3.11) \qquad (\mathcal{K}_n^{\langle j\rangle} h)(x) := \int_{\mathbb{I}^j} h(t) K_n^{\langle j\rangle}(x,t)\,dt, \quad (\mathcal{K}^{\langle j\rangle} h)(x) := \int_{\mathbb{I}^j} h(t) K^{\langle j\rangle}(x,t)\,dt$$

$(x \in \mathbb{I}^j, h \in L_0^1(\mathbb{I}^j), j = 1,2)$.

3.2. Lemma. *Az $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ diadikus martingál $\widetilde{C}F := G = (g_n, n \in \mathbb{N})$ Cesàro-transzformáltja előállítható a*

$$(3.12) \qquad g_n = \mathcal{K}_n^{\langle j\rangle} f_n \quad (n \in \mathbb{N}^j)$$

alakban. A $\mathcal{K}_n^{\langle j\rangle} : L^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ $(n \in \mathbb{N}^j)$ operátorok egyenletesen korlátosak, a $\mathcal{K}^{\langle j\rangle} : L^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ operátor is korlátos, azaz létezik olyan $C > 0$ abszolút konstans, hogy

$$(3.13) \qquad \|\mathcal{K}_n^{\langle j\rangle} h\|_1 \le C\|h\|_1 \quad \text{és} \quad \|\mathcal{K}^{\langle j\rangle} h\|_1 \le C\|h\|_1 \quad (h \in L^1(\mathbb{I}^j), n \in \mathbb{N}^j).$$

Bizonyítás. A $\widetilde{C}$ operátor definíciója alapján g_n a következő alakba írható fel:

$$g_n(x) = \sum_{1\le k<2^n} \frac{w_k(x)}{k^*} \sum_{\ell<k} \hat{f}_n(\ell) = \sum_{1\le k<2^n} \frac{w_k(x)}{k^*} \int_{\mathbb{I}^j} f_n(t) \sum_{\ell<k} w_\ell(t)dt =$$
$$= \int_{\mathbb{I}^j} f_n(t)\Big(\sum_{1\le k<2^n} \frac{1}{k^*} D_k(t) w_k(x)\Big)\,dt.$$

Felhasználva a D_k magfüggvények (2.3.32), ill. (2.3.35) előállítását és azt a tényt, hogy a transzláció és a Δ_s^- operátorok felcserélhetők, a belső összegre minden $n \in \mathbb{N}^j$ esetén

$$\sum_{1\le k<2^n} \frac{1}{k^*} D_k(t) w_k(x) = \sum_{1\le k<2^n} \frac{1}{k^*} \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \chi_s(t)(\Delta_{s-1}^- w_k)(t) w_k(x) =$$
$$= \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \chi_s(t) \sum_{1\le k<2^n} \frac{1}{k^*}(\Delta_{s-1}^- w_k)(t \dot{+} x) = \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \chi_s(t)(\Delta_{s-1}^- W_n^{\langle j\rangle})(t \dot{+} x) = K_n^{\langle j\rangle}(x,t)$$

adódik. Ennek alapján (3.12) már következik.

A $\mathcal{K}_n^j$ operátorok egyenletes korlátossága a (2.3.26) állítás egyszerű következménye. Valóban a 3.2. Lemma előtt alkalmazott gondolatmenetet megismételve

$$\|\mathcal{K}_n^{(j)} h\|_1 \leq \int_{\mathbb{I}^j} \int_{\mathbb{I}^j} |h(t) K_n^{(j)}(x,t)| \, dx dt = \sum_{s \in \mathbb{P}^j} \int_{\mathbb{I}^j} \int_{\mathbb{I}^j} |h(t)\chi_s(t)| |(\Delta_{s-1}^{-} W_n^{(j)})(t \dotplus x)| \, dt dx =$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{P}^j} \int_{\mathbb{I}^j} (|h(t)\chi_s(t)| \int_{\mathbb{I}^j} |(\Delta_{s-1}^{-} W_n^{(j)})(t \dotplus x)| \, dx) \, dt =$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{P}^j} \int_{\mathbb{I}^j} |h(t)\chi_s(t)| \|(\Delta_{s-1}^{-} W_n^{(j)}\|_1 dt = \sup_{s \in \mathbb{P}^j} \|\Delta_{s-1}^{-}(W_n^{(j)})\|_1 \sum_{s \in \mathbb{P}^j} \int_{\mathbb{I}^j} |h(t)\chi_s(t)| \, dt =$$

$$= \|h\|_1 \sup_{s \in \mathbb{P}^j} \|\Delta_{s-1}^{-}(W_n^{(j)})\|_1 =: C\|h\|_1,$$

ahol $C := \sup_{s \in \mathbb{P}^j} \|\Delta_{s-1}^{-}(W_n^{(j)})\|_1$.

Hasonló meggondolással adódik a $\mathcal{K}^{(j)}$ operátorra vonatkozó állítás. □

3.1. Diadikus Cesàro operátor, Walsh-Fourier-Stieltjes-sorok és L^1-korlátos martingálok

Ebben a pontban az L^1 korlátos diadikus martingálok $\mathcal{M}^1(\mathbb{I}^j)$ alterén vizsgáljuk a Cesàro operátort. Ez az altér azonosítható az $\mathbb{I}^j$ intervallumon értelmezett korlátos változású intervallumfüggvények terével, a megfelelő Walsh-sorok pedig azonosíthatóak a korlátos változású függvények szerint vett Walsh-Fourier-Stieltjes-sorokkal.

Legyen ugyanis $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}(\mathbb{I}^j)$ egyenlőre tetszőleges martingál, és képezzük a

$$\phi_n(x) := \int_0^x f_n(t) \, dt \ (n \in \mathbb{N}^j, x \in \mathbb{I}^j) \tag{3.1.1}$$

pontfüggvényeket, ahol a $j = 2$ esetben a (3.1.1) integrál a $\{t \in \mathbb{I}^2 : 0 \leq t \leq x\}$ téglalapra vett integrált jelenti. A martingál tulajdonságából következik, hogy minden $x = p2^{-n}$ pontban $\phi_m(x) = \phi_n(x)$, ha $n \leq m$, következésképpen minden $x \in \mathbb{I}^j$ diadikus racionális helyen létezik a

$$\Phi(x) := \lim_{\wedge n \to \infty} \phi_n(x) \quad (x \in \mathbb{Q}^j) \tag{3.1.2}$$

függvény, amelyet az F martingál pontfüggvényének nevezünk. A Φ Walsh-Fourier-Stieltjes-együtthatói nyilván csak a Φ-nek a $\mathbb{Q}^j$ pontjaiban felvett értékeitől függnek. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek azonosak az F martingál Walsh-együtthatóival, azaz

$$\hat{F}(k) = \int_{\mathbb{I}^j} w_k(t) \, d\Phi \quad (k \in \mathbb{N}^j).$$

Ha az F martingál L^1-korlátos, akkor Φ pontfüggvénye által indukált intervallumfüggvény korlátos változású a diadikus intervallumok osztályára vonatlozóan. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $K \geq 0$ szám, hogy az $\mathbb{I}^j$ bármely véges, páronként diszjunkt I_ℓ $(\ell = 1, 2, \cdots, n)$ intervallumokból álló felbontására

$$\sum_{\ell=1}^{n} |\Phi(I_\ell)| < K$$

teljesül, ahol $\Phi(I) := \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, ha $j = 1$ és $I = [\alpha, \beta)$, továbbá $\Phi(I) := \Phi(\beta_1, \beta_2) - \Phi(\alpha_1, \beta_2) - \Phi(\alpha_2, \beta_1) + \Phi(\alpha_1, \alpha_2)$, ha $j = 2$ és $I = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2)$. Az ebben az értelemben korlátos változású függvények halmazát $\mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$-vel fogjuk jelölni. Megfordítva, minden L^1-korlátos diadikus martingál generálható a most ismertetett módon alkalmas $\Phi \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$ korlátos változású függvényből kiindulva (lásd Schipp [31]).

Ezek után igazoljuk a következő állítást:

3.1. Tétel. *A $\widetilde{C}$ Cesáro operátort az L^1-korlátos martingálok terére leszűkítve, az $\mathcal{M}^1(\mathbb{I}^j)$ teret önmagába képező korlátos lineáris operátort kapunk.*

Bizonyítás. A (3.13) becslés alapján minden $\widetilde{C}F := G = (g_n, n \in \mathbb{N}^j)$ martingálra $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}_0^1(\mathbb{I}^j)$ esetén

$$\|g_n\|_1 \leq C\|f_n\|_1 \ (n \in \mathbb{N}^j)$$

teljesül, ahol $C > 0$ egy abszolút konstans. Innen

$$\|\widetilde{C}F\|_1 = \|G\|_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}^j} \|g_n\|_1 \leq C \sup_{n\in\mathbb{N}^j} \|f_n\|_1 = C\|F\|_1$$

alapján a bizonyítandó állítás adódik. □

Az $\mathcal{M}^1(\mathbb{I}^j)$ és $\mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$ terek említett kapcsolatát figyelembe véve adódik a

3.1. Következmény. *Legyen $\Phi \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$ korlátos változású függvény és jelölje*

$$a_k := \int_{\mathbb{I}^j} w_k \, d\Phi \ (k \in \mathbb{N}^j)$$

Φ-nek a Walsh-Fourier-Stieltjes-együtthatóit. Ekkor létezik olyan $\Psi \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$ korlátos változású függvény, amelynek Walsh-Fourier-Stieltjes-együtthatóira fennáll, hogy

$$\int_{\mathbb{I}^j} w_k \, d\Psi = \frac{1}{k^*} \sum_{0\leq\ell<k} a_\ell \ \ (k \in \mathbb{P}^j).$$

3.2. A diadikus Cesàro operátor integrál-előállítása L^1 tereken

A 3.1. Lemmában bebizonyítottuk, hogy a (3.10') alatt bevezetett $K^{(j)}$ magfügvénnyel értelmezett $\mathcal{K}^{(j)} : L^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ operátor korlátos. Megmutatjuk, hogy ez éppen a Cesàro operátor az $L_0^1(\mathbb{I}^j)$ téren.

3.2. Tétel. *A $\mathcal{K}^{(j)} : L^1_0(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ operátor azonos a $\widetilde{\mathcal{C}}$ operátornak az $L^1_0(\mathbb{I}^j)$ térre vonatkozó leszűkítésével, azaz*

$$(3.2.1)\qquad (\widehat{\mathcal{K}^{(j)}f})(k) = \frac{1}{k^*}\sum_{\ell<k}\hat{f}(\ell) \quad (k \in \mathbb{P}^j, f \in L^1_0(\mathbb{I}^j), j = 1,2).$$

Bizonyítás. Az $L^1_0(\mathbb{I}^j)$ tér azonosítható a $\mathcal{M}^1_0(\mathbb{I}^j)$-beli $F := (f_n, n \in \mathbb{N}^j)$ alakú reguláris martingálok halmazával, ahol $f_n = E_n f$ és $f \in L^1_0(\mathbb{I}^j)$.

Jelöljük $\mathcal{P}_{00}(\mathbb{I}^j)$-vel azoknak az $L^1_0(\mathbb{I}^j)$-beli Walsh-polinomoknak az összességét, amelyek a $0 \in \mathbb{I}^2$ pontban eltűnnek. Először megmutatjuk, hogy a (3.2.1) egyenlőség fennáll a $\mathcal{P}_{00}$-beli f függvényekre. Mivel $\mathcal{P}_{00}(\mathbb{I}^j)$ mindenütt sűrű az $L^1_0(\mathbb{I}^j)$ téren, ezért innen folytonossági meggondolásokkal már következik az állítás.

Legyen tehát $f \in \mathcal{P}_{00}(\mathbb{I}^j)$. Ekkor van olyan $m \in \mathbb{N}^j$, amelyre $j = 2$ esetén $m_1 = m_2$ és az f függvény $\mathcal{A}^m$-mérhető, következésképpen eltűnik a 0 pontot tartalmazó $I_m(0)$ intervallumon. Innen (3.10) és a J_s definíciója alapján következik, hogy

$$f(t)K^{(j)}_m(x,t) := \sum_{s\in\Gamma_m} \chi_s(t)f(t)(\Delta^-_{s-1}W^{(j)})_m(x \dot{+} t) \quad (x,t \in \mathbb{I}^j),$$

ahol $\Gamma_m := \{s \in \mathbb{P}^j : J_s \cap I_m(0) \neq \emptyset\}$ véges halmaz és a $\chi_s f$ függvények $\mathcal{A}^m$-mérhetők, ha $s \in \Gamma_m$, valamint $(\Delta^-_{s-1}W^{(j)})_m := S_{2^m}(\Delta^-_{s-1}W^{(j)})$. A (2.2.21) egyenlőség alapján nyilvánvaló, hogy bármely $g \in L(\mathcal{A}^m), h \in L^1(\mathbb{I}^j)$ függvénypárra

$$g * h = g * S_{2^n}h \quad (m,n \in \mathbb{N}^j, m \leq n).$$

Ezt és a

$$\Delta^-_{s-1}(S_{2^n}W^{(j)}) = S_{2^n}(\Delta^-_{s-1}W^{(j)})$$

egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy minden $f \in \mathcal{P}_{00}(\mathbb{I}^j) \cap L(\mathcal{A}^m)$ függvényre

$$(3.2.2)\qquad \mathcal{K}^{(j)}_n f = \sum_{s\in\Gamma_m} \chi_s f * S_{2^n}(\Delta^-_{s-1}W^{(j)}) = \sum_{s\in\Gamma_m} \chi_s f * \Delta^-_{s-1}W^{(j)} = \mathcal{K}^{(j)}f,$$

ha $m \leq n$.

A (3.2.1) igazolásához legyen $k \in \mathbb{P}^j$ és válasszunk olyan $n \in \mathbb{P}^j, m \leq n$ indexet, amelyre $k < 2^n$ teljesül. Ekkor $f_n = E_n f = f$, a 3.2. Lemma és (3.2.2) alapján

$$(\mathcal{K}^{(j)}f)^\wedge(k) = (\mathcal{K}^{(j)}_n f)^\wedge(k) = \frac{1}{k^*}\sum_{\ell<k}\hat{f}_n(\ell) = \frac{1}{k^*}\sum_{\ell<k}\hat{f}(\ell).$$

Ezzel a (3.2.1) állítást $\mathcal{P}_{00}$-beli függvényekre bebizonyítottuk.

Az általános eset igazolásához vezessük be a

$$\Lambda^1_k(f) := (\widehat{\mathcal{K}^{(j)}f})(k) = \langle \mathcal{K}^{(j)}f, w_k\rangle, \quad \Lambda^2_k(f) := \frac{1}{k^*}\sum_{\ell<k}\hat{f}(\ell) \quad (f \in L^1_0(\mathbb{I}^j), k \in \mathbb{P}^j)$$

lineáris funkcionálokat. Mivel

$$|\Lambda_k^1(f)| \le \|\mathcal{K}^{(j)} f\|_1 \le C\|f\|_1, \quad |\Lambda_k^2(f)| \le \|f\|_1,$$

ezért mindkét funkcionál korlátos. A most igazoltak alapján ezek az $L_0^1(\mathbb{I}^j)$-ben mindenütt sűrű $\mathcal{P}_{00}$ téren megegyeznek, ezért az egész téren is egyenlők. Ezzel a tételt igazoltuk. □

Az egyváltozós $\widetilde{C}$ martingálokon értelmezett Cesáro operátor, és az egyváltozós C integrálható függvényeken értelmezett Cesáro operátor között szoros kapcsolat van, u.i. minden $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$ martingál esetén

$$(\widetilde{C}F)_n = E_n(Cf_n) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.2.3}$$

Ezt az egyenlőséget könnyen igazolhatjuk a Fubini-tétel segítségével.

$$E_n(Cf_n)(x) = \frac{1}{|I_n(x)|} \int\limits_{I_n(x)} \int\limits_{\mathbb{I}} f_n(t) K(y,t) dt dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{I}} f_n(t) \left(\frac{1}{|I_n(x)|} \int\limits_{I_n(x)} K(y,t) dy \right) dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{I}} f_n(t) \left(\sum_{s=1}^{\infty} \Delta_{s-1}^{-} \left(\frac{1}{|I_n(x)|} \int\limits_{I_n(x)} W(y \dotplus t) dy \right) \right) dt = (\widetilde{C}F)_n(x).$$

A (3.2.3)-ban leírt kapcsolatból kiindulva célszerű bevezetni az alábbi jelölést. Legyen $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ korlátos lineáris operátor. Ekkor a $\widetilde{\Phi}$ martingálokon értelmezett operátort, amelyre

$$(\widetilde{\Phi}F)_m := E_m(\Phi f_m) \quad (m \in \mathbb{N}, F = (f_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}), \tag{3.2.4}$$

Φ *diagonális kiterjesztésének* nevezzük $\mathcal{M}$-re (lásd [15]).

Az alábbiakban megvizsgáljuk hogy $\widetilde{\Phi}$ milyen feltételek teljesülése esetén lesz egy $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ típusú leképezés. Nyilvánvaló, hogy ha Φ egy korlátos lineáris operátor, $\widetilde{\Phi}$ pedig az ő diagonális kiterjesztése, és $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$ egy martingál, akkor $\widetilde{\Phi}F$ akkor és csak akkor martingál, ha a

$$E_m(E_{m+1}(\Phi f_{m+1})) = E_m(\Phi f_{m+1}) = E_m(\Phi f_m) \tag{3.2.5}$$

egyenlet teljesül. A $(\widetilde{\Phi}F)_m$-re vonatkozó $\mathcal{A}_n$-mérhetőségi feltétel triviálisan teljesül. Mivel

$$E_m(\Phi f_{m+1}) = E_m(\Phi f_m) + E_m(\Phi(f_{m+1} - f_m)) = E_m(\Phi f_m) + E_m(\Phi(\delta_m f_{m+1})),$$

ahol $\delta_m := E_{m+1} - E_m$, így ha $E_m(\Phi(\delta_m(f_{m+1})) = 0$, akkor a (3.2.4) feltétel nyilvánvalóan teljesül. Ezzel kapcsolatban belátható a következő

3.3. Lemma. *Legyen $\Phi : L^1 \to L^1$ korlátos lineáris operátor. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

i) *minden $f \in L^1$ integrálható függvény és $n \in \mathbb{N}$ szám esetén $E_n(\Phi(\delta_n f)) = 0$;*
ii) *ha $f \in L^1$ integrálható függvényre és valamely $m \in \mathbb{N}$ számra $E_m f = 0$, akkor $E_m(\Phi f) = 0$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy i) teljesül, valamint, hogy valamely $m \in \mathbb{N}$ számra $E_m f = 0$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \leq m$, akkor $E_n(E_m f) = E_n f = 0$, és $f = \sum_{n=m}^{\infty} \delta_n f$ egyenlőség teljesül L^1-normában. Φ korlátossága miatt $\Phi f = \sum_{n=m}^{\infty} \Phi(\delta_n f)$ és

$$E_m(\Phi f) = \sum_{n=m}^{\infty} E_m(\Phi(\delta_n f)) = \sum_{n=m}^{\infty} E_m(E_n(\Phi(\delta_n f))).$$

Megfordítva tegyük fel, hogy ii) teljesül. Mivel $E_n(\delta_n f) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így $E_n(\Phi \delta_n f) = 0$ teljesül ii) alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. □

Nyilvánvaló, hogy a 4.3. Lemma ii) feltétele a Fourier-együtthatók nyelvén azt jelenti, hogy ha valamely $f \in L^1$ integrálható függvényre és $m \in \mathbb{N}$ indexre $\hat{f}(k) = 0$ ($k = 0, \ldots, 2^m - 1$), akkor $(\Phi f)\hat{}(k) = 0$ ($k = 0, \ldots, 2^m - 1$), ezért azt mondjuk, hogy ekkor Φ *spektrum-tartó.*

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy $\widetilde{\Phi}$ a Φ spektrum-tartó operátornak valóban kiterjesztése. Ha $f \in L^1$ integrálható függvény, akkor

$$\begin{aligned}\|E_m(\Phi(E_m f)) - \Phi f\|_1 &\leq \|E_m(\Phi(E_m f)) - E_m(\Phi f)\|_1 + \|E_m(\Phi f) - \Phi f\|_1 \leq \\ &\leq \|\Phi\| \|E_m f - f\|_1 + \|E_m(\Phi f) - \Phi f\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

és így $\|E_m(\Phi(E_m f)) - \Phi f\|_1 \to 0$ ha $n \to \infty$, ami azt jelenti, hogy $\widetilde{\Phi} F = (E_m(\Phi f), m \in \mathbb{N})$, és $\widetilde{\Phi}$ operátor a Φ operátor kiterjesztése.

3.3. Lokális konvolúciós operátorok az L^p tereken

Ebben a pontban a Cesàro operátor tulajdonságaiból kiindulva egy új operátor-osztályt vezetünk be, a *lokális konvolúciós operátorok* osztályát, amelyet az $\mathcal{N}^{\langle j \rangle}$ ($j = 1, 2$) szimbólummal fogunk jelölni. Az $\mathcal{N}^{\langle j \rangle}$ elemeit diadikus konvolúciós operátorok $\Phi_n^{\langle j \rangle} f := f * \phi_n^{\langle j \rangle}$ ($n \in \mathbb{N}^j$) sorozatával értelmezzük. Feltesszük, hogy $\phi_k^{\langle i \rangle}$ ($k \in \mathbb{N}$) integrálható függvények, és a kétváltozós esetben a szóbanforgó függvények egyváltozós függvények Kronecker-szorzatai, azaz

$$\phi_n^{\langle 2 \rangle} = \phi_{n_1}^{\langle 1 \rangle} \times \phi_{n_2}^{\langle 1 \rangle} \quad (n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2). \tag{3.3.1}$$

A $\Phi^{\langle j \rangle} \in \mathcal{N}^{\langle j \rangle}$ operátorok a következő alakban állíthatók elő:

$$\Phi^{\langle j \rangle} f := \sum_{n \in \mathbb{P}^j} \Phi_n^{\langle j \rangle}(\chi_n f) \quad (f \in L_0^1(\mathbb{I}^j), j = 1, 2), \tag{3.3.2}$$

ahol χ_n $(n \in \mathbb{P}^j)$ a J_n diadikus intervallum karakterisztikus függvénye.

A $\Phi_n^{\langle j\rangle}$ konvolúciós operátorok a Walsh-polinomok osztályát önmagára képezik le, és

$$\langle \Phi_n^{\langle j\rangle} f, g\rangle = \langle f, \Phi_n^{\langle j\rangle} g\rangle \quad (f \in L^1(\mathbb{I}^j), g \in \mathcal{P}^{\langle j\rangle}, n \in \mathbb{N}^j), \tag{3.3.3}$$

ahol

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{I}^j} f(t)g(t)dt$$

az f és g szokásos belső szorzatát jelöli. Az $\mathcal{N}^{\langle j\rangle}$ operátor-osztály tartalmazza a konvolúciós operátorokat. Nevezetesen, $\phi_1^{\langle j\rangle} = \ldots = \phi_n^{\langle j\rangle} = \ldots = \phi^{\langle j\rangle}$ esetén $\Phi^{\langle j\rangle} f = f * \phi$.

A $(\Phi_n^{\langle j\rangle}, n \in \mathbb{N}^j)$ operátor-sorozat $\Phi_*^{\langle j\rangle}$ maximál operátorát a

$$\Phi_*^{\langle j\rangle} f := \sup_{n\in\mathbb{N}^j} |f| * |\phi_n^{\langle j\rangle}| \tag{3.3.4}$$

utasítással értelmezzük.

Most megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek teljesülése mellett lesz egy lokális konvolúciós operátor spektrum-tartó. Legyen Φ lokális konvolúciós operátor. Mivel $\chi_j = 2^{-j} D_{2^j}(\cdot \dotplus 2^{-j}) = \sum_{l=0}^{2^j-1} \alpha_{jl} w_l$ alkalmas α_{jl} együtthatókkal, ezért

$$(f\chi_j)^\frown(k) = \sum_{l=0}^{2^j-1} \alpha_{jl} \hat{f}(l \oplus k) \quad (j, k \in \mathbb{N}).$$

Tegyük fel, hogy valamely $m \in \mathbb{N}$ számra $\hat{f}(k) = 0$ $(k = 0, \ldots, 2^m - 1)$. Ha $j \le m$ és $k < 2^m$, akkor $l \oplus k < 2^m$ $(l < 2^j)$, és így ebben az esetben $(f\chi_j)^\frown(k) = 0$. Ekkor

$$(\Phi f)^\frown(k) = \sum_{j=m+1}^{\infty} (f\chi_j)^\frown(k)\phi_j(k) \quad (k < 2^m)$$

egyenlőség teljesül. Könnyen látható, hogy a 3.3. Lemma ii) feltétele akkor teljesül, ha $\hat{\phi}_j(k)$ $(k < 2^{j-1})$ Walsh-Fourier-együtthatók függetlenek j-től. Valóban, ebben az esetben a fennt említett f függvényre

$$(\Phi f)^\frown(k) = const \cdot \left(f \cdot \sum_{j=m+1}^{\infty} \chi_j\right)^\frown(k) = const \cdot 2^{-m} \sum_{l=0}^{2^m-1} \hat{f}(k \oplus l) = 0 \quad (k < 2^m, k \in \mathbb{N}),$$

tehát $\widetilde{\Phi}$ valóban spektrum-tartó.

A $\Phi^{\langle j\rangle}$ operátorra vonatkozik az alábbi

3.3. Tétel. *i) Ha a* $\Phi^{\langle j\rangle} \in \mathcal{N}^{\langle j\rangle}$ *operátort generáló* $\phi_n^{\langle j\rangle}$ $(n \in \mathbb{N}^j)$ *függvénysorozatra*

$$M := \sup_{n\in\mathbb{P}^j} \|\phi_n^{\langle j\rangle}\|_1 < \infty \tag{3.3.5}$$

teljesül, akkor $\Phi^{\langle j\rangle}$ *korlátos lineáris operátor* $L^1(\mathbb{I}^j)$*-ről* $L^1(\mathbb{I}^j)$*-be, és*

$$\|\Phi^{\langle j\rangle} f\|_1 \le M\|f\|_1 \quad (f \in L_0^1(\mathbb{I}^j)). \tag{3.3.6}$$

ii) Legyen $1 < p < \infty$ *és* $1/p + 1/p' = 1$. *Ha* $\Phi_*^{\langle j\rangle}$ korlátos operátor $L^{p'}(\mathbb{I}^j)$-ről $L^{p'}(\mathbb{I}^j)$-be, *azaz ha valamely* $M_p^* > 0$ *számmal*

$$\|\Phi_*^{\langle j\rangle} g\|_{p'} \le M_p^*\|g\|_{p'} \quad (g \in L^{p'}(\mathbb{I}^j)), \tag{3.3.7}$$

akkor $\Phi^{\langle j\rangle}$ *korlátos lineáris operátor* $L^p(\mathbb{I}^j)$*-ről* $L^p(\mathbb{I}^j)$*-be, és*

$$\|\Phi^{\langle j\rangle} f\|_p \le M_p^*\|f\|_p \quad (f \in L^p(\mathbb{I}^j)). \tag{3.3.8}$$

Bizonyítás. i) A (2.2.9) egyenlőtlenség, a (3.3.5) feltétel és a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\|\Phi^{\langle j\rangle} f\|_1 &\le \sum_{n\in\mathbb{P}^j} \|(\chi_n f) * \phi_n^{\langle j\rangle}\|_1 \le \sum_{n\in\mathbb{P}^j} \|\chi_n f\|_1 \|\phi_n^{\langle j\rangle}\|_1 \le \\ &\le M \sum_{n\in\mathbb{P}^j} \|\chi_n f\|_1 = M\|f\|_1,\end{aligned}$$

és ezzel a (3.3.6) állítást bebizonyítottuk.

ii) Legyen $f \in L^{p'}(\mathbb{I}^j)$ és $g \in \mathcal{P}^{\langle j\rangle}$ olyan függvény, amelyre $\|g\|_{p'} \le 1$ és vizsgáljuk a $\Phi^{\langle j\rangle} f$ és g belső szorzatát. Ekkor (3.3.3) és (3.3.4) alapján

$$|\langle \Phi_n^{\langle j\rangle}(\chi_n f), g\rangle| = |\langle \chi_n f, \Phi_n^{\langle j\rangle} g\rangle| \le \langle |\chi_n f|, \Phi_*^{\langle j\rangle} g\rangle.$$

Alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$|\langle \Phi f, g\rangle| \le \sum_{n\in\mathbb{P}^j} \langle |\chi_n f|, \Phi_*^{\langle j\rangle} g\rangle = \langle |f|, \Phi_*^{\langle j\rangle} g\rangle \le \|f\|_p \|\Phi_*^{\langle j\rangle} g\|_{p'} \le M^*\|g\|_{p'}\|f\|_p.$$

Véve a szuprémumot a $g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$, $\|g\|_{p'} \le 1$ függvényekre kapjuk, hogy

$$\|\Phi^{\langle j\rangle} f\|_p = \sup\left\{|\langle \Phi^{\langle j\rangle} f, g\rangle| \ : \ g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j),\ \|g\|_{p'} \le 1\right\} \le M_p^*\|f\|_p,$$

amivel a (3.3.8) állítást bebizonyítottuk. □

A most igazolt állítást a Cesàro operátorra alkalmazva adódik a

3.4. Tétel.

i) *A Cesàro operátor korlátos lineáris operátor $L^p(\mathbb{I}^j)$-ről $L^p(\mathbb{I}^j)$-be, ha $1 \le p < \infty$.*

ii) *A Cesàro operátor nem korlátos $L^\infty(\mathbb{I}^j)$-ből $L^\infty(\mathbb{I}^j)$-be.*

Bizonyítás. A $\mathcal{K}^{\langle j\rangle}$ operátor (3.10') és (3.11) értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $\mathcal{K}^{\langle j\rangle} \in \mathcal{N}^{\langle j\rangle}$ a $\phi_n^{\langle j\rangle} = \Delta_{n-1}^{-} W^{\langle j\rangle}$ generáló függvénysorozattal. A (2.3.31) állításból következik, hogy erre teljesül a (3.3.5) feltétel. A (2.3.30) értelmezés (2.3.20)(ii) és a 2.1. Lemma. állításai alapján nyilvánvaló, hogy ezek maximál operátorára a (3.3.7) feltétel is teljesül. A 3.3. Tételből következik, hogy a $\mathcal{K}^{\langle j\rangle}$ operátorok korlátosak $L^p(\mathbb{I}^j)$-ből $L^p(\mathbb{I}^j)$-be, ha $1 \le p < \infty$. Mivel a 3.2. Tétel alapján a C és a $\mathcal{K}^{\langle j\rangle}$ operátorok az $L_0^1(\mathbb{I}^j)$ téren egybeesnek, azért a tétel első állítását igazoltuk.

ii) Az állítás második részének igazolásához induljunk ki a w_1 egyváltozós függvény $g := Cw_1$ Cesàro transzformáltjából. Ekkor

$$\hat{g}(0) := 0,\ \hat{g}(k) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} \hat{g}(\ell) = \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{P}).$$

Innen következik, hogy g a diadikus intágrál értelmezése kapcsán bevezetett W fügvénnyel egyenlő:

$$g = W = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k}{k}.$$

következésképpen

$$(S_{2^n} W)(0) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > n\log 2 \quad (n \in \mathbb{P}).$$

Mivel

$$\|C\|_\infty \ge \|Cw_1\|_\infty = \|W\|_\infty \ge 2^n \int_0^{2^{-n}} |W(t)|dt \ge |(S_{2^n}W)(0)| > n\log 2 \quad (n \in \mathbb{P}),$$

azért a C operátor L^∞-normája valóban ∞. A kétváltozós eset nyilvánvalóan következik az egyváltozós esetből. □

3.4. A diadikus Copson operátor az L^p tereken

A diadikus Cesàro operátor C^* adjungáltját a 3. pont bevezető részében értelmeztük a Walsh-polinomok $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$ halmazán. Mivel $Cf \in L_0^1(\mathbb{I}^j)$, ha $f \in L_0^1(\mathbb{I}^j)$, és $C^*g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$, ha $g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$, azért a 3.1. Lemma (3.7) azonosságát és (2.1.8)-őt figyelembe véve azt kapjuk, hogy

(3.4.1) $$\langle f, C^*g\rangle = \langle Cf, g\rangle \quad (f \in L_0^1(\mathbb{I}^j), g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)).$$

Ebből kiindulva és a jól ismert dualitási elvet alkalmazva megmutatjuk, hogy a C^* operátor a $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$ altérről kiterjeszthető $C^* : L^p(\mathbb{I}^j) \to L^p(\mathbb{I}^j)$ korlátos operátorrá, ha $1 < p < \infty$. A $p = \infty$ esetben az $L^\infty(\mathbb{I}^j)$ tér helyett tekintsük a $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$ altérnek az L^∞-normában vett lezárását és jelöljük ezt $X^\infty(\mathbb{I}^j)$-vel, míg $0 < p < \infty$ esetben legyen $X^p(\mathbb{I}^j) := L^p(\mathbb{I}^j)$.

3.5. Tétel. *Minden $1 < p \leq \infty$ esetén létezik olyan, csak p-től függő $C_p > 0$ szám, hogy*

$$\|C^*g\|_p \leq C_p\|g\|_p \quad (g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)). \tag{3.4.2}$$

A Copson operátor $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$-ről kiterjeszthető $C^* : X^p(\mathbb{I}^j) \to X^p(\mathbb{I}^j)$ korlátos lineáris operátorrá, amelyre

$$(\widehat{C^*g})(k) = \sum_{k<\ell} \frac{\hat{g}(\ell)}{\ell^*} \quad (g \in X^p(\mathbb{I}^j), k \in \mathbb{I}^j). \tag{3.4.3}$$

Bizonyítás. Legyen $1 < p \leq \infty$ és jelölje p' a p szám konjugáltját, azaz legyen $1/p + 1/p' = 1$. A bizonyításhoz induljunk ki abból, hogy $1 < p \leq \infty$ esetén bármely $h \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$ Walsh-polinomra

$$\|h\|_p = \sup\{|\langle f, h\rangle| : f \in L^{p'}(\mathbb{I}^j)\}. \tag{3.4.4}$$

A 3.3. Tétel szerint $C : L^{p'}(\mathbb{I}^j) \to L^{p'}(\mathbb{I}^j)$ korlátos operátor, ha $1 < p \leq \infty$. A (3.4.1) egyenlőséget alkalmazva, a Hölder-egyenlőtlenség és (3.3.8) alapján azt kapjuk, hogy

$$|\langle f, C^*g\rangle| = |\langle Cf, g\rangle| \leq \|Cf\|_{p'}\|g\|_p \leq M^*_{p'}\|f\|_{p'}\|g\|_p.$$

Véve a skaláris szorzat szuprémumát az $\{f \in L^{p'}(\mathbb{I}^j) : \|f\|_{p'} \leq 1\}$ halmazon, és a (3.4.4) egyenlőséget a $h = C^*g$ függvényvre alkalmazva a $C_p = M^*_{p'}$ állandóval megkapjuk a (3.4.2) egyenlőtlenséget. Végül mivel $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$ mindenütt sűrű az $X^p(\mathbb{I}^j)$ téren, ezért a Walsh-polinomok halmazán korlátos C^* operátor normájának megtartásával kiterjeszthető az egész $X^p(\mathbb{I}^j)$ térre.

A (3.4.3) végtelen sor konvergenciájának igazolásához felhasználjuk azt a tényt, hogy $W^{\langle j\rangle} \in L^q(\mathbb{I}^j)$ minden $1 \leq q < \infty$ esetén (lásd Sch-W-S-P [30, 44. old., Th. 15]), továbbá a W Walsh-Fourier-sora L^q-normában konvergál $W^{\langle j\rangle}$ függvényhez. Minthogy

$$\sum_{m\leq\ell<n} \frac{\hat{g}(\ell)}{\ell^*} = \int_{\mathbb{I}^j} g(t)((S_nW^{\langle j\rangle})(t) - (S_mW^{\langle j\rangle})(t))\, dt,$$

és ez alapján a Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\Big|\sum_{m\leq\ell<n} \frac{\hat{g}(\ell)}{\ell^*}\Big| \leq \|g\|_p\|S_n(W^{\langle j\rangle}) - S_m(W^{\langle j\rangle})\|_q \quad (g \in X^p(\mathbb{I}^j), 1 < p \leq \infty),$$

ahol $1/p + 1/q = 1$. Innen következik, hogy a (3.4.3) jobb oldalán álló sor konvergens, továbbá

$$\sum_{k<\ell} \frac{\hat{g}(\ell)}{\ell^*} = \int_{\mathbb{I}^j} g(t)(W^{\langle j\rangle}(t) - (S_{k+1}W^{\langle j\rangle})(t))\, dt.$$

Ennek alapján nyilvánvaló, hogy a

$$\Lambda_k^*(g) := \sum_{k<\ell} \frac{\hat{g}(\ell)}{\ell^*} \quad (g \in X^p(\mathbb{I}^j), k \in \mathbb{N}^j)$$

lineáris funkcionálok korlátosak az $X^p(\mathbb{I}^j)$ téren. Valóban, a Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$|\Lambda_k^*(g)| \leq (\|W^{(j)}\|_q + \|S_{k+1}(W^{(j)})\|_q)\|g\|_p \quad (g \in X^p(\mathbb{I}^j).$$

Mivel az ugyancsak korlátos és lineáris $g \to (\widehat{C^*g})(k)$ funkcionál és Λ_k^* az $X^p(\mathbb{I}^j)$-ben mindenütt sűrű $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$ halmazon megegyezik, azért az egész téren egyenlők. Ezzel megmutattuk, hogy (3.4.3) valóban fennáll.

□

A $w_1 \in L^1(\mathbb{I})$ függvény esetén

$$(C^*w_1)\hat{}(k) = \sum_{k<\ell} \frac{1}{\ell} = \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ez azt mutatja, hogy 3.5. Tételben a $p > 1$ feltétel nem helyettesíthető a $p \geq 1$ feltétellel.

4. A diadikus Cesàro és Copson operátorok Hardy- és BMO-tereken

Ebben a fejezetben a diadikus Cesàro operátort a $H^p(\mathbb{I})$ $(0 < p \le 1)$ diadikus Hardy-téren, adjungáltját, a diadikus Copson operátort pedig a lépcsősfüggvények BMO-normában vett lezárásán, a VMO($\mathbb{I}$) téren vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy ezek az operátorok is korlátosak. Ezek az állítások a lokális konvolúciós operátorokra vonatkozó megfelelő tételekből következnek, amelyek az ún. generáló magfüggvényeknek a tulajdonságain múlnak. A fejezet első alpontjában szereplő tételek és állítások a [11]-es számú, míg a második és harmadik alpontban szereplő tételek és állítások a [15]-ös számú cikkben találhatók meg.

4.1. Lokális konvolúciós operátorok az egyváltozós diadikus Hardy- és BMO-tereken

Először a 3.3. pontban bevezetett (3.3.2) alakú $\mathcal{N}^{(1)}$-beli operátorokat vizsgáljuk az egydimenziós esetben. Továbbra is feltesszük, hogy a $\Phi := \Phi^{(1)}$ operátort generáló $\phi_n := \phi_n^{(1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat kielégíti a (3.3.5) feltételt. Ilyenkor

$$\Phi f = \sum_{n\in\mathbb{P}} (\chi_n f) * \phi_n \tag{4.1.1}$$

és ez a sor L^1-normában konvergens. A 3.3. Tétel szerint $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ korlátos operátor, továbbá fennáll a (3.3.6) egyenlőtlenség. Ennek az operátornak a $H(\mathbb{I}) \subset L^1(\mathbb{I})$ Hardy-térre vonatkozó leszűkítésével kapcsolatos a

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\Phi \in \mathcal{N}^{(1)}$ operátort generáló ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatra teljesül a (3.3.5) feltétel. Ha az alábbi három állítás közül egyik teljesül:*

i) $\hat{\phi}_n(k) = 0$ $(0 \le k < 2^n, n \in \mathbb{P})$,
ii) $\phi_n = D_{2^n}$ $(n \in \mathbb{P})$,
iii) $\phi_n = 2^n(S_{2^n}W - S_{2^{n-1}}W)$;

akkor Φ korlátos lineáris operátor $H^1(\mathbb{I})$-ből $H^1(\mathbb{I})$-ba, és

$$\|\Phi f\|_{H^1} \le M_1 \|f\|_{H^1} \quad (f \in H^1(\mathbb{I})), \tag{4.1.2}$$

ahol M_1 csak a (3.3.6) feltételben szereplő M konstanstól függ.

Bizonyítás. A tétel bizonyításához felhasználjuk a H^1-norma következő előállítását:

$$\|h\|_{H^1} = \sup\{|\langle h, g\rangle| : g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}), \quad \|g\|_{\mathrm{BMO}} \le 1\}. \tag{4.1.3}$$

Rögzítsünk egy $g \in \mathcal{P}(\mathbb{I})$ Walsh-polinomot. Mivel a (4.1.1) sor L^1-normában konvergens és $g \in L^\infty(\mathbb{I})$, ezért

$$(4.1.4) \qquad \langle \Phi f, g \rangle = \sum_{n\in\mathbb{P}} \langle (\chi_n f) * \phi_n, g \rangle.$$

Mivel a $\Phi_n h := h * \phi_n$ konvolúciós operátorok önadjungáltak, ezért az utóbbi sor tagjai felírhatók

$$(4.1.5) \qquad \langle (\chi_n f) * \phi_n, g \rangle = \langle \Phi_n(\chi_n f), g \rangle = \langle \chi_n f, \Phi_n g \rangle$$

alakban.

Az i) eset vizsgálatánál vegyük figyelembe, hogy a (4.1.2) feltétel alapján

$$(\widehat{\Phi_n g})(k) = \hat{\phi}_n(k)\hat{g}(k) = 0 \quad (k < 2^n),$$

következésképpen minden $\mathcal{A}^n$-mérhető h függvényre $\langle h, \Phi_n g \rangle = 0$. Ezt az észrevételt a $h = S_{2^n}(\chi_n f)$ függvényre alkalmazva és felhasználva a (2.1.13) Fefferman-egyenlőtlenséget,

$$|\langle (\chi_n f) * \phi_n, g \rangle| = |\langle \chi_n(f - S_{2^n} f), \phi_n * g \rangle| \le c \|\chi_n(f - S_{2^n} f)\|_H^1 \|\phi_n * g\|_{\mathrm{BMO}}$$

adódik, ahol $c > 0$ abszolút konstans. Az $X =$VMO homogén Banach-térre alkalmazva a (2.2.9) egyenlőtlenséget

$$\|\phi_n * g\|_{\mathrm{BMO}} \le \|\phi_n\|_1 \|g\|_{\mathrm{BMO}}$$

adódik. Ezt és a (3.3.5) feltételt figyelembe véve

$$(4.1.6) \qquad |\langle (\chi_n f) * \phi_n, g \rangle| \le cM \|\chi_n(f - S_{2^n} f)\|_{H^1} \|g\|_{\mathrm{BMO}}$$

következik. Egyszerűen igazolható, hogy a $h := \chi_n(f - S_{2^n} f)$ függvény diadikus maximálfüggvényére

$$(4.1.7) \qquad h^* \le 2\chi_n f^*$$

adódik. Valóban, ha $k \le n$, akkor

$$S_{2^k} h = S_{2^k}(S_{2^n} h) = S_{2^k}(\chi_n S_{2^n}(f - S_{2^n} f)) = 0.$$

A $k > n$ esetben pedig

$$|S_{2^k} h| = |\chi_n (S_{2^k} f - S_{2^n} f)| \le 2\chi_n f^*,$$

s így (4.1.7) valóban fennáll. Ezt felhasználva (4.1.6)-ből

$$(4.1.8) \qquad |\langle (\chi_n f) * \phi_n, g \rangle| \le 2cM \|\chi_n f^*\|_1 \|g\|_{\mathrm{BMO}}$$

következik. Innen és (4.1.4)-ből

$$|\langle \Phi f, g\rangle| \leq 2cM \sum_{n\in\mathbb{N}} \|g\|_{\mathrm{BMO}} \|\chi_n f^*\|_1 \leq 2cM \|g\|_{\mathrm{BMO}} \|f\|_{H^1}$$

adódik. Ebben az egyenlőtlenségben a $\{g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}) : \|g\|_{\mathrm{BMO}} \leq 1\}$ halmazra véve a szuprémumot, (4.1.3) alapján az első esetben bizonyítandó állítást kapjuk.

ii) A $\phi_n = D_{2^n}$ esetben is induljunk ki az $f \in H$ és $g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$, $\|g\|_{\mathrm{BMO}} \leq 1$ függvényekből, és a Φf és g belső szorzatát írjuk fel a következő alakban:

$$\langle \Phi f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_n f, S_{2^n} g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_n f, S_{2^n} g - g\rangle + \langle f, g\rangle,$$

ahol figyelembe vettük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n = 1$. Könnyen igazolható, hogy $\|g - S_{2^n} g\|_{\mathrm{BMO}} = \|g\|_{\mathrm{BMO}}$. Hasonló meggondolásokkal, mint az i) esetben, (4.1.7) alapján azt kapjuk, hogy

$$|\langle \chi_n f, S_{2^n} g - g\rangle| = |\langle \chi_n f - S_{2^n}(\chi_n f), S_{2^n} g - g\rangle| \leq$$
$$\leq c\|[\chi_n (f - S_{2^n} f)]^*\|_1 \|g - S_{2^n} g\|_{\mathrm{BMO}} \leq 2c\|\chi_n f^*\|_1 \|g\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Összegezve $n \in \mathbb{P}$ indexekre és véve a szuprémumot a $g \in \mathcal{P}(\mathbb{I})$, $\|g\|_{\mathrm{BMO}} \leq 1$ Walsh-polinomokra, (4.1.3) alapján

$$\|\Phi f\|_{H^1} = \sup_{\|g\|_{\mathrm{BMO}} \leq 1} |\langle \Phi f, g\rangle| \leq c\|f\|_{H^1} + 2c \sum_{n=1}^{\infty} \|f^* \chi_n\|_1 = 3c\|f\|_{H^1},$$

és ezzel az állítást a ii) esetben is igazoltuk. Megjegyezzük, hogy erre az esetre közvetlen bizonyítást adunk a 4.2. alfejezetben.

A iii) eset igazolásához ismét induljunk ki a (4.1.5) egyenlőségből. Minthogy χ_n és $\Phi_n g$ $\mathcal{A}^n$-mérhető, továbbá $\Phi_k g$ ortogonális bármely $\mathcal{A}^n$ mérhető függvényre, ha $k > n$, ezért

$$\langle (\chi_n f) * \phi_n, g\rangle = \langle \chi_n f, \Phi_n g\rangle = \langle \chi_n E_n f, \Phi_n g\rangle = \langle \chi_n E_n f, \sum_{k=n}^{\infty} \Phi_k g\rangle. \tag{4.1.9}$$

A

$$Tg = \sum_{n=1}^{\infty} g * \phi_n \quad (g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}))$$

operátor a $\mathcal{P}(\mathbb{I})$ halmazon jól-definiált, hiszen a fenti összegben véges sok tag kivételével mindegyik nulla. A Tg Walsh-Fourier-együtthatóira nyilván

$$(Tg)^{\wedge}(k) = \frac{2^n}{k}\hat{g}(k) \quad (2^n - 1 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{P})$$

teljesül, azaz T azonos a Simon P. által [35]-ben vizsgált multiplier operátorral. Kimutatta róla, hogy H^1-ből H^1-be korlátos. Mivel T önadjungált operátor, ezért T VMO-ból VMO-ba is korlátos operátor, és

$$\|Tg\|_{\mathrm{BMO}} \leq C\|g\|_{\mathrm{BMO}} \quad (g \in \mathrm{VMO}),$$

ahol C abszolút konstans. Legyen $h = Tg$.

Ismeretes, hogy a h függvény diadikus BMO-normája ekvivalens a

$$\|h\|_{\mathrm{BMO}_-} := \sup_n \|E_n|h - E_{n-1}h|\|_\infty$$

normával (lásd Weisz [41, Cor. 2.51., 59. old.]). Ezt felhasználva (4.1.9)-ből

$$|\langle(\chi_n f) * \phi_n, g\rangle| = |\langle \chi_n E_n f, E_n(h - E_{n-1}h)\rangle| \leq$$
$$\leq \|h\|_{\mathrm{BMO}_-} \int_{\mathbb{I}} \chi_n(t)|(E_n f)(t)|\, dt \leq C\|g\|_{\mathrm{BMO}_-} \int_{\mathbb{I}} \chi_n(t) f^*(t)\, dt$$

adódik. Innen a bizonyítás már ugyanúgy fejezhető be, mint az i) esetben.

□

A most igazolt tételt felhasználva az alábbi állítás már egyszerűen adódik.

4.2. Tétel. *A diadikus Cesàro operátor korlátos $H^1(\mathbb{I})$-ből $H^1(\mathbb{I})$-be, azaz létezik olyan $C > 0$ abszolút konstans, amellyel*

$$\|\mathcal{C}f\|_{H^1} \leq C\|f\|_{H^1} \quad (f \in H^1(\mathbb{I})).$$

Bizonyítás. A bizonyítást lásd a 4.5. Tételnél!

A BMO-tér az L^p $(p < \infty)$ és az L^∞ tér közé esik:

$$L^\infty(\mathbb{I}) \subset \mathrm{BMO}(\mathbb{I}) \subset L^p(\mathbb{I}) \ (p < \infty).$$

Láttuk, hogy a $\mathcal{C} : L^p(\mathbb{I}) \to L^p(\mathbb{I})$ korlátos, ha $p < \infty$, és nem korlátos, ha $p = \infty$. Természetes módon adódik a kérdés: Mit mondhatunk a $\mathcal{C}$-nek a BMO-ra vonatkozó leszűkítéséről? Erre vonatkozik az alábbi

4.3. Tétel. *A Cesàro operátor nem korlátos a VMO($\mathbb{I}$) térről a BMO($\mathbb{I}$) térbe.*

Bizonyítás. Induljunk ki az

$$f(x) = a_1\frac{w_1(x)}{2} + a_2\frac{w_2(x) + w_3(x)}{2^2} + \cdots + a_n\frac{w_{2^{n-1}}(x) + \cdots + w_{2^n-1}(x)}{2^n} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} w_k(x)$$

Walsh-sorból, ahol $a_n = 1/\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{P})$. Mivel a Walsh-sor együtthatói monoton fogyó sorozatot alkotnak, ezért a sor az $x = 0$ pontot kivéve mindenütt pontonként konvergens, és mivel az együttható-sorozat ℓ^2-beli, ezért összegfüggvényére $f \in L^2(\mathbb{I})$ teljesül. Egyszerűen igazolható, hogy $f \in$ VMO. Valóban, mivel

$$2^n \sum_{k=2^n}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{2^n}{n}\sum_{l=n}^{\infty} 2^l \frac{1}{2^{2l}} = \frac{2}{n} < 2 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ebből következik, hogy $\|f\|_{BMO} \leq 2$ (lásd Sch-W-S-P [30, 109.old., Th.8]). Hasonlóan belátható, hogy $f \in$VMO.

Most belátjuk, hogy $g := Cf$ függvény BMO normája nem véges. Az f értelmezése alapján g Walsh-Fourier-együtthatói könnyen számolhatók. Ha ugyanis $m = 2^n + k$ ($n \in \mathbb{P}$, $0 \leq k < 2^n$), akkor

$$\hat{g}(m) = \frac{\hat{f}(0) + \cdots + \hat{f}(m-1)}{m} = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/2 + k \cdot a_{n+1}/2^{n+1}}{2^n + k},$$

tehát a g Walsh-Fourier-sora

$$g \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n + k} w_{2^n+k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k \cdot a_{n+1}}{2^{n+1}(2^n + k)} w_{2^n+k} =: g_1 + g_2$$

alakú. Mivel a g_2 függvény Walsh-Fourier-együtthatóira

$$0 \leq \hat{g}_2(2^n + k) = \frac{k}{2^{n+1}(2^n + k)} \leq \frac{1}{2^n + k} \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{P}),$$

ezért

$$2^n \sum_{k=2^n}^{\infty} |\hat{g}_2(k)|^2 < 2 \quad (n \in \mathbb{P}),$$

következésképpen $g_2 \in$ BMO (lásd Sch-W-S-P [30, 109.old. Th.8]).

Most megmutatjuk, hogy g_1 nem eleme BMO-nak, azaz $\|g_1\|_{BMO} = \infty$. Ennek igazolására szükségünk lesz a következő függvényre:

$$g_1 - S_{2^m} g_1 \sim \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{w_k \cdot w_{2^n}}{2^n + k}.$$

A belső összeg becsléséhez rögzítsük az m számot és írjuk fel a $0 \leq k < 2^n$ számokat $k = \ell \cdot 2^m + s$ alakban, ahol $\ell = 0, 1, \ldots, 2^{n-m} - 1$ és $s = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$). Ennek megfelelően a belső összegre az

$$A_n := \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{w_k \cdot w_{2^n}}{2^n + k} = \sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1} w_{\ell 2^m + 2^n} \sum_{s=0}^{2^m-1} \frac{w_s}{2^n + \ell 2^m + s} \tag{4.1.10}$$

felbontás adódik. Az $I_m := [0, 2^m)$ intervallumon a belső összeg állandó, és értéke

$$\alpha_{l,n,m} := \sum_{s=0}^{2^m-1} \frac{1}{2^n + \ell \cdot 2^m + s}.$$

Ennek alapján az A_m függvény az I_m intervallumon felírható

$$\sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1} \alpha_{l,n,m} w_{\ell 2^m + 2^n}$$

alakban, és az ebben az összegben szereplő Walsh-fügvények páronként ortogonálisak az I_m intervallumon. Ennek alapján

$$\int_{I_m} |g_1 - S_{2^m} g_1|^2 \geq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n^2 \cdot n^2}{4} \sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1} \int_{I_m} \alpha_{l,n,m}^2 \, dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n^2 \cdot n^2}{2^m} 2^{n-m} \left(\frac{2^m}{2^n + 2^{n-m} 2^m}\right)^2 = \frac{1}{16} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n^2 \cdot n^2}{2^n}.$$

Innen az

$$\left(\frac{1}{|I_m|} \int_{I_m} |g_1 - S_{2^m} g_1|^2\right)^{1/2} \geq \left(\frac{2^m \cdot m}{16} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{m}}{4}$$

alsó becslést kapjuk. Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy $\|g_1\|_{\mathrm{BMO}} = \infty$, azaz találtunk olyan VMO-beli függvényt, amelynek a képe nincs benne a BMO térben, tehát a Cesàro operátor valóban nem korlátos VMO-ból BMO-ba. □

A 3.5. Tételhez hasonlóan dualitási meggondolásokból adódik, hogy a diadikus Copson operátor korlátos a diadikus BMO($\mathbb{I}$) térből BMO($\mathbb{I}$)-be, és nem korlátos $H(\mathbb{I})$-ből $H(\mathbb{I})$-be.

4.2. Lokális konvolúciós operátorok diagonális kiterjesztése az egyváltozós diadikus H^p Hardy-terekre $(0 < p \leq 1)$

Ebben az alfejezetben elegendő feltételeket adunk az egyváltozós lokális konvolúciós operátorok diagonális kiterjesztésének korlátosságára a diadikus H^p Hardy tereken ($1/2 < p \leq 1$). Egyúttal új bizonyítást is nyerünk a $p = 1$ esetben az első pont 4.1. Tételére.

Legyen $\phi = (\phi_n, n \in \mathbb{N})$ integrálható függvényeknek egy sorozata. A $0 < p \leq 1$ esetén bevezetjük a következő kvázi-normát:

$$\|\phi\|_{\langle p\rangle} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{I\in\mathcal{I}_n} \left(\int_I |\phi_n(t)|\, dt \right)^p \right)^{1/p}. \tag{4.2.1}$$

Tehát, ha $p = 1$ és ϕ egy martingál, akkor $\|\phi\|_{\langle 1\rangle}$ megegyezik ϕ-nek a szokásos $L^1(\mathbb{I})$-normájával.

4.4. Tétel. *Legyen $1/2 < p \leq 1$. Tegyük fel, hogy $\widetilde{\Phi}$ egy Φ lokális konvolúciós operátornak diagonális kiterjesztése (lásd (3.2.4)), és a $\phi = (\phi_n, n \in \mathbb{N})$ generátor függvénysorozatra teljesül az alábbi feltételek egyike:*

(i) $\hat{\phi}_n(k) = 0 \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}), \quad \|\phi\|_{\langle p\rangle} < \infty$;
(ii) $\phi_n = D_{2^n}$ $(n \in \mathbb{P})$;
(iii) $\phi_n = 2^n(S_{2^n}W - S_{2^{n-1}}W)$.

Ekkor $\widetilde{\Phi}$ korlátos a $H^p(\mathbb{I})$ téren, azaz létezik csak a p-től függő C_p konstans, amelyre

$$\|\widetilde{\Phi}F\|_{H^p} \leq C_p\|F\|_{H^p}$$

teljesül minden $F \in H^p(\mathbb{I})$ esetén.

Megjgyezzük, hogy a 3.4. Tétel előtt mondottak alapján a 4.4. Tételben szereplő lokális konvolúciós operátorok spektrum-tartóak, tehát a diagonális kiterjesztésük valóban $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ operátor. A 4.4. Tételt az atomos karakterizáció segítségével fogjuk bebizonyítani, ezért a bizonyítás előtt szükségünk van egy segédtételre.

4.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ korlátos lineáris operátor és legyen $\widetilde{\Phi}$ Φ diagonális kiterjesztése $\mathcal{M}$-re, azaz*

$$(\widetilde{\Phi}F)_n = E_n(\Phi f_n) \quad (F = (f_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}). \tag{4.2.2}$$

Ha létezik egy, csak p-től függő C_p konstans, amelyre a

$$\|\widetilde{\Phi}A\|_{H^p} \leq C_p \quad (A := (E_n a, n \in \mathbb{N})) \tag{4.2.3}$$

egyenlőtlenség minden a p-atomra ($0 < p \leq 1$) teljesül, akkor $\widetilde{\Phi}$ korlátos operátor $H^p(\mathbb{I})$-n.

Bizonyítás. Legyen $F \in H^p(\mathbb{I})$ $(0 < p \leq 1)$ egy tetszőleges martingál és $f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k E_n a_k$ az F egy atomos felbontása, ahol az a_k függvények p-atomok (lásd A Tétel). Mivel ennek a konvergens sornak a tagjai a 2^n-dimenziós tér elemei, ezért a sor L^1-normában is konvergál. A $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ operátor korlátosságából következik, hogy

$$\Phi f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \Phi(E_n a_k).$$

Alkalmazzuk az E_n operátort mindkét oldalra. Ekkor (4.2.2) alapján kapjuk, hogy

$$(\widetilde{\Phi}F)_n = E_n(\Phi f_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k E_n(\Phi(E_n a_k)),$$

amiből $0 < p \leq 1$ esetén a

$$\sup_n |(\widetilde{\Phi}F)_n|^p \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^p \sup_n |E_n(\Phi(E_n a_k))|^p \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^p |(\widetilde{\Phi}A_k)^*|^p$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Integráljuk mindkét oldalt a $[0,1]$ intervallumon, és alkalmazzuk a (4.2.3) alatt szereplő feltételt. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \sup_n |(\widetilde{\Phi}F)_n|^p \, dx \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^p \int_0^1 |(\widetilde{\Phi}A_k)^*|^p \, dx \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^p C_p^p.$$

Az A Tétel alapján létezik egy c_p konstans, amelyre

$$\|\widetilde{\Phi}F\|_{H^p} \le C_p c_p \|F\|_{H^p},$$

és ezzel a 4.1. Lemmát bebizonyítottuk. $\square$

4.4. Tétel bizonyítása. Ad (i). A 4.1. Lemma alapján elegendő a tételt p-atomok esetére bebizonyítani. Továbbá feltehető , hogy supp $a \subseteq I \subset [0, 2^{-N})$ $(N \in \mathbb{N})$. A Φa_m $(a_m = E_m a)$ függvényeket a következő alakba írhatjuk át:

$$\Phi a_m = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n * (\chi_n E_m a) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n * (\chi_n E_m a - S_{2^n}(\chi_n E_m a)) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n * S_{2^n}(\chi_n E_m a),$$

ahol $\chi_n = \chi_{[2^{-n}, 2^{-n+1})}$, és az (i) pont első feltétele miatt a második összeg minden tagja nulla, mert a konvolúcióban szereplő függvények Walsh-spektruma diszjunkt. Ezért

$$E_m(\Phi a_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n * E_m\big(\chi_n(E_m a - S_{2^n} E_m a)\big).$$

Vegyük észre, hogy

$$\alpha_{mn} := E_m(\chi_n(E_m a - S_{2^n}(E_m a))) = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \le n, \\ \chi_n(E_m a - E_n a), & \text{ha } m > n, \end{cases}$$

és így $\sup_m |\alpha_{mn}| \le 2\chi_n a^*$, amiből következik, hogy

$$|E_m(\Phi a_m)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n| * |\alpha_{mn}| \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n| * (\chi_n a^*). \tag{4.2.4}$$

Véve a szuprémumot minden $m \in \mathbb{N}$ esetén, (2.1.9) és a p-atom definíciója alapján kapjuk, hogy

$$(\widetilde{\Phi} A)^* \le 2^{N/p+1} \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n| * (\chi_n \cdot \chi_I). \tag{4.2.5}$$

Ha $0 < p \le 1$, akkor (4.2.5) alapján az alábbi becsléshez jutunk:

$$\|\widetilde{\Phi} A\|_{H^p}^p = \|(\widetilde{\Phi} A)^*\|_p^p \le$$
$$\le 2^{N+p} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{I}} ((|\phi_n| * \chi_n \chi_I)(x))^p dx \le$$
$$\le 2^{N+p} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{\mathbb{I}} (\int_{\mathbb{I}} |\phi_n(t)| \chi_n(x \dotplus t) dt)^p dx =$$
$$= 2^{N+p} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n} (\int_{I_n(k2^{-n})} |\phi_n(t)| dt)^p.$$

Az (i) pont második feltétele alapján

$$\|\widetilde{\Phi}A\|_{H^p}^p \leq 2^{N+p} \cdot \|\phi\|_{(p)}^p \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^p \cdot \|\phi\|_{(p)}^p < \infty$$

teljesül. Könnyen igazolható, hogy ugyanez a becslés érvényes akkor is, ha $0 \notin I$, és ezzel a 4.4. Tételt bebizonyítottuk az (i) esetben.

Ad (ii). Ezt a részt közvetlenül bizonyítjuk. Mivel a $\chi_n f_m * D_{2^n}$ függvény a $[2^{-n}, 2^{-n+1})$ $(n, m \in \mathbb{N})$ intervallumon kívül nulla, a $\widetilde{\Phi}F$ függvényt a következő alakba írhatjuk át.

$$(\widetilde{\Phi}F)_m = E_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n f_m * D_{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\min(n,m)}(\chi_n f_m). \tag{4.2.6}$$

Alkalmazva a martingálok jól ismert tulajdonságát ($E_n f_m = f_n$ minden $n \leq m$ esetén) és (4.2.6)-ot kapjuk, hogy

$$(\widetilde{\Phi}F)_m = \sum_{n=1}^{m} \chi_n f_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} E_m(\chi_n f_m) = \sum_{n=1}^{m} \chi_n f_n + \chi([0, 2^{-m}))f_m.$$

Ha vesszük mindkét oldal abszolút értékét és a szuprémumot minden $m \in \mathbb{N}$ esetén, akkor azt kapjuk, hogy

$$(\widetilde{\Phi}F)^* \leq f^*,$$

és ebből $0 < p \leq 1$ esetén megkapjuk a

$$\|\widetilde{\Phi}F\|_{H^p} \leq \|F\|_{H^p}$$

egyenlőtlenséget, ami a 4.4. Tételt bizonyítja a (ii) esetben.

Ad (iii). (iii) bizonyításánál használni fogjuk a H^p-norma $(0 < p \leq 1)$ alábbi előállítását (lásd (2.1.15)).

(4.2.7)

$$\|H\|_{H^p} = \sup\left\{|\langle h_n, g\rangle| = \left|\int_0^1 h_n g\right| : g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}), \|g\|_{Lip_2^-\alpha} \leq 1; n \in \mathbb{N}\right\} \quad (\alpha = \frac{1}{p} - 1)$$

minden $H \in H^p$ esetén, ahol $\mathcal{P}(\mathbb{I})$ a Walsh-polinomok halmazát jelöli. Rögzítsünk egy $g \in \mathcal{P}(\mathbb{I})$ Walsh-polinomot. Mivel a $(\widetilde{\Phi}F)_m = E_m(\sum_{n\in\mathbb{P}}(\chi_n f_m) * \phi_n)$ sor L^1-normában konvergens, és g korlátos függvény, így

$$\langle(\widetilde{\Phi}F)_m, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{P}}\langle(\chi_n f_m) * \phi_n, E_m g\rangle. \tag{4.2.8}$$

Mivel a $\Phi_n h := h * \phi_n$ konvolúciós operátorok önadjungáltak,

$$\langle(\chi_n f_m) * \phi_n, E_m g\rangle = \langle\Phi_n(\chi_n f_m), E_m g\rangle = \langle\chi_n f_m, \Phi_n E_m g\rangle. \tag{4.2.9}$$

A T operátor, amelyet a

$$(4.2.10) \qquad Tg := \sum_{n=0}^{\infty} g * \phi_n \quad (g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}))$$

hozzárendeléssel értelmezünk, jól definiált a $\mathcal{P}$ halmazon, mert a fenti összegbe csak véges sok tag különbözik zérustól. Tg Walsh-Fourier-együtthatói

$$(Tg)\hat{}(k) = \frac{2^n}{k}\hat{g}(k) \quad (2^{n-1} \le k < 2^n, n \in \mathbb{P})$$

alakúak, azaz T megegyezik a Simon P. által tanulmányozott multiplier operátorral (lásd Simon [35], [36]). Megmutatta, hogy ez az operátor a H^p téren korlátos, ha $0 < p \le 1$. Mivel T egy önadjungált operátor, így, T korlátos a $\mathrm{Lip}_2^- \alpha$ téren is ($\alpha = 1/p - 1$) és

$$(4.2.11) \qquad \|Tg\|_{\mathrm{Lip}_2^- \alpha} \le C\|g\|_{\mathrm{Lip}_2^- \alpha} \quad (g \in \mathrm{Lip}_2^- \alpha),$$

ahol C egy abszolút konstans. Legyen $h := T(E_m g)$. (4.2.10)-ből következik, hogy

$$(4.2.12) \qquad |\langle \chi_n f_m, \Phi_n(E_m g)\rangle| = |\langle \chi_n f_m, E_n(h - E_{n-1}h)\rangle| =: A_n(f_m, h).$$

Most legyen $p = 1$. Ekkor $\alpha = 0$, és $\mathrm{Lip}^- 0 = \mathrm{VMO}^-$. A Hölder egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$A_n(f_m, h) \le \|\chi_n f_m\|_1 \|E_n(h - E_{n-1}h)\|_\infty =$$
$$= \|h\|_{\mathrm{BMO}^-} \int_{\mathbb{I}} \chi_n(t)|f_m(t)|dt \le C\|g\|_{\mathrm{BMO}^-} \int_{\mathbb{I}} \chi_n(t) f^*(t)dt.$$

Ezt a becslést alkalmazva (4.2.8)-cal együtt kapjuk, hogy

$$|\langle(\Phi F)_m, g\rangle| \le \sum_{n\in\mathbb{P}} C\|g\|_{\mathrm{BMO}^-} \int_{\mathbb{I}} \chi_n(t) f^*(t)dt = \|g\|_{\mathrm{BMO}^-}\|F\|_{H^1}.$$

Véve a szuprémumot az összes $g \in \mathcal{P}(\mathbb{I})$ $\|g\|_{BMO^-} \le 1$, és $m \in \mathbb{N}$ esetén (4.2.7) alapján kapjuk, hogy

$$\|\widetilde{\Phi} F\|_{H^1} \le C\|F\|_{H^1}.$$

Most legyen $1/2 < p < 1$ ($\alpha = 1/p - 1$). Ezt az esetet p-atomokra fogjuk belátni, ami a 4.1. Lemma alapján elegendő is. Feltesszük, hogy supp $a \subseteq I = [0, 2^{-N})$, ($N \in \mathbb{N}$). A Hölder-egyenlőtlenség, (2.1.17), (4.2.11), (4.2.12) és a p-atom definíciója alapján

$$A_n(f_m, h) \le \|2^{-n(\alpha+1)}\chi_n E_m a\|_1 \|2^{n(\alpha+1)}(E_n(|h - E_{n-1}h|)\|_\infty \le$$
$$\le \|h\|_{Lip_1^- \alpha} 2^{-n(\alpha+1)} \int_{\mathbb{I}} \chi_n(t)|(E_m a)(t)|dt \le$$
$$\le \|h\|_{Lip_2^- \alpha} 2^{-n(\alpha+1)} \int_{\mathbb{I}} \chi_n(t)|(E_m a)(t)|dt \le$$
$$\le C\|E_m g\|_{Lip_2^- \alpha} 2^{-n(\alpha+1)} \int_{\mathbb{I}} \chi_n \chi(I) 2^{N/p}$$
$$\le C\|g\|_{Lip_2^- \alpha} 2^{-n(\alpha+1)} \int_{\mathbb{I}} \chi_n \chi(I) 2^{N/p}.$$

Mivel $I = [0, 2^{-N})$, ezért (4.2.9) alapján

$$\langle(\widetilde{\Phi} A)_m, E_m g\rangle = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle(\chi_n E_m a) * \phi_n, E_m g\rangle.$$

Alkalmazva ezt az azonosságot (4.2.16)-tal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|\langle(\widetilde{\Phi} A)_m, E_m g\rangle| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} C\|g\|_{Lip_2^- \alpha} 2^{-n(\alpha+1)} \int_{\mathbb{I}} \chi_n \chi_I 2^{N/p} = \\ &= 2^{N/p} C\|g\|_{Lip_2^- \alpha} \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-(\alpha+2)n} \leq \\ &\leq C\|g\|_{Lip_2^- \alpha} \frac{1}{2^{(1/p+1)} - 1}.\end{aligned}$$

Véve a szuprémumot az összes $g \in \mathcal{P}(\mathbb{I})$, $\|g\|_{\mathrm{Lip}_2^- \alpha} \leq 1$ és az összes $m \in \mathbb{N}$ esetén, (4.2.7) alapján

$$\|\widetilde{\Phi} A\|_{H^p} \leq C \cdot \frac{1}{2^{1/p} - 1},$$

amivel tételünket igazoltuk. Könnyen igazolható, hogy ugyanez a becslés érvényes akkor is, ha $0 \notin I$. □

4.3. A diadikus Cesàro operátor diagonális kiterjesztése az egyváltozós diadikus H^p Hardy-terekre $(0 < p \leq 1)$

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy a Cesàro operátort föl lehet írni három operátor összegére, amelyek teljesítik a 4.4. Tétel valamelyik feltételét, ha $1/2 < p \leq 1$. Ehhez azonban szükségünk lesz néhány Lemmára.

A D_{2^n} (2.2.25) alatti előállításának egyszerű következményei az alábbi integrálok:

(4.3.1)
$$\int_{I_n(0)} D_{2^i}(x)dx = 2^{i-n} \quad (i \leq n, i, n \in \mathbb{N}),$$

(4.3.2)
$$\int_{I_n(k2^{-n})} D_{2^i}(x)dx = \begin{cases} 2^{i-n}, & \text{ha } i < n - \log_2 k, \\ 0, & \text{ha } n - \log_2 k \leq i \leq n \end{cases} \quad (0 < k < 2^n, i, k, n \in \mathbb{N});$$

(4.3.3)
$$\int_{I_n(k2^{-n})} D_{2^i}(x \dotplus 2^{-j-1})dx = \begin{cases} 2^{i-n}, & \text{ha } n - j - 1 = \log_2 k, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$(0 < k < 2^n, 0 \le j \le i, i, j, k, n \in \mathbb{N})$. Haonlóan (4.3.2), (4.3.3) és (2.2.31) egyszerű következményeként adódnak az alábbi becslések:

$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} \widetilde{K}_{2^i} \le 2^{-r-2} \quad (k = 2^r, 0 < r < n, i \le n, i, k, r, n \in \mathbb{N}); \tag{4.3.4}$$

$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} \widetilde{K}_{2^i} = 0 \quad (k \ne 2^r, 0 \le k < 2^n, i \le n, i, k, r, n \in \mathbb{N}). \tag{4.3.5}$$

Érvényes $|\Delta_n W|$-re az alábbi becslés (lásd Sch-W-S-P [30, 273.old., L. 4]):

$$|\Delta_n W| \le D_{2^n} + |U_n| + 2V_n \tag{4.3.6}$$

minden $n \in \mathbb{P}$ esetén, ahol

$$|U_n(x)| \le 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} D_{2^i}(x \dotplus 2^{-j-1}) + 2\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k+1} D_{2^{n+k}}(x) \tag{4.3.7}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{I}$ esetén, és

$$V_n \le 4 \cdot 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} |K_k| + 2K_{2^n} + D_{2^n}.$$

(2.2.30) és (2.2.31) alapján ezt a becslést átírhatjuk a

(4.3.8)

$$\begin{aligned} V_n &\le 4 \cdot 2^{-n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 2^{\ell} \sum_{\mu=0}^{\ell} 2^{\mu-\ell} (D_{2^\mu}(2^{-\mu-1} + \frac{3}{2}) + \widetilde{K}_{2^\mu}) + \\ &+ 4 \cdot 2^{-n} \widetilde{K}_{2^n} + 2\widetilde{K}_{2^n} + 2(1 + 2^{-n} + 2^{-2n}) D_{2^n} \le \\ &\le 4 \cdot 2^{-n} \sum_{\mu=0}^{n-1} 2^{\mu}(n-\mu)((2^{-\mu-1} + \frac{3}{2}) D_{2^\mu} + \widetilde{K}_{2^\mu}) + 6\widetilde{K}_{2^n} + 7D_{2^n} \end{aligned}$$

formába.

4.2. Lemma. *Az alábbi becslések teljesülnek.*

$$\int\limits_{I_n(0)} |\Delta_n W(x)| dx \le 39 \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{4.3.9}$$

$$(4.3.10)\qquad \int_{I_n(k2^{-n})} |\Delta_n W(x)|dx \leq 30\cdot 2^{-r} \quad (k=2^r, 0\leq r<n, r,n\in\mathbb{N}),$$

$$(4.3.11)\qquad \int_{I_n(k2^{-n})} |\Delta_n W(x)|dx \leq 16\cdot k^{-2} \quad (k\neq 2^r, 0<k<2^n, k,n\in\mathbb{N}).$$

Bizonyítás. (4.3.6) alapján elegendő V_n és U_n függvények abszolút értékének integrálját vizsgálni a lemma bizonyításához. Először V_n integrálját becsüljük. Ha $k=0$, akkor (4.3.2), (4.3.5) és (4.3.8) alapján

$$(4.3.12)\qquad \int_{I_n(0)} V_n \leq 4\cdot 2^{-n}\sum_{\mu=0}^{n-1} 2^{\mu}(n-\mu)2^{\mu-n}(2^{-\mu-1}+\frac{3}{2})+7\leq$$

$$\leq 6\cdot 2^{-2n}\frac{1}{4\log^2 2}2^{2n}+2\cdot 2^{-2n}\frac{1}{\log^2 2}2^n+7\leq 15.$$

Legyen $0<r<n$, $k:=2^r$. Ekkor (4.3.2), (4.3.4) és (4.3.8) alapján a

(4.3.13)

$$\int_{I_n(k2^{-n})} V_n \leq 4\cdot 2^{-n}\sum_{\mu=0}^{n-r-1} 2^{\mu}(n-\mu)2^{\mu-n}(2^{-\mu-1}+\frac{3}{2})+4\cdot 2^{-n}\sum_{\mu=0}^{n-1}2^{\mu}(n-\mu)2^{-r-2}+$$

$$+6\cdot 2^{-r-2}\leq 4\cdot 2^{-2n}\sum_{\mu=0}^{n-r-1}2^{2\mu}(n-\mu)(2^{-\mu-1}+\frac{3}{2})+2^{-n-r}\sum_{\mu=0}^{n-1}2^{\mu}(n-\mu)+$$

$$+3\cdot 2^{-r-1}\leq 6\cdot 2^{-2n}\frac{1}{4\log^2 2}2^{2n-2r}+2\cdot 2^{-2n}\frac{1}{\log^2 2}2^{n-r}+$$

$$+2^{-n-r}\frac{1}{\log^2 2}2^n+3\cdot 2^{-r-1}\leq 13\cdot 2^{-r}$$

becsléshez jutunk. Most legyen $0<k<2^n$, $k\neq 2^r$ $(k,r,n\in\mathbb{N})$. (4.3.1), (4.3.2), (4.3.5) és (4.3.8) segítségével az alábbi becsléshez jutunk:

(4.3.14)

$$\int_{I_n(k2^{-n})} V_n \leq 4\cdot 2^{-n}\sum_{0\leq\mu<n-\log_2 k} 2^{\mu}(n-\mu)2^{\mu-n}(2^{-\mu-1}+\frac{3}{2})\leq$$

$$\leq 6\cdot 2^{-2n}\frac{1}{4\log^2 2}2^{2n-2\log_2 k}+2\cdot 2^{-2n}\frac{1}{\log^2 2}2^{n-\log_2 k}\leq 8\cdot k^{-2}.$$

Nincs más hátra, mint az U_n függvény integráljának becslése. Figyelembe véve, hogy (4.3.7) első összegében $2^{-j-1}>2^{-n}$, ez az összeg el fog tűnni az $I_n(0)$ intervallumon történő integrálás során. Ezért (2.2.25) alapján következik, hogy

$$(4.3.15)\qquad \int_{I_n(0)} |U_n(x)|dx \leq 2\cdot\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i+1}=8.$$

Egyszerű meggondolással adódik továbbá, hogy

$$(4.3.16)\qquad \int\limits_{I_n(k2^{-n})} D_{2^{n+i}}(x)dx = 0 \quad (0 < k < 2^n, 0 \le i \le n).$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ és $[2^{-j-1}, 2^{-j-1} + 2^{-i})$ $(i \ge n,\ 0 \le j < n)$ intervallumok akkor és csak akkor nem diszjunktak, ha $j = n - 1 - \log_2 k$, és ekkor

$$(4.3.17)\qquad \int\limits_{I_n(\frac{k}{2^n})} D_{2^i}(x + 2^{-j-1})dx = 1.$$

Figyelembe véve a (4.3.16), (4.3.17) és (4.3.7) becsléseket kapjuk, hogy

$$(4.3.18)\qquad \int\limits_{I_n(k2^{-n})} |U_n(x)|dx = 0,$$

ha $k \ne 2^r$, $0 < k < 2^n$, és

(4.3.19)

$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} |U_n(x)|dx \le 2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} \int\limits_{I_n(k2^{-n})} D_{2^i}(x + 2^{-j-1})dx =$$
$$= 2 \cdot 2^{n-r} 2^{-n} \cdot 2 = 4 \cdot 2^{-r},$$

ha $k = 2^r$, $0 \le r < n$. Összevetve (4.3.1)-et, (4.3.12)-őt, (4.3.15)-öt és (4.3.6)-at kapjuk, hogy

$$\int\limits_{I_n(0)} |\Delta_n W(x)|dx \le 39 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

(4.3.1), (4.3.13), (4.3.19) és (4.3.6) alapján pedig

$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} |\Delta_n W(x)|dx \le 30 \cdot 2^{-r} \quad (k = 2^r, 0 \le r < n, r, n \in \mathbb{N}),$$

és (4.3.1), (4.3.14), (4.3.18) és (4.3.6) alapján a

$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} |\Delta_n W(x)|dx \le 16 \cdot k^{-2} \quad (k \ne 2^r, 0 < k < 2^n, k, n \in \mathbb{N})$$

becsléshez jutunk, amivel bebizonyítottuk a 4.3. Lemmát. □

Alábbiakban bevezetünk egy új függvényt:

$$\widetilde{\Delta}_n W(x) := 2^{n-2} \sum_{k=2^n}^{\infty} \frac{w_k(x) - w_k(x \dot{+} 2^{-n})}{k} \quad (x \in \mathbb{I}). \tag{4.3.20}$$

Ezt a $\widetilde{\Delta}_n W$ függvényt szeretnénk becsülni, ezért egy új alakba írjuk át. Legyen $k := 2^n \cdot \ell + s$ ($\ell = 1, 2, \ldots,\ 0 \le s < 2^n$). Könnyen igazolható, hogy

$$w_s(2^{-n}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le s < 2^{n-1} \\ -1, & \text{ha } 2^{n-1} \le s < 2^n, \end{cases}$$

és

$$w_{2^n \cdot \ell}(2^{-n}) = 1 \quad (\ell = 1, 2, \ldots).$$

Ezeket felhasználva (2.2.13) és (2.2.14) alapján a $\widetilde{\Delta}_n W$ függvényt a következő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_n W(x) &= 2^{n-2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{2^n-1} \frac{w_{2^n \cdot \ell}(x) w_s(x) - w_{2^n \cdot \ell}(x) w_{2^n \cdot \ell}(2^{-n}) w_s(x) w_s(2^{-n})}{2^n \cdot \ell + s} = \\
&= 2^{n-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} w_{2^n \cdot \ell}(x) \sum_{s=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{w_s(x)}{2^n \cdot \ell + s} = \\
&= 2^{n-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{w_{2^n \cdot \ell}(x)}{\ell^2} \sum_{s=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{w_s(x) \cdot \ell^2}{2^n \cdot \ell + s}.
\end{aligned}$$

Ez alapján a

$$b_s(l, n) := \left(\frac{\ell}{2^n} - \frac{\ell^2}{\ell \cdot 2^n + s}\right) \cdot 2^n$$

jelölés bevezetésével a

$$\widetilde{\Delta}_n W = 2^{-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{w_{2^n \cdot \ell}}{\ell} (D_{2^n} - D_{2^{n-1}}) - 2^{-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{w_{2^n \cdot \ell}}{\ell^2} \sum_{s=2^{n-1}}^{2^n-1} b_s(\ell, n) \cdot w_s$$

egyenlőséghez jutunk, amiből a

$$\widetilde{U}_n := 2^{-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{w_{2^n \cdot \ell}}{\ell} r_{n-1} \cdot D_{2^{n-1}}$$

és

$$\widetilde{V}_n := \sup_{\ell \in \mathbb{P}} \left| \sum_{s=2^{n-1}}^{2^n-1} b_s(\ell, n) \cdot w_s \right|$$

függvényekkel a

$$|\widetilde{\Delta}_n W| \le |\widetilde{U}_n| + \widetilde{V}_n \tag{4.3.21}$$

becsléshez jutunk minden $n \in \mathbb{P}$ esetén.

4.3. Lemma. *Ha* $n \in \mathbb{P}$ *és* $x \in \mathbb{I}$, *akkor*

$$|\widetilde{U}_n(x)| \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(D_{2^{n+k}}(x) + D_{2^{n+k}}(x \dotplus 2^{-n})), \tag{4.3.22}$$

és

$$\widetilde{V}_n \le D_{2^n} + D_{2^{n-1}} + K_{2^n} + K_{2^{n-1}} + 4 \cdot 2^{-n} \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} |K_k|. \tag{4.3.23}$$

Bizonyítás. (4.3.22) igazolásához vegyük észre, hogy (2.3.12) alapján

$$|\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{w_{2^n \cdot \ell}(x)}{\ell}| = |\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{w_\ell(2^n x)}{\ell}| \le 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} D_{2^k}(2^n x)$$

teljesül, valamint (2.2.25) alapján

$$D_{2^k}(2^n x) \cdot D_{2^n}(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(1 + r_{n+i}(x)) \cdot \prod_{i=0}^{n-1}(1 + r_i(x)) = \prod_{i=0}^{k+n-1}(1 + r_i(x)) = D_{2^{n+k}}(x).$$

Mivel

$$D_{2^{n-1}}(x) = \frac{1}{2}(D_{2^n}(x) + D_{2^n}(x \dotplus 2^{-n}) \quad (x \in \mathbb{I})$$

igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így

$$\begin{aligned} |\widetilde{U}_n| &\le 2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} D_{2^k}(2^n x) \cdot D_{2^{n-1}}(x) \le \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(D_{2^{n+k}}(x) + D_{2^{n+k}}(x \dotplus 2^{-n})), \end{aligned}$$

amivel (4.3.22)-őt beláttuk.

(4.3.23) igazolásához rögzítsük le ℓ és n pozitív egész számokat, vezessük be a $b_s := b_s(\ell, n)$ jelölést, és alkalmazzuk az Abel-féle átalakítást kétszer. Ekkor a

(4.3.24)

$$\begin{aligned} \sum_{s=2^{n-1}}^{2^n-1} b_s w_s &= \sum_{s=0}^{2^n-1} b_s w_s - \sum_{s=0}^{2^{n-1}-1} b_s w_s = \\ &= b_{2^n-1} D_{2^n} - b_{2^{n-1}-1} D_{2^{n-1}} + (b_{2^n-2} - b_{2^n-1})(2^n - 1) K_{2^n-1} - \\ &- (b_{2^{n-1}-2} - b_{2^{n-1}-1})(2^{n-1} - 1) K_{2^{n-1}-1} + \\ &+ \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} (b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1}) \cdot k \cdot K_k \end{aligned}$$

átalakításhoz jutunk. Legyen $g(t) := \frac{t}{1+t/\ell}$ minden $t \geq 0$ esetén és vegyük észre, hogy

$$b_s = b_s(\ell, n) = g(s \cdot 2^{-n})$$

minden $0 \leq s < 2^n$ esetén. Egyszerűen igazolható, hogy

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{1}{(1+t/\ell)^2},$$

és

$$\frac{d^2}{dt^2} g(t) = -\frac{2}{\ell} \frac{1}{(1+t/\ell)^3}.$$

Következésképpen, $0 \leq g(t) \leq 1$, $0 \leq \frac{d}{dt} g(t) \leq 1$, és $0 \leq |\frac{d^2}{dt^2} g(t)| \leq 2$ minden $t \in \mathbb{I}$ esetén. A középértéktételből következik, hogy

$$|b_{2^n-2} - b_{2^n-1}| \leq 2^{-n},$$

és

$$|b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1}| \leq 4 \cdot 2^{-2n} \quad (0 \leq k < 2^n).$$

Ezen becsléseket alkalmazva (4.3.24)-vel (4.3.23) teljesül. □

A $\widetilde{V}_n$ függvényt (2.2.31) és (4.3.23) alapján becsülhetjük csak a D_{2^n} és a $\widetilde{K}_{2^n}$ függvények segítségével is:

(4.3.25)

$$\widetilde{V}_n \leq D_{2^n} + D_{2^{n-1}} + K_{2^n} + K_{2^{n-1}} + 4 \cdot 2^{-n} |K_{2^{n-1}-1}| + 4 \cdot 2^{-n} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-2} |K_k| \leq$$

$$\leq 2D_{2^n} + 6D_{2^{n-1}} + \widetilde{K}_{2^n} + 5\widetilde{K}_{2^{n-1}} + 4 \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} 2^{\mu-n}(2^{-\mu-1} + \frac{3}{2}) D_{2^\mu} + 4 \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} 2^{\mu-n} \widetilde{K}_{2^\mu}.$$

4.4. Lemma. *Érvényesek a következő becslések*

(4.3.26) $$\int_{I_n(k2^{-n})} |\widetilde{\Delta}_n W(x)| dx \leq 15 \quad (k = 0, 1, n \in \mathbb{N}),$$

(4.3.27) $$\int_{I_n(k2^{-n})} |\widetilde{\Delta}_n W(x)| dx \leq 10 \cdot 2^{-r} \quad (k = 2^r, 0 < r < n, r, n \in \mathbb{N}),$$

(4.3.28) $$\int_{I_n(k2^{-n})} |\widetilde{\Delta}_n W(x)| dx \leq 28 \cdot k^{-2} \quad (k \neq 2^r, 0 < k < 2^n, k, n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás. (4.3.21) alapján elegendő $\widetilde{V}_n$, és $\widetilde{U}_n$ integráljait vizsgálni a 4.4. Lemma igazolásához. Becsüljük először $\widetilde{V}_n$ integrálját. Ha $k = 0$, akkor (4.3.1), (4.3.5) és (4.3.25) alapján következik, hogy

$$\int\limits_{I_n(0)} \widetilde{V}_n \leq 2 + 6 \cdot 0.5 + 4 \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} 2^{\mu-n}(2^{-\mu-1} + \frac{3}{2}) + \leq \tag{4.3.29}$$
$$\leq 5 + 22^{-n} \cdot n + 6 \cdot 2^{-n} \cdot 2^n \leq 12.$$

Legyen $0 < r < n$, $k := 2^r$. Ekkor (4.3.1), (4.3.2), (4.3.4) és (4.3.25) alapján következik, hogy

(4.3.30)
$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} \widetilde{V}_n \leq 2^{-r-2} + 5 \cdot 2^{-r-2} + 4 \sum_{\mu=0}^{n-1} 2^{\mu-n} 4 \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} 2^{\mu-n}(2^{-\mu-1} + \frac{3}{2}) \cdot 2^{\mu-n} +$$
$$+ 4 \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} 2^{\mu-n} 2^{-r-2} \leq$$
$$\leq \frac{3}{2} \cdot 2^{-r} + 22^{-2n} \frac{1}{\log^2 2} 2^{n-r} + 6 \cdot 2^{-2n} \frac{1}{4 \log^2 2} 2^{2n-2r} + 2^{-n-r} \cdot 2^n \leq 10 \cdot 2^{-r}.$$

Ha $k = 1$, akkor hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$\int\limits_{I_n(2^{-n})} \widetilde{V}_n \leq 6 \cdot 0.5 + 10 = 13. \tag{4.3.31}$$

Most legyen $0 < k < 2^n$, $k \neq 2^r$ $(k, r, n \in \mathbb{N})$. (4.3.1), (4.3.5) és (4.3.25) alapján a következő becsléshez jutunk:

(4.3.32)
$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} \widetilde{V}_n \leq 4 \cdot \sum_{0 \leq \mu < n - \log_2 k} 2^{\mu-n}(2^{-\mu-1} + \frac{3}{2}) 2^{\mu-n} \leq$$
$$\leq 2 \cdot 2^{-2n} 2^{n - \log_2 k + 1} + 6 \cdot 2^{-2n} \cdot 2^{2n - 2\log_2 k + 2} \leq 28 k^{-2}.$$

Nincs más hátra, mint $\widetilde{U}_n$ integráljának becslése. Vegyük észre, hogy a (4.3.22) második összege eltűnik, ha az $I_n(0)$ intervallumon integráljuk, így csak az első összeggel kell számolnunk. Egyszerű meggondolásokkal kapjuk, hogy

$$\int\limits_{I_n(0)} |\widetilde{U}_n(x)| dx \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2. \tag{4.3.33}$$

Egyszerűen igazolható, hogy a $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ és $[2^{-n}, 2^{-n} + 2^{-i})$ $(0 \leq i < n)$ intervallumok akkor és csak akkor metszők. ha $k = 1$, és akkor

$$\int\limits_{I_n(2^{-n})} D_{2^{n+i}}(x \dotplus 2^{-n})dx = 1.$$

Ezt figyelembe véve, (4.3.16) és (4.3.22) alapján kapjuk, hogy

$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} |\widetilde{U}_n(x)|dx = 0, \tag{4.3.34}$$

ha $1 < k < 2^n$ és

$$\int\limits_{I_n(2^{-n})} |\widetilde{U}_n(x)|dx \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2. \tag{4.3.35}$$

Most összevetve (4.3.29)-et, (4.3.33)-at és (4.3.21)-et, kapjuk, hogy

$$\int\limits_{I_n(0)} |\widetilde{\Delta}_n W(x)|dx \leq 14 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

(4.3.31), (4.3.35) és (4.3.21) a

$$\int\limits_{I_n(2^{-n})} |\widetilde{\Delta}_n W(x)|dx \leq 15$$

becslést adja, (4.3.30), (4.3.34) és (4.3.21) pedig a

$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} |\widetilde{\Delta}_n W(x)|dx \leq 10 \cdot 2^{-r} \quad (k = 2^r, 1 \leq r < n, r, n \in \mathbb{N})$$

becsléshez vezet, és (4.3.32), (4.3.34) és (4.3.21) alapján

$$\int\limits_{I_n(k2^{-n})} |\widetilde{\Delta}_n W(x)|dx \leq 28 \cdot k^{-2} \quad (k \neq 2^r, 1 < k < 2^n, k, n \in \mathbb{N})$$

teljesül, amivel az 5. Lemmát bebizonyítottuk. □

4.5. Lemma. *Legyen $1/2 < p \le 1$. Ekkor a $\langle p\rangle$-kvázinormája a $\Delta W := (\Delta_n W, n \in \mathbb{N})$ és $\widetilde{\Delta} W := (\widetilde{\Delta}_n W, n \in \mathbb{N})$ függvéyeknek véges, azaz*

$$\|\Delta W\|_{\langle p\rangle} < \infty, \quad \|\widetilde{\Delta} W\|_{\langle p\rangle} < \infty. \tag{4.3.36-37}$$

Bizonyítás. A $\langle p\rangle$-kvázinorma definíciója ((4.2.1)) és a 4.2. Lemma alapján kapjuk, ha $1/2 < p \le 1$, hogy

$$\|\Delta W\|_{\langle p\rangle}^p \le \sup_{n\in\mathbb{N}}(39^p + \sum_{r=0}^{n-1} 30^p \cdot 2^{-rp} + \sum_{k=1}^{2^n-1} 16^p \cdot k^{-2p}) \le$$
$$\le 39^p + \frac{60^p}{2^p-1} + \frac{16^p}{2p-1} < \infty.$$

A 4.4. Lemma alapján (4.3.37) is hasonlóan egyszerűen következik. □

A most belátott segédtételek alapján már bebizonyítható ennek az alpontnak a fő állítása.

4.5. Tétel. *A diadikus Cesàro operátor korlátos a $H^p(\mathbb{I})$ diadikus Hardy-téren, ha $1/2 < p \le 1$.*

Bizonyítás. A 3.2. Lemma alapján tudjuk, hogy Cesàro operátor

$$(\widetilde{C}F)_m = E_m(\sum_{s=1}^{\infty} \Delta_{s-1}^{-} W * (\chi_s f_m)) \quad (F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}))$$

alakba írható. (2.3.30) alapján

$$\Delta_{s-1}^{-} W = 2\Delta_{s-1} W - \Delta_s W = \Delta_s W - 2(\Delta_s W - \Delta_{s-1} W)$$

teljesül. A diadikus derivált operátor és a W függvény definícióját ((2.3.2),(2.3.10)) felhasználva egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\Delta_s W(x) - \Delta_{s-1} W(x) = 2^{s-2}(W(x) \dot{-} W(x \dot{+} 2^{-s})) =$$
$$= 2^{s-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k(x) - w_k(x \dot{+} 2^{-s})}{k}.$$

Ezt az összeget három részre bontva, a Walsh-függvények definíciója alapján a ((2.2.12))

$$\Delta_s W(x) - \Delta_{s-1} W(x) = 2^{s-1} \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \frac{w_k(x)}{k} + \widetilde{\Delta}_s W$$

egyenlőséghez jutunk. Továbbá tudjuk, hogy $\Delta_n W = D_{2^n} + R_n$ ((2.3.27)), ahol $\hat{R}_n(k) = 0$, ha $k < 2^n$. A 4.6. Lemma alapján mondhatjuk, hogy a Cesàro operátorban lévő generátor függvényt négy tag összegére bontottuk, amelyek mindegyike teljesíti a 4.4. Tétel feltételeinek egyikét. Alkalmazva a 4.4. Tételt megkapjuk állításunkat. □

5. A diadikus Cesàro operátor Lipschitz-tereken

Ebben a fejezetben a diadikus Cesàro operátort fogjuk vizsgálni Lipschitz- (Hölder-) tereken. A Lipschitz-terek bevezetése után megmutatjuk, hogy a szóban forgó operátor korlátos a $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ téren, ha $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha < 1/p$, továbbá megmutatjuk, hogy ez a feltétel nem javítható, ha $p > 1$. Ebben a fejezetben szereplő tételek és állítások a [14]-es számú cikkben találhatók meg.

5.1. A diadikus Lipschitz-terek jellemzése

Egy $f \in L^p[0,1)$ függvény $\omega^p(f,\cdot)$ L^p-beli *folytonossági modulusát* ($1 \leq p \leq \infty$)–a τ diadikus transzlációt felhasználva– az alábbiak szerint szokás értelmezni:

$$\omega^p(f,\delta) := \sup_{y \leq \delta} \|f - \tau_y f\|_p \quad (\delta > 0).$$

Tetszőleges $\alpha > 0$ esetén a

$$\mathrm{L}ip(\alpha, p) := \{f \in L^p : \omega^p(f,\delta) = O(\delta^\alpha) \text{ ha } \delta \to 0\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

teret *Lipschitz-térnek* (vagy Hölder-térnek) nevezzük. Ismeretes (lásd Sch-W-S-P [30, 189. old. Th. 3]), hogy egy f függvény akkor és csak akkor eleme a $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ ($1 \leq p \leq \infty$) osztálynak, ha

$$\|f - E_n f\|_p = O(2^{-n\alpha}), \quad n \to \infty \quad (\alpha > 0). \tag{5.1.1}$$

Vezessük be az

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} := \sup_{n \in \mathbb{N}} 2^{n\alpha} \|f - E_n f\|_p \tag{5.1.2}$$

normát. Eszerint az f függvény akkor és csak akkor eleme a $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ osztálynak, ha $\|f\|_{\mathrm{L}ip(\alpha,p)} < \infty$.

Legyen $f \in L^1[0,1)$. Az f függvény *kvadratikus variációját* a

$$Qf := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |E_{k+1} f - E_k f|^2\Big)^{1/2} \tag{5.1.3}$$

egyenlőséggel definiáljuk.

Ebben a fejezetben fontos szerepe lesz a Paley-egyenlőtlenségnek (lásd Sch-W-S-P [30, 102. old. Cor. 5]), amely szerint ha $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0,1)$, akkor létezik egy A pozitív állandó, amelyre

$$A^{-1}\frac{1}{p}\|f\|_p \le \|Qf\|_p \le A\frac{p^{3/2}}{p-1}\|f\|_p. \tag{5.1.4}$$

A következőkben becslést adunk L^p-beli illetve Lipschitz-térbeli függvények Walsh-Fourier-sora 2^n indexű részletösszegeinek nulla helyen felvett értékeire.

5.1. Lemma. *Ha $f \in L^p[0,1)$, akkor*

$$|(E_nf)(0)| \le \sum_{k=0}^{n-1} 2^{(k+1)/p}\|f - E_kf\|_p + |\hat{f}(0)| \quad (1 \le p < \infty),$$

$$|(E_nf)(0)| \le \sum_{k=0}^{n-1} \|f - E_kf\|_\infty + |\hat{f}(0)|.$$

Bizonyítás. Legyen $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p[0,1)$. E_nf definíciójából (lásd (2.2.24)) és (2.2.29)-ből következik, hogy

$$(E_nf)(0) = \int_0^1 f(t)D_{2^n}(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f(t)r_k(t)D_{2^k}(t)dt + \hat{f}(0). \tag{5.1.5}$$

(2.3.34) alapján az (5.1.5)-ben szereplő összeg k-adik tagját az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$A_k := \int_0^1 f(t)r_k(t)D_{2^k}(t)dt = 2^k\left(\int_0^{2^{-k-1}} f(t)dt - \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f(t)dt\right) =$$

$$= 2^k\left(\int_0^{2^{-k-1}}(f(t) - (E_kf)(t))dt - \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}(f(t) - (E_kf)(t))dt\right).$$

Tekintsük először a $1 < p < \infty$ esetet, és legyen q a p szám konjugált párja, azaz $1/p + 1/q = 1$. A Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$|A_k| \le 2^{k+1}\|f - E_kf\|_p 2^{-(k+1)/q} = 2^{(k+1)/p}\|f - E_kf\|_p.$$

Ha $p = 1$, akkor nyilván fennáll a

$$|A_k| \le 2^{k+1}\|f - E_kf\|_1$$

egyenlőtlenség, és ha $p = \infty$, akkor

$$|A_k| \le 2^{k+1}\|f - E_kf\|_\infty 2^{-k-1} = \|f - E_kf\|_\infty.$$

Amennyiben ezeket a becsléseket beírjuk (5.1.5)-be, megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenségeket. □

5.1. Következmény. *Ha $\alpha < 1/p$, $1 \le p < \infty$, $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ és $\hat{f}(0) = 0$, akkor*

$$|(E_n f)(0)| \le M_{p,\alpha} 2^{n(1/p-\alpha)} \|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)},$$

ahol az $M_{p,\alpha}$ konstans csak p-től és α-tól függ.

Bizonyítás. A 5.1. Lemma és (5.1.2) alapján

$$|(E_n f)(0)| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{(k+1)/p} 2^{-k\alpha} = 2^{1/p} \|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{(1/p-\alpha)k} \le$$
$$\le M_{p,\alpha} \cdot 2^{n(1/p-\alpha)} \|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)}.$$

Az utolsó becslés igaz az $M_{p,\alpha} = \frac{2^{1/p}}{2^{1/p-\alpha}-1}$ konstanssal, mert $1/p > \alpha$. □

5.2. Becslések a diadikus integrál magfüggvényére

Ebben a pontban a diadikus integrál W magfüggvénye Walsh-Fourier-sorának

$$W_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{w_k}{k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

részletösszegeinek L^p-normájára adunk becsléseket.

5.2 Lemma. *Ha $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, akkor*

$$\|W_{n+1} - W_n\|_p \ge \frac{1}{8} 2^{-n/p}.$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$, és $1 \le p \le \infty$. Első lépésként megmutatjuk, hogy a

$$T_n f := 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} k\hat{f}(k) w_k = f * (D_{2^n} - K_{2^n}) \quad (f \in L^1[0,1))$$

operátor korlátos az $L^p[0,1)$ $(1 \le p \le \infty)$ téren. Ennek igazolásához alkalmazzuk (2.2.33)-at és a (2.2.9) egyenlőtlenséget, valamint a definíciót:

$$\|T_n f\|_p \le \|f\|_p (\|D_{2^n}\|_1 + \|K_{2^n}\|_1) \le 2\|f\|_p.$$

Ez alapján az

$$R_n f := 2^{-n-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} k\hat{f}(k) w_k = T_{n+1}(S_{2^{n+1}} f - S_{2^n} f) \quad (f \in L^1[0,1))$$

operátor is korlátos $L^p[0,1)$-en $(1 \le p \le \infty)$, és

$$\|R_n f\|_p \le 4\|f\|_p.$$

Alkalmazva ezt az operátort az $f := W_{n+1} - W_n$ függvényre kapjuk, hogy

$$R_n(W_{n+1} - W_n) = 2^{-n-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} k\frac{w_k}{k} = 2^{-n-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} w_k = 2^{-n-1} r_n D_{2^n}.$$

(2.2.25) alapján egyszerűen kiszámolható, hogy

$$\|D_{2^n}\|_p = (\int_0^{2^{-n}} 2^{np} dt)^{1/p} = 2^{\frac{np-n}{p}} = 2^{n/q} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{5.2.6}$$

R_n korlátosságából és az utolsó két egyenlőségből következik, hogy

$$2^{-n/p-1} = 2^{-n-1}\|D_{2^n}\|_p = \|R_n(W_{n+1} - W_n)\|_p \le 4\|W_{n+1} - W_n\|_p,$$

és ezzel állításunkat igazoltuk. □

5.3 Lemma. *Ha $1 < p < \infty$, akkor léteznek $0 < c_p \le C_p < \infty$ konstansok, amelyekre*

$$c_p 2^{-n/p} \le \|W - W_n\|_p \le C_p 2^{-n/p},$$

és ha $p = 1$, akkor létezik olyan C_1 konstans, amelyre

$$\|W - W_n\|_1 \le C_1 2^{-n}.$$

Bizonyítás. Legyen $1 \le p < \infty$. Az egyenlőtlenség jobb oldalának igazolásához a (2.3.14) előállításból indulunk ki. Szükségünk lesz továbbá a Walsh-Dirichlet- és a Walsh-Fejér-magfügvények L^p-normájának becslésére. (2.2.30) és (5.2.6) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|K_{2^n}\|_p &\le \frac{1}{2}(2^{-n}\|D_{2^n}\|_p + \sum_{j=0}^{n} 2^{j-n}\|D_{2^n}\|_p) = \\ &= \frac{1}{2} 2^{n/q-n}(1 + \sum_{j=0}^{n} 2^j) = 2^{n/q-n-1}(1 + 2^{n+1} - 1) = 2^{n/q} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Ha $2^N \le k < 2^{N+1}$, akkor (2.2.32) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|K_k\|_p &\le \sum_{i=0}^{N-1} 2^{i-N}\|K_{2^i}\|_p = \sum_{i=0}^{N-1} 2^{i-N} 2^{i/q} = \\ &= 2^{-N} \sum_{i=0}^{N-1} 2^{i(1+1/q)} \le 2^{-N} 2^{N(1+1/q)} = 2^{N/q}. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Az (5.2.6), (5.2.7) és (5.2.8) becslések segítségével (2.3.4)-ből megkapjuk a felső becslést a $\|W - W_n\|_p$ normára:

$$\begin{aligned}
\|W - W_n\|_p &\le \sum_{k=2^n+1}^{\infty} \|K_k\|_p\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{\|K_{2^n}\|_p}{2^n+1} + \frac{\|D_{2^n}\|_p}{2^n} \le \\
&\le \sum_{N=n}^{\infty} \sum_{k=2^N}^{2^{N+1}-1} \|K_k\|_p\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) + 2^{n/q-n} + 2^{n/q-n} \le \\
&\le \sum_{N=n}^{\infty} 2^{N/q}\left(\frac{1}{2^N-1} + \frac{1}{2^N} - \frac{1}{2^{N+1}-1} - \frac{1}{2^{N+1}}\right) + 2\cdot 2^{n/q-n} \le \\
&\quad 2\sum_{N=n}^{\infty} 2^{N/q-N} + 2\cdot 2^{n/q-n} \le 2\cdot 2^{n/q-n}\frac{1}{1-2^{-1/p}} + 2\cdot 2^{n/q-n} = C_p\cdot 2^{-n/p}.
\end{aligned}$$

A következőkben legyen $p > 1$. A Paley-egyenlőtlenség (5.1.4) és az 5.2. Lemma alapján következik, hogy

$$\|W - W_n\|_p \ge b_p\|(\sum_{k=n}^{\infty}|\sum_{\ell=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{w_\ell}{\ell}|^2)^{1/2}\|_p \ge b_p\|W_{n+1} - W_n\|_p \ge \frac{b_p}{8}2^{-n/p},$$

és ezzel állításunkat igazoltuk. □

5.3. A diadikus Cesàro operátor Lipschitz-tereken

Ebben a pontban a diadikus Cesàro operátor korlátosságát vizsgáljuk meg Lipschitz-tereken. Előtte azonban egy, a Cesàro operátorra vonatkozó azonosságot igazolunk.

5.4. Lemma. *Ha* $f \in L_0^1(\mathbb{I})$, *akkor*

$$Cf - E_n(Cf) = C(f - E_nf) + (E_nf)(0)\cdot(W - W_n) \quad (n \in \mathbb{P}).$$

Bizonyítás. Legyen $f \in L_0^1(\mathbb{I})$. Mivel $(E_nf)^\wedge(k) = \hat{f}(k)$, ha $0 \le k < 2^n$ és $(E_nf)^\wedge(k) = 0$ ha $k \ge 2^n$, így a Cesàro operátor definíciója alapján következik, hogy

$$(C(E_nf))^\wedge(k) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\hat{f}(\ell), \text{ ha } \quad 0 < k < 2^n,$$

$$(C(E_nf))^\wedge(k) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{2^n-1}\hat{f}(\ell) = \frac{(E_nf)(0)}{k}, \text{ ha } \quad k \ge 2^n.$$

Ezek alapján

$$C(E_nf) - E_n(Cf) = 0 + \sum_{k=2^n}^{\infty} \frac{(E_nf)(0)}{k} w_k = (E_nf)(0) \cdot (W - W_n)$$

teljesül. Ezt az egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy

$$Cf - E_n(Cf) = (Cf - C(E_nf)) + (C(E_nf) - E_n(Cf)) = C(f - E_nf) + (E_nf)(0) \cdot (W - W_n),$$

amivel állításunkat igazoltuk. □

5.1. Tétel. *Ha* $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$ *és* $\alpha < 1/p$, *akkor a Cesàro operátor korlátos a* $Lip(\alpha, p)$ *téren.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy α, p kielégíti a tételben adott feltételeket, és legyen $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$. Be fogjuk bizonyítani, hogy a Cf függvény $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$-nek is elme. Ehhez igazolnunk kell, hogy

$$\|Cf - E_n(Cf)\|_p \leq B_p \cdot 2^{-n\alpha} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{5.3.1}$$

ahol B_p egy csak p-től függő konstans. Az 5.4. Lemmából következik, hogy

$$\|Cf - E_n(Cf)\|_p \leq \|C(f - E_nf)\|_p + |(E_nf)(0)| \|W - W_n\|_p. \tag{5.3.2}$$

Mivel $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ és a Cesàro operátor korlátos $L^p(\mathbb{I})$-n (lásd 3.4. Tétel), így

$$\|C(f - E_nf)\|_p \leq C_p^1 \cdot \|f - E_nf\|_p \leq C_p^1 2^{-n\alpha} \|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} \leq C_p^2 2^{-n\alpha}, \tag{5.3.3}$$

ahol C_p^1, és C_p^2 csak p-től függő konstansok. Az 5.1. Következmény és az 5.3. Lemma alapján kapjuk, hogy

(5.3.4)

$$|(E_nf)(0)| \|W - W_n\|_p \leq M_{p,\alpha} 2^{n/p - n\alpha} C_p 2^{-n/p} \|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} = M_{p,\alpha} C_p \cdot 2^{-n\alpha} \|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)}.$$

Összevetve (5.3.4)-et és (5.3.3)-at (5.3.2)-vel megkapjuk (5.3.1)-et, és ezzel az 5.1. Tételt bebizonyítottuk. □

Az következő tételben bebizonyítjuk, hogy az $\alpha < 1/p$ feltétel a $p > 1$ esetben nem gyengíthető.

5.2. Tétel. *Bármely* $1 < p < \infty$ *esetén létezik olyan* $f \in \mathrm{Lip}(1/p, p)$ *függvény, amelyre* Cf *nem eleme a* $Lip(1/p, p)$ *térnek.*

Bizonyítás. Legyen

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n D_{2^n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} w_k.$$

Bebizonyítjuk, hogy $f \in \text{Lip}(1/p,p)$, ha $p > 1$, és $Cf \notin \text{Lip}(1/p,p)$. Az első állítás következik (2.2.25)-ből (5.2.6) alapján:

$$\|f - E_n f\|_p = \|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{\ell=2^k}^{2^{k+1}-1} w_\ell\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k}\|D_{2^k}\|_p =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} \cdot 2^{k/q} = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k/p} = 2^{-n/p}\frac{1}{1-2^{-1/p}}.$$

Könnyen igazolható, hogy

$$Cf = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{n-1}{k} \cdot w_k + f,$$

és így

$$Cf - E_n(Cf) = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\ell=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{k-1}{\ell} \cdot w_\ell + f - E_n f.$$

(5.1.4) és az 5.2-es Lemma alapján minden $n \in \mathbb{P}$ esetén igaz, hogy

$$\frac{Ap^{3/2}}{p-1}\|\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\ell=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{k-1}{\ell} \cdot w_\ell\|_p \geq \|(\sum_{k=n}^{\infty}(\sum_{\ell=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{k-1}{\ell} \cdot w_\ell)^2)^{1/2}\|_p \geq$$

$$\geq (n-1)\|\sum_{\ell=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{w_\ell}{\ell}\|_p = (n-1)\|W_{n+1} - W_n\|_p \geq (n-1)c_p \cdot 2^{-n/p}.$$

Tehát (5.1.1) alapján $Cf \notin \text{Lip}(1/p,p)$, és tételünket bebizonyítottuk. □

6. A diadikus Cesàro operátor folytonos változata

Ebben a pontban a Cesàro operátor folytonos megfelelőjét vizsgáljuk a Walsh-Fourier-együtthatókat Walsh-Fourier-transzformálttal helyettesítve. Szükségünk lesz a Cesàro operátor integrál-előállítására. Ezzel a Cesàro operátort ebben az esetben is lokális konvolúciós operátorok összegeként állítjuk elő. Az előző fejezethez hasonlóan vizsgálatainkban nem a diadikus testből, hanem az azt reprezentáló $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ intervallumból indulunk ki. A fejezetben szereplő tételek és állítások a [16]-os számú cikkben találhatóak meg.

6.1. Walsh-Fourier-transzformált

A Walsh-Fourier-transzformáltat a diadikus test karaktereinek megfelelő ψ_y $(y \in \mathbb{R}_+)$ *általánosított Walsh-függvények* segítségével értelmezzük. Nevezetesen legyen

$$\psi_y(x) = (-1)^{\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} x_j y_{-j-1}},$$

ahol $x_j, y_j \in \{0,1\}$ $(j \in \mathbb{Z})$ az $x, y \in \mathbb{R}_+$ számoknak az

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{x_k}{2^{k+1}}, \quad y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{y_k}{2^{k+1}},$$

diadikus elélőállításában szereplő ún. *bináris együtthatók.* Speciálisan, ha

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \cdots + \frac{x_j}{2^{j+1}} + \cdots \in \mathbb{I}, \quad \text{és} \quad y = y_1 + y_2 2 + \cdots + y_{-j-1}2^j + \cdots \in \mathbb{N},$$

akkor a Walsh-függvények (2.2.5) értelmezése alapján

$$w_y(x) = \psi_y(x) \quad (x \in \mathbb{I}, y \in \mathbb{N}),$$

s így valóban a ψ_y fügvények a w_n Walsh-függvények kitejesztéseinek tekinthetők. A definícióból az is egyből látható, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén a ψ_k függvény 1-szerint periodikus.

A fenti értelmezés alapján egyszerűen igazolható, hogy minben $x, y \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}$ és m.m. $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned} &\psi_y(x \dotplus t) = \psi_y(x)\psi_y(t), \quad \psi_{2^n x}(y) = \psi_x(2^n y) \\ &\psi_x(y) = \psi_y(x), \ \psi_y(x) = \psi_{[y]}(x)\psi_{[x]}(y), \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

ahol $[u]$ jelöli az $u \in \mathbb{R}_+$ szám egész részét és $x \dot{+} t$ az $x, t \in \mathbb{R}_+$ számok diadikus összegét jelölik (lásd Sch-W-S-P [30, Ch. 9.2], Schipp-Wade [34, Ch. 3]).

Az $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ függvény *Walsh-Fourier-transzformáltján* az

$$\hat{f}(x) := \int_0^\infty f(t)\psi_x(t)dt \quad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{6.1.2}$$

függvényt értjük. Ha f tartója része $\mathbb{I}$-nek és $y \in \mathbb{N}$, akkor visszakapjuk az f Walsh-Fourier-együtthatóját. A Walsh-Fourier-transzformáltat kiterjeszthetjük az $L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ térről egy $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$ unitér leképezéssé, amelyre

$$(\mathcal{F}f)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2^n} f(t)\psi_x(t)\,dt \quad \text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+\text{-ra.}$$

Az $L^1(\mathbb{R}_+) \cup L^2(\mathbb{R}_+)$ térre kiterjesztett operátort az $\mathcal{F}$ szimbólummal jelöljük.

A későbbiekben használni fogunk néhány, a transzláció, és a dilatáció operátorral kapcsolatos összefüggést:

$$(\tau_x f)(t) := f(x \dot{+} t), \quad (\delta_n f)(t) := f(2^n t) \quad (x, t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{Z}).$$

Az $\mathcal{F}$ kiterjesztett Walsh-Fourier-transzformáltra teljesülnek az alábbi összefüggések (lásd Sch-W-S-P [30, Ch. 9.1], Schipp-Wade [34, Ch. 3.1]):

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(\tau_x f) = w_x \mathcal{F}f, \ \mathcal{F}(\psi_x f) = \tau_x(\mathcal{F}f), \\ &\mathcal{F}(\delta_n f) = 2^{-n}\delta_{-n}(\mathcal{F}f) \quad (f \in L^1 \cup L^2, x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Továbbá

$$\langle \mathcal{F}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{F}g\rangle, \ \mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \quad (f, g \in L^1). \tag{6.1.4}$$

A következőkben a $[0, t]$ intervallum azon felbontását fogjuk használni, amelyet az alábbi lemmában adunk meg.

6.1. Lemma. *Ha $t_k, k \in \mathbb{Z}$ a $t \in \mathbb{R}_+$ szám bináris együtthatói és*

$$A_k := [2^{-k-1}, 2^{-k}) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

akkor egy megszámlálható halmaz kivételével

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}, t_k=1} (t \dot{+} A_k) = [0, t)$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}_+$-ra, ahol $t \dot{+} A_k = \{t \dot{+} x : x \in A_k\}$.

Bizonyítás. Legyen $t^{(k)} := \sum_{j=-\infty}^{k-1} \frac{t_j}{2^{j+1}}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ekkor $t^{(k)} \leq t^{(k+1)}$, és $t^{(k)} < t^{(k+1)}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $t_k = 1$. Következésképpen

$$[0, t) = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} [t^{(j)}, t^{(j+1)}) = \bigcup_{t_j=1} [t^{(j)}, t^{(j+1)}).$$

A diadikus összeadás $\dot{+}$ definícióját használva $t_j = 1$ esetén kapjuk, hogy

$$t \dot{+} A_j = t^{(j)} + \{ \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{|x_k - t_k|}{2^{k+1}} : x \in A_j \} = [t^{(j)}, t^{(j+1)}],$$

és ezzel állításunkat igazoltuk. □

Az *általánosított Walsh-Dirichlet-féle magfüggvény* definíció szerint

$$D_t^\circ(y) = \int_0^t \psi_x(y) dx \quad (t, y \in \mathbb{R}_+).$$

Ha $t = n \in \mathbb{N}$ egész szám, akkor D_t az $\mathbb{I}$ intervallumon kívül eltűnik, az $\mathbb{I}$-n pedig a korábban bevezetett n-edik Walsh-Dirichlet-féle magfüggvénnyel esik egybe:

$$D_t^\circ(y) \doteq \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} w_k(y) = D_n(y) & (y \in \mathbb{I}), \\ 0 & (y \in [1, \infty)) \end{cases}$$

minden $t = n \in \mathbb{N}$-re, és

$$D_{2^k}^\circ = 2^k \chi_{[0, 2^{-k})} \tag{6.1.5}$$

minden $k \in \mathbb{Z}$-ra, ahol D_n a korábban bevezetett közönséges Walsh-Dirichlet-féle magfüggvényt jelöli (lásd Sch-W-S-P [30, 428. old., Ch. 9.4]).

6.2. A diadikus Cesàro operátor folytonos változata

Ebben az alpontban folytonos esetben definiáljuk a Cesàro operátort, majd az operátort integrál-operátorként is előállítjuk, és bebizonyítjuk, hogy az operátor korlátos az $L^p(\mathbb{R}_+)$ $(1 \leq p < \infty)$ téren.

Bebizonyítjuk, hogy minden $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ függvény esetén egyetlen olyan $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ függvény létezik, amelyre

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \hat{f}(u)\, du \quad (x > 0). \tag{6.2.1}$$

Az $L^1(\mathbb{R}_+)$ térről $L^1(\mathbb{R}_+)$ térre képező C operátort, amelyet a $Cf := g$ hozzárendeléssel definiálunk, *diadikus Cesàro operátornak* nevezzük az $L^1(\mathbb{R}_+)$ téren. Megmutatjuk, hogy C operátort előállíthatjuk lokális konvolúciós diadikus wavelet operátorok összegeként.

A wavelet operátorok magfüggvényének leírásához az $a(t) := (t - [t])/t$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ függvény Walsh-Fourier-transzformáltjából indulunk ki:

$$A(x) := (\mathcal{F}a)(x) = \lim_{n \to \infty} \int_0^{2^n} \frac{t - [t]}{t} w_x(t)\, dt \quad (x \in \mathbb{R}_+). \tag{6.2.2}$$

Az 6.2. Lemmában belátjuk, hogy $A \in L^1(\mathbb{R}_+)$. A becsléséhez három függvényt vezetünk be, nevezetesen az f_n, g_n és h_n függvényeket:

$$f_n(x) := \sum_{j=-\infty}^{n} 2^{j-n} \sum_{i=j}^{n} D_{2^i}^{\circ}(x + 2^{-j}),$$

$$g_n(x) := \sum_{j=-\infty}^{n} 2^{j} \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} D_{2^i}^{\circ}(x + 2^{-j}),$$

$$h_n(x) := \sum_{i=n}^{\infty} 2^{n-i+2} D_{2^i}^{\circ}(x),$$

ahol $n \in \mathbb{Z}$, és $x \in \mathbb{R}_+$. Az A függvény becsülhető f_0, g_0 és h_0 segítségével. Ezen kívül teljesül az alábbi

6.2. Lemma. *Minden $x \in \mathbb{R}_+$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén*

$$|2^n A(2^n x)| \le f_n(x) + g_n(x) + h_n(x), \tag{6.2.3}$$

következésképpen $A \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Bizonyítás. A (6.2.3) egyenlőtlenséget elegendő $n = 0$ esetén igazolni. Valóban, mivel (6.1.5) alapján

$$2^m D_{2^i}^{\circ}(2^m x + 2^{-j}) = 2^m D_{2^i}^{\circ}(2^m(x + 2^{-j-m})) = D_{2^{i+m}}^{\circ}(x + 2^{-j-m}),$$

így

$$\begin{aligned} 2^m f_n(2^m x) &= \sum_{j=-\infty}^{n} 2^{j-n} \sum_{i=j}^{n} D_{2^{i+m}}^{\circ}(x + 2^{-j-m}) = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{n+m} 2^{j-n-m} \sum_{i=j}^{n+m} D_{2^i}^{\circ}(x + 2^{-j}) = f_{n+m}(x), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} 2^m g_n(2^m x) &= \sum_{j=-\infty}^{n} 2^{j} \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} D_{2^{i+m}}^{\circ}(x + 2^{-j-m}) = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{n+m} 2^{j} \sum_{i=n+m}^{\infty} 2^{-i} D_{2^i}^{\circ}(x + 2^{-j}) = g_{n+m}(x). \end{aligned}$$

Továbbá

$$2^m h_n(2^m x) = \sum_{i=n}^{\infty} 2^{n-i} D_{2^{i+m}}^{\circ}(x) = \sum_{i=n+m}^{\infty} 2^{n+m-i} D_{2^i}^{\circ}(x) = h_{n+m}(x).$$

Ez alapján (6.2.3) következik az

$$(6.2.4)\qquad |A(x)| \le f_0(x) + g_0(x) + h_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

egyenlőtlenségből. (6.2.4) igazolásához a (6.1.1) alatt szereplő azonosságokat használjuk. Az A függvény becsléséhez induljunk ki az

$$A^{(n)}(x) := \int_0^{2^n} \frac{u-[u]}{u}\psi_x(u)\,du = \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_k(x)\int_k^{k+1}(1-\frac{k}{u})\psi_{[x]}(u)\,du = \sum_{k=0}^{2^n-1}\psi_k(x)a_k(x)$$

felbontásból, ahol

$$a_k(x) := \int_k^{k+1}(1-\frac{k}{u})\psi_{[x]}(u)\,du = \int_0^1 \frac{t}{t+k}\psi_{[x]}(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

A második egyenlőségnél kihasználtuk, hogy az $u \to \psi_{[x]}(u)$ függvény 1-szerint periodikus. Legyen $x \ge 1$. Ekkor $a_0(x) = 0$, továbbá parciális integrálással kapjuk, hogy

$$a_k(x) = -\int_0^1 \frac{k}{(k+t)^2}J_{[x]}(t)\,dt = -\frac{J_{[x]}^{\langle 2\rangle}(1)}{k} - \int_0^1\left(\frac{k}{(k+t)^2}-\frac{1}{k}\right)J_{[x]}(t)\,dt,$$

ahol

$$J_x(t) := J_x^{\langle 1\rangle}(t) := \int_0^t \psi_x(s)\,ds, \quad J_x^{\langle 2\rangle}(t) := \int_0^t J_x^{\langle 1\rangle}(s)\,ds \quad (t, x \in \mathbb{R}_+, x \ge 1).$$

Az integrálszámítás második középértéktétele alapján létezik egy $\xi_k \in (0,1)$ szám, amelyre

$$a_k(x) = -\frac{J_{[x]}^{\langle 2\rangle}(1)}{k} - \left(\frac{k}{(k+1)^2}-\frac{1}{k}\right)\int_{\xi_k}^1 J_{[x]}(t)\,dt.$$

Ez alapján azt kapjuk, hogy

$$A^{(n)}(x) = -J_{[x]}^{\langle 2\rangle}(1)\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{\psi_k(x)}{k} + \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{2k+1}{k(k+1)^2}(J_{[x]}^{\langle 2\rangle}(1) - J_{[x]}^{\langle 2\rangle}(\xi_k))\psi_k(x),$$

és ebből

$$(6.2.5)\qquad A(x) = -J_{[x]}^{\langle 2\rangle}(1)W(x) + R(x),$$

ahol

$$(6.2.6)\qquad W(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k(x)}{k}, \quad |R(x)| \le 4\max_{t\in[0,1]}|J_{[x]}^{\langle 2\rangle}(t)|.$$

Legyen $0 \leq x < 1$. Ekkor $a_0(x) = 1$ és

$$a_k(x) = \int_k^{k+1} (1 - \frac{k}{u})\, du = 1 - k \log(1 + \frac{1}{k}) \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 1).$$

A Taylor-formula segítségével kapjuk, hogy

$$k \log(1 + \frac{1}{k}) = 1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k^2} \frac{1}{(1 + \theta_k/k)^3},$$

ahol $0 < \theta_k < 1$. Következésképpen $0 \leq x < 1$ esetén is a másik esethez hasonló becsléshez jutunk:

$$A(x) = \frac{1}{2} W(x) + R(x), \tag{6.2.7}$$

ahol $|R(x)| \leq 2$.

ψ_x és $J_x^{\langle 2 \rangle}$ definíciója alapján igazolható (lásd Sch-W-S-P [30, 431. old., Ch. 9.4]), hogy

$$J^{\langle 2 \rangle}_{2^n + 2^m + k}(1) = 0, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |J^{\langle 2 \rangle}_{2^n + 2^m + k}(t)| = 2^{-n-m-3} \tag{6.2.8}$$

teljesül minden $0 \leq k < 2^m, 0 \leq m < n$ esetén, és

$$J^{\langle 2 \rangle}_{2^n}(1) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |J^{\langle 2 \rangle}_{2^n}(t)| = 2^{-n-2} \tag{6.2.9}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. (6.1.5), (6.2.8) és (6.2.9) alapján $x \geq 1$ esetén

$$|R(x)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{j} 2^{-j} D^{\circ}_{2^{-i}}(x \dot{+} 2^j) = \sum_{j=-\infty}^{0} 2^j \sum_{i=j}^{0} D^{\circ}_{2^i}(x \dot{+} 2^{-j}) = f_0(x)$$

teljesül. Az 1 periódusú W függvény a $[0, 1)$ intervallumon az alábbi módon becsülhető (lásd (2.3.12)):

$$|W(x)| \leq h_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i+2} D^{\circ}_{2^i}(x) \quad (x \in [0, 1)).$$

(6.2.8) és (6.2.9) alapján

$$|J^{\langle 2 \rangle}_{[x]}(1)||W(x)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-j} D^{\circ}_{2^i}(x \dot{+} 2^j) = g_0(x),$$

és ezzel a (6.2.4) egyenlőtlenséget $x \geq 1$ esetén igazoltuk. Ha $0 \leq x < 1$, akkor $|R(x)| \leq h_0(x)/2$ és

$$|A(x)| \leq \frac{1}{2} h_0(x) + \frac{1}{2} h_0(x) = h_0(x) \quad (x \in [0, 1)),$$

következésképpen (6.2.4) a $[0, 1)$ intervallumon is teljesül. □

E fejezet legfontosabb állításainak igazolásához szükségünk van még egy segédtételre.

6.3. Lemma. *Az*

$$F^*h := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |h| * |f_n|, \quad \text{és} \quad G^*h := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |h| * |g_n|$$

maximál operátorok gyenge $(1,1)$ *és erős* (∞,∞) *típusúak.*

Bizonyítás. Mivel $\|D^{\circ}_{2^n}\|_1 = 1$ $(n \in \mathbb{Z})$, így

$$\|f_n\|_1 \le \sum_{j=-\infty}^{n} (n-j+1)2^{-n+j} = 4, \quad \|g_n\|_1 \le \sum_{j=-\infty}^{n} 2^{-n+j+1} = 4$$

minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén. Következésképpen (2.2.10) alapján F^* és G^* is erős (∞,∞) típusú. Bebizonyítható, hogy F^* és G^* kvázi-lokális tulajdonságú (lásd Sch-W-S-P [30, 262. old.]). Tehát alkalmazhatjuk [30] 6.2. fejezet 4. tételének analogonját $\mathbb{R}_+$-ra, azaz a szóban forgó operátorok gyenge $(1,1)$ típusúak. (Vesd össze Sch-W-S-P [30, Ch. 9.5/ Th. 4]). □

Legyen $a(x) := (x - [x])/x$,

(6.2.10) $$v(x) := 2a(x) - a(2^{-1}x), \; V(x) := (\mathcal{F}v)(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

és χ_n $(n \in \mathbb{Z})$ jelölje a $[2^{-n-1}, 2^{-n})$ intervallum karakterisztikus függvényét. Ekkor (6.2.2) és a Walsh-Fourier-transzformált ismert tulajdonsága alapján

$$V(x) = 2(A(x) - A(2x)) \quad (x > 0).$$

Vezessük be a

(6.2.11) $$(\mathcal{W}_n f)(x) := 2^n \int_0^\infty f(t)V(2^n(x \dot{+} t))\,dt \quad (f \in L^1, n \in \mathbb{Z})$$

wavelet-operátorokat, majd ezekkel képezzük a

(6.2.12) $$\mathcal{W}f := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{W}_n(f\chi_n) \quad (f \in L^1)$$

lokális konvolúciós operátort. Könnyen igazolható, hogy (6.2.12)-ben szereplő sor majdnem mindenütt pontonként és L^1-normában is konvergál. A 6.2. Tételben belátjuk, hogy $\mathcal{W}$ és $\mathcal{C}$ megegyeznek az $L^1(\mathbb{R}_+)$ téren. A $\mathcal{W}$ operátornak az $L^p := L^p(\mathbb{R}_+)$ téren való korlátosságának igazolásához használni fogjuk az alábbi maximál operátort:

(6.2.13) $$(\mathcal{V}f)(x) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \int_0^\infty |f(x \dot{+} t)V(2^n t)|\,dt \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Jelöljük $\|f\|_p$-vel az $f \in L^p$ függvény L^p-normáját.

6.1. Tétel. *A $\mathcal{V}$ maximál operátor gyenge (1,1) típusú, és erős (p,p) típusú, ha $1 < p \leq \infty$:*

$$\|\mathcal{V}f\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad (f \in L^p, 1 < p \leq \infty), \tag{6.2.14}$$

ahol C_p csak a p-től függő konstans .

Bizonyítás. Legyen

$$V_n(t) := 2^n V(2^n t) \quad (t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{Z}). \tag{6.2.15}$$

Ekkor (6.2.10) alapján

$$V_n(t) = 2^{n+1}(A(2^n t) - A(2^{n+1}t)) =: 2A_n(t) - A_{n+1}(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{Z}),$$

és következésképpen

$$(\mathcal{V}f)(x) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}_+} |f(x \dotplus t)V_n(t)|\, dt \leq 3 \sup_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}_+} |f(x \dotplus t)A_n(t)|\, dt.$$

A 6.2. Lemma állításából következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}_+} |f(x \dotplus t)A_n(t)|\, dt \leq (F^*f)(x) + (G^*f)(x) + (H^*f)(x),$$

ahol

$$(H^*f)(x) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} (|f| * h_n)(x).$$

Az utóbbi maximál operátor becsülhető a

$$(E^*f)(x) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |(f * D^\circ_{2^n})(x)| \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

diadikus maximál operátorral. Valóban, mivel

$$(|f| * h_n)(x) \leq \sum_{i=n}^{\infty} 2^{n-i+2}(|f| * D^\circ_{2^i})(x) \leq 8(E^*|f|)(x),$$

így a

$$(H^*f)(x) \leq 8(E^*|f|)(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

egyenlőtlenség teljesül. Ebből következik, hogy H^* gyenge (1,1) és erős (∞, ∞) típusú. 6.3. Lemma alapján ugyanez igaz az F^* és G^* operátorokra. Ebből következik, hogy $\mathcal{V}$ is hasonló típusú operátor. □

6.2. Tétel. *A $\mathcal{W}$ operátor korlátos az L^1 téren, és megegyezik a C diadikus Cesàro operátorral:*

$$(6.2.16)\qquad \left(\widehat{\mathcal{W}f}\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}(t)\,dt \quad (x > 0, f \in L^1).$$

Továbbá, a $\mathcal{W}$ operátor korlátos az L^p téren, ha $1 \le p < \infty$:

$$(6.2.17)\qquad \|\mathcal{W}f\|_p \le C_q\|f\|_p \quad (f \in L^p),$$

ahol $1/p + 1/q = 1$, C_q megegyezik a (6.2.14)-ben szereplő konstanssal. A $\mathcal{W}$ operátor nem korlátos az L^∞ téren.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $\mathcal{W}$ korlátos az L^1 téren. (6.2.12) és (6.2.15) alapján a $\mathcal{W}$ operátor

$$(6.2.18)\qquad \mathcal{W}f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f\chi_n) * V_n \quad (f \in L^1)$$

alakba írható. Könnyen látható, hogy

$$\|V_n\|_1 = \|V\|_1 \; (n \in \mathbb{Z}).$$

Mivel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}_+}|(\mathcal{W}_nf)(x)|\,dx \le \sum_{n\in\mathbb{Z}}\||\chi_nf| * |V_n|\|_1 \le \|V\|_1\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|\chi_nf\|_1 = \|V\|_1\|f\|_1 < \infty,$$

ezért a (6.2.12) sor majdnem mindenütt és L^1-normában konvergál, és

$$\|\mathcal{W}f\|_1 \le \|V\|_1\|f\|_1.$$

Következésképpen (6.2.17)-et $p = 1$ esetén igazoltuk.

A $\mathcal{W}$ operátor L^p téren való korlátosságának igazolásához rögzítsünk egy $g \in L^q$, $\|g\|_q \le 1$ függvényt, ahol $1/p + 1/q = 1$. Valamely $F \in L^p$ és $G \in L^q$ függvényre vezessük be az alábbi bilineáris funkcionált:

$$\langle F, G\rangle := \int_{\mathbb{R}_+} F(t)G(t)\,dt \quad (F \in L^p, G \in L^q).$$

Fubini tétele alapján

$$\langle f * F, G\rangle = \langle F, f * G\rangle \quad (f \in L^1, F \in L^p, G \in L^q).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$|\langle \mathcal{W}f, g\rangle| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle |V_n| * |\chi_nf|, |g|\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle |\chi_nf|, |V_n| * |g|\rangle \le$$
$$\le \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle |\chi_nf|, \mathcal{V}(|g|)\rangle = \langle |f|, \mathcal{V}(|g|)\rangle.$$

A Hölder egyenlőtlenséget és 6.1. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$|\langle \mathcal{W}f, g\rangle| \le \|f\|_p \|\mathcal{V}(|g|)\|_q \le C_q \|f\|_p \|g\|_q.$$

Véve a szuprémumot a $\|g\|_q \le 1$ halmazon kapjuk, hogy

$$\|\mathcal{W}f\|_p \le C_q \|f\|_p,$$

amivel (6.2.17)-et igazoltuk.

Az inverziós formula (lásd Sch-W-S-P [30, Ch. 9.3/Th. 7]) és (6.2.10) alapján $\mathcal{F}V = v$ teljesül. Mivel a (6.2.18) sor L^1-normában konvergál (6.1.2), (6.2.15), (6.2.18), (6.1.3) és (6.1.4) alapján

$$(\mathcal{F}(\mathcal{W}f))(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}V_n)(x)(\mathcal{F}(\chi_n f))(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v(2^{-n}x)\langle f w_x, \chi_n\rangle. \tag{6.2.19}$$

Ismert tény, hogy a $\chi := \chi_{[0,1)}$ függvényre $\mathcal{F}\chi = \chi$ (lásd Sch-W-S-P [30, Ch. 9.3]). Mivel $\chi_n = \delta_n\chi - \delta_{n+1}\chi$, ezért (6.1.3) alapján kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}\chi_n = 2^{-n}\chi_{[0,2^n)} - 2^{-n-1}\chi_{[0,2^{n+1})} \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{6.2.20}$$

A 6.1. Lemma alapján

$$\chi_{[0,x)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \tau_x \chi_n \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

és ez a sor majdnem mindenütt és L^1-normában is konvergál. (6.1.3), (6.1.4) és (6.2.20) alapján (6.2.16) jobb oldala a következő alakba írható:

(6.2.21)
$$\frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}(t)\,dt = \frac{1}{x}\langle \mathcal{F}f, \chi_{[0,x)}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{x_n}{x}\langle \mathcal{F}f, \tau_x\chi_n\rangle =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{x_n}{x}\langle f\psi_x, \mathcal{F}\chi_n\rangle = \Big\langle f\psi_x, \frac{1}{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n 2^{-n-1}(2\chi_{[0,2^n)} - \chi_{[0,2^{n+1})})\Big\rangle.$$

Az utolsó összeg kifejezhető az

$$\alpha_n(x) := \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{x_k}{2^{k+1}} \quad (x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{Z}) \tag{6.2.22}$$

függvények segítségével. Könnyen látható, hogy $\alpha_0(x)/x = (x - [x])/x = a(x)$ $(x \in \mathbb{R}_+)$, és

$$\alpha_n(x) = 2^n\alpha_0(2^{-n}x), \quad \frac{x_n}{2^{n+1}} = \alpha_{-n}(x) - \alpha_{-n-1}(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{Z}). \tag{6.2.23}$$

Alkalmazva az Abel-transzformációt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n 2^{-n-1}(2\chi_{[0,2^n)} - \chi_{[0,2^{n+1})}) =$$
$$= \frac{1}{x}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\alpha_{-n}(x)\chi_{[0,2^n)} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\alpha_{-n-1}(x)\chi_{[0,2^n)} +$$
$$+ \alpha_{-n}(x)\chi_{[0,2^{n+1})} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{-n-1}(x)\chi_{[0,2^{n+1})}\Big) =$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2\alpha_n(x)\chi_{[0,2^{-n})} - 2\alpha_n(x)\chi_{[0,2^{-n-1})} - \alpha_n(x)\chi_{[0,2^{-n})} + \alpha_{n+1}(x)\chi_{[0,2^{-n-1})}) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\alpha_n(x) - \alpha_{n+1}(x)}{x}\chi_n.$$

(6.2.10), (6.2.22) és (6.2.23) alapján

$$\frac{2\alpha_n(x) - \alpha_{n+1}(x)}{x} = \frac{2\alpha_0(2^{-n}x)}{2^{-n}x} - \frac{\alpha_0(2^{-n-1}x)}{2^{-n-1}x} = v(2^{-n}x).$$

Következésképpen (6.2.19), (6.2.21) és (6.2.23) alapján kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}(t)\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v(2^{-n}x)\langle f\psi_x, \chi_n\rangle = (\widehat{\mathcal{W}f})(x).$$

Ezzel (6.2.16)-ot beláttuk.

Megmutatjuk, hogy (6.2.17) nem teljesül $p = \infty$ esetén. Jelöljük a $H \subset \mathbb{R}_+$ halmaz karakterisztikus függvényét χ_H-val és legyen

$$f_0 := \chi_{[0,2^{-1})} - \chi_{[2^{-1},1)}. \tag{6.2.24}$$

Ekkor a $g_0 := Cf_0 \in L^1$ függvényre a

$$\|g_0\|_\infty = \infty$$

egyenlőség teljesül. (6.2.24) alapján $f_0 = 2\chi_{[0,2^{-1})} - \chi_{[0,1)}$ és következésképpen $\hat{f}_0 = \chi_{[0,2)} - \chi_{[0,1)} = \chi_{[1,2)}$. Ebből következik, hogy

$$\hat{g}_0(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}_0(t)\,dt = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1) \\ \dfrac{x-1}{x} & (1 \le x < 2) \\ \dfrac{1}{x} & (2 \le x < \infty). \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy (6.1.3) alapján

$$\hat{\chi}_{[0,2^n)} = 2^n\chi_{[0,2^{-n})}.$$

Ebből következik, hogy

$$\|g_0\|_\infty \geq 2^n \int_0^{2^{-n}} g_0(t)\,dt = \langle g_0, \hat{\chi}_{[0,2^n)}\rangle = \langle \hat{g}_0, \chi_{[0,2^n)}\rangle =$$
$$= \int_0^{2^n} \hat{g}_0(t)dt = \int_1^2 \frac{t-1}{t}\,dt + \int_2^{2^n} \frac{dt}{t} = 1 + (n-2)\log 2,$$

következésképpen $\|g_0\|_\infty = \infty$. □

6.3. A Walsh-transzformált Dirichlet-magfüggvényének egy előállítása

A Cesàro operátor vizsgálata során a $[0,1)$ intervallumon a Dirichlet-féle magfüggvény egy diadikus differencia operátorral való előállításából indulunk ki. Ennek alapján írtuk fel a Cesàro operátort lokális konvolúciós operátor alakjában. Ebben a fejezetben az $\mathbb{R}_+$-ra vonatkozó eset tárgyalása során más utat követtünk. A $[0,1)$ intervallumra vonatkozó esethez hasonló tárgyalást követtünk a [13] dolgozatban. Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a diadikus differencia operátort kiterjesztve $\mathbb{R}_+$-beli függvényekre a Dirichlet-féle magfüggvényre érvényes lesz a (2.3.32)-nek megfelelő előállítás.

Az alábbiakban az általánosított Walsh-Dirichlet-féle magfüggvénynek ezt az új előállítását adjuk meg.

6.3. Tétel. *Legyen $(t_k, k \in \mathbb{Z})$ a $t \in \mathbb{R}_+$ szám bináris együtthatóinak a sorozata. Ekkor*

i) $D^\circ_{2^{k+1}}(x) = D^\circ_{2^k}(x)(1 + \psi_{2^k}(x))$,

ii) $D^\circ_t(x) = \psi_t(x) \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} t_k \psi_{2^{-k-1}}(x) D^\circ_{2^{-k-1}}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} t_{-k-1}\psi_{2^k}(x) D^\circ_{2^k}(x)$.

Bizonyítás. (6.1.1) alapján $\psi_x(y \dotplus 2^k) = \psi_x(y)\psi_{2^k}(x)$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{Z}$ esetén, tehát

$$D^\circ_{2^{k+1}}(x) = \int_0^{2^k} \psi_x(y)dy + \int_{2^k}^{2^{k+1}} \psi_x(y)dy = D^\circ_{2^k}(x) + \psi_{2^k}(x) D^\circ_{2^k}(x),$$

s ezzel az i) azonosságot beláttuk. A ii) bizonyításához az 6.1. Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$D^\circ_t(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k \int_{t \dotplus A_k} \psi_x(y)dy. \tag{6.3.1}$$

Mivel

$$\int\limits_{t\dotplus A_k} \psi_x(y)\,dy = \int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \psi_x(y \dotplus t)\,dy = \psi_x(t)(D^\circ_{2^{-k}}(x) - D^\circ_{2^{-k-1}}(x)),$$

ezért innen (6.3.1) és i) alapján ii) már következik . □

Az $\mathbb{R}_+$ intervallumon értelmezett f függvények n-edik diadikus differencia-operátorát a

$$\Delta_n f(x) := \sum_{j=-\infty}^{n-1} 2^{j-1}(f(x) - f(x \dotplus e_j)) \quad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{6.3.2}$$

utasítással értelmezzük. Ha valamely $x \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik a

$$f^{[1]} := \lim_{n\to\infty} (\Delta_n f)(x)$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható az x pontban, és $f^{[1]}(x)$ számot az f x pontban vett diadikus deriváltjának nevezzük. Megjegyezzük, hogy az itt bevezetett operátor a Sch-W-S-P [30] könyvben alkalmazott operátor egy módosítása, amely alkalmazása révén egyszerűbb és áttekinthetőbb formulákat kapunk.

Az $\mathbb{R}_+$-on értelmezett f függvények esetén a diadikus differencia-operátor egy módosított változatát is használni fogjuk a következőkben:

$$\Delta_n^- f(x) := \Delta_n f(x) - 2^{n-1}(f(x) - f(x \dotplus e_n)). \tag{6.3.3}$$

Nyilvánvalóan a

$$\Delta_n^- f := \Delta_n f - (\Delta_{n+1} f - \Delta_n f) \tag{6.3.4}$$

egyenlőség teljesül minden $n \in \mathbb{P}$ esetén. Az általánosított Walsh-Dirichlet-féle magfüggvény előállítható ezzel az operátorral:

6.4 Tétel. *Ha $s \in \mathbb{Z}$ és $t \in [2^{-s-1}, 2^{-s})$, akkor minden $u \in \mathbb{R}_+$ esetén $D^\circ_u(t) = \Delta_s^- \psi_u(t)$.*

Bizonyítás. A D_{2^k} magfüggvények (6.1.5) előállításából és az általánosított Walsh-függvények definíciójából következik, hogy

$$\psi_u(2^{-k-1})D^\circ_{2^{-k-1}}(t) = \begin{cases} 0 & (t \geq 2^{k+1}) \\ 2^{-k-1} & (0 \leq t < 2^k) \\ -2^{-k-1} & (2^k \leq t < 2^{k+1}), \end{cases}$$

és így az 6.3. Tétel alapján

$$\begin{aligned} D^\circ_u(t) &= \psi_u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \psi_t(2^{-k-1}) D^\circ_{2^{-k-1}}(t) = \\ &= \frac{\psi_u(t)}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - (-1)^{u_k})\psi_t(2^{-k-1}) D^\circ_{2^{-k-1}}(t) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\psi_u(t) - \psi_u(t \dotplus e_{-k-1}))\psi_t(2^{-k-1}) D^\circ_{2^{-k-1}}(t). \end{aligned}$$

Ha $t \in [2^{-s-1}, 2^{-s})$, akkor

$$D_u^\circ(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-s}^{\infty}(\psi_u(t) - \psi_u(t \dot{+} e_{-k-1})) - \frac{1}{2}2^s(\psi_u(t) - \psi_u(t \dot{+} e_s)) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{s-1} 2^{k-1}(\psi_u(t) - \psi_u(t \dot{+} e_k)) - 2^{s-1}(\psi_u(t) - \psi_u(t \dot{+} e_s)) = \Delta_s^- \psi_u(t),$$

amivel az 6.4. Tétel állítását igazoltuk. □

(6.3.2)-ben szereplő definícióból látható, hogy mivel itt az integrálás és a Δ_s^- operátor sorrendje nem cserélhető föl, ezért nem tárgyalható a Cesàro operátor ebben az esetben a klasszikus esetnek megfelelően.

Irodalomjegyzék

[1]. Baron, S., Schipp, F., *Certain complementary spaces and multipliers for double Walsh series*, Ann. Univ. Sci. **39** (1996), 125–144, Budapest.

[2]. R. Bellmann,, *A note on a theorem of Hardy on Fourier coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 741–744.

[3]. Butzer, P.L., Wagner H.J., *Walsh series and the concept of a derivative*, Appl. Anal. **3** (1973), 29–46.

[4]. Giang, D. V., Móricz, F., *Cesàro means of Fourier transforms and multipliers on $L^1(\mathbb{R})$*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 469–477.

[5]. Giang, D. V., Móricz, F., *The Cesàro operator on the Banach algebra of $L(\mathbb{R}^2)$ multipliers II. (Even case)*, Acta Sci. Math.(Szeged) **59** (1994), 625–655.

[6]. Giang, D. V., Móricz, F., *The Cesàro operator on the Banach algebra of $L(\mathbb{R}^2)$ multipliers III. (Even-odd case)*, Acta Math. Hungar. **68** (1995), 71–98.

[7]. Giang, D. V., Móricz, F., *The Cesàro operator is bounded on the Hardy space H^1*, Acta Sci. Math.(Szeged) **61** (1995), 535–544.

[8]. Giang, D. V., Móricz, F., *The Cesàro operator on the Banach algebra of $L(\mathbb{R}^2)$ multipliers I. (Odd case)*, Acta Sci. Math.(Szeged) **62** (1996), 433–456.

[9]. Giang, D. V., Móricz, F., *The two-dimensional Cesàro operator is bounded on the multi-parameter Hardy space $H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$*, Acta Sci. Math.(Szeged) **62** (1997), 279–288.

[10]. Giang, D. V., Móricz, F., *The Cesàro operator is bounded on the multi-parameter Hardy space $H^1(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$*, Analysis **17** (1997), 155–174.

[11]. Eisner, T., *The dyadic Cesàro operators*, Acta Sci. Math.(Szeged) **64** (1998), 99–111.

[12]. Eisner, T., *The two-parameter Cesàro operators*, Math. Pannon. **9/2** (1998), 243–258.

[13]. Eisner, T., *Diadikus Cesàro operátorok*, Matematikus PhD hallgatók konferenciája (Szeged, 1998).

[14]. Eisner, T., *Dyadic Cesàro operators on Hölder spaces*, Functons, Series, Operators, Proc. Alexits Memorial Conf., (Budapest, 1999) (elfogadva).

[15]. Eisner, T., *Dyadic Cesàro operators on Hardy spaces*, Acta Sci. Math.(Szeged) (2001).

[16]. Eisner, T. Schipp, F., *The dyadic Cesàro operator on $\mathbb{R}_+$*, Anal. Math. **26** (2000), 263-274.

[17]. Golubov B.I., *Fourier Series: Theory and Applications*, (in Russian), Kiev, 1992, pp. 18–26.

[18]. Golubov B. I., *On a theorem of Bellmann on Fourier coefficients.*, Mat. Sb. **185/II.** (1994), 31–40.

[19]. Golubov B. I., *Some topics in modern mathematics and their applications (in Russian)*, MIPT (1995), 56-64, Moscow.

[20]. Б.И.Голубов, Об однойтеореме Беллмана о коэффициентах Фурье., Математическийсборник. **Т.185** (1994), 31–40 (There is an English translation in Mat. Sb.)..

[21]. Б.И.Голубов, Об ограниченности операторов Харды и Харди-Литтлвуда в простпанствах *Re* H^1 и BMO., Математическийсборник. **Т.189** (1997), 93–106 (There is an English translation in Mat. Sb.)..

[22]. Б.И.Голубов, Аналог однойтеоремы Тытчмарша для преобразования Фуръе-Уолша., МатематическийСборник. **Т.189, N.5** (1998), 69–86 (There is an English translation in Mat. Sb.)..

[23]. Б.И.Голубов, О преобразованиях Харди и Беллмана пространств *Re* H^1 и BMO., Математические заметки. **Т.63, N.5** (1998), 69–86 (There is an English translation in Mat. Sb.)..

[24]. G.H. Hardy, *Notes on some points in the integral calculus LXVI*, Messenger of Math. **58** (1929), 50–52.

[25]. Herz,C., *H_p-spaces of martigales, $0 < p \leq 1$*, Z.Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **28** (1974), 189–205.

[26]. Móricz, F., *The harmonic Cesàro and Copson operators on the spaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$, H^1 and BMO*, Acta Sci. Math. (Szeged) **65** (1999), 293-310.
[27]. Móricz, F., *The harmonic Cesàro and Copson operators on the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$*, Studia Math. (submitted).
[28]. Neveu,J., *Discrete-parameter martingales*, Nort-Holland (1971).
[29]. Rodin, V. A., *On Hardy transformation of the BMO space*, Phystech Journal **3/4** (1997), 79–83.
[30]. Schipp, F., Wade, W.R., Simon, P., Pál, J., *Walsh Series, An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akadémiai Kiadó (Budapest), Adam Hilger (Bristol-New-York), 1990.
[31]. Schipp, F., *Multiple Walsh Analysis*, Theory and Appl. of Gibbs Derivatives, ed.: P.L. Butzer, R.S. Stankovic **4** (1990), 73–90.
[32]. Schipp, F., *Über einen Ableitungsbegriff von P.L. Butzer and H.J. Wagner*, Mat.Balkanica **4** (1974), 451–546.
[33]. Schipp, F., *On the dyadic derivative*, Acta Math.Sci. Hungar. **28** (1976), 145–152.
[34]. Schipp, F., Wade, W.R., *Transforms on normed fields*, Leaflets in Mathematics, Janus Pannonius Tudományegyetem (Pécs), 1996.
[35]. Simon, P., *Hardy spaces and multipliers*, Acta Sci. Math. (Szeged) **64** (1998), 183–200.
[36]. Simon, P., *A note on the Sunouchi operator with respect to Vilenkin system*, Ann. Univ. Sci. Budapest (2001).
[37]. Siskakis A. G., *The Cesàro operator is bounded on H^1*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 461–462.
[38]. Stempak K., *Cesàro averaging operators*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **124A** (1994), 121–126.
[39]. Weisz, F., Anal. Math. **16** (1990), 227–239.
[40]. Weisz, F., *Atomic Hardy spaces*, Anal. Math. **20** (1994), 65–80.
[41]. Weisz, F., *Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
[42]. Weisz, F., *Some Maximal Inequalities with respect to Two-parameter Dyadic Derivative and Cesàro Summability*, Appl. Anal. **62** (1995), 223–238.
[43]. A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 1959.

The dyadic Cesàro and Copson operators

by Tímea Eisner

PhD thesis

Supervisors: Dr. Ferenc Móricz
chairman of department, SZTE
Dr. Ferenc Schipp
chairman of department, ELTE, PTE

University of Szeged (SZTE)
Szeged, 2001

Introduction

The systematic investigations of the convergence problems of trigonometric Fourier series was started in the middle of the 19th century. Among others, the classical convergence tests of *Dirichlet* and *Dini* as well as the first results relating to the divergence of Fourier series were obtained. In 1876 *du Bois Raymond* observed that there exists a continuous function which cannot be reconstructed from its Fourier series by means of the convergence of the partial sums. More exactly, he presented a continuous function, whose Fourier series diverges at some point. This example gave rise to a number of attempts to find other reasonable methods for evaluating Fourier series. In 1900 *Lipót Fejér* proved that the first arithmetic means of the partial sums of the Fourier series of anz continuous function converge to the function even uniformly. The same convergence result was known before for the Abel-Poisson means.

In connection with Fejér's theorem the following question arises: What happens to the Fourier series if we form the arithmetic means of the Fourier coefficients instead of forming the arithmetic means of the partial sums of its Fourier series. It is known that in the case of a complete orthogonal system there is a one-to-one correspondence between the expanded functions and the sequence of their Fourier coefficients. Given a periodic integrable function f, in symbol: $f \in L^1_{2\pi}$, we form the sequence cosisting of the arithmetic means of its Fourier coefficients. The question is whether there exists a function $g \in L^1_{2\pi}$ whose Fourier coefficients coincide with these arithmetic means.

Hardy raised first this question in 1928 and proved that the $L^p_{2\pi}$ spaces for $1 \leq p < \infty$ are invariant with respect to this averaging process (see [24]). In other words, if $f \in L^p_{2\pi}$ for some $1 \leq p < \infty$, then the function g, whose Fourier coefficients coincide with the corresponding arithmetic means of the Fourier coefficients of f, also belongs to the same space $L^p_{2\pi}$. The operator which maps the function $f \in L^p_{2\pi}$ to the function $g \in L^p_{2\pi}$ is called the *Cessàro operator* acting on $L^p_{2\pi}$, while its adjoint is called the *Copson operator*. We note that the terminology is not consistent in the literature. The term "Hardy operator" is offen used in place of "Cesàro operator".

In the last few years, the study of these operators has come into fashion again. *R. Bellman*, *B. I. Golubov* ,*D. V. Giang*,*F. Móricz*, *V. Rodin*, *A. G. Sisakis*, *K. Sternpak* and others have proved a number of interesting theorems of these operators.

In our PhD thesis, we study the behavior of these operators in the case of Walsh-Fourier series. The methodsused here are essentially different from those used in the case of trigonometric series. In the classical case, integration by parts and ordinary derivative play base roles. In our investigations, the classical derivative is replaced by dyadic derivative, while the classical integral is replaced by dyadic integral (antiderivative). For example, an analouge of the integration by parts holds no longer in the dyadic setting. The dyadic integral is defined in terms of a convolution with a function which can be handled with some difficulity. As a result, the computations are more compliated than in the case of the classical integral. This fact explains that the proofs are longer and more technical for the Walsh series than those for the trigonometric ones.

We define the Cesàro and Copson operators on the largest possible subclass of Walsh series, which can be identified with the space of dyadic martingales. Then we consider the restrictions of these operators onto several important subspaces. A new representation of the Walsh-Dirichlet kernel plays a crucial role in our investigations, in which the notion of dzadic derivative is also used.

We deal with four versions of the dzadic Cesàro and Copson operators. Namely, the ones defined on the space of martingales, the ones defined on the one-dimensional and two-dimensional spaces of integrable functions, respectively, and their continuous extensions to the positive real half-axis. In the first three cases, the Cesàro operator is defined by means of the first arithmetic means of the Walsh-Fourier coefficients of the martingales or functions, respectively. In the fourth case, the Walsh-Fourier transform is substituted for the Walsh-Fourier coefficient. The functions in question are defined on the unit interval $\mathbb{I} := \mathbb{I}^1 := [0,1)$, on the unit square $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, and on the positive real half-axis $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$, respectively. These operators can be represented in the form of integral operators on the corresponding L^1 spaces, which are a special cases of the so-called local convolution operators introduced in Chapter 3. Beside the Cesàro operator, we also study these local convolution operators on the spaces $L^1(\mathbb{I}^j)$ $(j = 1,2)$, $L^1(\mathbb{R}_+)$ as well as on the spaces L^p, Hardy and BMO. We formulate those properties of the local convolution operators, from which the boundedness of these operators follows on the spaces mentioned above.

Dyadic Cesàro and Copson operators on L^p spaces

First of all we introduce the *dyadic Cesàro* and *Copson operators*. Where it is possible, we treat the one-dimensional case along with the two-dimensional case. For the proofs of the theorems of this chapter, see [11], [12], [13]. The operators mentioned above are defined on the broadest possible space, on the space of the dyadic martingales $\mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$. In the case $j = 1$, set

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{I}) := \{F \in \mathcal{M}(\mathbb{I}) : \hat{F}(0) = 0\}, \tag{3.1}$$

and in the case $j = 2$ set

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{I}^2) := \{F \in \mathcal{M}(\mathbb{I}^2) : \hat{F}(k,\ell) = 0 \quad k,\ell \in \mathbb{N}, \min(k,\ell) = 0\}. \tag{3.2}$$

The Walsh-Fourier coefficients of the dyadic martingale $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j)$ $(j = 1,2)$ are defined by the limit

$$\hat{F}(k) = \lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \int_0^1 f_n w_k dx \quad (k \in \mathbb{N}^j).$$

It is easy to see that if $k < 2^{n_0}$ and $n \geq n_0$, then

$$\int_0^1 f_n(x) w_k(x) dx = \int_0^1 f_{n_0}(x) w_k(x) dx,$$

consequently, this limit exists and

$$\hat{F}(k) = \int_0^1 f_{n_0}(x) w_k(x) dx \quad (k < 2^{n_0}).$$

In the two-dimensional case, the existence of the limit can be justified similarly. The Walsh series of the dyadic martingale F is denoted by the symbol

$$f \sim S(F) := \sum_{k \in \mathbb{N}^j} \hat{F}(k) w_k \quad (j = 1, 2). \tag{3.3}$$

Since there is a one-to-one correspondence between the Walsh-series, the coefficient sequences, and the dyadic martingales, for all dyadic martingales $F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ there is exactly one dyadic martingale $G \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ such that the Walsh-Fourier coefficients of which are the arithmetic mean of the Walsh-Fourier coefficients of the dyadic martingale F, namely for which

$$\hat{G}(n) := 0 \ (n \in \mathbb{N}^j, \wedge n = 0), \ \hat{G}(n) := \frac{1}{n^*} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{F}(k) \ \ (n \in \mathbb{P}^j), \tag{3.4}$$

where $n^* = n_1 \cdot n_2$, $\wedge n = \min(n_1, n_2)$, if $n \in \mathbb{P}^2$, and $\wedge n = n$, if $n \in \mathbb{P}$ $\mathbb{P} = 1, 2, \ldots$. The operator $\widetilde{C} : \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j) \to \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$, which is defined by the instruction

$$\widetilde{C} F := G \ \ (F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)) \tag{3.5}$$

is called *dyadic Cesàro operator*. It is obvious that in this manner we defined a linear operator on $\mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$.

We interpret the adjoint operator $\widetilde{C}^*$ of the operator $\widetilde{C}$ in the first step on the space of the stationary martingales $\mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$, that is, we consider such martingales, whose terms are constant from a certain index (there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $f_n = f_{n_0}$, for $n > n_0$). We define the martingale $G := \widetilde{C}^* F$ $(F \in \mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j))$ in such a way that its Walsh coefficients are

$$\hat{G}(n) := \sum_{k : n < k} \frac{\hat{F}(k)}{k^*} \ \ (n \in \mathbb{N}^j). \tag{3.6}$$

Since $\hat{F}(k) = 0$ except of finitely many index $k \in \mathbb{N}^j$ hold, the above mentioned sum makes sense. The mapping $\widetilde{C}^*$ is called the *Copson operator*. We introduce the bilinear functional (2.1.7)

$$\langle F, G \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{F}(k) \hat{G}(k) = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n g_n \quad (F = (f_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_0, G = (g_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M})$$

on the space $\mathcal{M}(\mathbb{I}^j) \times \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$. The name adjoint operator is explained by the following

Lemma 3.1. *The adjoint operator of the Cesàro operator $\widetilde{C}$ is the Copson operator $\widetilde{C}^*$ defined under* (3.6) *with respect to the bilinear functional* (2.1.7), *namely*

$$\langle \widetilde{C}F, G\rangle = \langle F, \widetilde{C}^*G\rangle \quad (F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j), G \in \mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)). \tag{3.7}$$

We study the operators $\widetilde{C}$ and $\widetilde{C}^*$ on several subspaces of the dyadic martingales. We give first an integral form of the Cesàro operator by showing that the martingale $\widetilde{C}F = G = (g_n, n \in \mathbb{N}^j)$ is of the form

$$g_n(x) = \int\limits_{\mathbb{I}^j} f_n(t) K_n^{\langle j\rangle}(x,t)\,dt \quad (x \in \mathbb{I}^j, F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j))m, \tag{3.8}$$

where the kernel function $K_n^{\langle j\rangle}$ can be expressed in terms of the modified dyadic difference operator. Namely, denote by χ_s the characteristic function of the interval $J_s := [2^{-s}, 2^{-s+1})$ $(s \in \mathbb{P}^j)$ and let

$$W_n^{\langle j\rangle} := S_{2^n}(W^{\langle j\rangle}) \quad (n \in \mathbb{N}^j) \tag{3.9}$$

be the 2^nth partial sum of the series

$$W^{\langle j\rangle} := \sum_{k\in\mathbb{P}^j} \frac{w_k}{k^*} \quad (j = 1,2).$$

We show that the kernel function $K_n^{\langle j\rangle} \in L^1(\mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j)$ is of the form

$$K_n^{\langle j\rangle}(x,t) := \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \chi_s(t)(\Delta_{s-1}^- W_n^{\langle j\rangle})(x \dotplus t) \quad (x,t \in \mathbb{I}^j), \tag{3.10}$$

where in the case $j = 1$ the modified dyadic one-parameter difference operator is defined by

$$(\Delta_n^- f)(x) := \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1}(f(x) - f(x \dotplus 2^{-k-1})) - 2^{n-1}(f(x) - f(x \dotplus 2^{-n-1})).$$

(For the definition of the two-parameter operator, see [3], [12].) We denote the dyadic addition by the symbol $\dotplus$. Since the supports of the functions χ_s are disjoint, the sum in (3.10) converges absolutely at all points $(x,t) \in \mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j$. It is not difficult to verify that the sum in (3.10) is convergent in the $L^1(\mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j)$-norm, and that $K_n^{\langle j\rangle} \in L^1(\mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j)$.

Beside the kernel functions just introduced we shall use the function

$$K^{\langle j\rangle}(x,t) := \sum_{s\in\mathbb{P}^j} \chi_s(t)(\Delta_{s-1}^- W^{\langle j\rangle})(x \dotplus t) \quad (x,t \in \mathbb{I}^j). \tag{3.10'}$$

Similarly to that what we have said above, we have $K^{\langle j\rangle} \in L^1(\mathbb{I}^j)$. Motivated by these we define the integral operators

$$(\mathcal{K}_n^{\langle j\rangle} h)(x) := \int\limits_{\mathbb{I}^j} h(t)(K_n^{\langle j\rangle}(x,t)\,dt, \quad (\mathcal{K}^{\langle j\rangle} h)(x) := \int\limits_{\mathbb{I}^j} h(t)K^{\langle j\rangle}(x,t)\,dt \tag{3.11}$$

$(x \in \mathbb{I}^j, h \in L_0^1(\mathbb{I}^j), j = 1,2)$, where $L_0^1(\mathbb{I}^j)$ consists of the functions in $L^1(\mathbb{I}^j)$, whose integral is zero over the interval $\mathbb{I}^j$.

Lemma 3.2.. *The Cesàro transform* $\widetilde{C}F := G = (g_n, n \in \mathbb{N})$ *of the dyadic martingale* $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ *can be represnted in the form*

$$g_n = \mathcal{K}_n^{\langle j \rangle} f_n \quad (n \in \mathbb{N}^j). \tag{3.12}$$

The operators $\mathcal{K}_n^{\langle j \rangle} : L^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ $(n \in \mathbb{N}^j)$ *are uniformly bounded, and the operator* $\mathcal{K}^{\langle j \rangle} : L^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ *is bounded, that is, there exists a constant* $C > 0$ *such that*

$$\|\mathcal{K}_n^{\langle j \rangle} h\|_1 \le C\|h\|_1 \quad \text{and} \quad \|\mathcal{K}^{\langle j \rangle} h\|_1 \le C\|h\|_1 \quad (h \in L^1(\mathbb{I}^j), n \in \mathbb{N}^j). \tag{3.13}$$

In the following we consider the Cesàro operator on the subspace of the space of the L^1-bounded martingales:

$$\mathcal{M}^1(\mathbb{I}^j) := \{F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) : \sup_{n \in \mathbb{N}^j} \|f_n\|_1 < \infty\}.$$

This subspace can be identified with the space of the functions of bounded variation on the interval $\mathbb{I}^j$, and the corresponding Walsh series can be identified with the Walsh-Fourier-Stielties series of the functions of bounded variation.

Theorem 3.1. *The restriction of the Cesàro operator* $\widetilde{C}$ *onto the space of the* L^1*-bounded martingales is a bounded linear operator on* $\mathcal{M}^1(\mathbb{I}^j)$.

Taking into account the connection between the spaces $\mathcal{M}^1(\mathbb{I}^j)$ and $\mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$, we obtain the following

Corollary 3.1. *Let* $\Phi \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$ *be a function of bounded variation, and*

$$a_k := \int_{\mathbb{I}^j} w_k \, d\Phi \ (k \in \mathbb{N}^j)$$

the Walsh-Fourier-Stieltjes coefficients of Φ. *Then there exists a function* $\Psi \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$ *of bounded variation such that for the Walsh-Fourier-Stieltjes coefficients we have*

$$\int_{\mathbb{I}^j} w_k \, d\Psi = \frac{1}{k^*} \sum_{0 \le \ell < k} a_\ell \quad (k \in \mathbb{P}^j).$$

In the following we shall restrict the domain of the Cesàro operator. We proved in Lemma 3.1 that the integral operator $\mathcal{K}^{\langle j \rangle} : L^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$, which is defined by means of the kernel function $K^{\langle j \rangle}$ (see (3.10')), is bounded. We show that this operator is precisely the Cesàro operator on the space $L^1_0(\mathbb{I}^j)$.

Theorem 3.2. *The operator* $\mathcal{K}^{\langle j \rangle} : L^1_0(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ *is identical with the restriction of the operator* $\widetilde{C}$ *onto the space* $L^1_0(\mathbb{I}^j)$, *that is,*

$$(\widehat{\mathcal{K}^{\langle j \rangle} f})(k) = \frac{1}{k^*} \sum_{\ell < k} \hat{f}(\ell) \quad (k \in \mathbb{P}^j, f \in L^1_0(\mathbb{I}^j), j = 1, 2). \tag{3.2.1}$$

There is a strong connection between the one-parameter Cesàro operator $\widetilde{\mathcal{C}}$, which is defined on the space of martingales, and the Cesàro operator $\mathcal{C}$, which is defined on the space of integrable functions. since for all martingales $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$ we have

$$(\widetilde{\mathcal{C}}F)_n = E_n(\mathcal{C}f_n) \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{3.2.3}$$

where

$$(E_nf)(x) := \frac{1}{|I_n(x)|} \int\limits_{I_n(x)} f(t)dt \quad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N})$$

is the conditional expectation of f. Here $I_n(x)$ denotes the dyadic interval of length 2^{-n}, which contains x. The following notation is suggested by (3.2.3). Let $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ be bounded linear operator. We call the operator $\widetilde{\Phi}$ defined on the spaces of martingales for which

$$(\widetilde{\Phi}F)_m := E_m(\Phi f_m) \quad (m \in \mathbb{N}, F = (f_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}) \tag{3.2.4}$$

holds, the *diagonal extension* of Φ to $\mathcal{M}$.

We studied the following problem: under what conditions imposed on the diagonal extension $\widetilde{\Phi}$, we obtain dyadic martingales from diagonal martingales. In connection with this we introduce the following notion. We say that the operator $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ is *spectrum-preserving* if $(\Phi f)^\wedge(k) = 0$ $(k = 0, ..., 2^m - 1)$ follows from the conditions that $f \in L^1$, $m \in \mathbb{N}$ and $\hat{f}(k) = 0$ $(k = 0, ..., 2^m - 1)$.

It can be proved that if the operator Φ is spectrum-preserving, then the operator $\widetilde{\Phi}$ maps martingales to martingales, and the operator $\widetilde{\Phi}$ is the extension of the operator Φ from $L_0^1(\mathbb{I})$ to $\mathcal{M}_0(\mathbb{I})$. Indeed, if the function $f \in L^1$ is integrable, then $\widetilde{\Phi}F = (E_m(\Phi f), m \in \mathbb{N})$ (see [15]).

Starting with the properties of the Cesàro operator, we introduce a new class of operators, that of the *local convolution operators* which will be denoted by the symbol $\mathcal{N}^{\langle j \rangle}$ $(j = 1, 2)$. We define the elements of $\mathcal{N}^{\langle j \rangle}$ by a sequence of dyadic convolution operators $\Phi_n^{\langle j \rangle} f := f * \phi_n^{\langle j \rangle}$ $(n \in \mathbb{N}^j)$. We assume that the functions $\phi_k^{\langle j \rangle}$ $(k \in \mathbb{N})$ are integrable, and in the two-parameter case the functions in question are the Kronecker product of the one-parameter functions, namely,

$$\phi_n^{\langle 2 \rangle} = \phi_{n_1}^{\langle 1 \rangle} \times \phi_{n_2}^{\langle 1 \rangle} \quad (n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2). \tag{3.3.1}$$

The operators $\Phi^{\langle j \rangle} \in \mathcal{N}^{\langle j \rangle}$ is of the form

$$\Phi^{\langle j \rangle} f := \sum_{n \in \mathbb{P}^j} \Phi_n^{\langle j \rangle}(\chi_n f) \quad (f \in L_0^1(\mathbb{I}^j), j = 1, 2), \tag{3.3.2}$$

where χ_n $(n \in \mathbb{P}^j)$ is the characteristic function of the interval J_n.

The convolution operators $\Phi_n^{\langle j\rangle}$ map the class of the Walsh polynomials onto itself, and

$$\langle \Phi_n^{\langle j\rangle} f, g\rangle = \langle f, \Phi_n^{\langle j\rangle} g\rangle \quad (f \in L^1(\mathbb{I}^j), g \in \mathcal{P}^{\langle j\rangle}, n \in \mathbb{N}^j), \tag{3.3.3}$$

where

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{I}^j} f(t)g(t)dt$$

denotes the usual inner product of f and g. The class $\mathcal{N}^{\langle j\rangle}$ of operators contains the convolution operators. Namely, if $\phi_1^{\langle j\rangle} = \dots = \phi_n^{\langle j\rangle} = \dots = \phi^{\langle j\rangle}$, then $\Phi^{\langle j\rangle} f = f * \phi^{\langle j\rangle}$.

The maximal operator of the sequence $(\Phi_n^{\langle j\rangle}, n \in \mathbb{N}^j)$ of operators is denoted by $\Phi_*^{\langle j\rangle}$, and defined by

$$\Phi_*^{\langle j\rangle} f := \sup_{n\in\mathbb{N}^j} |f| * |\phi_n^{\langle j\rangle}|. \tag{3.3.4}$$

It can be verified that a local convolution operator is spectrum-preserving, if the Walsh-Fourier coefficients $\hat{\phi}_j(k)$ $(k < 2^{j-1})$ are independent from j.

The following theorem applies to the operator $\Phi^{\langle j\rangle}$.

Theorem 3.3. *i) If for the sequence $\phi_n^{\langle j\rangle}$ $(n \in \mathbb{N}^j)$ of functions generating the operator $\Phi^{\langle j\rangle} \in \mathcal{N}^{\langle j\rangle}$ we have*

$$M := \sup_{n\in\mathbb{P}^j} \|\phi_n^{\langle j\rangle}\|_1 < \infty, \tag{3.3.5}$$

then $\Phi^{\langle j\rangle}$ is a bounded linear operator from $L^1(\mathbb{I}^j)$ to $L^1(\mathbb{I}^j)$, and

$$\|\Phi^{\langle j\rangle} f\|_1 \le M\|f\|_1 \quad (f \in L_0^1(\mathbb{I}^j)). \tag{3.3.6}$$

ii) Let $1 < p < \infty$, and $1/p + 1/p' = 1$. If $\Phi_*^{\langle j\rangle}$ is a bounded operator from $L^{p'}(\mathbb{I}^j)$ to $L^{p'}(\mathbb{I}^j)$, that is, if for some constant $M_p^* > 0$ we have

$$\|\Phi_*^{\langle j\rangle} g\|_{p'} \le M_p^* \|g\|_{p'} \quad (g \in L^{p'}(\mathbb{I}^j)), \tag{3.3.7}$$

then $\Phi^{\langle j\rangle}$ is a bounded linear operator from $L^p(\mathbb{I}^j)$ to $L^p(\mathbb{I}^j)$, and

$$\|\Phi^{\langle j\rangle} f\|_p \le M_p^* \|f\|_p \quad (f \in L^p(\mathbb{I}^j)). \tag{3.3.8}$$

If we apply this theorem for the Cesàro operator, then we get the following

Theorem 3.4.

i) *The Cesàro operator is a bounded linear operator from $L^p(\mathbb{I}^j)$ to $L^p(\mathbb{I}^j)$ if $1 \le p < \infty$.*

ii) *The Cesàro operator is not bounded from $L^\infty(\mathbb{I}^j)$ to $L^\infty(\mathbb{I}^j)$.*

We define the adjoint operator C^* of the Cesàro operator on the set of the Walsh-polynomials $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$. Since

$$Cf \in L_0^1(\mathbb{I}^j) \quad \text{if} \quad f \in L_0^1(\mathbb{I}^j), \quad \text{and} \quad C^*g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j), \quad \text{if} \quad g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j),$$

by Lemma 3.1, (3.7) and (2.1.7) we get that

$$\langle f, C^*g \rangle = \langle Cf, g \rangle \quad (f \in L_0^1(\mathbb{I}^j), g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)). \tag{3.4.1}$$

Relying onthis and using the well-known duality principle, we show that the operator C^* can be extended from the subspace $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$ to a bounded operator $C^* : L^p(\mathbb{I}^j) \to L^p(\mathbb{I}^j)$ if $1 < p < \infty$. In the case $p = \infty$ we consider the closure of the subspace $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$ with respect to the L^∞-norm, instead of the space $L^\infty(\mathbb{I}^j)$, and we denote this space by $X^\infty(\mathbb{I}^j)$, and in case $0 < p < \infty$ let be $X^p(\mathbb{I}^j) := L^p(\mathbb{I}^j)$.

Theorem 3.5. *There exists a constant $C_p > 0$ depending only on p for all $1 < p \leq \infty$ such that*

$$\|C^*g\|_p \leq C_p \|g\|_p \quad (g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)). \tag{3.4.2}$$

The Copson operator can be extended from $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$ to a bounded linear operator $C^* : X^p(\mathbb{I}^j) \to X^p(\mathbb{I}^j)$, such that

$$(\widehat{C^*g})(k) = \sum_{k<\ell} \frac{\hat{g}(\ell)}{\ell^*} \quad (g \in X^p(\mathbb{I}^j), k \in \mathbb{I}^j). \tag{3.4.3}$$

For the function $w_1 \in L^1(\mathbb{I})$, we have

$$(C^*w_1)\hat{}(k) = \sum_{k<\ell} \frac{1}{\ell} = \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

This shows that the condition $p > 1$ in Theorem 3.5 can not be replaced by the condition $p \geq 1$.

The dyadic Cesàro and Copson operators on the dyadic Hardy- and BMO spaces

In this paragraph we consider the dyadic Cesàro operator on the dyadic Hardy space $H(\mathbb{I})$, and its adjoint operator, the dyadic Copson operator is considered on the closure of the space of the dyadic step functions with respect to the BMO-norm, on the space VMO($\mathbb{I}$). We show that these operators are bounded. These statements follow from those statements that concern the local convolution operators, which are the consequences of the properties of the kernel functions. For the proofs of the theorems of this chapter, see [11], [15].

We consider first the one-parameter operators introduced in the previous section, which are of the form (3.3.2) and belong to $\mathcal{N}^{\langle 1\rangle}$. In the following we also assume that the generating sequence $\phi_n := \phi_n^{\langle 1\rangle}$ $(n \in \mathbb{N})$ of the operator $\Phi := \Phi^{\langle 1\rangle}$ obeys the condition (3.3.5). Then

$$\Phi f = \sum_{n\in\mathbb{P}} (\chi_n f) * \phi_n, \tag{4.1.1}$$

and this series is convergent in L^1-norm. By Theorem 3.3 $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ is a bounded operator, and the inequality (3.3.6) holds. The following theorem is connected with the restriction of this operator onto the Hardy space $H(\mathbb{I}) \subset L^1(\mathbb{I})$.

Theorem 4.1. *Assume that for the generating sequence ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ of the operator $\Phi \in \mathcal{N}^{\langle 1\rangle}$ condition* (3.3.5) *holds. If one of the following three conditions*

i) $\hat{\phi}_n(k) = 0$ $(0 \le k < 2^n, n \in \mathbb{P})$,

ii) $\phi_n = D_{2^n}$ $(n \in \mathbb{P})$,

iii) $\phi_n = 2^n(S_{2^n}W - S_{2^{n-1}}W)$

holds, then Φ is a bounded linear operator from $H^1(\mathbb{I})$ to $H^1(\mathbb{I})$, and

$$\|\Phi f\|_{H^1} \le M_1 \|f\|_{H^1} \quad (f \in H^1(\mathbb{I})), \tag{4.1.2}$$

where M_1 is a constant, which depends on the constant M occurring in condition (3.3.6).

Applying this theorem yields the following

Theorem 4.2. *The dyadic Cesàro operator is bounded from $H^1(\mathbb{I})$ to $H^1(\mathbb{I})$, that is, there exists a $C > 0$ constant such that*

$$\|\mathcal{C}f\|_{H^1} \le C\|f\|_{H^1} \quad (f \in H^1(\mathbb{I})).$$

The BMO space is an intermediate one between the spaces L^p $(p < \infty)$ and L^∞:

$$L^\infty(\mathbb{I}) \subset \mathrm{BMO}(\mathbb{I}) \subset L^p(\mathbb{I}) \ (p < \infty).$$

We have seen that $\mathcal{C} : L^p(\mathbb{I}) \to L^p(\mathbb{I})$ is bounded if $p < \infty$, and is not bounded if $p = \infty$. It comes naturally the question: What can we say about the restriction of $\mathcal{C}$ onto the space BMO? The following theorem answers this problem.

Theorem 4.3. *The Cesàro operator is not bounded from the space VMO($\mathbb{I}$) to the space BMO($\mathbb{I}$).*

We start with the Walsh-series

$$f(x) = a_1 \frac{w_1(x)}{2} + a_2 \frac{w_2(x) + w_3(x)}{2^2} + \cdots + a_n \frac{w_{2^{n-1}}(x) + \cdots + w_{2^n-1}(x)}{2^n} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} w_k(x),$$

where $a_n = 1/\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{P})$. It can be verified that $f \in \mathrm{VMO}$, and $Cf \notin \mathrm{BMO}$.

It follows from duality considerations, similarly as in Theorem 3.5, that the dyadic Copson operator is bounded from $\mathrm{BMO}(\mathbb{I})$ to $\mathrm{BMO}(\mathbb{I})$, and is not bounded from $H(\mathbb{I})$ to $H(\mathbb{I})$.

In the following, we shall give sufficient conditions for the boundedness of the diagonal extensions of the local convolution operators on the dyadic Hardy spaces H^p $(1/2 < p \le 1)$. At the same time, we present a new proof in the case $p = 1$ for Theorem 4.1.

Let $\phi = (\phi_n, n \in \mathbb{N})$ be a sequence of integrable functions. We introduce the following quasi-norm for $0 < p \le 1$:

$$\|\phi\|_{\langle p\rangle} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{I\in\mathcal{I}_n} \left(\int_I |\phi_n(t)|\, dt \right)^p \right)^{1/p}. \tag{4.2.1}$$

In particular, if $p = 1$ and ϕ is a martingale, then $\|\phi\|_{\langle 1\rangle}$ is equivalent to the usual $L^1(\mathbb{I})$-norm of ϕ.

Theorem 4.4. *Let $1/2 < p \le 1$. Assume that $\widetilde{\Phi}$ is a diagonal extension of the local convolution operator Φ (see (3.2.4)), and for the generating sequence $\phi = (\phi_n, n \in \mathbb{N})$ one of the following conditions holds:*

(i) $\hat{\phi}_n(k) = 0 \quad (0 \le k < 2^n, n \in \mathbb{N}), \quad \|\phi\|_{\langle p\rangle} < \infty$;
(ii) $\phi_n = D_{2^n}$ $(n \in \mathbb{P})$;
(iii) $\phi_n = 2^n(S_{2^n}W - S_{2^{n-1}}W)$.

Then $\widetilde{\Phi}$ is bounded on the space $H^p(\mathbb{I})$, that is, there exists a constant C_p depending only on p such that

$$\|\widetilde{\Phi}F\|_{H^p} \le C_p\|F\|_{H^p}$$

holds for all $F \in H^p(\mathbb{I})$.

By what has been said before Theorem 3.4, the local convolution operators playing role in Theorem 4.4 are spectrum-preserving, which means that their diagonal extension is an $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ operator, indeed.

It can be proved that the Cesàro operator can be represented as a sum of three operators, which statisfy one of the conditions of Theorem 4.4 if $1/2 < p \le 1$.

Theorem 4.5. *The dyadic Cesàro operator is bounded on the dyadic Hardy space $H^p(\mathbb{I})$ if $1/2 < p \le 1$.*

The dyadic Cesàro operator on Lipschitz spaces

In this paragraph we consider the dyadic Cesàro operator on Lipschitz spaces. We prove that the operator in question is bounded on the space $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ if $0 < \alpha \le 1$, $1 \le p < \infty$, $\alpha < 1/p$. Furthermore, we show that this condition can not be weakened if $p > 1$. For the proofs of these theorems, see [14].

The L^p-*modulus of continuity* $(1 \le p \le \infty)$ of an $f \in L^p[0,1)$ is defined by

$$\omega^p(f,\delta) := \sup_{y \le \delta} \|f - \tau_y f\|_p \quad (\delta > 0),$$

where τ means the dyadic translation operator. For arbitrary $\alpha > 0$ we call the space

$$\mathrm{Lip}(\alpha,p) := \{f \in L^p : \omega^p(f,\delta) = O(\delta^\alpha) \text{ as } \delta \to 0\} \quad (1 \le p \le \infty)$$

Lipschitz space (or Hölder space). It is known (see Sch-W-S-P [30] p. 189 Th.3) that a function f belongs to $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ $(1 \le p \le \infty)$ if and only if

$$\|f - E_n f\|_p = O(2^{-n\alpha}), \quad n \to \infty \quad (\alpha > 0). \tag{5.1.1}$$

We introduce the norm

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} := \sup_{n\in\mathbb{N}} 2^{n\alpha}\|f - E_n f\|_p. \tag{5.1.2}$$

Consequently, the function f belongs to $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ if and only if $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} < \infty$.

In the following, we will estimate the 2^nth partial sum at the point zero of the Walsh-Fourier series of the functions belonging to the spaces L^p and $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$, respectively.

Lemma 5.1. *If $f \in L^p[0,1)$, then*

$$|(E_n f)(0)| \le \sum_{k=0}^{n-1} 2^{(k+1)/p}\|f - E_k f\|_p + |\hat{f}(0)| \quad \left(1 \le p \le \infty, \frac{1}{\infty} := 0\right).$$

Corollary 5.1. *If $\alpha < 1/p$, $1 \le p < \infty$, $f \in Lip(\alpha,p)$ and $\hat{f}(0) = 0$, then*

$$|(E_n f)(0)| \le M_{p,\alpha} \cdot 2^{n(1/p-\alpha)}\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)},$$

where the constant $M_{p,\alpha}$ depends only on p and α.

For the L^p-norm of the partial sums

$$W_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{w_k}{k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

of the Walsh-Fourier series of the kernel function of the dyadic integral W the following estimates are true:

Lemma 5.2. *If $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, then*

$$\|W_{n+1} - W_n\|_p \ge \frac{1}{8}2^{-n/p}.$$

Lemma 5.3. *If $1 < p < \infty$, then there exist contstants $0 < c_p \leq C_p < \infty$, for which*

$$c_p 2^{-n/p} \leq \|W - W_n\|_p \leq C_p 2^{-n/p},$$

and if $p = 1$, there exits a constant C_1, for which

$$\|W - W_n\|_1 \leq C_1 2^{-n}.$$

The following theorem estabilishes the connection between the dyadic Cesàro operator and the operator of the conditional expectation.

Lemma 5.4. *If $f \in L_0^1(\mathbb{I})$, then*

$$Cf - E_n(Cf) = C(f - E_n f) + (E_n f)(0) \cdot (W - W_n) \quad (n \in \mathbb{P}).$$

By means of the above mentioned lemmas we prove the following two theorems.

Theorem 5.1. *If $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$ and $\alpha < 1/p$, then the Cesàro operator is bounded on the space $Lip(\alpha, p)$.*

In the following theorem we prove that the condition $\alpha < 1/p$ can not be weakened if $p > 1$.

Theorem 5.2. *For all $1 < p < \infty$ there exists a function $f \in Lip(1/p, p)$ such that Cf does not belong to the space $Lip(1/p, p)$.*

We show that for the function

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n D_{2^n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} w_k$$

we have $f \in \mathrm{Lip}(1/p, p)$ if $p > 1$, and $Cf \notin \mathrm{Lip}(1/p, p)$.

The dyadic Cesàro operator on $\mathbb{R}_+$

We consider the continuous equivalent of the Cesàro operator in this section by replacing the Walsh-Fourier coefficient by the Walsh-Fourier transform. We give an integral form of the Cesàro operator in the form of a sum of local convolution operators. Similarly to the previous sections, we consider the interval $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, in place of the dyadic field (which is represented by this interval) in our investigations. For the proof of the theorems of this chapter see [16].

We interpret the Walsh-Fourier-transform with the help of the *generalized Walsh functions* ψ_y $(y \in \mathbb{R}_+)$ according to the characters of the dyadic field. Namely, let

$$\psi_y(x) = (-1)^{\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j y_{-j-1}},$$

where the $x_j, y_j \in \{0,1\}$ $(j \in \mathbb{Z})$ are *the binary coefficients* of the numbers $x, y \in \mathbb{R}_+$ in the dyadic representations

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{x_k}{2^{k+1}}, \quad y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{y_k}{2^{k+1}}.$$

In particular, if

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \cdots + \frac{x_j}{2^{j+1}} + \cdots \in \mathbb{I}, \quad \text{and} \quad y = y_1 + y_2 2 + \cdots + y_{-j-1} 2^j + \cdots \in \mathbb{N},$$

then it follows from the interpretation (2.2.5) of the Walsh functions that

$$w_y(x) = \psi_y(x) \quad (x \in \mathbb{I}, y \in \mathbb{N}),$$

and thus the functions ψ_y can be regarded as the extensions of the functions w_n. It follows easily from the definition that if $k \in \mathbb{N}$, then the function ψ_k is periodic of period 1.

The Walsh-Fourier transform of the function $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ is defined by

$$\hat{f}(x) := \int_0^\infty f(t)\psi_x(t)dt \quad (x \in \mathbb{R}_+). \tag{6.1.2}$$

If the support of f is a subset of $\mathbb{I}$, and $y \in \mathbb{N}$, then we get back the Walsh-Fourier coefficient of f. It is known that the Walsh-Fourier transform can be extended from $L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ to a unitary map $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$, and

$$(\mathcal{F}f)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2^n} f(t)\psi_x(t)\, dt \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}_+.$$

In the following we will use that decomposition of the interval $[0, t]$ given in the following

Lemma 6.1. *If $t_k, k \in \mathbb{Z}$ are the binary coefficients of $t \in \mathbb{R}_+$, and*

$$A_k := [2^{-k-1}, 2^{-k}) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

then

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}, t_k=1} (t \dotplus A_k) = [0, t)$$

holds for almost every $t \in \mathbb{R}_+$, where $t \dotplus A_k = \{t \dotplus x : x \in A_k\}$.

The *generalized Walsh-Dirichlet kernel* is defined by

$$D_t^\circ(y) = \int_0^t \psi_x(y)dx \quad (t, y \in \mathbb{R}_+).$$

If $t = n \in \mathbb{N}$, then D_t vanishes outside the interval $\mathbb{I}$, and it is equal to the ordinary Walsh-Dirichlet kernel on $\mathbb{I}$. Namely,

$$D_t^\circ(y) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} w_k(y) = D_n(y) & (y \in \mathbb{I}), \\ 0 & (y \in [1,\infty)) \end{cases}$$

for all $t = n \in \mathbb{N}$, and

$$D_{2^k}^\circ = 2^k \chi_{[0,2^{-k})} \tag{6.1.5}$$

for all $k \in \mathbb{Z}$, where D_n denotes the ordinary Walsh-Dirichlet kernel (see Sch-W-S-P [30] p. 428 Ch.9.4).

We prove that for every function $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ there exists exactly one function $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, for which

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}(u)\,du \quad (x > 0). \tag{6.2.1}$$

The map C from $L^1(\mathbb{R}_+)$ to $L^1(\mathbb{R}_+)$ defined by $Cf := g$ is called the *dyadic Cesàro operator* on $L^1(\mathbb{R}_+)$. We shall show that C can be written as the sum of certain local dyadic wavelet operators. To describe these kernels of the wavelet operators, we start with the Walsh-Fourier transform of the function $a(t) := (t - [t])/t$ $(t \in \mathbb{R}_+)$:

$$A(x) := (\mathcal{F}a)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2^n} \frac{t-[t]}{t} w_x(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R}_+). \tag{6.2.2}$$

We shall prove in Lemma 6.2 that $A \in L^1(\mathbb{R}_+)$. To this end we introduce three new functions:

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \sum_{j=-\infty}^{n} 2^{j-n} \sum_{i=j}^{n} D_{2^i}^\circ(x \dotplus 2^{-j}), \\ g_n(x) &:= \sum_{j=-\infty}^{n} 2^{j} \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} D_{2^i}^\circ(x \dotplus 2^{-j}), \\ h_n(x) &:= \sum_{i=n}^{\infty} 2^{n-i+2} D_{2^i}^\circ(x), \end{aligned}$$

where $n \in \mathbb{Z}$, and $x \in \mathbb{R}_+$.

Lemma 6.2. *For all $x \in \mathbb{R}_+$ and $n \in \mathbb{Z}$ we have*

$$|2^n A(2^n x)| \le f_n(x) + g_n(x) + h_n(x), \tag{6.2.3}$$

consequently $A \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

In the proof of the most important theorems of this paragraph we shall use the following

Lemma 6.3. *The maximal functions*

$$F^*h := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |h| * |f_n| \quad \textit{and} \quad G^*h := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |h| * |g_n|$$

are of weak type $(1,1)$ *and of strong type* (∞,∞).

Let $a(x) := (x - [x])/x$,

$$v(x) := 2a(x) - a(2^{-1}x), \; V(x) := (\mathcal{F}v)(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+), \tag{6.2.10}$$

and denote by χ_n $(n \in \mathbb{Z})$ the characteristic function of the interval $[2^{-n-1}, 2^{-n})$. Then by (6.2.2) and by the well-known properties of the Walsh-Fourier transform we get that

$$V(x) = 2(A(x) - A(2x)) \quad (x > 0).$$

We introduce the wavelet operator

$$(\mathcal{W}_n f)(x) := 2^n \int_0^\infty f(t)V(2^n(x \dotplus t))\,dt \quad (f \in L^1, n \in \mathbb{Z}), \tag{6.2.11}$$

and then we form the following local convolution operator as follows:

$$\mathcal{W}f := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{W}_n(f\chi_n) \quad (f \in L^1). \tag{6.2.12}$$

It is easy to see that the series in (6.2.12) converges a.e. as well as in L^1-norm. We prove in Theorem 6.2 that the operators $\mathcal{W}$ and C are equivalent on the space $L^1(\mathbb{R}_+)$. To prove the boundedness of the operator $\mathcal{W}$ in $L^p := L^p(\mathbb{R}_+)$, we use the maximal operator

$$(\mathcal{V}f)(x) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \int_0^\infty |f(x \dotplus t)V(2^n t)|\,dt \quad (x \in \mathbb{R}_+). \tag{6.2.13}$$

Denote by $\|f\|_p$ the L^p-norm of $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

Theorem 6.1. *The maximal operator* $\mathcal{V}$ *is of weak type* $(1,1)$ *and of strong type* (q,q) *for every* $1 < q \le \infty$, *that is,*

$$\|\mathcal{V}f\|_q \le C'_q \|f\|_q \quad (f \in L^q, 1 < q \le \infty), \tag{6.2.14}$$

where the constant C'_q *depends only on* q.

Theorem 6.2. *The operator* $\mathcal{W}$ *is bounded from* L^1 *to* L^1 *and coincides with the dyadic Cesàro operator* C, *that is,*

$$\left(\widehat{\mathcal{W}f}\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}(t)\,dt \quad (x > 0, f \in L^1). \tag{6.2.16}$$

Moreover, $\mathcal{W}$ is bounded from L^p to L^p for every $1 \le p < \infty$, that is,

$$\|\mathcal{W}f\|_p \le C_p\|f\|_p \quad (f \in L^p), \tag{6.2.17}$$

where $C_p = C'_q$, $1/p + 1/q = 1$ and C'_q is from (6.2.14). The operator $\mathcal{W}$ is not bounded on L^∞.

References

[3]. Butzer, P.L., Wagner H.J., *Walsh series and the concept of a derivative*, Appl. Anal. **3** (1973), 29–46.
[11]. Eisner, T., *The dyadic Cesàro operators*, Acta Sci. Math.(Szeged) **64** (1998), 99–111.
[12]. Eisner, T., *The two-parameter Cesàro operators*, Math. Pannon. **9/2** (1998), 243–258.
[13]. Eisner, T., *Diadikus Cesàro operátorok*, Matematikus PhD hallgatók konferenciája (Szeged, 1998).
[14]. Eisner, T., *Dyadic Cesàro operators on Hölder spaces*, Functons, Series, Operators, Proc. Alexits Memorial Conf., (Budapest, 1999) (elfogadva).
[15]. Eisner, T., *Dyadic Cesàro operators on Hardy spaces*, Acta Sci. Math.(Szeged) (2001).
[16]. Eisner, T. Schipp, F., *The dyadic Cesàro operator on* $\mathbb{R}_+$, Anal. Math. **26** (2000), 263-274.
[24]. G.H. Hardy, *Notes on some points in the integral calculus LXVI*, Messenger of Math. **58** (1929), 50–52.
[30]. Schipp, F., Wade, W.R., Simon, P., Pál, J., *Walsh Series, An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akadémiai Kiadó (Budapest), Adam Hilger (Bristol-New-York), 1990.