

Reláció-mintaalgebrák függvényteljessége

DOKTORI (PHD) TÉZISEK

Készítette:

Vármonostory Endre



József Attila Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék

Szeged

1997.

Bevezetés

Ebben az értekezésben olyan véges algebraikkal foglalkozunk, amelyek véges sok alpművelettel rendelkeznek. Műveleten mindig véges változós műveletet értünk. Algebraink függvényteljességét vizsgáljuk, részletesebben arra a kérdésre fogunk válaszolni, hogy bizonyos algebraik alpműveleteiből, alaphalmazuk elemeiből és a projekciókból szuperpozícióval előáll-e az alaphalmazukon értelmezett összes művelet. Művelet helyett gyakran függvényt mondunk. Közelebről, olyan algebraikat vizsgálunk, amelyeknek alpműveletei ρ -mintafüggvények. A ρ -mintafüggvény fogalmát Csákány Béla javasolta. Ő vetette fel az olyan véges algebraik függvényteljességének a vizsgálatát, amelyek véges sok alpművelettel rendelkeznek és az alpműveleteik ρ -minta-függvények. Az ilyen algebraikat **reláció-mintaalgebra**knak vagy **ρ -mintaalgebra**knak nevezzük.

Értekezésem célja a véges ρ -mintaalgebraik függvényteljességének a vizsgálata, ha ρ ekvivalencia-reláció, permutáció, centrális reláció, részbenrendezés, affin reláció és h -reguláris reláció. I. G. Rosenberg [10] bizonyította, ilyen típusúak az olyan ρ relációk, amelyekre a $\text{Pol } \rho$ alakú klónok maximális klónok. Ezeket a klónokat **Rosenberg-klónok**nak nevezzük.

Számos szerző vizsgálta a véges algebraik függvényteljességét. Rédei és Szele [8] tétele szerint a véges testek függvényteljesek, ha alpműveleteknek az összeadást és szorzást tekintjük. Kuznyecov [4] bebizonyította, hogy a véges gyűrűk közül a nemtriviális szorzású egyszerű gyűrűk függvényteljesek. Maurer és Rhodes [1] belátták, hogy egy véges csoport akkor és csak akkor függvényteljes, ha nemkommutatív, egyszerű vagy triviális.

R. W. Quackenbushtól ([7], 74. oldal) származik a következő definíció.

Az $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in A^k$ elem k -asokról akkor mondjuk, hogy azonos mintájúak, ha bármely $i, j \in \{1, \dots, k\}$ esetén $x_i = x_j$ akkor és csak akkor, ha $y_i = y_j$. Az $f: A^k \rightarrow A$ függvényt **minta-függvény**nek nevezzük, ha $f(x_1, \dots, x_k) = x_i$ ($1 \leq i \leq k$), ahol i úgy függ az $x_1, \dots, x_k$ -től, hogy $f(y_1, \dots, y_k) = y_i$ ugyanazzal az i -vel, ha $(y_1, \dots, y_k)$ és $(x_1, \dots, x_k)$ azonos mintájúak.

Legyen ρ tetszőleges n -változós reláció az A halmazon. Az $(x_1, \dots, x_k) \in A^k$, $(y_1, \dots, y_k) \in A^k$ elem k -asokról akkor mondjuk, hogy azonos mintájúak a ρ -ra nézve, ha bármely $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$ esetén $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \rho$ akkor és csak akkor, ha $(y_{i_1}, \dots, y_{i_n}) \in \rho$. Az $f: A^k \rightarrow A$ függvényt ρ -mintafüggvénynek nevezzük, ha $f(x_1, \dots, x_k) = x_i$ ($1 \leq i \leq k$), ahol i úgy függ az $x_1, \dots, x_k$ -től, hogy $f(y_1, \dots, y_k) = y_i$ ugyanazzal az i -vel, ha $(y_1, \dots, y_k)$ és $(x_1, \dots, x_k)$ azonos mintájúak ρ -ra nézve.

Az $f: A^k \rightarrow A$ függvényt **konzervatív függvénynek** nevezzük, ha $f(x_1, \dots, x_k) \in \{x_1, \dots, x_k\}$ minden $x_1, \dots, x_k \in A$ -ra. A konzervatív függvények mindig valamely ρ szerint ρ -mintafüggvények. Az A algebrát **konzervatív algebrának** nevezzük, ha az A algebra alapműveletei konzervatív függvények.

Az $A = (A; F)$ algebrát **függvényteljesnek** nevezzük, ha az A halmazon értelmezett bármely művelet polinomfüggvénye az A algebrának. Számossági megfontolások miatt a végtelen algebrák nem függvényteljesek.

Az A^n teljesen reflexív és teljesen szimmetrikus ρ részhalmazát **centrális relációnak** nevezzük, ha $\rho \neq A^n$ és van olyan $c \in A$, amelyre $\{c\} \times A^{n-1} \subseteq \rho$. Az ilyen tulajdonságú c elemek halmazát a ρ centrális reláció **centrumának** nevezzük.

Legyen $3 \leq h \leq |A|$. A $T = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ($m \geq 1$) ekvivalencia-relációk családját az A halmazon h -regulárisnak nevezzük, ha

(1) minden θ_j -nek h osztálya van ($1 \leq j \leq m$),

(2) a θ_i relációk tetszőleges c_i ekvivalencia-osztályaira $\bigcap_{i=1}^m c_i \neq \emptyset$.

A T által meghatározott λ_T -reláció az összes olyan $(a_1, \dots, a_h) \in A^h$ rendezett h -asokból áll, amelyekre minden j ($1 \leq j \leq m$) esetén az $a_1, \dots, a_h$ elemek közül legalább kettő θ_j -nek ugyanabban az ekvivalencia-osztályában van. Az így definiált λ_T -relációt **h -reguláris relációnak** nevezzük.

A dolgozatban felhasznált tételek

Megjegyezzük, hogy a felsorolt lemmák, tételek sorszámozása a disszertációbeli sorszámozást követi.

Rosenberg [9] minimális klónokra bizonyított tételének következménye ρ -mintaalgebrákra a következő két lemma.

2. Lemma. Minden nemtriviális véges ρ -mintaalgebra termfüggvényei klónja tartalmaz vagy nemtriviális kétváltozós ρ -mintafüggvényt vagy olyan háromváltozós ρ -mintafüggvényt, amely többségi függvény vagy olyan nemtriviális ρ -mintafüggvényt, amely szemiprojekció.

3. Lemma. Adott ρ relációra minden $(A; f)$ nemtriviális véges ρ -mintaalgebra függvényteljes akkor és csak akkor, ha bármely olyan $(A; f)$ nemtriviális ρ -mintaalgebra függvényteljes, amelyre f az A -n értelmezett nemtriviális kétváltozós, vagy háromváltozós többségi függvény, vagy nemtriviális szemiprojekció.

Kételemű algebrák függvényteljességének vizsgálatára Post [6] teljességi tételét alkalmazzuk. E tételből következik, hogy egy kételemű algebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha az alapléműveletei között van nem lineáris és nem monoton művelet.

Szendrei Ágnes ([13], 436. oldal) és ([14], 58. oldal) leírt tételeit a következő tételben fogalmazzuk meg:

8. Tétel. Egy véges, egyszerű, szűrjektív A algebrára a következők valamelyike mindig teljesül:

- (1) A függvényteljes,
- (2) A affin egy elemi Abel-csoportra,
- (3) A izomorf egy olyan algebrával, amely termekvivalens az $(N; G)^{|M|}$ ($m \geq 1$) mátrix hatvánnyal, ahol N véges, de nem egyelemű, $G \leq S_N$ és $|M| > 2$ esetén a G permutációcsoport primitív,

- (4) az A algebrának van kompatibilis, kétváltozós centrális relációja,
- (5) az A algebrának van kompatibilis, korlátos részbenrendezése.

A disszertációban belátjuk, hogy konzervatív algebrákra a 8. Tételből a következő lemma adódik.

10. Lemma. Legyen A legalább háromelemű, véges, egyszerű, konzervatív algebra. Az A algebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha:

- (1) A -nak nincs kompatibilis, kétváltozós centrális relációja A -n és
- (2) A -nak nincs kompatibilis, korlátos részbenrendezése A -n.

Szabó László [12] tételét felhasználva a 10. Lemma élesítését a következő lemmában fogalmazzuk meg.

11. Lemma. Az A legalább háromelemű, véges, egyszerű, konzervatív algebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha

- (1) A -nak nincs olyan kompatibilis, kétváltozós centrális relációja, amelyet A minden automorfizmusa megőriz, és
- (2) A -nak nincs olyan ρ kompatibilis, korlátos részbenrendezése, hogy A minden π automorfizmusára a $\rho^\pi = \{(x\pi, y\pi) : (x, y) \in \rho\}$ reláció ρ vagy ρ^{-1} .

A. F. Pixley nevéhez fűződik a

$$t(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x = y, \\ x, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

függvény, az ún. **ternáris diszkriminátor** vizsgálata. H. Werner [23] belátta, hogy az $(A; t)$ véges algebra függvényteljes.

Fried Ervin és A. F. Pixley [3] vizsgálta a

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y, \\ z, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

ún. **duális diszkriminátort**. Megmutatták, hogy az $(A; d)$ legalább háromelemű, véges algebra függvényteljes.

Az $(A; t)$, $(A; d)$ mintaalgebrák ρ -mintaalgebrák is, ha ρ egyenlőség reláció az A halmazon.

Az $(A; F)$ algebrát **homogén algebrának** nevezzük, ha az S_A szimmetrikus csoport automorfizmuscsoportja az $(A; F)$ algebrának. Csákány Béla [2] bebizonyította, hogy bármely nemtriviális, véges, homogén algebra függvényteljes hat kivételes esettől eltekintve. A mintaalgebrák homogén algebrák, ezért mintaalgebrákra érvényes a következő:

13. Lemma. Bármely legalább háromelemű, véges, nemtriviális mintaalgebra függvényteljes.

Szabó László [11] tranzitív automorfizmuscsoporttal rendelkező véges, egyszerű algebrák függvényteljességi tételének következménye a következő lemma.

14. Lemma. Ha $\rho \subseteq A^n$ tetszőleges reláció és a ρ automorfizmuscsoportja tranzitív, akkor bármely legalább háromelemű, véges, egyszerű ρ -mintaalgebra függvényteljes.

Pálfy Péter Pál, Szabó László és Szendrei Ágnes [5] primitív automorfizmuscsoporttal rendelkező véges, nemtriviális algebrák függvényteljességét konzervatív algebrákra a következő lemmában fogalmazzuk meg.

16. Lemma. Ha az A legalább háromelemű, véges, konzervatív algebra automorfizmuscsoportja primitív, akkor A vagy függvényteljes vagy ekvivalens egy C^s , $(s \geq 2)$ algebrával, ahol a C algebra függvényteljes és automorfizmuscsoportja összetett rendű primitív permutáció csoport (ebben az esetben C^s koszorúsorozata az $\text{Aut}(A)$ -nak és az S_s szimmetrikus csoportnak).

A ρ -mintaalgebrák függvényteljessége

A következő két tételnek annyiban van elvi jelentősége, hogy rámutatnak: bizonyos ρ relációk biztosítják, más ρ relációk pedig kizárják a ρ -mintaalgebrák függvényteljességét.

21. Tétel. Ha $3 \leq |A| < \infty$, $1 < n \leq |A|$, akkor a A halmazon megadható olyan n -változós ρ reláció, amelyre létezik nemtriviális ρ -mintaalgebra és bármely nemtriviális ρ -mintaalgebra függvényteljes.

23. Tétel. Ha $3 \leq |A| < \infty$, $1 \leq n < |A|$, akkor az A halmazon megadható olyan n -változós ρ -reláció, amelyre létezik nemtriviális ρ -mintaalgebra és bármely ρ -mintaalgebra nem függvényteljes.

Az A π -mintaalgebrát **permutáció-mintaalgebrának** nevezzük, ha π az A halmazon egy permutáció. A permutáció-mintaalgebrák függvényteljességre vonatkozó eredmények közül a disszertációban szereplő legfontosabb tételeket soroljuk fel.

Legyen

$$f_{\pi}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in \pi \text{ vagy } (y, x) \in \pi, \\ y & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol π ciklikus permutáció az A halmazon. Ha $f_4(x, y) = f_3(y, x)$, akkor érvényes a következő tétel.

28. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$, π tetszőleges permutáció és f tetszőleges, nemtriviális, kétváltozós π -mintafüggvény az A halmazon. Az $(A; f)$ π -mintaalgebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha π ciklus permutáció az A halmazon és $|A| = 4$ esetén $f \neq f_3, f_4$.

29. Tétel. Ha $3 \leq |A| < \infty$, π tetszőleges permutáció az A halmazon és f olyan π -mintafüggvény, amely többségi függvény, akkor az $(A; f)$ algebra függvényteljes.

Az $(A; f)$ legalább háromelemű, véges permutáció-mintaalgebrák függvényteljes-ségének a teljes leírása a 28. Tétel és a 29. Tétel, amelyekre f tetszőleges, nem-triviális kétváltozós vagy tetszőleges többségi függvény.

A disszertációban az olyan $(A; f)$ legalább háromelemű, véges, nemtriviális permutáció-mintaalgebrák függvényteljességét vizsgáljuk, ahol f szemiprojekció. Belátjuk, hogy az ilyen algebrák között vannak függvényteljesek és nem függvényteljesek.

32. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és π fixpont nélküli permutáció az A halmazon. Az A egyszerű π -mintaalgebra függvényteljes akkor és csak akkor, ha az A algebrának nincs olyan kompatibilis, kétváltozós centrális relációja, amelyet A minden automorfizmus megőriz.

A következő tételt a 39. Tételt és a 64. Tétel bizonyítására használjuk fel.

36. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és ρ legalább háromváltozós, teljesen reflexív reláció az A halmazon. Az A ρ -mintaalgebra függvényteljes akkor és csak akkor, ha az A toleranciamentes.

A ρ -mintaalgebrák függvényteljességére vonatkozó tételeket bizonyítunk ha ρ centrális reláció. A következő tétel alkalmazásával a [19]-ben publikált tétel bizonyítását egyszerűsítettük.

39. Tétel. Legyen ρ legalább kétváltozós centrális reláció az A véges halmazon. Az A véges ρ -mintaalgebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha A toleranciamentes.

Ha ρ centrális reláció, akkor belátjuk a következőt:

legyen $3 \leq |A| < \infty$ és ρ tetszőleges centrális reláció az A halmazon. Az $(A; f)$ ρ -mintaalgebra nem függvényteljes, ha f tetszőleges kétváltozós ρ -minta függvény (40. Tétel).

Ha ρ legalább kétváltozós centrális reláció, akkor nincs olyan ρ -mintafüggvény, amely többségi függvény. Az olyan $(A; f)$ legalább háromelemű, véges ρ -minta-algebrák függvényteljességét is vizsgáljuk, ahol ρ centrális reláció az A halmazon és az f ρ -mintafüggvény szemiprojekció.

A ρ n -változós centrális reláció **minimális centrális reláció** az A halmazon, ha bármely $a_1, \dots, a_n \in A$ páronként különböző nem centrumelemekre $(a_1, \dots, a_n) \notin \rho$.

Külön foglalkozunk az olyan ρ -mintaalgebrák függvényteljességével, ahol ρ minimális centrális reláció.

A $\leq$ -mintaalgebrák függvényteljességét vizsgáljuk, ha $\leq$ lineáris rendezés vagy korlátos részenrendezés. Belátjuk a következőt:

ha $2 \leq |A| < \infty$, $\leq$ az A halmazon értelmezett tetszőleges korlátos részenrendezés és f tetszőleges kétváltozós $\leq$ -mintafüggvény, akkor az $(A; f)$ algebra nem függvényteljes (48. Tétel).

Az olyan $(A; f)$ legalább háromelemű, véges $\leq$ -mintaalgebrák függvényteljességével is foglalkozunk, ahol f többségi függvény vagy nemtriviális szemiprojekció.

Legyen

$$t(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x \leq y, \\ x, & \text{ha } x \not\leq y, \end{cases}$$

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \leq y, \\ z, & \text{ha } x \not\leq y. \end{cases}$$

A következő tétel a [21]-ben publikált 1. Tételnek és 2. Tételnek az általánosítása tetszőleges részenrendezésre.

52. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és $\leq$ tetszőleges részenrendezés az A halmazon. Ha $f = t$ vagy $f = d$, akkor az $(A; f)$ algebra függvényteljes.

Megjegyzés. Ha a t és d függvények definíciójában szereplő részbenrendezés egyenlőség, akkor a ternáris diszkriminátort és a duális diszkriminátort kapjuk.

Legyen az $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazon egy + Abel-csoport-művelet (a mod n összeadás) értelmezve. Defináljuk az $\underline{n}$ halmazon a ρ relációt a következőképpen:

$$(x_1, x_2, x_3, x_n) \in \rho \Leftrightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_n.$$

Az így definiált reláció **affin** reláció. Külön foglalkozunk a ρ -mintaalgebrák függvényteljességével, ha ρ affin reláció.

Végül a disszertáció utolsó fejezetében a λ_T -mintaalgebrák függvényteljességét a következő még nem publikált tételben teljesen leírjuk.

64. Tétel. Legyen λ_T a $T = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ($m \geq 1$) h -reguláris ekvivalencia-relációk családjá által meghatározott reláció az A halmazon. Az $(A; F)$ tetszőleges, véges, nem-triviális λ_T -mintaalgebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha $\bigcap_{j=1}^m \theta_j$ egyenlőségi reláció az A halmazon.

Irodalom

- [1] S. BURRIS - H. P. SANKAPPANAVAR, Bevezetés az univerzális algebrába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [2] B. CSÁKÁNY, Homogeneous algebras are functionally complete, Algebra Universalis, 11 (1980), 149-158.
- [3] E. FRIED and A. F. PIXLEY, The dual discriminator function in universal algebra, Acta Sci. Math., 41 (1979), 83-100.
- [4] A. В. КУЗНЕЦОВ: Алгебра логики и её обобщения - в "Математика в СССР за 40 лет" с. kötetben (1959), 102-115.

- [5] P. P. PÁLFY, L. SZABÓ and Á. SZENDREI, Automorphism groups and functional completeness, *Algebra Universalis*, 15 (1982), 385-400.
- [6] E. L. POST, The two-valued iterative systems of mathematical logic, *Ann. of Math. Studies* 5, Princeton University Press, 1941.
- [7] R. W. QUACKENBUSH, Some classes of idempotent functions and their compositions, *Collq. Math.* 29 (1970), 71-81.
- [8] L. RÉDEI - T. SZELE, Algebraisch - zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe, I. *Acta Math.*, 9, (1947), 291-320.
- [9] I. G. ROSENBERG, Minimal clones I : the five types, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* vol. 43, North-Holland, Amsterdam (1986), 405-427.
- [10] I. G. ROSENBERG, Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken (Struktur der Functionen von mehreren Veränderlichen auf endlichen Mengen), *Rozprawy Československé Akad. Věd. Rada Math. Přírod. Věd.*, 80 (1970), 3-93.
- [11] L. SZABÓ, Algebras with transitive automorphism groups, *Algebra Universalis* 31 (1994), 589-598.
- [12] L. SZABÓ, On simple surjective algebras, *Acta Sci. Math.*, 59 (1994), 17-23.
- [13] Á. SZENDREI, Simple surjective algebras having no proper subalgebras, *J. Austral. Math. Soc.*, 48 (1990), 434-454.
- [14] Á. SZENDREI, The primal algebra characterization theorem revisited, *Algebra Universalis*, 29 (1992), 41-60.
- [15] VÁRMONOSTORY ENDRE, A ρ -mintafüggvények funkcionális teljessége, ha ρ -rendezés, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei (1985), 37-39.
- [16] VÁRMONOSTORY ENDRE, A mintafüggvények funkcionális teljessége, egyetemi doktori értékelés, JATE Bolyai Intézet, 1980.
- [17] VÁRMONOSTORY ENDRE, A ρ -mintafüggvények funkcionális teljessége, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei (1980), 171-175.
- [18] VÁRMONOSTORY ENDRE, Az általánosított diszkriminátor és a duális diszkriminátor-függvény függvényteliességéről, *Acta Academiae Paedagogicae Szegediensis* (1987-1988), 51-56.
- [19] E. VÁRMONOSTORY, Central pattern functions, *Acta Sci. Math.*, 56 (1992), 223-227.

- [20] E. VÁRMONOSTORY, Generalized pattern functions,
Algebra Universalis, 29 (1992), 346-353.
- [21] E. VÁRMONOSTORY, Order-Discriminating Operations,
Order 9. (1992), 239-244,
- [22] E. VÁRMONOSTORY, Relational pattern functions, Finite Algebra and Multiple-valued Logic (Proc. Conf. Szeged, 1979), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 28. North-Holland, Amsterdam, (1981), 753-758.
- [23] H. WERNER, Eine Charakterisierung funktional vollständiger Algebren,
Archiv der Math., 21 (1970), 381-385.