B 3535

FOURIER-SOROK RIEMANN ÖSSZEGEZHETŐSÉGE ÉS FOURIER-TRANSZFORMÁLTAK NAGYSÁGRENDJE

Készítette:

BAGOTA MÓNIKA

DOKTORI (PH.D.) ÉRTEKEZÉS

Témavezető : Móricz Ferenc

József Attila Tudományegyetem
Bolyai Intézet

Szeged
1998.

BEVEZETÉS

A Fourier-sorok, vagy általánosabban a trigonometrikus sorok elmélete a matematikai analízis egyik központi része volt hosszú ideig, de még napjainkban is lényeges szerepet játszik a matematika fejlődésében. A matematika számos alapvető fogalma éppen a Fourier-sorok elméletében keletkezett vagy csiszolódott a napjainkban is használatos formára. Példaképpen említjük, hogy a függvény ma is elfogadott fogalmával Dirichletnek a Fourier-sorok konvergenciájával foglalkozó híres dolgozatában találkozunk. Vagy a Riemann-integrál szigorú definíciója Riemann "Habilitationsschrift"-jében jelenik meg először, amely trigonometrikus sorok vizsgálatával foglalkozik. Vagy a modern halmazelmélet Cantornak azon próbálkozásaiból keletkezett, hogy a trigonometrikus sorok egyértelműségi halmazait jellemezze. De a XX. században is több nagy horderejű elmélet született a Fourier-sorok vizsgálata során. Hadd utaljunk a Lebesgue-integrál elméletének kifejlődésére szoros kapcsolatban a Fourier-sorok tanulmányozásával, vagy még újabban az általánosított függvények (ún. disztribúciók) elméletének a Fourier-integrálok vizsgálatával való mély kölcsönhatásra.

Jelenleg tanúi vagyunk annak, hogy az újabban bevezetett függvényterek, mint például a valós H^1 Hardy-tér, vagy a BMO-tér szintén jó alapot szolgáltatnak a Fourier-sorok vizsgálatában. Például, Móricz Ferenc témavezetőm 1995-ben bizonyította, hogy a maximál Fejér-operátor korlátosan képezi le a valós H^1-teret a jólismert Lebesgue-féle L^1-térbe (lásd [14]), majd ebből kiindulva, újabb Hardy-féle tereket vezetett be a kétdimenziós tóruszon és további Fejér-féle operátorok korlátosságát bizonyította ezen tereken (lásd [13]).

Ezekhez a vizsgálatokhoz csatlakoztam, amikor a maximál Riemann-operátor korlátosságát bizonyítottam a valós H^1-térből az L^1-térbe (lásd [1]). Bár a Riemann-féle szummálhatóságot eredetileg trigonometrikus sorok egyértelműségi halmazainak és lokalizációs problémájának vizsgálatára vezették be, nekem sikerült a Riemann-féle közepek jó konvergencia tulajdonságait bizonyítanom. Alapvetően ez azon múlik, hogy a Riemann-féle magfüggvény a Fejér-féle magfüggvényhez hasonlít, és nem a Dirichlet-féle magfüggvényhez. A maximál Riemann-operátor kétdimenziós tóruszra való kiterjesztésében is sikerült eredményt elérnem (lásd [5]). Ezen eredményeimet az értekezés első két fejezetében foglalom össze.

Az értekezés harmadik és negyedik fejezetében pedig azon eredményeimet ismertetem, amelyeket a Fourier-transzformált nagyságrendjének vizsgálatában értem el. Ezen vizsgálatokra azon újabb eredmények inspiráltak, amelyeket a Fourier-együtthatók nagyságrendjének vizsgálatában J.B. Reade (lásd [17]), Yu.E. Kuprikov (lásd [12]), továbbá Móricz Ferenc témavezetőm Németh Zoltánnal közösen ért el a 80-as évek közepétől kezdve (lásd [15]). Röviden összefoglalva, a Riemann-Lebesgue lemma szerint integrálható függvény $\hat{f}(t)$ Fourier-transzformáltja 0-hoz tart, ha $|t| \to \infty$. Az jólismert, hogy ez a 0-hoz tartás tetszőlegesen lassú lehet. Ha viszont az $\hat{f}$ Fourier-transzformáltnak előbb képezzük a $(C, \alpha > 0)$-közepét, akkor a fenti 0-hoz tartás sebességét lényegesen megjavíthatjuk. Például, ha $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ és $0 < \alpha < 1/2$, akkor még a $|t|^\alpha \hat{f}(t)$ szorzat $(C, 1/2)$ közepe is 0-hoz tart, ha $|t| \to \infty$ (lásd [4]). Vagy ha $f \in L^1$, $0 < \alpha < 1$ és $x = 0$ Lebesgue-pontja f-nek, akkor még a $t\hat{f}(t)$ szorzat (C, α)-közepe is 0-hoz tart. Ezen és további hasonló eredményeket bizonyítok a harmadik fejezetben az egydimenziós esetben, míg a negyedik fejezetben a kétdimenziós esetben.

Köszönetnyilvánítás

E helyen szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Móricz Ferenc professzornak ösztönző és odaadó segítségnyújtásáért, amely nélkül ez a munka és tudományos dolgozataim sem készülhettek volna el.

I. FEJEZET

A MAXIMÁL RIEMANN-OPERÁTOR AZ EGYDIMENZIÓS TÓRUSZON

Bevezetés

Legyen f periodikus, Lebesgue-integrálható függvény a $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$ tóruszon, jelölésben : $f \in L^1(\mathbb{T})$. Ekkor az f függvény Fourier-sora

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.1}$$

alakú, ahol

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt, \quad b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Emlékeztetünk az $\tilde{f}$ függvény, az $f \in L^1(\mathbb{T})$ konjugált függvényének a definíciójára:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &:= (P.V.)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)(1/2)\cot(t/2)\, dt \\ &:= -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)](1/2)\cot(t/2)dt.\end{aligned}$$

Jól ismert, hogy az $\tilde{f}(x)$ függvény létezik majdnem minden $x \in \mathbb{T}$-re, de általában $\tilde{f} \notin L^1(\mathbb{T})$.

Ebből adódóan definiáljuk a periodikus $H^1(\mathbb{T})$ valós Hardy-teret:

$$H^1(\mathbb{T}) := \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})\},$$

amelyet az

$$\|f\|_{H^1} := \|f\|_{L^1} + \|\tilde{f}\|_{L^1}, \tag{1.2}$$

normával látunk el, ahol

$$\|f\|_{L^1} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt.$$

Az is jól ismert, hogy ha $f \in H^1(\mathbb{T})$, akkor az $\tilde{f}$ Fourier-sora a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{1.3}$$

alakban állítható elő, amit (1.1) konjugált sorának nevezünk.

Új eredmények

Adott (1.1) trigonometrikus sor esetén, ahol most csupán annyit teszünk fel, hogy

$$a_k, b_k \to 0, \quad \text{ha} \quad k \to \infty,$$

tekintjük az

$$F(x) = \frac{1}{4}a_0 x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2} \tag{1.4}$$

függvényt, amelyet az (1.1) sor kétszeri, formális integrálásával kaptunk. Az $F(x)$ folytonos függvény, hiszen az (1.4) formula jobboldalán levő sor abszolut és egyenletesen konvergens. Az is könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned} S_h(x) :&= \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

ahol $h > 0$, és megegyezés szerint $(\sin kh)/kh = 1$, ha $k = 0$. Akkor mondjuk, hogy az (1.1) sor Riemann szerint egy véges s számhoz összegezhető, ha

$$S_h(x) \to s, \quad \text{ha} \quad h \to 0.$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy az (1.1) sor valamely $f \in L^1(\mathbb{T})$ függvény Fourier-sora. Ekkor az (1.5) formulában szereplő Riemann-közepet $S_h(f;x)$-szel jelöljük, míg a maximál Riemann-operátort az alábbiak szerint definiáljuk:

$$S_*(f;x) := \sup_{h>0} |S_h(f;x)|. \tag{1.6}$$

Egyik fő eredményünk az, hogy az $S_*(f)$ operátor $H^1(\mathbb{T})$-ből $L^1(\mathbb{T})$-be korlátos módon képez le, vagy más szavakkal: az $S_*(f)$ operátor (H^1, L^1)-típusú (lásd [1]).

1.1. TÉTEL. *Megadható olyan C állandó, hogy minden $f \in H^1(\mathbb{T})$ függvényre*

$$\|S_*(f)\|_{L^1} \le C\|f\|_{H^1}. \tag{1.7}$$

Megjegyezzük, hogy a maximál Fejér-operátorra az 1.1. Tétel megfelelőjét Móricz Ferenc látta be (lásd [14]).

Az (1.3) konjugált sor felhasználásával (1.5)-höz hasonlóan definiáljuk a konjugált Riemann-közepeket:

$$\widetilde{S}_h(x) := \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2,$$

és vezetjük be a konjugált maximál Riemann-operátort:

$$\widetilde{S}_*(f;x) := \sup_{h>0} |\widetilde{S}_h(f;x)|, \tag{1.8}$$

feltéve, hogy (1.1) valamely $f \in H^1(\mathbb{T})$ függvénynek a Fourier-sora; következésképpen (1.3) az $\tilde{f}$ függvénynek a Fourier-sora.

Az 1.1. Tételből azonnal adódik, hogy $\widetilde{S}_*(f)$ is (H^1, L^1) típusú.

1.1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha* $f \in H^1(\mathbb{T})$, *akkor*

$$\|\widetilde{S}_*(f)\|_{L^1} \le 2C\|f\|_{H^1}, \tag{1.9}$$

ugyanazon C *állandóval, mint* (1.7)*-ben.*

Felhasznált eredmények

Egy $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ függvényt (periodikus) atomnak nevezünk, ha $a(x) \equiv 1$, vagy, ha létezik $\mathbb{T}$-nek olyan I részintervalluma, hogy

$$\{x \in \mathbb{T} : a(x) \neq 0\} \subseteq I, \tag{1.10}$$

$$|a(x)| \le |I|^{-1} \quad \text{m.m.}, \tag{1.11}$$

ahol $|I|$ az I intervallum hosszát jelöli, és

$$\int_I a(x)\,dx = 0. \tag{1.12}$$

Az (1.10)-ből és (1.11)-ből adódik, hogy

$$\|a\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi}\int_I |a(x)|\,dx \le 1.$$

A $H^1(\mathbb{T})$ Hardy-tér függvényeinek atomokkal történő következő előállítása Coifmantól és Weiss-től származik (lásd [7], 372-373. o.).

1.1. LEMMA. *Egy $f \in L^1(\mathbb{T})$ függvény akkor és csak akkor $H^1(\mathbb{T})$-beli, ha létezik atomoknak olyan $(a_k : k \in \mathbb{N})$ sorozata és valós számoknak olyan $(\lambda_k : k \in \mathbb{N})$ sorozata, hogy*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(x) \quad m.m. \tag{1.13}$$

és

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| < \infty. \tag{1.14}$$

Továbbá, az (1.2)-ben definiált $\|f\|_{H^1}$ norma ekvivalens az alábbi infimummal:

$$\inf \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|,$$

ahol az infimum képzését minden olyan (λ_k) sorozatra kiterjesztjük, amelyre mind (1.14), mind (1.13) fennáll valamely (a_k) sorozattal.

Legyen I a $\mathbb{T}$-nek részintervalluma, és jelöljük $J := J(I)$-vel azt az intervallumot, amelyet I-ből úgy kapunk, hogy a középpontjából r-szeresére nagyítjuk, ahol $r \in \mathbb{N}$. Azaz, ha $I := [c, d]$, akkor

$$J(I) := \left[\frac{c+d}{2} - r\frac{d-c}{2}, \frac{c+d}{2} + r\frac{d-c}{2}\right].$$

A továbbiakban számunkra az $r := 3$ eset válik érdekessé. Ekkor $J := [2c - d, 2d - c]$, és nyilvánvaló, hogy $|J| = 3|I|$.

Egy T operátort, amelyik az $L^1(\mathbb{T})$-beli függvényeket $\mathbb{T}$-n értelmezett mérhető függvények osztályába, azaz az $L^0(\mathbb{T})$ függvényosztályba képezi le, kvázi-lokálisnak nevezzük, ha léteznek olyan $C > 0$ és $r \in \mathbb{N}$ állandók, hogy minden olyan $a(x)$ függvényre, amely kielégíti az (1.10) és (1.12) feltételeket, az is fennáll, hogy

$$\int_{\mathbb{T}\setminus J(I)} |Ta(x)|\, dx \le C\|a\|_{L^1}. \tag{1.15}$$

A következő lemma (lásd [18], továbbá [14] vagy [16]) elegendő feltételt ad arra, hogy egy szublineáris operátor, speciálisan egy maximál operátor (H^1, L^1) típusú legyen.

1.2. LEMMA. *Ha egy $T : L^1(\mathbb{T}) \to L^0(\mathbb{T})$ szublineáris operátor kvázi-lokális és (L^∞, L^∞)-típusú, akkor bármely $f \in H^1(\mathbb{T})$ függvényre fennáll, hogy*

$$\|Tf\|_{L^1} \leq C_1 \|f\|_{H^1}, \tag{1.16}$$

ahol a C_1 állandó csak a $\|T\|_\infty$ normától és a kvázi-lokalitás definíciójában előforduló C és r állandóktól függ.

Bizonyítás. Bár a bizonyítás ismert, de a könnyebb olvashatóság kedvéért részletezzük.

(i) Először tekintsünk egy atomot: $f(x) = a(x)$. Ekkor

$$\|Tf\|_{L^1} = \|Ta\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Ta(x)|\, dx \leq \left\{ \int_J + \int_{\mathbb{T}\setminus J} \right\} |Ta(x)|\, dx.$$

Mivel T kvázi-lokális, ezért

$$\left\{ \int_J + \int_{\mathbb{T}\setminus J} \right\} |Ta(x)|\, dx \leq \|Ta\|_{L^\infty} |J| + C\|a\|_{L^1}. \tag{1.17}$$

Felhasználva, hogy a T operátor (L^∞, L^∞)-típusú, nyerjük, hogy

$$\|Ta\|_{L^\infty} |J| + C\|a\|_{L^1} \leq K\|a\|_{L^\infty} |J| + C\|a\|_{L^1}. \tag{1.18}$$

Mivel az $a(x)$ olyan függvény, amely kielégíti az (1.10), (1.11) feltételeket és mivel $|J| = 3|I|$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} K\|a\|_{L^\infty} |J| + C\|a\|_{L^1} &\leq K\|a\|_{L^\infty} |J| + C\|a\|_{L^\infty} |I| = (3K + C)\|a\|_{L^\infty} |I| \\ &\leq 3K + C = C_1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Összekapcsolva (1.17) - (1.19)-et, adódik

$$\|Ta\|_{L^1} \leq C_1. \tag{1.20}$$

(ii) Most egy tetszőleges $f \in H^1(\mathbb{T})$ függvényt tekintünk. Felhasználva az (1.13) előállítást és azt a tényt, hogy T szublineáris operátor, kapjuk, hogy

$$|Tf(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| |Ta_k(x)|.$$

Ebből pedig (1.20) és (1.14) alapján következik, hogy

$$\|Tf\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Tf(x)|\,dx \le \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Ta_k(x)|\,dx \le C_1 \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|. \tag{1.21}$$

Mivel az $\|f\|_{H^1}$ norma ekvivalens az alábbi infimummal:

$$\inf \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|,$$

vagyis léteznek olyan c_1, c_2 állandók ($0 < c_1 < c_2 < \infty$), hogy

$$c_1\|f\|_{H^1} \le \inf \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \le c_2\|f\|_{H^1},$$

a fentiek szerint valamely (λ_k) sorozatra

$$C_1 \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \le C_1 2c_2\|f\|_{H^1}. \tag{1.22}$$

Összekapcsolva (1.21)-et és (1.22)-t, adódik (1.16), amit bizonyítani kellett. □

Az utolsó lemma szerint az $S_*(f)$ maximál Riemann-operátor (L^∞, L^∞) típusú.

1.3. LEMMA. *Ha* $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, *akkor*

$$\|S_*(f)\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty}.$$

Bizonyítás. Felhasználjuk a [10, 5. Lemmáját]:

$$S_h(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi_{2h}(x-t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\varphi_{2h}(t)\,dt, \tag{1.23}$$

ahol

$$\varphi_h(t) := \frac{1}{h}\max\left(0, 1 - \frac{|t|}{h}\right). \tag{1.24}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} |S_h(f;x)| &\le \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty \varphi_{2h}(t)\,dt = \|f\|_\infty \int_{-2h}^{2h} \frac{1}{2h}\left(1 - \frac{|t|}{2h}\right)\,dt \\ &= \frac{2\|f\|_\infty}{2h}\int_0^{2h}\left(1 - \frac{t}{2h}\right)\,dt = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Az új eredmények igazolása

1.1. *Tétel bizonyítása.*

Az (1.23) előállításból indulunk ki.

Az 1.2. és 1.3. Lemma alapján elegendő ellenőrizni, hogy $S_*(f)$ maximál Riemann-operátor kvázi-lokális. Legyen $a(x)$ olyan függvény, amely kielégíti az (1.10) és (1.12) feltételeket. Jelöljük $I := [c, d]$-vel az (1.10)-ben előforduló intervallumot. (1.12) és (1.23) alapján kapjuk, hogy

$$S_h(a;x) = \int_I a(t)\varphi_{2h}(x-t)\,dt = \int_I a(t)[\varphi_{2h}(x-t) - \varphi_{2h}(x-c)]dt. \tag{1.25}$$

A bizonyítás során feltesszük, hogy $t \in I$ és $x \in \mathbb{T}\backslash J$, ahol $|J| = 3|I|$.

Először az $|x-t| \le 2h$ és $|x-c| \le 2h$ esetet tekintjük. Felhasználva (1.24)-et, kapjuk

$$\begin{aligned} |\varphi_{2h}(x-t) - \varphi_{2h}(x-c)| &= \left|\frac{1}{2h}\left(1 - \frac{|x-t|}{2h}\right) - \frac{1}{2h}\left(1 - \frac{|x-c|}{2h}\right)\right| \\ &= \frac{1}{4h^2}||x-t| - |x-c|| \le \frac{1}{4h^2}|t-c| \le \frac{|I|}{(x-t)^2}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Összekapcsolva (1.25)-öt és (1.26)-ot, adódik

$$|S_h(a;x)| \le \int_I |a(t)|\frac{|I|}{(x-t)^2}dt. \tag{1.27}$$

Mivel a jobboldal független h-tól, következik, hogy

$$S_*(a;x) \le |I| \int_I |a(t)|\frac{dt}{(x-t)^2}.$$

Felhasználva Fubini-tételét az alábbi módon becsülhetünk:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}\backslash J} S_*(a;x)\,dx &\le |I| \int_I |a(t)|\,dt \int_{\mathbb{T}\backslash J} \frac{dx}{(x-t)^2} \\ &\le 2|I| \int_I |a(t)|\,dt \int_{|I|}^{\infty} \frac{du}{u^2} = C\|a\|_{L^1}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Másodszor az $|x-t| \le 2h$ és $|x-c| > 2h$ esetet tekintjük. (1.24) és $\varphi_{2h}(x-c) = 0$ alapján kapjuk, hogy

$$|\varphi_{2h}(x-t) - \varphi_{2h}(x-c)| = \frac{1}{4h^2}|2h - |x-t|| \le \frac{|t-c|}{4h^2} \le \frac{|I|}{(x-t)^2},$$

ahol kihasználtuk azt, hogy a feltételek miatt $0 < x - t < 2h$ és $x - c > 2h$, ezért

$$t - c = (x - c) - (x - t) > 2h - (x - t) > 0.$$

Ebből pedig (1.27)-et felhasználva adódik (1.28).

Harmadszor az $|x-t| > 2h$ és $|x-c| \leq 2h$ esetet tekintjük. Ekkor (1.24) és $\varphi_{2h}(x-t) = 0$ alapján kapjuk, hogy

$$|\varphi_{2h}(x-t) - \varphi_{2h}(x-c)| = \frac{1}{4h^2}|2h - |x-c|| \leq \frac{|t-c|}{4h^2} \leq \frac{|I|}{(x-c)^2} \leq 4\frac{|I|}{(x-t)^2},$$

ahol kihasználtuk azt, hogy a feltételek miatt $0 < c - x < 2h$ és $t - x > 2h$, ezért

$$t - c = (t - x) - (c - x) > 2h - (c - x) > 0;$$

és hasonlóan $x \leq 2c - d$-ből adódik, hogy

$$c - x \geq 1/2(d - x).$$

Ebből pedig (1.27)-et felhasználva adódik (1.28).

Negyedszer az $|x - t| > 2h$ és $|x - c| > 2h$ esetet tekintjük. Ekkor

$$\varphi_{2h}(x - t) = \varphi_{2h}(x - c) = 0.$$

□

1.1. *Következmény bizonyítása.* Ha $f \in H^1(\mathbb{T})$, akkor a Fourier-sor egyértelműsége miatt kapjuk, hogy

$$(\tilde{f})^{\sim}(x) = -f(x) + \frac{1}{2}a_0 \quad \text{m.m.}$$

Mivel $\tilde{f} \in H^1(\mathbb{T})$, ezért alkalmazhatjuk az 1.1. Tételt. □

További megjegyzések

Ha csak annyit teszünk fel, hogy $f \in L^1(\mathbb{T})$, akkor általában nem állíthatjuk azt, hogy $S_*(f)$ maximál Riemann-operátor $L^1(\mathbb{T})$-be tartozik. Ekkor csak annyit mondhatunk, hogy $S_*(f)$ operátor $L^1(\mathbb{T})$-ből a *gyenge*-$L^1(\mathbb{T})$-be képez le korlátos módon, azaz az $S_*(f)$ operátor $(L^1, \textit{gyenge-}L^1)$-típusú, vagy másik terminológiával: $S_*(f)$ *gyenge* (1,1) típusú.

1.2. TÉTEL. (lásd [10, 355. o.]) *Ha* $f \in L^1(\mathbb{T})$, *akkor*

$$\|S_*(f)\|_{gyenge-L^1} := \sup_{\lambda>0} \lambda|\{x \in \mathbb{T} : S_*(f;x) > \lambda\}| \leq C\|f\|_{L^1},$$

ahol $|\,.\,|$ *a Lebesgue-mértéket jelöli és* C *állandó független* f*-től.*

Az 1.2. Tétel bizonyítása azon múlik, hogy (1.23) szerint

$$|S_h(f;x)| \leq \frac{1}{2h}\int_{-2h}^{2h} |f(x-t)|\,dt \leq 2M(f;x),$$

ahol $M(f;x)$-szel a Hardy-Littlewood maximál függvényt jelöljük (lásd [21, 32-33. o.]), amelyről közismert, hogy korlátos operátor $L^1(\mathbb{T})$-ből a *gyenge*-$L^1(\mathbb{T})$-térbe.

Az (1.5) alatt definiált $\widetilde{S}_*(f)$ konjugált maximál Riemann-operátorról Móricz Ferenc bizonyította újabban, hogy szintén $(L^1, gyenge\text{-}L^1)$-típusú.

II. FEJEZET

A MAXIMÁL RIEMANN-OPERÁTOR A KÉTDIMENZIÓS TÓRUSZON

Bevezetés

Legyen $f(x,y)$ kétváltozós függvény, amely mindkét változójában periodikus és Lebesgue-integrálható a kétdimenziós tóruszon $\mathbb{T}^2 := [-\pi,\pi) \times [-\pi,\pi)$, jelölésben: $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$. Ekkor az $f(x,y)$ függvény kettős Fourier-sora

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m,n) e^{i(mx+ny)} \tag{2.1}$$

alakú, ahol

$$\hat{f}(m,n) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u,v) e^{-i(mu+nv)}\, du\, dv.$$

A (2.1)-ben előforduló sor kettős Riemann-közepeit az egyváltozós esethez hasonlóan az alábbi módon adjuk meg:

$$S_{h,k}(f;x,y) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m,n) e^{i(mx+ny)} \Big(\frac{\sin mh}{mh}\Big)^2 \Big(\frac{\sin nk}{nk}\Big)^2, \tag{2.2}$$

ahol $h,k > 0$ és megegyezés szerint $(\sin mh)/mh = 1$, ha $m = 0$. Például, a

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}(m,n)|}{(m^2+1)(n^2+1)} < \infty$$

feltételből már következik a (2.2) sor abszolut konvergenciája és az $S_{h,k}(f;x,y)$ függvény folytonossága minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ és $(h,k) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$.

Akkor mondjuk, hogy a (2.1) sor Riemann szerint egy véges s számhoz összegezhető, ha

$$\lim_{h,k\to 0} S_{h,k}(f;x,y) = s.$$

A kétváltozós függvények körében is az

$$S_*(f;x,y) := \sup_{h,k>0} |S_{h,k}(f;x,y)|$$

maximál Riemann-operátor viselkedését vizsgáljuk majd, ahol $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$.
Jelöljük $L^1(\log^+ L)^\alpha(\mathbb{T}^2)$-tel azon mérhető f függvények osztályát, amelyek mindkét változójukban periodikusak, és amelyekre

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|(\log^+ |f(x,y)|)^\alpha \, dx\, dy < \infty.$$

Számunkra most csak az $\alpha = 1$ vagy 2 esetek lesznek érdekesek.

Gevorkyan (lásd [10]) bizonyította az alábbi tételt.

2.0. TÉTEL. *Ha* $f \in L^1 \log^+ L(\mathbb{T}^2)$, *akkor*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda|\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : S_*(f;x,y) > \lambda\}| = 0, \tag{2.3}$$

ahol $|\,.\,|$ *a síkon értelmezett Lebesgue-mértéket jelenti, és*

$$\lim_{h,k\to 0} S_{h,k}(f;x,y) = f(x,y) \quad m.m. \tag{2.4}$$

Új eredmények

Adott $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ függvény esetén jelöljük $\tilde{f}^{(1,0)}$-val azt a függvényt, amelyet f-ből az első változóban történő konjugálással kapunk:

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{(1,0)}(x,y) :&= \text{(P.V.)}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u,y)(1/2)\cot(u/2)\,du \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}(f(x-u,y)-f(x+u,y))(1/2)\cot(u/2)\,du.\end{aligned}$$

Most is igaz, hogy $\tilde{f}^{(1,0)}(x,y)$ létezik majdnem minden $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ esetén, de általában $\tilde{f}^{(1,0)} \notin L^1(\mathbb{T}^2)$. Ennek alapján definiálhatjuk a

$$H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \tilde{f}^{(1,0)} \in L^1(\mathbb{T}^2)\}$$

ún. vegyes $H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$ Hardy-teret, amelyet a

$$\|f\|_{H^{(1,0)}} := \|f\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(1,0)}\|_{L^1}$$

normával látunk el, ahol

$$\|f\|_{L^1} := \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(u,v)|\,du\,dv.$$

Az is ismert, hogy ha $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, akkor $\tilde{f}^{(1,0)}$ kettős Fourier-sora a

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i\operatorname{sign} m)\hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)} \tag{2.5}$$

alakban áll elő, amit (2.1) első változó szerinti konjugált sorának nevezünk.

Móricz Ferenccel közös cikkünkben láttuk be a következőket (lásd [5]). Az $S_*(f)$ maximál Riemann-operátor korlátos módon képez $H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$-ből *gyenge*-$L^1(\mathbb{T}^2)$-be.

2.1. TÉTEL. *Létezik olyan C állandó, hogy minden $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$ függvényre*

$$\|S_*(f)\|_{gyenge-L^1} := \sup_{\lambda>0} \lambda|\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : S_*(f;x,y) > \lambda\}| \leq C\|f\|_{H^{(1,0)}}. \tag{2.6}$$

Itt és a továbbiakban $C, C_1, \ldots$ pozitív állandókat jelölnek.

A (2.6) egyenlőtlenség általánosabb (2.3)-nál, mivel

$$L^1 \log^+ L(\mathbb{T}^2) \subset H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2) \tag{2.7}$$

(lásd [9, 84-85. o.]).

A másik vegyes $H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$ Hardy-tér a $H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$-nek a szimmetrikus megfelelője:

$$H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \tilde{f}^{(0,1)} \in L^1(\mathbb{T}^2)\},$$

amelyet a

$$\|f\|_{H^{(0,1)}} := \|f\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(0,1)}\|_{L^1},$$

normával látunk el, ahol

$$\tilde{f}^{(0,1)}(x,y) := (\text{P.V.})\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y-v)(1/2)\cot(v/2)\,dv$$

az f függvény második változó szerinti konjugáltja. Ha $f \in H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, akkor $\tilde{f}^{(0,1)}$ kettős Fourier-sora a

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i\operatorname{sign} n)\hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)} \tag{2.8}$$

alakban áll elő, amit (2.1) második változó szerinti konjugált sorának nevezünk.

A 2.1. Tétel szimmetrikus párja a következő.

2.2. TÉTEL. *Ha* $f \in H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, *akkor*

$$\|S_*(f)\|_{gyenge-L^1} \leq C\|f\|_{H^{(0,1)}}$$

ugyanazon C *állandóval, mint a* 2.1. *Tétel esetében.*

Alkalmazva a jól ismert sűrűségi bizonyítást, amely Marcinkiewicznek és Zygmundnak köszönhető (lásd [21, 2. rész, 309. o.]) adódik az alábbi következmény.

2.1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha* $f \in H^{(1,0)} \cup H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, *akkor*

$$\lim_{h,k\to 0} S_{h,k}(f;x,y) = f(x,y) \quad m.m.$$

A kettős konjugált függvényt az alábbi módon definiálják:

$$\tilde{f}^{(1,1)}(x,y) := (\mathrm{P.V})\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u,y-v)(1/2)\cot(u/2)(1/2)\cot(v/2)dudv =$$

$$= \lim_{\delta,\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi^2}\int_{\delta}^{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(x-u,y-v) - f(x+u,y-v) -$$

$$-f(x-u,y+v) + f(x+u,y+v)](1/2)\cot(u/2)(1/2)\cot(v/2)dudv.$$

Jól ismert, hogy ha $f \in H^{(1,0)} \cap H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, akkor $\tilde{f}^{(1,1)}(x,y)$ létezik m.m. $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ esetén, de $\tilde{f}^{(1,1)} \notin L^1(\mathbb{T}^2)$ általában. Ennek alapján definiálhatjuk a

$$H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \tilde{f}^{(1,0)}, \tilde{f}^{(0,1)}, \tilde{f}^{(1,1)} \in L^1(\mathbb{T}^2)\}$$

ún. (szorzat) Hardy-teret, amelyet a

$$\|f\|_{H^{(1,1)}} := \|f\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(1,0)}\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(0,1)}\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(1,1)}\|_{L^1}$$

normával látunk el. Az is ismert, hogy ha $f \in H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$, akkor $\tilde{f}^{(1,1)}$ kettős Fourier-sora a

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i\mathrm{sign}m)(-i\mathrm{sign}n)\hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)} \tag{2.9}$$

alakban áll elő, amit (2.1) mindkét változó szerinti konjugált sorának nevezünk.

Azt sejtjük, hogy az $S_*(f)$ maximál Riemann-operátor korlátos módon képez a $H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$ térből az $L^1(\mathbb{T}^2)$ térbe.

2.1. SEJTÉS. Ha $f \in H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$, akkor

$$\|S_*(f)\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^{(1,1)}}.$$

Megjegyezzük, hogy az

$$L^1(\log^+ L)^2(\mathbb{T}^2) \subset H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$$

szigorú tartalmazási reláció (2.7)-hez teljesen hasonló módon látható be. Továbbá, hogy a $H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, $H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$ és $H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$ terek "gyökerei" G. H. Hardy, J. E. Littlewood, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund és R. Fefferman cikkeiben már megtalálhatók (lásd [13]).

Végül jelöljük

$$\widetilde{S}_{h,k}^{(1,0)}(f;x,y), \quad \widetilde{S}_{h,k}^{(0,1)}(f;x,y), \quad \widetilde{S}_{h,k}^{(1,1)}(f;x,y)$$

-gyel a (2.5), (2.8) és (2.9) konjugált sorok Riemann-közepeit. A megfelelő konjugált maximál Riemann-operátort az eddigiekhez analóg módon definiáljuk, pl.

$$\widetilde{S}_*^{(1,0)}(f;x,y) := \sup_{h,k>0} |\widetilde{S}_{h,k}^{(1,0)}(f;x,y)|.$$

Ahogy fentebb említettük (lásd (2.5)), ha $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, akkor

$$\widetilde{S}_{h,k}^{(1,0)}(f;x,y) \equiv S_{h,k}(\tilde{f}^{(1,0)};x,y)$$

és így $\widetilde{S}_*^{(1,0)}(f) \equiv S_*(\tilde{f}^{(1,0)})$. Továbbá analóg állítások érvényesek a másik két konjugált maximál Riemann-operátorra is. Így a 2.1. Tétel és a 2.2. Tétel fennáll az $\widetilde{S}_*^{(1,0)}(f)$ és $\widetilde{S}_*^{(0,1)}(f)$ esetén is.

2.2. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, akkor*

$$\|\widetilde{S}_*^{(1,0)}(f)\|_{gyenge-L^1} \leq 2C\|f\|_{H^{(1,0)}}; \tag{2.10}$$

ha $f \in H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, akkor

$$\|\widetilde{S}_*^{(0,1)}(f)\|_{gyenge-L^1} \leq 2C\|f\|_{H^{(0,1)}}; \tag{2.11}$$

és ha $f \in H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$, *akkor*

$$\|\widetilde{S}_*^{(1,1)}(f)\|_{gyenge-L^1} \leq 2C\|f\|_{H^{(1,1)}}. \tag{2.12}$$

Bizonyítás.

Például, ha $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$ akkor m.m. $y \in \mathbb{T}$ olyan, hogy $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{T})$ és (2.5) alapján könnyű ellenőrizni, hogy az ilyen y esetén m.m. $x \in \mathbb{T}$-re az is fennáll, hogy

$$(\tilde{f}^{(1,0)})^{\sim(1,0)}(x,y) = -f(x,y) + s(y)$$

ahol

$$s(y) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)dx.$$

Ebből pedig rögtön következik, hogy

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}^{(1,0)}\|_{H^{(1,0)}} &\leq \|\tilde{f}^{(1,0)}\|_{L^1} + \|f\|_{L^1} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s(y)|dy \leq \\ &\leq \|\tilde{f}^{(1,0)}\|_{L^1} + 2\|f\|_{L^1} \leq 2\|f\|_{H^{(1,0)}}.\end{aligned}$$

Alkalmazva a 2.1. Tételt f helyett $\tilde{f}^{(1,0)}$-ra, azonnal adódik (2.10).

A (2.11) egyenlőtlenség analóg módon látható be.

A (2.12) egyenlőtlenség igazolásához ellenőrizzük, hogy $f \in H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$ esetén $\tilde{f}^{(0,1)} \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$. Ez amiatt teljesül, hogy

$$(\tilde{f}^{(0,1)})^{\sim(1,0)}(x,y) = \tilde{f}^{(1,1)}(x,y)$$

fennáll m.m. $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ esetén. Mivel $\widetilde{S}_*^{(1,1)}(f) \equiv \widetilde{S}_*^{(1,0)}(\tilde{f}^{(0,1)})$, így (2.10)-et alkalmazva f helyett $\tilde{f}^{(0,1)}$-re, adódik (2.12).

Azt sejtjük, hogy $\widetilde{S}_*^{(1,1)}(f)$ már $H^{(1,0)} \cap H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$-ből is korlátosan képez a *gyenge*-$L^1(\mathbb{T}^2)$-térbe.

2.2. SEJTÉS. Ha $f \in H^{(1,0)} \cap H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, akkor

$$\|\widetilde{S}_*^{(1,1)}(f)\|_{gyenge-L^1} \leq C\left(\|f\|_{H^{(1,0)}} + \|f\|_{H^{(0,1)}}\right).$$

A pontonkénti konvergenciára most is az ún. sűrűségi érveléssel következtethetünk.

2.3. KÖVETKEZMÉNY. *Ha* $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, *akkor*

$$\lim_{h,k\to 0} \widetilde{S}_{h,k}^{(1,0)}(f;x,y) = \tilde{f}^{(1,0)}(x,y) \quad m.m.;$$

ha $f \in H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, *akkor*

$$\lim_{h,k\to 0} \widetilde{S}_{h,k}^{(0,1)}(f;x,y) = \tilde{f}^{(0,1)}(x,y) \quad m.m.;$$

és ha $f \in H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$, *akkor*

$$\lim_{h,k\to 0} \widetilde{S}_{h,k}^{(1,1)}(f;x,y) = \tilde{f}^{(1,1)}(x,y) \quad m.m. \tag{2.13}$$

Megjegyezzük, hogy ha a 2.1. Sejtés fennáll, akkor az alábbi állítás is igaz: Ha $f \in H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$, akkor

$$\|\widetilde{S}_*(f)\|_{L_1} \le C\|f\|_{H^{(1,1)}},$$

ahol $\widetilde{S}_*(f)$ helyébe $\widetilde{S}_*^{(1,0)}(f)$, $\widetilde{S}_*^{(0,1)}(f)$ és $\widetilde{S}_*^{(1,1)}(f)$ bármelyike írható.

Megjegyezzük, hogy ha a 2.2. Sejtés igaz, akkor (2.13) igazolásához már az $f \in H^{(1,0)} \cap H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$ feltétel is elegendő lenne.

Az új eredmények igazolása

Analóg módon (1.23)-hoz kapjuk, hogy

$$S_{h,k}(f;x,y) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)\phi_{2h}(x-u)\phi_{2k}(y-v)\,du\,dv. \tag{2.14}$$

Felhasználva az 1.1. és 1.2. Tételeket belátjuk a 2.1. Tételt.

2.1. *Tétel bizonyítása.*

(2.14) alapján

$$S_*(f;x,y) \le \sup_{k>0}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sup_{h>0}|\int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)\phi_{2h}(x-u)\,du|\}\phi_{2k}(y-v)\,dv. \tag{2.15}$$

Nyilvánvaló, hogy a

$$g(x,v) := \sup_{h>0}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)\phi_{2h}(x-u)\,du\Big| \tag{2.16}$$

egyváltozós függvény éppen az $f(\cdot, v)$ függvényre alkalmazott maximál Riemann-operátor, ahol $v \in \mathbb{T}$ rögzített. A feltevés miatt $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$ ahonnan adódik, hogy $f(\cdot, v) \in H^1(\mathbb{T})$ m.m. $v \in \mathbb{T}$ esetén. Az 1.1. Tételt f első változójára alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x,v)\,dx \le C_1\Big\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,v)|\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}^{(1,0)}(x,v)|\,dx\Big\}.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség fennáll m.m. $v \in \mathbb{T}$-re, innen következik, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x,v)\,dx\,dv \le C_1\{\|f\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(1,0)}\|_{L^1}\} = C_1\|f\|_{H^{(1,0)}}. \tag{2.17}$$

A Fubini-tétel felhasználásával adódik, hogy $g(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ m.m. $x \in \mathbb{T}$-re.

A (2.15) és (2.16) alapján írhatjuk, hogy

$$S_*(f;x,y) \le \sup_{k>0} \int_{-\pi}^{\pi} g(x,v)\phi_{2k}(y-v)\,dv. \tag{2.18}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala megegyezik a $g(x,\cdot)$ függvényre alkalmazott maximál Riemann-operátorral, ahol $x \in \mathbb{T}$ rögzített. Mivel láttuk, hogy $g(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ m.m. $x \in \mathbb{T}$-re, így az 1.2. Tétel alkalmazható g második változójában. Eredményként kapjuk, hogy az

$$|\{y \in \mathbb{T} : S_*(f;x,y) > \lambda\}| \le \frac{C_2}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi} g(x,v)\,dv \tag{2.19}$$

egyenlőtlenség fennáll m.m. $x \in \mathbb{T}$ és minden $\lambda > 0$ esetében. Összekapcsolva (2.17) és (2.19)-et adódik, hogy az

$$\begin{aligned}|\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : S_*(f;x,y) > \lambda\}| &= \int_{-\pi}^{\pi} |\{y \in \mathbb{T} : S_*(f;x,y) > \lambda\}|\,dx \\ &\le \frac{C_2}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x,v)\,dv \le \frac{C_1C_2}{\lambda}\|f\|_{H^{(1,0)}}\end{aligned}$$

egyenlőtlenség fennáll minden $\lambda > 0$-ra. Ez pedig ekvivalens (2.6)-tal, amit bizonyítani kellett.

□

III. FEJEZET

AZ EGYDIMENZIÓS FOURIER-TRANSZFORMÁLT NAGYSÁGRENDJE

Bevezetés

Legyen f függvény Lebesgue-integrálható az $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ valós tengelyen, jelölésben: $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ekkor az f függvény $\hat{f}$ (komplex) Fourier-transzformáltját a következőképpen definiáljuk

$$\hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Könnyen látható, hogy $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$, és a Riemann-Lebesgue lemma alapján

$$\hat{f}(t) \to 0, \quad \text{ha} \quad |t| \to \infty. \tag{3.2}$$

Ez a konvergencia tetszőlegesen lassú lehet. Azaz bármely olyan $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$-on definiált ϕ függvényhez, amelyre teljesül, hogy

$$\phi(t) \to \infty, \quad \text{ha} \quad t \to \infty,$$

létezik olyan $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény, hogy

$$\limsup_{t \to \infty} \phi(t) \hat{f}(t) = \infty.$$

Ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ páros, azaz

$$f(-x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

akkor könnyen látható, hogy a (3.1) formula a következő egyszerűbb

$$\hat{f}(t) = \hat{f}_c(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos tx\, dx \tag{3.3}$$

(Fourier) koszinusz-transzformált alakban írható.
Ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ páratlan, azaz

$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

akkor a (3.1) formulából az

$$\hat{f}(t) = -i\hat{f}_s(t), \quad \text{ahol} \quad \hat{f}_s(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin tx dx \tag{3.4}$$

lényegében (Fourier) szinusz-transzformált lesz.

Ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ tetszőleges, akkor f az alábbiak szerint bontható fel:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] =: g(x) + h(x), \tag{3.5}$$

ahol $g, h \in L^1(\mathbb{R})$, g páros és h páratlan. Így a (3.3), (3.4) és (3.5) alapján azt kapjuk, hogy

$$\hat{f}(t) = \hat{g}_c(t) - i\hat{h}_s(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Ha $f \in L^p(\mathbb{R})$ valamely $1 < p \leq 2$-re, akkor a (3.1) definíció nem alkalmazható. Ekkor az f függvény $\hat{f}$ Fourier-transzformáltját úgy definiáljuk, mint az alábbi véges intervallumon kapott integrál $L^q(\mathbb{R})$-normában vett határértékét:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_1}^{x_2} f(x) e^{-itx} \, dx, \quad \text{ha} \quad x_1, x_2 \to \infty$$

ahol q jelöli p konjugáltját, azaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ekkor $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R})$, azonban $\hat{f}(t)$-t egy nullamértékű halmaz kivételével definiáltuk az egész $\mathbb{R}$-en.

Megjegyezzük, hogy ha $f \in L^p(\mathbb{R})$ valamely $1 < p \leq 2$-re, akkor az ún. inverziós képlet

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} \, dt \tag{3.7}$$

szintén fennáll olyan módon, hogy f előáll az alábbi véges intervallumon kapott integrál $L^p(\mathbb{R})$-normában vett határértékeként

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_1}^{t_2} \hat{f}(t) e^{ixt} \, dt, \quad \text{ha} \quad t_1, t_2 \to \infty \tag{3.8}$$

(lásd [20, 96. o.] vagy [21, 2. rész, 254. o.]).

Ha $f \in L^1(\mathbb{R})$, akkor általában nem tudjuk biztosítani a (3.7) teljesülését. Azonban, ha az f monotonitását is feltesszük, akkor (3.8)-nak létezik a véges határértéke $t_1, t_2 \to \infty$ esetén és így minden $x \in \mathbb{R}$-re (3.7) is fennáll. Továbbá, ha $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, akkor a (3.7) a következő alakba írható

$$f(x) = (\hat{f})^\wedge(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Azt is megjegyezzük, hogy tetszőleges $f \in L^1(\mathbb{R})$ esetén a (3.7) formula a következő alakot ölti

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-itu}\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos xt\,dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos tu du \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin xt\,dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin tu du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos t(x-u)du \end{aligned} \tag{3.9}$$

s ekkor (3.9) legutolsó, jobboldali integrálját Cesàro-féle összegezési módon értékeljük.

Cesàro értelemben vett határérték és integrál

Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ és $\alpha > 0$ valós szám. Ekkor az alábbi jelölést alkalmazzuk

$$(C,\alpha) - \lim_{t\to\infty} f(t) = \ell$$

ha

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} f(t)\,dt = \ell. \tag{3.10}$$

Amennyiben a (3.10) határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy $f(t)$-nek α-rendbeli Cesàro értelemben vagy röviden (C,α) értelemben ℓ a (véges) határértéke $t \to \infty$ esetén. Az $\alpha = 1$ speciális esetben (3.10) a következő alakot ölti

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(t)\,dt = \ell,$$

s ez analóg az alábbi véges határérték létezésével

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$$

amely $\{a_k : k = 1, 2, \ldots\}$ numerikus sorozat $(C, 1)$ összegezésének definíciójában előforduló első számtani közepet jelenti.

Jól ismert, hogy minden $\alpha > 0$ és $\delta \geq 0$ esetén (3.10)-ből adódik, hogy

$$(C, \alpha + \delta) - \lim_{t \to \infty} f(t) = \ell;$$

továbbá, ha a

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \ell$$

határérték a szokásos értelemben létezik, akkor bármely $\alpha > 0$-ra a (3.10) teljesül. Így a szokásos konvergenciát tekinthetjük $(C, 0)$-rendű határértéknek.

Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_-)$, ekkor

$$(C, \alpha) - \lim_{t \to -\infty} f(t) = \ell$$

ha (3.10) fennáll az $f(-t)$-re az $f(t)$ helyett. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, ekkor

$$(C, \alpha) - \lim_{|t| \to \infty} f(t) = \ell$$

ha $t \to \infty$ és $t \to -\infty$ esetén mindkét határérték létezik (C, α)-rendben, és a kettő meg is egyezik.

Másodszor, emlékeztetünk az integrálok Cesàro-féle összegezésének definíciójára (lásd [20, 26. o.]). Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ és $\alpha \geq 0$. Azt mondjuk, hogy $\int_0^\infty f(x)dx$ integrál (C, α) összegezhető és összege az ℓ szám, ha

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^\alpha f(x)\, dx = \ell. \tag{3.11}$$

Az $\alpha = 0$ esetben a szokásos konvergenciát kapjuk, míg $\alpha = 1$ esetben adódik

$$\int_0^\lambda \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dt \int_0^t f(x)\, dx$$

ami analóg az

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k, \quad \text{ahol} \quad s_k := \sum_{j=1}^{k} a_j,$$

első számtani középpel, amely a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor $(C, 1)$ összegezésének definíciójában fordul elő.

Hasonlítsuk össze a (3.10) és (3.11) definíciókat. Fubini-tétele alapján

$$\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha f(x)\,dx = \int_0^\lambda f(x)\,dx \frac{\alpha}{\lambda^\alpha}\int_x^\lambda (\lambda-t)^{\alpha-1}\,dt$$
$$= \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} dt \int_0^t f(x)dx.$$

Így a (3.11) definíció egybeesik (3.10)-zel, ha az utóbbit $\int_0^t f(x)dx$ integrálfüggvényre alkalmazzuk.

Végül idézzük a közismert, Fourier-transzformáltakra vonatkozó Fejér-tételt (lásd [20, 28-30. o.]). Ha $f \in L^1(\mathbb{R})$, akkor a (3.9) inverziós formula f minden x Lebesgue-pontjában bármely $\alpha > 0$-ra (C,α) rendben fennáll, azaz,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^\alpha dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos t(x-u)du = f(x). \tag{3.12}$$

Új eredmények.

Annak ellenére, hogy a (3.2) formulában a konvergencia tetszőlegesen lassú lehet, egy jobb sebességű konvergenciát várhatunk el bizonyos gyengébb esetekben. Pozitív eredmények adódnak Fourier-transzformáltak nagyságrendjével kapcsolatban pl. az alábbi módon

$$(C,\alpha) - \lim_{|t|\to\infty} |t|^\beta \hat{f}(t) = 0$$

ahol $\alpha > 0$ és $\beta > 0$.

Ezzel a problémakörrel foglalkoztunk Dang Vu Gianggal és Móricz Ferenccel írt közös cikkünkben, ahol az alábbi tételeket láttuk be (lásd [4]).

3.1. TÉTEL. (i) *Ha* $f \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R})$ *valamely* $1 < p \le 2$ *esetén és* $\alpha \in (0, 1/q)$, *ahol* $1/p + 1/q = 1$, *akkor*

$$(C,1/q) - \lim_{|t|\to\infty} |t|^\alpha \hat{f}(t) = 0. \tag{3.13}$$

(ii) *Ha* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *valamely* $1 < p \le 2$ *esetén és* $\alpha \in (1/q, \infty)$, *akkor*

$$(C,\alpha) - \lim_{|t|\to\infty} |t|^{1/q} \hat{f}(t) = 0. \tag{3.14}$$

Speciálisan, az $\alpha = 1$ eset adja a következő eredményt.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $f \in L^p(\mathbb{R})$ valamely $1 < p \leq 2$-re, akkor*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda |t|^{(p-1)/p} \hat{f}(t)\, dt = 0.$$

3.1. PROBLÉMA. Azt sejtjük, hogy az $\alpha = 1/q$ esetben sem (3.13), sem (3.14) nem áll fenn. Ezért a helyes kérdésfeltevés a következő: Keresendő olyan ϕ függvény, amely pozitív, monoton növő $\mathbb{R}_+$-n, amelyre bármely $\beta > 0$ esetén

$$\phi(t) = o(t^\beta), \quad \text{ha} \quad t \to \infty \tag{3.15}$$

és amelyre, hogy ha $f \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R})$ valamely $1 < p \leq 2$-re, akkor

$$(C, 1/q) - \lim_{|t|\to\infty} \frac{|t|^{1/q}}{\phi(|t|)} \hat{f}(t) = 0.$$

Térjünk vissza $p = 1$ esethez.

Emlékeztetünk arra, hogy az $x \in \mathbb{R}$ pontot az $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ függvény Lebesgue-pontjának hívjuk, ha

$$\lim_{h\to 0} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0.$$

3.2. TÉTEL. (i) *Ha $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ és $\alpha \in (0,1)$, akkor*

$$(C, 1) - \lim_{|t|\to\infty} |t|^\alpha \hat{f}(t) = 0. \tag{3.16}$$

(ii) *Ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $x = 0$ az f függvény Lebesgue-pontja és $\alpha \in (1, \infty)$, akkor*

$$(C, \alpha) - \lim_{|t|\to\infty} t\hat{f}(t) = 0. \tag{3.17}$$

A 3.2. Tétel kiterjesztése Reade (lásd [17]) és részben kiterjesztése Kuprikov (lásd [12]) eredményeinek.

3.2. PROBLÉMA. Azt sejtjük, hogy az $\alpha = 1$ esetben sem (3.16), sem (3.17) nem áll fenn. Ezért a helyes kérdésfeltevés ismét a következő: Keresendő olyan ϕ függvény, amely

pozitív, monoton növő $\mathbb{R}_+$-n, amelyre (3.15) fennáll, és amelyre, hogy ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $x = 0$ az f függvény Lebesgue-pontja, akkor

$$(C,1) - \lim_{|t|\to\infty} \frac{t}{\phi(|t|)} \hat{f}(t) = 0.$$

Végül, egy Tauberian-típusú érvelést alkalmazva a Fourier-transzformált nagyságrendjére, a szokásos értelemben kapunk egy becslést, feltéve, hogy a monotonitási feltétel teljesül.

3.2. KÖVETKEZMÉNY. *Tegyük fel, hogy f páros (vagy páratlan) és $\hat{f}(t)$ koszinusz (vagy szinusz)-transzformáltja nemnövekvő $t \geq t_0 (\geq 0)$ esetén.*

(i) *Ha $f \in L^p(\mathbb{R})$ valamely $1 < p \leq 2$-re, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/q} \hat{f}(t) = 0.$$

(ii) *Ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $x = 0$ az f függvény Lebesgue-pontja, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} t\hat{f}(t) = 0,$$

mindkét esetben a szokásos értelemben.

Felhasznált eredmények

Az alábbi öt Lemma mindegyike jól ismert, de a könnyebb olvashatóság kedvéért részletezzük a bizonyításukat.

3.1. LEMMA. *Ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor az alábbi integrálok*

$$I(t) := \int_0^t \frac{\sin u}{u^{1-\alpha}} du \quad \text{és} \quad J(t) := \int_0^t \frac{\cos u}{u^{1-\alpha}} du \tag{3.18}$$

egyenletesen korlátosak $t > 0$ esetén.

Bizonyítás. (i) Tekintsük $I(t)$-t. Legyen $t := 2m\pi$, ahol m pozitív egész. Könnyen látható, hogy

$$I(2m\pi) = \int_0^\pi \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{1}{(v+2k\pi)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(v+(2k+1)\pi)^{1-\alpha}} \right] \sin v \, dv,$$

és így bármely $m = 1, 2, \ldots$ egészre

$$0 \leq I(2m\pi) \leq I(\pi). \tag{3.19}$$

Nyilvánvaló, hogy $0 < t < \pi$-re

$$I(t) \leq I(\pi) \leq \int_0^\pi u^\alpha du = \frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \tag{3.20}$$

míg ha $\pi \leq t_1 < t_2 \leq t_1 + 2\pi$, akkor

$$|I(t_2) - I(t_1)| \leq \frac{t_2 - t_1}{t_1^{1-\alpha}} \leq (2\pi)^\alpha. \tag{3.21}$$

Így $t > 0$ esetén $I(t)$ egyenletes korlátossága következik (3.19) - (3.21)-ből.

Megjegyezzük, hogy (3.20) érvényes $\alpha = 0$ esetén is. Ezért $I(t)$ egyenletesen korlátos t-ben $\alpha = 0$ esetben is.

(ii) Vizsgáljuk most $J(t)$-t. Legyen $t := (4m+1)\pi/2$, ekkor

$$J((4m+1)\pi/2) - J(\pi/2) = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sum_{k=0}^{m-1} \Big[\frac{1}{(v+2k\pi)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(v+(2k+1)\pi)^{1-\alpha}}\Big] \cos v dv.$$

Ebből könnyen látható, hogy bármely $m = 1, 2, \ldots$ esetén

$$J(3\pi/2) \leq J((4m+1)\pi/2) \leq J(\pi/2). \tag{3.22}$$

Nyilvánvaló, hogy $0 < t < 3\pi/2$-re

$$|J(t)| \leq \int_0^{3\pi/2} \frac{du}{u^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{3\pi}{2}\Big)^\alpha, \tag{3.23}$$

míg ha $3\pi/2 \leq t_1 < t_2 \leq t_1 + 2\pi$, akkor

$$|J(t_2) - J(t_1)| \leq \frac{t_2 - t_1}{t_1^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{2}{3\pi}\Big)^{1-\alpha}. \tag{3.24}$$

Így $t > 0$ esetén $J(t)$ egyenletes korlátossága következik (3.22) - (3.24)-ből. □

3.2. LEMMA. *Ha* $0 < \alpha \leq 1$ *és* $t > 0$, *akkor*

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \sin tu du = \mathcal{O}(t^{-\alpha}). \tag{3.25}$$

Bizonyítás. A (3.25) bal oldalát helyettesítéssel integrálva, az alábbi kifejezéshez jutunk

$$\frac{1}{t^\alpha}\int_0^t \frac{\sin(t-v)}{v^{1-\alpha}}dv.$$

Így a 3.1. Lemmát alkalmazva kapjuk (3.25)-öt. □

3.3. LEMMA. *Ha* $0 < \alpha \leq 1$ *és* $t > 0$, *akkor*

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u \cos tu du = \mathcal{O}(t^{-\alpha}). \tag{3.26}$$

Bizonyítás. A (3.26) bal oldalát helyettesítéssel integrálva az

$$\frac{1}{t^\alpha}\int_0^t \frac{\cos(t-v)}{v^{1-\alpha}}(1-\frac{v}{t})dv \tag{3.27}$$

kifejezést kapjuk. Azt kell csupán ellenőriznünk, hogy

$$\int_0^t \frac{\cos(t-v)}{v^{1-\alpha}}(1-\frac{v}{t})\,dv = \mathcal{O}(1). \tag{3.28}$$

Parciális integrálással és a 3.1. Lemmából kapjuk, hogy

$$\int_0^t \frac{\cos v}{v^{1-\alpha}}(1-\frac{v}{t})\,dv = \frac{1}{t}\int_0^t J(v)\,dv = \mathcal{O}(1), \tag{3.29}$$

ahol $J(v)$ a (3.18)-ban definiált kifejezés. Analóg módon, a 3.1. Lemma ismételt felhasználásával kapjuk

$$\int_0^t \frac{\sin v}{v^{1-\alpha}}(1-\frac{v}{t})\,dv = \frac{1}{t}\int_0^t I(v)\,dv = \mathcal{O}(1), \tag{3.30}$$

ahol $I(v)$ a (3.18)-ban definiált kifejezés.
A (3.27) - (3.30)-ból adódik (3.26). □

3.4. LEMMA. *Ha* $1 < \alpha \leq 2$ *és* $t \geq 1$, *akkor*

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u \sin tu du = \mathcal{O}(t^{-\alpha}). \tag{3.31}$$

Bizonyítás. Parciális integrálással adódik, hogy a (3.31)-ben szereplő integrál egyenlő az alábbival

$$\frac{1}{t}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\cos tu du - \frac{\alpha-1}{t}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-2} u \cos tu du =: I_1 - I_2, \tag{3.32}$$

ahol I_1 értelemszerűen a kisebbítendőt, I_2 pedig a kivonandót jelöli.
Az I_1-et parciálisan integrálva nyerjük, hogy

$$I_1 = \frac{\alpha - 1}{t^2} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-2} \sin tu du.$$

Erre a 3.2. Lemmát alkalmazva

$$I_1 = \frac{\alpha - 1}{t^2} \mathcal{O}(t^{-(\alpha-1)}) = \mathcal{O}(t^{-\alpha}). \tag{3.33}$$

A 3.3. Lemmából következik

$$I_2 = \frac{\alpha - 1}{t} \mathcal{O}(t^{-(\alpha-1)}) = \mathcal{O}(t^{-\alpha}). \tag{3.34}$$

A (3.32) - (3.34) kifejezéseket összekapcsolva adódik (3.31). □

3.5. LEMMA. *Tegyük fel, hogy az f függvény páros (vagy páratlan) és $\hat{f}$ koszinusz (vagy szinusz)-transzformáltja nemnövekvő $t \geq t_0 (\geq 0)$-ra. Ha valamely $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ esetén*

$$(C, \alpha) - \lim_{t \to \infty} t^\beta \hat{f}(t) = 0, \tag{3.35}$$

akkor

$$\lim_{t \to \infty} t^\beta \hat{f}(t) = 0 \tag{3.36}$$

a szokásos értelemben.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor a (3.35) alapján minden elég nagy λ-ra adódik, hogy

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} t^\beta \hat{f}(t)\, dt \\ &\geq \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda} \int_{t_0}^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} t^\beta\, dt - \max\left\{1, \left(1 - \frac{t_0}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\right\} \frac{1}{\lambda} \int_0^{t_0} t^\beta |\hat{f}(t)| dt. \end{aligned}$$

A jobboldal második tagja 0-hoz tart ha $\lambda \to \infty$. Így, ha λ elég nagy, akkor

$$2\varepsilon \geq \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda} \int_{t_0}^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} t^\beta dt.$$

A kifejezés jobb oldalát parciálisan integrálva kapjuk, hogy

$$2\varepsilon \geq \lambda^\beta \hat{f}(\lambda) \int_{t_0/\lambda}^{1} (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du \geq C_{\alpha\beta} \lambda^\beta \hat{f}(\lambda), \tag{3.37}$$

ahol a $C_{\alpha\beta}$ állandóra teljesül, hogy

$$C_{\alpha\beta} := \int_{1/2}^{1} (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du > 0 \qquad (\lambda \geq 2t_0), \tag{3.38}$$

ezért a $C_{\alpha\beta}$ csak α-tól és β-tól függ.

Mivel ε tetszőleges volt, (3.37) és (3.38)-ból következik (3.36). □

Az új eredmények igazolása

Mivel tetszőleges f függvényre alkalmazható a (3.5) felbontás, így a 3.1. és 3.2. Tételek bizonyítása során feltételezhetjük, hogy az f függvény páros, vagy páratlan. További technikai egyszerűsítésként elegendő a $t > 0$ esetre szorítkozni a (3.13), (3.14), (3.16), és a (3.17) bizonyítása során. (Ellenőrizhető, hogy a (3.6) formulában a $\hat{g}$ páros és a $\hat{h}$ páratlan.)

3.1. *Tétel bizonyítása.*

(i) Először azt az esetet tekintjük, amikor f páros. A definíció alapján azt kell belátnunk, hogy

$$I_1(\lambda) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1/p} t^\alpha \hat{f}_c(t)\, dt \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda \to \infty. \tag{3.39}$$

Fubini-tétele és (3.3) alapján,

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty f(x) K_1(x,\lambda)\, dx, \tag{3.40}$$

ahol

$$\begin{aligned} K_1(x,\lambda) :&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1/p} t^\alpha \cos tx\, dt \\ &= \lambda^\alpha \int_0^1 (1-u)^{-1/p} u^\alpha \cos \lambda u x du. \end{aligned}$$

Alkalmazhatjuk $K_1(x,1)$-re a Hausdorff-Young-féle egyenlőtlenséget (lásd [20, 96. o.] vagy [21, 2. rész, 254. o.]) a p_1 és q_1 konjugált párral, ahol

$$\alpha < \frac{1}{q_1} < \frac{1}{q} \quad \text{és} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1. \tag{3.41}$$

Eredményként kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|K_1(x,1)\|_{q_1} &:= \Big\{\int_0^\infty |K_1(x,1)|^{q_1}\,dx\Big\}^{1/q_1}\\ &\le C_{q_1}\Big\{\int_0^1 (1-u)^{-p_1/p}u^{\alpha p_1}du\Big\}^{1/p_1}\\ &\le C_{q_1}\Big\{\int_0^1 v^{-p_1/p}\,dv\Big\}^{1/p_1},\end{aligned}$$

ahol C_{q_1} csupán q_1-től függő állandó. A (3.41) feltételből adódik, hogy $1 < p_1 < p$. Ezért

$$\|K_1(x,1)\|_{q_1} \le C_{q_1}\Big(\frac{p}{p-p_1}\Big\}^{1/p_1}. \tag{3.42}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$K_1(x,\lambda) = \lambda^\alpha K_1(\lambda x,1),$$

így

$$\|K_1(x,\lambda)\|_{q_1} \le \lambda^{\alpha-1/q_1}\|K_1(x,1)\|_{q_1}. \tag{3.43}$$

A Hölder-egyenlőtlenség, továbbá a (3.40), (3.42) és (3.43) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|I_1(\lambda)| &\le \Big\{\int_0^\infty |f(x)|^{p_1}\,dx\Big\}^{1/p_1}\Big\{\int_0^\infty |K_1(x,\lambda)|^{q_1}\,dx\Big\}^{1/q_1}\\ &\le C_{q_1}\Big(\frac{p}{p-p_1}\Big)^{1/p_1}\{\|f\|_1+\|f\|_p^p\}^{1/p_1}\lambda^{\alpha-1/q_1}.\end{aligned}$$

Figyelembe véve (3.41)-et, (3.39) következik.

Másodszor azt az esetet tekintjük, amikor f páratlan. A definíció alapján be kell látnunk, hogy

$$I_2(\lambda) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda\Big(1-\frac{t}{\lambda}\Big)^{-1/p}t^\alpha\hat{f}_s(t)\,dt \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda\to\infty. \tag{3.44}$$

Fubini-tétele és (3.4) alapján

$$I_2(\lambda) = \int_0^\infty f(x)K_2(x,\lambda)\,dx,$$

ahol

$$\begin{aligned}K_2(x,\lambda) &:= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda\Big(1-\frac{t}{\lambda}\Big)^{-1/p}t^\alpha\sin tx\,dt\\ &= \lambda^\alpha\int_0^1(1-u)^{-1/p}u^\alpha\sin\lambda ux du.\end{aligned}$$

A (3.44) bizonyításának további része analóg a (3.39) igazolásával, mivel a Hausdorff-Young-féle egyenlőtlenség fennáll koszinusz helyett szinusz függvényre is.

(ii) Tegyük fel, hogy az f páros vagy páratlan, és jelölje $\hat{f}$ az $\hat{f}_c$-t vagy $\hat{f}_s$-et. A definíció alapján azt kell belátnunk, hogy

$$I_3(\lambda) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \Big(1-\frac{t}{\lambda}\Big)^{\alpha-1} t^{1/q}\hat{f}(t)\,dt \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda\to\infty. \tag{3.45}$$

Az $f \in L^p(\mathbb{R})$ függvényre újfent alkalmazva a Hausdorff-Young-féle egyenlőtlenséget, adódik, hogy $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R})$. Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor található olyan $\lambda_0 > 0$ (mostantól rögzített) valós szám, hogy

$$\int_{\lambda_0}^\infty |\hat{f}(t)|^q\,dt \le \varepsilon^q. \tag{3.46}$$

Továbbá az $I_3(\lambda)$ felbontható az alábbi módon

$$I_3(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\Big\{\int_0^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^\lambda\Big\}\Big(1-\frac{t}{\lambda}\Big)^{\alpha-1} t^{1/q}\hat{f}(t)\,dt =: I_{31}(\lambda) + I_{32}(\lambda), \tag{3.47}$$

ahol $I_{31}(\lambda)$ az összeg első, $I_{32}(\lambda)$ pedig az összeg második tagját jelöli. Nyilván

$$|I_{31}(\lambda)| \le \max\Big\{1, \Big(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\Big)^{\alpha-1}\Big\}\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda_0} t^{1/q}\hat{f}(t)\,dt \le \varepsilon, \tag{3.48}$$

fennáll, ha λ elég nagy.

Felhasználva a Hölder-egyenlőtlenséget és a (3.46)-ot kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|I_{32}(\lambda)| &\le \Big\{\int_0^\lambda \Big(1-\frac{t}{\lambda}\Big)^{(\alpha-1)p} t^{p/q}\,dt\Big\}^{1/p}\Big\{\int_{\lambda_0}^\lambda |\hat{f}(t)|^q\,dt\Big\}^{1/q} \\
&\le \frac{\varepsilon}{\lambda}\Big\{\lambda^{1+p/q}\int_0^1 (1-u)^{(\alpha-1)p}u^{p/q}du\Big\}^{1/p} \\
&\le \varepsilon\Big\{\int_0^1 v^{(\alpha-1)p}\,dv\Big\}^{1/p}.
\end{aligned}$$

A feltétel miatt $\alpha > 1/q$. Ezért

$$|I_{32}(\lambda)| \le \frac{\varepsilon}{\{p(\alpha-1/q)\}^{1/p}}. \tag{3.49}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, így összekapcsolva a (3.47) - (3.49)-et adódik (3.45). □

3.2. *Tétel bizonyítása.*

(i) Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor f páros. A definíció alapján $0 < \alpha < 1$-re ellenőrizni kell, hogy

$$I_4(\lambda) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda t^\alpha \hat{f}_c(t)\,dt \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda \to \infty. \tag{3.50}$$

Fubini-tétele és (3.3) alapján

$$I_4(\lambda) = \int_0^\infty f(x)K_4^\alpha(x,\lambda)\,dx, \tag{3.51}$$

ahol

$$K_4^\alpha(x,\lambda) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda t^\alpha \cos tx dt.$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$K_4^\alpha(x,\lambda) = \lambda^{\alpha-1}\frac{\sin\lambda x}{x} - \frac{\alpha}{\lambda x}\int_0^\lambda t^{\alpha-1}\sin tx dt.$$

Egyszerű számolással adódnak a következő egyenlőtlenségek

$$|K_4^\alpha(x,\lambda)| \le \lambda^\alpha + \frac{\alpha}{\lambda x}\int_0^\lambda t^\alpha x\,dt \le 2\lambda^\alpha \tag{3.52}$$

és

$$|K_4^\alpha(x,\lambda)| \le \frac{\lambda^{\alpha-1}}{x} + \frac{\alpha}{\lambda x}\int_0^\lambda t^{\alpha-1}\,dt = \frac{2\lambda^{\alpha-1}}{x}. \tag{3.53}$$

Felhasználva a (3.51) - (3.53)-at, az alábbi módon becsülhetünk

$$\begin{aligned} |I_4(\lambda)| &\le \Big\{\int_0^{1/\lambda} + \int_{1/\lambda}^1 + \int_1^\infty\Big\}|f(x)K_4^\alpha(x,\lambda)|\,dx \\ &\le 2\lambda^\alpha\|f\|_\infty\int_0^{1/\lambda}dx + 2\lambda^{\alpha-1}\|f\|_\infty\int_{1/\lambda}^1\frac{dx}{x} + 2\lambda^{\alpha-1}\int_1^\infty|f(x)|\,dx \\ &\le 2\lambda^{\alpha-1}\{\|f\|_\infty + \|f\|_\infty\ln\lambda + \|f\|_1\}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Ebből, mivel $\alpha < 1$ a (3.50) közvetlenül adódik.

Másodszor azt az esetet vizsgáljuk, amikor f páratlan. A definíció alapján azt kell belátnunk, hogy ha $0 < \alpha < 1$, akkor

$$I_5(\lambda) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda t^\alpha \hat{f}_s(t)\,dt \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda \to \infty. \tag{3.55}$$

Fubini-tétele és (3.4) alapján

$$I_5(\lambda) = \int_0^\infty f(x) K_5^\alpha(x,\lambda)\,dx, \tag{3.56}$$

ahol

$$K_5^\alpha(x,\lambda) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda t^\alpha \sin tx\,dt.$$

Most belátjuk, hogy a (3.52) és (3.53) alapvető egyenlőtlenségek akkor is fennállnak, ha $K_4^\alpha(x,\lambda)$ helyébe $K_5^\alpha(x,\lambda)$-t teszünk. Könnyen látható, hogy

$$|K_5^\alpha(x,\lambda)| \le \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda t^\alpha\,dt = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha+1}. \tag{3.57}$$

Továbbá, parciális integrálással nyerjük, hogy

$$K_5^\alpha(x,\lambda) = -\lambda^{\alpha-1}\frac{\cos\lambda x}{x} + \frac{\alpha}{\lambda x}\int_0^\lambda t^{\alpha-1}\cos tx\,dt,$$

ezért

$$|K_5^\alpha(x,\lambda)| \le \frac{\lambda^{\alpha-1}}{x} + \frac{\alpha}{\lambda x}\int_0^\lambda t^{\alpha-1}\,dt = \frac{2\lambda^{\alpha-1}}{x}. \tag{3.58}$$

Innen a páros esethez teljesen hasonlóan (3.55) következik a (3.56) - (3.58)-ból (vö. (3.54)).

(ii) Először azt az esetet tekintjük, amikor f páros. Ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $x = 0$ az f függvény Lebesgue-pontja, továbbá $\beta > 0$, akkor a (3.12)-t alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^\beta \hat{f}_c(t)\,dt = f(0). \tag{3.59}$$

Tekintsük most a $\beta = \alpha$ és $\beta = \alpha - 1$ eseteket (ez utóbbi megtehető, mivel $\alpha > 1$). A $\beta = \alpha$ helyettesítéssel kapott kifejezésből kivonva a $\beta = \alpha - 1$ helyettesítéssel kapott kifejezést, adódik, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} t\hat{f}_c(t)\,dt = 0,$$

ami éppen a (3.17) a páros esetben.

Másodszor azt az esetet tekintjük, amikor f páratlan. A definíció alapján be kell látnunk, hogy

$$I_6(\lambda) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} t\hat{f}_s(t)\,dt \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda\to\infty. \tag{3.60}$$

Mivel az $\alpha+\delta$ rendű Cesàro összegezés következik az α rendűből (ahol $\alpha>0$ és $\delta\geq 0$), így a továbbiakban feltehető, hogy $1<\alpha\leq 2$.

Fubini-tétele és (3.4) alapján

$$I_6(\lambda)=\int_0^\infty f(x)K_6^\alpha(x,\lambda)\,dx, \tag{3.61}$$

ahol

$$\begin{aligned}K_6^\alpha(x,\lambda):&=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda\Big(1-\frac{t}{\lambda}\Big)^{\alpha-1}t\sin tx\,dt\\&=\lambda\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}u\sin\lambda xu du.\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$|K_6^\alpha(x,\lambda)|\leq\lambda\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}udu=C_1\lambda, \tag{3.62}$$

ahol $C_1=C_1(\alpha)$ csupán az α-tól függő állandó. Másrészt, a 3.4. Lemmát alkalmazva $\lambda x\geq 1$-re, adódik, hogy

$$|K_6^\alpha(x,\lambda)|\leq\frac{C_2}{\lambda^{\alpha-1}x^\alpha}, \tag{3.63}$$

ahol $C_2=C_2(\alpha)$ csak az α-tól függő állandó.

A (3.62) és (3.63) elemi egyenlőtlenségeket felhasználva (3.60) igazolását az alábbi módon végezhetjük. Mivel f páratlan, ezért $f(0)=0$. Továbbá, mivel $x=0$ az f függvény Lebesgue-pontja, így adott $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $\delta>0$, hogy

$$\chi(x):=\int_0^x|f(t)|\,dt\leq\varepsilon x\quad\text{ahol}\quad 0\leq x\leq\delta. \tag{3.64}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\lambda\delta>1$. A (3.61) miatt

$$\begin{aligned}|I_6(\lambda)|&\leq\Big\{\int_0^{1/\lambda}+\int_{1/\lambda}^\delta+\int_\delta^\infty\Big\}|f(x)K_6^\alpha(x,\lambda)|\,dx\\&=:I_{61}(\lambda)+I_{62}(\lambda)+I_{63}(\lambda),\end{aligned} \tag{3.65}$$

ahol $I_{61}(\lambda)$ jelöli az első, $I_{62}(\lambda)$ a második, $I_{63}(\lambda)$ pedig a harmadik tagot az összegben. Figyelembe véve a (3.62)-t és (3.64)-et kapjuk, hogy

$$I_{61}(\lambda)\leq C_1\lambda\chi(\frac{1}{\lambda})\leq\varepsilon. \tag{3.66}$$

Parciálisan integrálva, majd felhasználva a (3.63)-at és (3.64)-et, nyerjük, hogy

$$
\begin{aligned}
I_{62}(\lambda) &\leq \frac{C_2}{\lambda^{\alpha-1}} \int_{1/\lambda}^{\delta} \frac{|f(x)|}{x^\alpha}\, dx \\
&= \frac{C_2}{\lambda^{\alpha-1}} \left\{ \left[\frac{\chi(x)}{x^\alpha} \right]_{1/\lambda}^{\delta} + \alpha \int_{1/\lambda}^{\delta} \frac{\chi(x)}{x^{\alpha+1}}\, dx \right\} \\
&\leq \frac{C_2 \varepsilon}{\lambda^{\alpha-1}\delta^{\alpha-1}} + \frac{\alpha C_2 \varepsilon}{\lambda^{\alpha-1}} \int_{1/\lambda}^{\delta} \frac{dx}{x^\alpha} \\
&\leq \frac{C_2 \varepsilon}{(\lambda\delta)^{\alpha-1}} + \frac{\alpha C_2 \varepsilon}{\alpha - 1} \\
&\leq \frac{(2\alpha - 1) C_2}{\alpha - 1} \varepsilon.
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Az előzőekben felhasználtuk, hogy $\alpha > 1$ és $\lambda\delta > 1$. Végül, figyelembe véve, hogy $f \in L^1(\mathbb{R})$ és, hogy a (3.64) fennáll, kapjuk

$$
I_{63}(\lambda) \leq \frac{C_2}{\lambda^{\alpha-1}} \int_{\delta}^{\infty} \frac{|f(x)|}{x^\alpha}\, dx \leq \frac{C_2}{\lambda^{\alpha-1}\delta^\alpha} \|f\|_1 \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda \to \infty. \tag{3.68}
$$

A (3.65) - (3.68)-ból adódik a (3.60). □

3.2. *Következmény bizonyítása.*

A 3.1. és a 3.2. Tételekből a 3.5. Lemma felhasználásával adódnak az (i) és (ii) állítások.

□

IV. FEJEZET

A KÉTDIMENZIÓS FOURIER-TRANSZFORMÁLT NAGYSÁGRENDJE

Bevezetés

Legyen f kétváltozós függvény Lebesgue-integrálható az $\mathbb{R}^2 := (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ síkon, jelölésben: $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Ekkor az $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ függvény $\hat{f}$ (komplex) kettős Fourier-transzformáltját az alábbi módon definiáljuk (lásd [20])

$$\hat{f}(u,v) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy, \qquad u, v \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Könnyen látható, hogy $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^2)$ és a Riemann-Lebesgue lemma alapján

$$\hat{f}(u,v) \to 0, \qquad \text{ha} \qquad |u| + |v| \to \infty. \tag{4.2}$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan a fenti konvergencia tetszőlegesen lassú lehet.

Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ páros mindkét változójában, azaz

$$f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

akkor könnyen látható, hogy a (4.1) formula a következő egyszerűbb

$$\hat{f}(u,v) = \hat{f}_{cc}(u,v) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x,y) \cos ux \cos vy\, dx\, dy \tag{4.3}$$

kettős koszinusz-transzformált alakban írható.

Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ páratlan mindkét változójában, azaz

$$f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

akkor a (4.1) formulából az

$$\hat{f}(u,v) = -\hat{f}_{ss}(u,v) := -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x,y) \sin ux \sin vy\, dx\, dy \tag{4.4}$$

lényegében kettős szinusz-transzformált lesz.

Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ függvény páros x-ben és páratlan y-ban, akkor a (4.1) formula a következő egyszerűbb

$$\hat{f}(u,v) = -i\hat{f}_{cs}(u,v) := -i\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x,y) \cos ux \sin vy\, dx\, dy \tag{4.5}$$

lényegében koszinusz-szinusz-transzformált alakban írható.

Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ függvény páratlan x-ben és páros y-ban, akkor a (4.1) formulából az

$$\hat{f}(u,v) = -i\hat{f}_{sc}(u,v) := -i\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\sin ux \cos vy \, dx\, dy \tag{4.6}$$

lényegében szinusz-koszinusz-transzformált lesz.

Másrészt, tetszőleges $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ függvény felbontható a következő módon

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{4}\{f(x,y) + f(-x,y) + f(x,-y) + f(-x,-y)\} \\ &+ \frac{1}{4}\{f(x,y) + f(-x,y) - f(x,-y) - f(-x,-y)\} \\ &+ \frac{1}{4}\{f(x,y) - f(-x,y) + f(x,-y) - f(-x,-y)\} \\ &+ \frac{1}{4}\{f(x,y) - f(-x,y) - f(x,-y) + f(-x,-y)\} \\ &=: f_1(x,y) + f_2(x,y) + f_3(x,y) + f_4(x,y), \end{aligned} \tag{4.7}$$

ahol $f_1, f_2, f_3, f_4 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, az f_1 páros x-ben és y-ban, az f_2 páros x-ben és páratlan y-ban, az f_3 páratlan x-ben és páros y-ban, az f_4 páratlan x-ben és y-ban. Ezért a (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) és a (4.7) alapján adódik, hogy

$$\hat{f}(u,v) = \hat{f}_{1,cc}(u,v) - i\hat{f}_{2,cs}(u,v) - i\hat{f}_{3,sc}(u,v) - \hat{f}_{4,ss}(u,v), \qquad u,v \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Ha $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ valamely $1 < p \leq 2$ esetén, akkor a (4.1) definíció nem alkalmazható. Ekkor az f függvény $\hat{f}$ Fourier-transzformáltját úgy definiáljuk, mint az alábbi véges intervallumon kapott integrál $L^q(\mathbb{R}^2)$-normában vett határértékét

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-x_1}^{x_2}\int_{-y_1}^{y_2} f(x,y)e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy, \qquad \text{ha} \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \to \infty$$

ahol q jelöli p konjugáltját, azaz $1/p + 1/q = 1$. Ekkor $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R}^2)$, azonban $\hat{f}(u,v)$-t egy nullamértékű halmaz kivételével definiáltuk $\mathbb{R}^2$-en.

Kétváltozós függvények összegezése a végtelenben

Emlékeztetünk a Cesàro-féle összegezésre. Legyen $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+{}^2)$ és $\alpha, \beta > 0$ valós számok. Ekkor a következő jelölést alkalmazzuk

$$(C;\alpha,\beta) - \lim f(u,v) = \ell,$$

ha

$$(4.9) \qquad \lim \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\beta}{\mu}\int_0^{\lambda}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{|u|}{|\lambda|}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{|v|}{|\mu|}\right)^{\beta-1} f(u,v)\,du\,dv = \ell,$$

ahol a limeszt vagy az $|u|+|v| \to \infty$ (tehát $\max(|u|,|v|) \to \infty$), vagy pedig az $|u|,|v| \to \infty$ (tehát $\min(|u|,|v|) \to \infty$) esetén képezzük.

Amennyiben a (4.9) határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy $f(u,v)$-nek (α,β)-rendbeli Cesàro értelemben vagy röviden $(C;\alpha,\beta)$ értelemben ℓ a (véges) határértéke $|u|+|v| \to \infty$, illetve az $|u|,|v| \to \infty$ esetén (lásd [11]).

Emlékeztetők. (i) Jól ismert (lásd [2, 12. o.]), hogy minden $\alpha,\beta > 0$ és $\gamma,\delta \geq 0$ esetén a (4.9)-ből adódik, hogy

$$(C;\alpha+\gamma,\beta+\delta) - \lim f(u,v) = \ell,$$

ahol tehát vagy $|u|+|v| \to \infty$, vagy $|u|,|v| \to \infty$ a (4.9)-nek megfelelően.

(ii) Ha a (4.9)-beli f függvény egyike a (4.7) formulában definiált f_1, f_2, f_3, f_4 függvényeknek, azaz $f(x,y)$ függvény mindegyik változójában páros vagy páratlan, akkor a (4.9) feltétel ekvivalens lesz az alábbival

$$\lim \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\beta}{\mu}\int_0^{\lambda}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{\beta-1} f(u,v)\,du\,dv = \ell,$$

ahol már a λ és μ pozitív értékeket futnak át. További segítséget nyújthatnak az olvasónak a következő irodalmak [6-11], [16] és [18-21].

Új eredmények.

Annak ellenére, hogy a (4.2) formulában a konvergencia tetszőlegesen lassú lehet, egy jobb sebességű konvergenciát várhatunk el bizonyos gyengébb esetekben. Pozitív eredmények adódnak kettős Fourier-transzformáltak nagyságrendjével kapcsolatban, például

$$(C;\alpha,\beta) - \lim |u|^{\gamma}|v|^{\delta}\hat{f}(u,v) = 0,$$

ahol $\alpha,\beta > 0$ és $\gamma,\delta > 0$.

A következő Tételek a Fourier-transzformáltak kettős Fourier-transzformáltakra vonatkozó kiterjesztései, amelyeket a [2] és [3] cikkekben bizonyítottunk be.

4.1. TÉTEL. (i) *Ha* $f \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2)$ *valamely* $1 < p \leq 2$*-re és* $\alpha, \beta \in (0, 1/q)$, *ahol* $1/p + 1/q = 1$, *akkor*

$$(C; 1/q, 1/q) - \lim_{|u|+|v|\to\infty} |u|^\alpha |v|^\beta \hat{f}(u,v) = 0. \tag{4.10}$$

(ii) *Ha* $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ *valamely* $1 < p \leq 2$*-re és* $\alpha, \beta \in (1/q, \infty)$, *akkor*

$$(C; \alpha, \beta) - \lim_{|u|,|v|\to\infty} |uv|^{1/q} \hat{f}(u,v) = 0. \tag{4.11}$$

Speciálisan, az $\alpha = \beta = 1$ eset adja a következő eredményt.

4.1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha* $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ *valamely* $1 < p \leq 2$ *esetén, akkor*

$$\lim_{|\lambda|,|\mu|\to\infty} \frac{1}{\lambda\mu} \int_0^\lambda \int_0^\mu |uv|^{(p-1)/p} \hat{f}(u,v)\, du\, dv = 0.$$

4.2. TÉTEL. *Ha* $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$F_{21}(x) := \int_{|y|\geq 1} |f(x,y)|\, dy \qquad \text{és} \qquad F_{22}(y) := \int_{|x|\geq 1} |f(x,y)|\, dx \in L^\infty(\mathbb{R}),$$

és $\alpha, \beta \in (0, 1)$, *akkor*

$$(C; 1, 1) - \lim_{|u|+|v|\to\infty} |u|^\alpha |v|^\beta \hat{f}(u,v) = 0. \tag{4.12}$$

Emlékeztetünk arra, hogy az $(x, y) = (0, 0)$ pontot akkor hívjuk $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ függvény erős Lebesgue-pontjának, ha a következő három feltétel teljesül

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{1}{hk} \int_0^h \int_0^k |f(x,y) - f(0,0)|\, dx\, dy = 0, \tag{4.13}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{-\infty}^\infty |f(x,y) - f(0,y)|\, dx\, dy = 0, \tag{4.14}$$

és

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^\infty \int_0^k |f(x,y) - f(x,0)|\, dx\, dy = 0. \tag{4.15}$$

Megjegyezzük, hogy a (4.14) és (4.15) a következő alakba írható

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h F_{31}(x)\,dx = 0, \tag{4.16}$$

ahol

$$F_{31}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y) - f(0,y)|\,dy;$$

és

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\int_0^k F_{32}(y)\,dy = 0, \tag{4.17}$$

ahol

$$F_{32}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y) - f(x,0)|\,dx.$$

4.3. TÉTEL. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ függvény páratlan legalább az egyik változójában, továbbá $(x,y) = (0,0)$ pont az f függvény erős Lebesgue-pontja, és $\alpha, \beta \in (1,\infty)$, akkor*

$$(C;\alpha,\beta) - \lim_{|u|,|v|\to\infty} uv\hat{f}(u,v) = 0. \tag{4.18}$$

4.3. PROBLÉMA. Abban az esetben, ha az f mindkét változójában páros, akkor a 4.3. Tétel nyitott marad.

Az új eredmények igazolása

Mivel a (4.7) felbontás tetszőleges f függvényre alkalmazható, ezért a 4.1., 4.2., és 4.3. Tételek bizonyítását elegendő olyan f függvényre végezni, amely páros x-ben és y-ban (ez az eset a 4.3. Tételnél kimarad), vagy páratlan x-ben és y-ban, vagy páros x-ben és páratlan y-ban (vagy páratlan x-ben és páros y-ban).

4.1. *Tétel bizonyítása.*

(i) Először azt az esetet tekintjük, amikor f páros x-ben és y-ban. A definíció alapján azt kell belátnunk, hogy

$$I_1(\lambda,\mu) := \frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda\int_0^\mu \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-1/p}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{-1/p} u^\alpha v^\beta \hat{f}_{cc}(u,v)\,du\,dv \to 0, \tag{4.19}$$

$$\text{ha} \quad \lambda + \mu \to \infty \quad \text{és} \quad \lambda, \mu > 0.$$

Fubini-tétele és (4.3) alapján

$$I_1(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) K_1(x,y;\lambda,\mu)\, dx\, dy, \tag{4.20}$$

ahol

$$\begin{aligned} K_1(x,y;\lambda,\mu) :&= \frac{1}{\lambda\mu} \int_0^\lambda \int_0^\mu \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^{-1/p} \left(1 - \frac{v}{\mu}\right)^{-1/p} u^\alpha v^\beta \cos ux \cos vy\, du\, dv \\ &= \lambda^\alpha \mu^\beta \int_0^1 \int_0^1 (1-k)^{-1/p} (1-l)^{-1/p} k^\alpha l^\beta \cos \lambda k x \cos \mu l y\, dk\, dl. \end{aligned}$$

Alkalmazhatjuk $K_1(x,y;\lambda,\mu)$-re a Hausdorff-Young-féle egyenlőtlenséget a $\tilde{p}$ és $\tilde{q}$ konjugált párral, ahol

$$\max(\alpha, \beta) < \frac{1}{\tilde{q}} < \frac{1}{q} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1. \tag{4.21}$$

Eredményként adódik, hogy

$$\begin{aligned} \|K_1(x,y;1,1)\|_{\tilde{q}} :&= \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty |K_1(x,y;1,1)|^{\tilde{q}}\, dx\, dy \right\}^{1/\tilde{q}} \\ &\le C_{\tilde{q}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1-k)^{-\tilde{p}/p} (1-l)^{-\tilde{p}/p} k^{\alpha\tilde{p}} l^{\beta\tilde{p}}\, dk\, dl \right\}^{1/\tilde{p}} \\ &\le C_{\tilde{q}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 r^{-\tilde{p}/p} s^{-\tilde{p}/p}\, dr\, ds \right\}^{1/\tilde{p}}, \end{aligned}$$

ahol $C_{\tilde{q}}$ csak $\tilde{q}$-tól függő állandó. A (4.21) feltételből következik, hogy $1 < \tilde{p} < p$. Ezért

$$\|K_1(x,y;1,1)\|_{\tilde{q}} \le C_{\tilde{q}} \left(\frac{p}{p - \tilde{p}} \right)^{2/\tilde{p}}. \tag{4.22}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$K_1(x,y;\lambda,\mu) = \lambda^\alpha \mu^\beta K_1(\lambda x, \mu y; 1, 1),$$

így

$$\|K_1(x,y;\lambda,\mu)\|_{\tilde{q}} \le \lambda^{\alpha - 1/\tilde{q}} \mu^{\beta - 1/\tilde{q}} \|K_1(x,y;1,1)\|_{\tilde{q}}. \tag{4.23}$$

A Hölder-egyenlőtlenség, továbbá a (4.20), (4.22) és (4.23) felhasználásával kapjuk, hogy

$$|I_1(\lambda,\mu)| \le \left\{\int_0^\infty \int_0^\infty |f(x,y)|^{\tilde p}\,dx\,dy\right\}^{1/\tilde p} \left\{\int_0^\infty \int_0^\infty |K_1(x,y;\lambda,\mu)|^{\tilde q}\,dx\,dy\right\}^{1/\tilde q}$$
$$\le \{\|f\|_1 + \|f\|_p\}^{1/\tilde p}\, C_{\tilde q}\lambda^{\alpha-1/\tilde q}\mu^{\beta-1/\tilde q}\left(\frac{p}{p-\tilde p}\right)^{2/\tilde p}.$$

Figyelembe véve (4.21)-et, adódik (4.19).

Másodszor azt az esetet tekintjük, amikor f páratlan x-ben és y-ban. A definíció alapján be kell látnunk, hogy

$$I_2(\lambda,\mu) := \frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda \int_0^\mu \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-1/p}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{-1/p} u^\alpha v^\beta \hat f_{ss}(u,v)\,du\,dv \to 0, \tag{4.24}$$

$$\text{ha} \quad \lambda+\mu\to\infty \quad \text{és} \quad \lambda,\mu>0.$$

Fubini-tétele és (4.4) alapján

$$I_2(\lambda,\mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)K_2(x,y;\lambda,\mu)\,dx\,dy,$$

ahol

$$K_2(x,y;\lambda,\mu) := \frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda \int_0^\mu \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-1/p}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{-1/p} u^\alpha v^\beta \sin ux \sin vy\,du\,dv$$
$$= \lambda^\alpha\mu^\beta \int_0^1\int_0^1 (1-k)^{-1/p}(1-l)^{-1/p}\,k^\alpha l^\beta \sin\lambda kx \sin\mu ly\,dk\,dl.$$

A (4.24) igazolásának további része analóg a (4.19) bizonyításával, mivel a Hausdorff-Young-egyenlőtlenség fennáll koszinuszok helyett szinusz függvényekre is.

Harmadszor azt az esetet tekintjük, amikor f páros x-ben és páratlan y-ban. A definíció alapján be kell látnunk, hogy

$$I_3(\lambda,\mu) := \frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda \int_0^\mu \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-1/p}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{-1/p} u^\alpha v^\beta \hat f_{cs}(u,v)\,du\,dv \to 0, \tag{4.25}$$

$$\text{ha} \quad \lambda+\mu\to\infty \quad \text{és} \quad \lambda,\mu>0.$$

Fubini-tétele és (4.5) alapján

$$I_3(\lambda,\mu)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)K_3(x,y;\lambda,\mu)\,dx\,dy,$$

ahol

$$\begin{aligned}K_3(x,y;\lambda,\mu) :&= \frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda\int_0^\mu\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-1/p}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{-1/p}u^\alpha v^\beta\cos ux\sin vy\,du\,dv\\ &=\lambda^\alpha\mu^\beta\int_0^1\int_0^1(1-k)^{-1/p}(1-l)^{-1/p}k^\alpha l^\beta\cos\lambda kx\sin\mu ly\,dk\,dl.\end{aligned}$$

A (4.25) igazolásának további része analóg (4.19)-el, mivel a Hausdorff-Young-egyenlőtlenség fennáll koszinuszok helyett koszinusz-szinusz függvényekre is.

Ha az f páratlan x-ben és páros y-ban, akkor a bizonyítás teljesen hasonló módon történik.

(ii). Tegyük fel, hogy az f páros x-ben és y-ban, vagy páratlan x-ben és y-ban, vagy páros x-ben és páratlan y-ban (vagy páratlan x-ben és páros y-ban), és jelölje $\hat f$ az $\hat f_{cc}$ vagy $\hat f_{ss}$ vagy $\hat f_{cs}$ (vagy $\hat f_{sc}$) függvényt. A definíció alapján azt kell belátnunk, hogy

$$I_4(\lambda,\mu):=\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda\int_0^\mu\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{\beta-1}u^{1/q}v^{1/q}\hat f(u,v)\,du\,dv\to 0,\quad \text{ha}\quad \lambda,\mu\to\infty. \tag{4.26}$$

Az $f\in L^p(\mathbb{R}^2)$ függvényre újra alkalmazva a Hausdorff-Young-egyenlőtlenséget adódik, hogy $\hat f\in L^q(\mathbb{R}^2)$. Legyen $\varepsilon>0$, ekkor találhatóak olyan $\lambda_0,\mu_0>0$ (mostantól rögzített) valós számok, hogy

$$\left\{\int_{\lambda_0}^\infty\int_0^{\mu_0}+\int_0^{\lambda_0}\int_{\mu_0}^\infty+\int_{\lambda_0}^\infty\int_{\mu_0}^\infty\right\}|\hat f(u,v)|^q\,du\,dv\le\varepsilon^q. \tag{4.27}$$

Továbbá $I_4(\lambda,\mu)$ felbontható a következőképpen (feltéve, hogy $\lambda>\lambda_0$ és $\mu>\mu_0$)

$$\begin{aligned}I_4(\lambda,\mu)&=\frac{1}{\lambda\mu}\left\{\int_0^{\lambda_0}\int_0^{\mu_0}+\int_{\lambda_0}^\lambda\int_0^{\mu_0}+\int_0^{\lambda_0}\int_{\mu_0}^\mu+\int_{\lambda_0}^\lambda\int_{\mu_0}^\mu\right\}\\ &\quad\times\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{\beta-1}u^{1/q}v^{1/q}\hat f(u,v)\,du\,dv\\ &=: I_{41}(\lambda,\mu)+I_{42}(\lambda,\mu)+I_{43}(\lambda,\mu)+I_{44}(\lambda,\mu),\end{aligned} \tag{4.28}$$

ahol értelemszerűen $I_{41}(\lambda,\mu)$ jelöli az összeg első tagját, $I_{42}(\lambda,\mu)$ a másodikat, és így tovább. Nyilván

$$
\begin{aligned}
|I_{41}(\lambda,\mu)| &\le \frac{1}{\lambda\mu}\max\left\{1,\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\right\}\max\left\{1,\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\beta-1}\right\} \\
&\quad\times\int_0^{\lambda_0}\int_0^{\mu_0} u^{1/q}v^{1/q}|\hat{f}(u,v)|\,du\,dv \le \varepsilon
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

ha λ vagy μ elég nagy.

A Hölder-egyenlőtlenség és a (4.27) alapján

$$
\begin{aligned}
|I_{44}(\lambda,\mu)| &\le \frac{1}{\lambda\mu}\left\{\int_0^{\lambda}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{(\alpha-1)p}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{(\beta-1)p} u^{p/q}v^{p/q}\,du\,dv\right\}^{1/p} \\
&\quad\times\left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mu_0}^{\mu}|\hat{f}(u,v)|^q\,du\,dv\right\}^{1/q} \\
&\le \frac{\varepsilon}{\lambda\mu}\left\{\lambda^{1+\frac{p}{q}}\mu^{1+\frac{p}{q}}\int_0^1\int_0^1(1-k)^{(\alpha-1)p}(1-l)^{(\beta-1)p}k^{p/q}l^{p/q}\,dk\,dl\right\}^{1/p} \\
&\le \varepsilon\left\{\int_0^1\int_0^1 r^{(\alpha-1)p}s^{(\beta-1)p}\,dr\,ds\right\}^{1/p}.
\end{aligned}
$$

A feltételek miatt $\alpha,\beta > 1/q$. Ezért

$$
|I_{44}(\lambda,\mu)| \le \frac{\varepsilon}{\{p^2(\alpha-1/q)(\beta-1/q)\}^{1/p}}. \tag{4.30}
$$

Felhasználva a (4.29)-et, a Hölder-egyenlőtlenséget és a (4.27)-et kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
|I_{42}(\lambda,\mu)| &\le \frac{1}{\lambda\mu}\max\left\{1,\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\beta-1}\right\}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_0^{\mu_0}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1}u^{1/q}v^{1/q}|\hat{f}(u,v)|\,du\,dv \\
&\le \frac{1}{\lambda\mu}\max\left\{1,\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\beta-1}\right\}\left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_0^{\mu_0}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{(\alpha-1)p}u^{p/q}v^{p/q}\,du\,dv\right\}^{1/p} \\
&\quad\times\left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_0^{\mu_0}|\hat{f}(u,v)|^q\,du\,dv\right\}^{1/q} \\
&\le \frac{\varepsilon}{\lambda\mu}\max\left\{1,\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\beta-1}\right\}\left\{\int_0^{\mu}v^{p/q}\,dv\right\}^{1/p}\left\{\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{(\alpha-1)p}u^{p/q}\,du\right\}^{1/p} \\
&\le \varepsilon\max\left\{1,\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\beta-1}\right\}\frac{1}{\{p/q+1\}^{1/p}}\frac{1}{\lambda}\left\{\lambda^{1+p/q}\int_0^1(1-k)^{(\alpha-1)p}k^{p/q}\,dk\right\}^{1/p} \\
&\le \varepsilon\max\left\{1,\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\beta-1}\right\}\frac{1}{\{p/q+1\}^{1/p}}\left\{\int_0^1 r^{(\alpha-1)p}\,dr\right\}^{1/p}.
\end{aligned}
$$

A feltétel miatt $\alpha > 1/q$. Így

$$(4.31) \qquad |I_{42}(\lambda,\mu)| \le \varepsilon \max\left\{1, \left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\beta-1}\right\} \frac{1}{\{p/q+1\}^{1/p}} \frac{1}{\{p(\alpha-1/q)\}^{1/p}}.$$

Az $I_{42}(\lambda,\mu)$ becsléséhez analóg módon nyerjük, hogy

$$(4.32) \qquad |I_{43}(\lambda,\mu)| \le \varepsilon \max\left\{1, \left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\right\} \frac{1}{\{p/q+1\}^{1/p}} \frac{1}{\{p(\beta-1/q)\}^{1/p}}.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, így összekapcsolva a (4.28) - (4.32)-t, adódik (4.26). □

4.2. *Tétel bizonyítása.*

Először azt az esetet tekintjük, amikor f páros x-ben és y-ban. A definíció alapján $\alpha, \beta \in (0,1)$ esetén ellenőriznünk kell, hogy

$$(4.33) \qquad I_5(\lambda,\mu) := \frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda \int_0^\mu u^\alpha v^\beta \hat{f}_{cc}(u,v)\,du\,dv \to 0,$$

$$\text{ha} \quad \lambda+\mu \to \infty \quad \text{és} \quad \lambda,\mu > 0.$$

Fubini-tétele és (4.3) alapján

$$(4.34) \qquad I_5(\lambda,\mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) K_4^\alpha(x,\lambda) K_4^\beta(y,\mu)\,dx\,dy,$$

ahol $K_4^\alpha(x,\lambda)$ a (3.51)-es formulában található segédfüggvény.

A (3.52) és (3.53) alapján

$$(4.35) \qquad |K_4^\alpha(x,\lambda)| \le \min\left\{2\lambda^\alpha, \frac{2\lambda^{\alpha-1}}{x}\right\}.$$

Ebből az is nyilvánvaló, hogy

$$|K_4^\beta(y,\mu)| \le \min\left\{2\mu^\beta, \frac{2\mu^{\beta-1}}{y}\right\}.$$

Az $I_5(\lambda,\mu)$ felbontható a következőképpen

(4.36)

$$\begin{aligned} I_5(\lambda,\mu) = \Bigg\{ &\int_0^{1/\lambda}\int_0^{1/\mu} + \int_0^{1/\lambda}\int_{1/\mu}^1 + \int_{1/\lambda}^1\int_0^{1/\mu} + \int_{1/\lambda}^1\int_{1/\mu}^1 + \int_0^{1/\lambda}\int_1^\infty + \int_1^\infty\int_0^{1/\mu} \\ &+ \int_{1/\lambda}^1\int_1^\infty + \int_1^\infty\int_{1/\mu}^1 + \int_1^\infty\int_1^\infty \Bigg\} f(x,y)K_4^\alpha(x,\lambda)K_4^\beta(y,\mu)\,dx\,dy \\ =: &\, I_{51}(\lambda,\mu) + I_{52}(\lambda,\mu) + \ldots + I_{59}(\lambda,\mu), \end{aligned}$$

ahol értelemszerűen $I_{51}(\lambda,\mu)$ jelöli az összeg első tagját, $I_{52}(\lambda,\mu)$ a másodikat, és így tovább.

Felhasználva a (4.35)-öt az alábbi módon becsülhetünk

$$|I_{51}(\lambda,\mu)| \le 4\lambda^{\alpha}\mu^{\beta}\|f\|_{\infty}\int_0^{1/\lambda}\int_0^{1/\mu} dx\,dy = 4\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\|f\|_{\infty}, \tag{4.37}$$

$$|I_{52}(\lambda,\mu)| \le 4\lambda^{\alpha}\mu^{\beta-1}\|f\|_{\infty}\int_0^{1/\lambda}\int_{1/\mu}^{1}\frac{1}{y}\,dx\,dy = 4\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\|f\|_{\infty}\ln\mu, \tag{4.38}$$

$$|I_{54}(\lambda,\mu)| \le 4\lambda^{\alpha}\mu^{\beta}\|f\|_{\infty}\int_{1/\lambda}^{1}\int_{1/\mu}^{1}\frac{1}{xy}\,dx\,dy = 4\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\|f\|_{\infty}\ln\lambda\ln\mu, \tag{4.39}$$

és

$$|I_{59}(\lambda,\mu)| \le 4\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}|f(x,y)|\,dx\,dy \le 4\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\|f\|_1. \tag{4.40}$$

Ismét a (4.35)-öt és az $F_{21}(x)\in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ feltételt felhasználva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}|I_{55}(\lambda,\mu)| &\le 4\lambda^{\alpha}\mu^{\beta-1}\int_0^{1/\lambda}\int_1^{\infty}|f(x,y)|\,dx\,dy\\ &= 4\lambda^{\alpha}\mu^{\beta-1}\int_0^{1/\lambda}F_{21}(x)\,dx \le 4\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}K,\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}|I_{57}(\lambda,\mu)| &\le 4\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\int_{1/\lambda}^{1}\int_1^{\infty}\frac{|f(x,y)|}{x}\,dx\,dy\\ &= 4\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\int_{1/\lambda}^{1}\frac{F_{21}(x)}{x}\,dx \le 4\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}K\ln\lambda.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Mivel $\alpha,\beta<1$ és $\lambda+\mu\to\infty$, összekapcsolva a (4.36)-ot, (4.37)-et, (4.38)-at és szimmetrikus megfelelőjét, a (4.39)-et, (4.40)-et, (4.41)-et és szimmetrikus megfelelőjét, a (4.42)-t és szimmetrikus megfelelőjét, adódik (4.33).

Másodszor azt az esetet tekintjük, amikor f páratlan x-ben és y-ban. A definíció alapján ellenőriznünk kell, hogy $\alpha,\beta\in(0,1)$ esetén

$$I_6(\lambda,\mu) := \frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^{\lambda}\int_0^{\mu}u^{\alpha}v^{\beta}\hat{f}_{ss}(u,v)\,du\,dv \to 0, \tag{4.43}$$

$$\text{ha} \quad \lambda + \mu \to \infty \quad \text{és} \quad \lambda, \mu > 0.$$

Fubini-tétele és (4.4) alapján

$$I_6(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) K_5^\alpha(x,\lambda) K_5^\beta(y,\mu)\, dx\, dy,$$

ahol $K_5^\alpha(x,\lambda)$ a (3.56) formulában található segédfüggvény.

Beláttuk a (3.57)-ben és (3.58)-ban, hogy a (4.35)-ös formulában szereplő alapvető egyenlőtlenség fennáll $K_4^\alpha(x,\lambda)$ mellett $K_5^\alpha(x,\lambda)$-ra is.

Innen a (4.43) igazolása pontosan ugyanazon úton halad, mint a páros-páros esetben.

Harmadszor azt az esetet tekintjük, amikor f páros x-ben és páratlan y-ban. A definíció alapján ellenőriznünk kell, hogy $\alpha, \beta \in (0,1)$ esetén

$$I_7(\lambda, \mu) := \frac{\pi}{2} \frac{1}{\lambda\mu} \int_0^\lambda \int_0^\mu u^\alpha v^\beta \hat{f}_{cs}(u,v)\, du\, dv \to 0, \tag{4.44}$$

$$\text{ha} \quad \lambda + \mu \to \infty \quad \text{és} \quad \lambda, \mu > 0.$$

Fubini-tétele és (4.5) alapján

$$I_7(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) K_4^\alpha(x,\lambda) K_5^\beta(y,\mu)\, dx\, dy,$$

ahol $K_4^\alpha(x,\lambda)$ és $K_5^\beta(y,\mu)$ függvényeket már fentebb definiáltuk.

Így a (4.44) igazolása az előző esethez analóg módon történik.

Ha az f páratlan x-ben és páros y-ban, a bizonyítás teljesen hasonló módon történik. □

A 4.3. Tétel bizonyításához felhasznált eredmények

4.1. LEMMA. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Tegyük fel, hogy az f függvény páros x-ben és páratlan y-ban, továbbá, hogy $(x,y) = (0,0)$ pont az f függvény erős Lebesgue-pontja, akkor*

$$\int_0^\infty |f(0,y)|\, dy < \infty. \tag{4.45}$$

Bizonyítás. A (4.14) feltételből adódik, hogy létezik olyan $h > 0$, hogy

$$\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^\infty |f(x,y) - f(0,y)|\, dx\, dy < \infty. \tag{4.46}$$

Felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty |f(0,y)|\,dy = \frac{1}{h}\int_0^h \int_0^\infty |f(0,y)|\,dx\,dy$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_0^h \int_0^\infty |f(x,y)-f(0,y)|\,dx\,dy + \frac{1}{h}\int_0^h \int_0^\infty |f(x,y)|\,dx\,dy. \qquad \square$$

A 4.1. Lemma szimmetrikus párja az alábbi.

4.1*. LEMMA. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Tegyük fel, hogy az f függvény páratlan x-ben és páros y-ban, továbbá, hogy $(x,y) = (0,0)$ pont az f függvény erős Lebesgue-pontja, akkor*

$$\int_0^\infty |f(x,0)|\,dx < \infty. \tag{4.47}$$

4.2. LEMMA. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Tegyük fel, hogy az f függvény páros x-ben és páratlan y-ban, továbbá, hogy $(x,y) = (0,0)$ pont az f függvény erős Lebesgue-pontja, akkor*

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\int_0^k |f(0,y)|\,dy = 0.$$

Speciálisan, elegendően kicsi k-ra

$$\frac{1}{k}\int_0^k |f(0,y)|\,dy \leq C, \tag{4.48}$$

ahol a C csupán az f-től függő állandó.

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h \int_0^k |f(x,y)|\,dx\,dy - \int_0^k |f(0,y)|\,dy\right| \leq \frac{1}{h}\int_0^h \int_0^k |f(x,y)-f(0,y)|\,dx\,dy.$$

A (4.14) feltétel miatt, tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $h_0 > 0$, hogy

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h \int_0^k |f(x,y)|\,dx\,dy - \int_0^k |f(0,y)|\,dy\right| \leq \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < h < h_0. \tag{4.49}$$

Ebből, felhasználva a (4.14)-et és azt a tényt, hogy $f(0,0) = 0$ (mivel $f(x,y)$ páratlan y-ban), kapjuk, hogy

$$\int_0^k |f(0,y)|\,dy \leq \varepsilon + \frac{1}{h}\int_0^h \int_0^k |f(x,y)|\,dx\,dy \leq \varepsilon + C\cdot k.$$

Mivel ε tetszőleges volt, így adódik a 4.2. Lemma igazolása. $\square$

A 4.2. Lemma szimmetrikus párja a következő.

4.2*. LEMMA. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Tegyük fel, hogy az f függvény páratlan x-ben és páros y-ban, továbbá, hogy $(x,y) = (0,0)$ pont az f függvény erős Lebesgue-pontja, akkor elegendően kicsi h-ra*

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x,0)|\,dx \le C', \tag{4.50}$$

ahol a C' állandó csupán az f-től függ.

A következő három lemma analóg a 3.2.–3.4. Lemmákkal.

4.3. LEMMA. *Ha $0 < \alpha \le 1$ és $t > 0$, akkor*

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\cos tu\,du = \mathcal{O}(t^{-\alpha}). \tag{4.51}$$

4.4. LEMMA. *Ha $0 < \alpha \le 1$ és $t > 0$, akkor*

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u\sin tu\,du = \mathcal{O}(t^{-\alpha}). \tag{4.52}$$

4.5. LEMMA. *Ha $1 < \alpha \le 2$ és $t \ge 1$, akkor*

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u\cos tu\,du = \mathcal{O}(t^{-\alpha}). \tag{4.53}$$

4.3. *Tétel bizonyítása.*

Először azt az esetet tekintjük, amikor f páratlan x-ben és y-ban. Nyilván $\alpha,\beta \in (1,2)$-re azt kell ellenőriznünk, hogy

$$I_8(\lambda,\mu) := \frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda\int_0^\mu \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{\beta-1} uv\hat{f}_{ss}(u,v)\,du\,dv \to 0, \tag{4.54}$$

$$\text{ha} \quad \lambda,\mu \to \infty.$$

Fubini-tétele és (4.4) miatt

$$I_8(\lambda,\mu) = \int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)K_6^\alpha(x,\lambda)K_6^\beta(y,\mu)\,dx\,dy, \tag{4.55}$$

ahol $K_6^\alpha(x,\lambda)$ a (3.61)-es formulában található segédfüggvény. Így $K_6^\alpha(x,\lambda)$-ra továbbra is érvényesek a (3.62)-ben és (3.63)-ban kapott egyenlőtlenségek.

Analóg módon nyilvánvaló, hogy

$$|K_6^\beta(y,\mu)| \le \mu \int_0^1 (1-v)^{\beta-1} v\, dv = C_3\mu, \tag{4.56}$$

ahol $C_3 = C_3(\beta)$ csupán a β-tól függő állandó. Másrészt, a 3.4. Lemmát alkalmazva $\mu y \ge 1$-re, adódik, hogy

$$|K_6^\beta(y,\mu)| \le \frac{C_4}{\mu^{\beta-1}y^\beta}, \tag{4.57}$$

ahol $C_4 = C_4(\beta)$ csupán a β-tól függő állandó.

A (3.62), (3.63) és a (4.56), (4.57) elemi egyenlőtlenségeket felhasználva a (4.54) igazolását az alábbi módon végezhetjük. Mivel f páratlan x-ben és y-ban, ezért

$$f(0,0) = f(0,y) = f(x,0) = 0.$$

Továbbá, mivel az $(x,y) = (0,0)$ pont az f függvény Lebesgue-pontja, így tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\vartheta_1(x,1/\mu) := \int_0^x \left(\int_0^{1/\mu} |f(u,y)|\, dy \right) du \le \varepsilon x 1/\mu, \quad \text{ahol} \quad 0 \le x, 1/\mu \le \delta, \tag{4.58}$$

és

$$\vartheta_2(1/\lambda,y) := \int_0^y \left(\int_0^{1/\lambda} |f(x,v)|\, dx \right) dv \le \varepsilon y 1/\lambda, \quad \text{ahol} \quad 0 \le y, 1/\lambda \le \delta. \tag{4.59}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\lambda\delta > 1$ és $\mu\delta > 1$. Az $I_8(\lambda,\mu)$ felbontható a következőképpen

(4.60)

$$\begin{aligned} I_8(\lambda,\mu) = \Bigg\{ &\int_0^{1/\lambda}\int_0^{1/\mu} + \int_0^{1/\lambda}\int_{1/\mu}^{\delta} + \int_{1/\lambda}^{\delta}\int_0^{1/\mu} + \int_{1/\lambda}^{\delta}\int_{1/\mu}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\int_0^{1/\mu} + \int_0^{1/\lambda}\int_{\delta}^{\infty} \\ &+ \int_{1/\lambda}^{\delta}\int_{\delta}^{\infty} + \int_{\delta}^{\infty}\int_{1/\mu}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\int_{\delta}^{\infty} \Bigg\} f(x,y) K_6^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)\, dx\, dy \\ =: &\, I_{81}(\lambda,\mu) + I_{82}(\lambda,\mu) + \cdots + I_{89}(\lambda,\mu), \end{aligned}$$

ahol $I_{81}(\lambda,\mu)$ jelöli az összeg első tagját, $I_{82}(\lambda,\mu)$ a másodikat, és így tovább.

A (3.62), (4.56) és (4.58) miatt kapjuk, hogy

$$|I_{81}(\lambda,\mu)| \le C_1C_3\lambda\mu\vartheta_1(1/\lambda,1/\mu) \le C_1C_3\varepsilon. \tag{4.61}$$

Parciálisan integrálva, majd felhasználva a (3.62)-t, (4.57)-et és (4.59)-et, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
|I_{82}(\lambda,\mu)| &\le \frac{C_1C_4\lambda}{\mu^{\beta-1}}\int_{1/\mu}^{\delta}\frac{1}{y^\beta}\Big\{\int_0^{1/\lambda}|f(x,y)|\,dx\Big\}\,dy\\
&= \frac{C_1C_4\lambda}{\mu^{\beta-1}}\Big\{\Big[\frac{\vartheta_2(1/\lambda,y)}{y^\beta}\Big]_{1/\mu}^{\delta}+\beta\int_{1/\mu}^{\delta}\frac{\vartheta_2(1/\lambda,y)}{y^{\beta+1}}\,dy\Big\}\\
&\le \frac{C_1C_4\lambda}{\mu^{\beta-1}}\Big\{\frac{\vartheta_2(1/\lambda,\delta)}{\delta^\beta}+\beta\frac{\varepsilon}{\lambda}\int_{1/\mu}^{\delta}\frac{1}{y^\beta}\,dy\Big\}\\
&\le \frac{C_1C_4\varepsilon}{(\mu\delta)^{\beta-1}}+\frac{C_1C_4\varepsilon\beta}{\beta-1}\le\frac{C_1C_4\varepsilon(2\beta-1)}{\beta-1}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Hasonló módon a (3.63), (4.56) és (4.58) miatt kapjuk, hogy

$$|I_{83}(\lambda,\mu)| \le \frac{C_2C_3\varepsilon(2\alpha-1)}{\alpha-1}. \tag{4.63}$$

Felhasználva a (3.63)-at és (4.57)-et, majd parciálisan integrálva következik, hogy

$$\begin{aligned}
|I_{84}(\lambda,\mu)| &\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\int_{1/\lambda}^{\delta}\int_{1/\mu}^{\delta}\frac{|f(x,y)|}{x^\alpha y^\beta}\,dx\,dy\\
&= \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\Big\{\Big[\frac{1}{y^\beta}\int_{1/\lambda}^{\delta}\int_0^y\frac{|f(x,v)|}{x^\alpha}\,dx\,dv\Big]_{1/\mu}^{\delta}\\
&\quad+\beta\int_{1/\mu}^{\delta}\frac{1}{y^{\beta+1}}\Big(\int_{1/\lambda}^{\delta}\int_0^y\frac{|f(x,v)|}{x^\alpha}\,dx\,dv\Big)\,dy\Big\} := I_1+I_2,
\end{aligned}$$

ahol I_1 jelöli az összeg első, I_2 pedig a második tagját.

Felhasználva a (4.58)-at, és újra parciálisan integrálva adódik, hogy

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\cdot\frac{1}{\delta^\beta}\int_{1/\lambda}^{\delta}\int_0^{\delta}\frac{|f(x,v)|}{x^\alpha}\,dx\,dv\\
&= \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\cdot\frac{1}{\delta^\beta}\Big\{\Big[\frac{\vartheta_1(x,\delta)}{x^\alpha}\Big]_{1/\lambda}^{\delta}+\alpha\int_{1/\lambda}^{\delta}\frac{\vartheta_1(x,\delta)}{x^{\alpha+1}}\,dx\Big\}\\
&\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\cdot\frac{1}{\delta^\beta}\Big\{\frac{\varepsilon\delta\delta}{\delta^\alpha}+\alpha\varepsilon\delta\int_{1/\lambda}^{\delta}\frac{1}{x^\alpha}\,dx\Big\}\\
&= C_2C_4\Big\{\frac{\varepsilon}{(\lambda\delta)^{\alpha-1}(\mu\delta)^{\beta-1}}+\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{\varepsilon}{(\mu\delta)^{\beta-1}}\Big\}\le C_2C_4\varepsilon(1+\frac{\alpha}{\alpha-1}).
\end{aligned} \tag{4.64}$$

További parciális integrálás mutatja, hogy

$$\int_{1/\lambda}^{\delta}\int_0^y \frac{|f(x,v)|}{x^\alpha}\,dx\,dv \le \Big[\frac{\vartheta_2(x,y)}{x^\alpha}\Big]_{1/\lambda}^{\delta} + \alpha\int_{1/\lambda}^{\delta}\frac{\vartheta_2(x,y)}{x^{\alpha+1}}\,dx$$
$$\le \frac{\vartheta_2(\delta,y)}{\delta^\alpha} + \alpha\int_{1/\lambda}^{\delta}\frac{\vartheta_2(x,y)}{x^{\alpha+1}}\,dx,$$

ezért

$$\begin{aligned} I_2 &\le \frac{C_2C_4\beta}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\Big\{\frac{1}{\delta^\alpha}\int_{1/\mu}^{\delta}\frac{\vartheta_2(\delta,y)}{y^{\beta+1}}\,dy + \alpha\int_{1/\lambda}^{\delta}\int_{1/\mu}^{\delta}\frac{\vartheta_2(x,y)}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}\,dx\,dy\Big\} \\ &\le \frac{C_2C_4\beta}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\Big\{\frac{\varepsilon\delta}{\delta^\alpha}\int_{1/\mu}^{\delta}\frac{1}{y^\beta}\,dy + \alpha\varepsilon\int_{1/\lambda}^{\delta}\int_{1/\mu}^{\delta}\frac{1}{x^\alpha y^\beta}\,dx\,dy\Big\} \\ &\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\Big\{\frac{\beta\varepsilon\delta}{\delta^\alpha}\cdot\frac{\mu^{\beta-1}}{\beta-1} + \alpha\beta\varepsilon\cdot\frac{\mu^{\beta-1}}{\beta-1}\cdot\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\alpha-1}\Big\} \\ &\le C_2C_4\varepsilon\Big\{\frac{\beta}{\beta-1} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Összekapcsolva a (4.64)-et és (4.65)-öt nyerjük, hogy

$$|I_{84}(\lambda,\mu)| \le C_2C_4\varepsilon\Big\{1 + \frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\beta}{\beta-1} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}\Big\}. \tag{4.66}$$

A fentiek szerint I_{81}, I_{82}, I_{83}, I_{84} (és az utolsó lépésben I_{89}) becslésénél elég azt feltennünk, hogy $\lambda+\mu\to\infty$. Viszont az ezután következő I_{85}, I_{86}, I_{87}, I_{88} becslésénél már azt kell feltennünk, hogy $\lambda,\mu\to\infty$.

Továbbmenve, a (3.63)-ból, (4.56)-ból és (4.17)-ből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |I_{85}(\lambda,\mu)| &\le \frac{C_2C_3\mu}{\lambda^{\alpha-1}}\int_\delta^\infty\int_0^{1/\mu}\frac{|f(x,y)|}{x^\alpha}\,dx\,dy \le \frac{C_2C_3\mu}{\lambda^{\alpha-1}\delta^\alpha}\int_\delta^\infty\int_0^{1/\mu}|f(x,y)|\,dx\,dy \\ &\le \frac{C_2C_3}{\lambda^{\alpha-1}\delta^\alpha}\Big\{\mu\int_0^{1/\mu}F_{32}(y)\,dy\Big\} \le \frac{\varepsilon C_2C_3}{\lambda^{\alpha-1}\delta^\alpha}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Teljesen hasonlóan a (3.62)-ből, (4.57)-ből és (4.16)-ból következik, hogy

$$|I_{86}(\lambda,\mu)| \le \frac{\varepsilon C_1C_4}{\mu^{\beta-1}\delta^\beta}. \tag{4.68}$$

Felhasználva a (3.63)-at, (4.57)-et és (4.16)-ot, az alábbi módon becsülhetünk

(4.69)

$$
\begin{aligned}
|I_{87}(\lambda,\mu)| &\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\int_{1/\lambda}^{\delta}\int_{\delta}^{\infty}\frac{|f(x,y)|}{x^\alpha y^\beta}\,dx\,dy\\
&\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\cdot\frac{1}{\delta^\beta}\int_{1/\lambda}^{\delta}\frac{1}{x^\alpha}\left\{\int_{\delta}^{\infty}|f(x,y)|\,dy\right\}dx\\
&\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\cdot\frac{1}{\delta^\beta}\int_{1/\lambda}^{\delta}\frac{F_{31}(x)}{x^\alpha}\,dx\\
&\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\cdot\frac{1}{\delta^\beta}\left\{\left[\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x F_{31}(u)du\right]_{1/\lambda}^{\delta}+\alpha\int_{1/\lambda}^{\delta}\frac{1}{x^{\alpha+1}}\left\{\int_0^x F_{31}(u)du\right\}dx\right\}\\
&\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\cdot\frac{1}{\delta^\beta}\left\{C\delta^{-\alpha+1}+\alpha C\int_{1/\lambda}^{\delta}x^{-\alpha}\,dx\right\}\\
&\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\cdot\frac{1}{\delta^\beta}\left\{C\delta^{-\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha-1}C\lambda^{\alpha-1}\right\}\\
&= \frac{CC_2C_4}{\mu^{\beta-1}}\left\{\frac{1}{(\lambda\delta)^{\alpha-1}\delta^\beta}+\frac{\alpha}{\delta^\beta}\right\}\to 0,\quad \text{ha}\quad \mu\to\infty.
\end{aligned}
$$

Hasonló módon, felhasználva a (3.63)-at, (4.57)-et és (4.17)-et, a következő eredményhez jutunk

$$
|I_{88}(\lambda,\mu)| \le \frac{C'C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}}\left\{\frac{1}{(\mu\delta)^{\beta-1}\delta^\alpha}+\frac{\beta}{\delta^\beta}\right\}\to 0,\quad \text{ha}\quad \lambda\to\infty. \tag{4.70}
$$

Végül, mivel $f\in L^1(\mathbb{R}^2)$, továbbá a (3.63) és (4.57) alapján kapjuk

$$
\begin{aligned}
|I_{89}(\lambda,\mu)| &\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\int_{\delta}^{\infty}\int_{\delta}^{\infty}\frac{|f(x,y)|}{x^\alpha y^\beta}\,dx\,dy\\
&\le \frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}}\cdot\frac{1}{\delta^\alpha\delta^\beta}\int_{\delta}^{\infty}\int_{\delta}^{\infty}|f(x,y)|\,dx\,dy\\
&\le \|f\|_1\frac{C_2C_4}{\lambda^{\alpha-1}\delta^\alpha\mu^{\beta-1}\delta^\beta}\to 0,\quad \text{ha}\quad \lambda+\mu\to\infty,\quad \text{és}\quad \lambda,\mu>0.
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

A (4.61) - (4.71)-ből adódik a (4.54).

Másodszor azt az esetet tekintjük, amikor f páros x-ben és páratlan y-ban. Nyilván $\alpha,\beta\in(1,2)$-re azt kell ellenőriznünk, hogy

$$
I_9(\lambda,\mu) := \frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda\int_0^\mu\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{\beta-1}uv\hat{f}_{cs}(u,v)\,du\,dv\to 0 \tag{4.72}
$$

$$
\text{ha}\quad \lambda,\mu\to\infty.
$$

Fubini-tétele és (4.5) alapján

$$I_9(\lambda,\mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)\, dx\, dy, \tag{4.73}$$

ahol

$$K_7^\alpha(x,\lambda) = \lambda \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u \cos \lambda u x\, du.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$|K_7^\alpha(x,\lambda)| \le \lambda \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u\, du = C_1 \lambda, \tag{4.74}$$

ahol $C_1 = C_1(\alpha)$ csupán az α-tól függő állandó (vö. (3.62)). Másrészt a 4.5. Lemmát alkalmazva $\lambda x \ge 1$-re, adódik, hogy

$$|K_7^\alpha(x,\lambda)| \le \frac{C_5}{\lambda^{\alpha-1} x^\alpha}, \tag{4.75}$$

ahol $C_5 = C_5(\alpha)$ csupán az α-tól függő állandó.

A (4.56), (4.57) és a (4.74), (4.75) elemi egyenlőtlenségek felhasználásával a (4.72) igazolását az alábbi módon végezhetjük. Mivel az f páratlan y-ban, így

$$f(0,0) = f(x,0) = 0.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\lambda\delta > 1$ és $\mu\delta > 1$. Az $I_9(\lambda,\mu)$ az alábbiak szerint bontható fel

$$\begin{aligned} I_9(\lambda,\mu) = \Bigg\{ &\int_0^{1/\lambda}\int_0^{1/\mu} + \int_0^{1/\lambda}\int_{1/\mu}^{\delta} + \int_{1/\lambda}^{\delta}\int_0^{1/\mu} + \int_{1/\lambda}^{\delta}\int_{1/\mu}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\int_0^{1/\mu} + \int_0^{1/\lambda}\int_{\delta}^{\infty} \\ &+ \int_{1/\lambda}^{\delta}\int_{\delta}^{\infty} + \int_{\delta}^{\infty}\int_{1/\mu}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\int_{\delta}^{\infty} \Bigg\} f(x,y) K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)\, dx\, dy \\ =: {} & I_{91}(\lambda,\mu) + I_{92}(\lambda,\mu) + \cdots + I_{99}(\lambda,\mu), \end{aligned}$$

ahol $I_{91}(\lambda,\mu)$ jelöli az összeg első tagját, $I_{92}(\lambda,\mu)$ a másodikat, és így tovább.

A bizonyítási eljárásban az előző rész eredményeit az $I_{91} - I_{94}$ és az I_{96}, I_{98}, és az I_{99} integrálok esetében változtatás nélkül felhasználhatjuk.

Ezért elegendő azt megmutatni, hogy az I_{95} és I_{97} tart 0-hoz, ha $\lambda, \mu \to \infty$. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} I_{95}(\lambda,\mu) &= \int_\delta^\infty \int_0^{1/\mu} f(x,y) K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)\,dx\,dy \\ &= \int_\delta^\infty \int_0^{1/\mu} \{f(x,y) - f(0,y)\} K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)\,dx\,dy \\ &+ \int_\delta^\infty \int_0^{1/\mu} f(0,y) K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)\,dx\,dy =: I_1 + I_2, \end{aligned}$$

ahol I_1 jelöli az összeg első tagját, I_2 pedig a másodikat.

Az I_1 teljesen hasonlóan becsülhető, mint a páratlan-páratlan esetben (vö. (4.67)). Felhasználva a (4.56)-ot, (4.75)-öt és (4.48)-at, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} |I_2| &\le \int_\delta^\infty \int_0^{1/\mu} |f(0,y) K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)|\,dx\,dy \le \frac{C_3 C_5 \mu}{\lambda^{\alpha-1}} \int_\delta^\infty \frac{1}{x^\alpha} \left\{ \int_0^{1/\mu} |f(0,y)|\,dy \right\} dx \\ &\le \frac{C_3 C_5 C}{\lambda^{\alpha-1}} \int_\delta^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \le \frac{C_3 C_5 C}{\lambda^{\alpha-1}\delta^{\alpha-1}(\alpha-1)} \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Ismét a definíció alapján nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} I_{97}(\lambda,\mu) &= \int_{1/\lambda}^\delta \int_\delta^\infty f(x,y) K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)\,dx\,dy \\ &= \int_{1/\lambda}^\delta \int_\delta^\infty \{f(x,y) - f(0,y)\} K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)\,dx\,dy \\ &+ \int_{1/\lambda}^\delta \int_\delta^\infty f(0,y) K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)\,dx\,dy =: I_3 + I_4, \end{aligned}$$

ahol I_3 jelöli az összeg első tagját, I_4 pedig a másodikat.

Az I_3 teljesen hasonlóan becsülhető, mint a páratlan-páratlan esetben (vö. (4.69)). Felhasználva a (4.57)-et, (4.75)-öt és (4.45)-öt, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |I_4| &\le \int_{1/\lambda}^\delta \int_\delta^\infty |f(0,y) K_7^\alpha(x,\lambda) K_6^\beta(y,\mu)|\,dx\,dy \\ &\le \frac{C_4 C_5}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}} \int_{1/\lambda}^\delta \int_\delta^\infty |f(0,y)| \frac{1}{x^\alpha} \cdot \frac{1}{y^\beta}\,dx\,dy \\ &\le \frac{C_4 C_5}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\delta^\beta} \int_{1/\lambda}^\delta \frac{1}{x^\alpha} \left\{ \int_\delta^\infty |f(0,y)|\,dy \right\} dx \\ &\le \frac{C C_4 C_5}{\lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\delta^\beta} \int_{1/\lambda}^\delta \frac{1}{x^\alpha}\,dx \le \frac{C C_4 C_5}{\mu^{\beta-1}\delta^\beta(\alpha-1)} \to 0 \quad \text{ha} \quad \mu \to \infty. \end{aligned}$$

Az előző becsléseket összekapcsolva azonnal adódik, hogy az I_{95} és I_{97} tart 0-hoz, ha $\lambda, \mu \to \infty$.

Harmadszor, az az eset, ahol f páratlan x-ben és páros y-ban, a szimmetrikus ellentettje az előbb látott esetnek. Így $\alpha, \beta \in (1,2)$ esetén az alábbi állítás igazolása

$$\begin{aligned} I_{10}(\lambda,\mu) :&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^\lambda \int_0^\mu \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{v}{\mu}\right)^{\beta-1} uv\hat{f}_{sc}(u,v)\,du\,dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)K_6^\alpha(x,\lambda)K_7^\beta(y,\mu)\,dx\,dy \to 0 \end{aligned}$$

$$\text{ha} \quad \lambda, \mu \to \infty,$$

teljesen hasonlóan végezhető, mint az előző esetben. □

Irodalomjegyzék

[1] M. Bagota, *The maximal Riemann operator is bounded from $H^1(T)$ into $L^1(T)$*, Acta Sci. Math. (Szeged), 62(1996), 557-564.

[2] M. Bagota, *On the order of magnitude of double Fourier transforms*, Approximation Theory and Function Series, Proc. Conf. Budapest, Hungary, 1995 Bolyai Society, Math. Studies 5, 163-174.

[3] M. Bagota, *On the order of magnitude of double Fourier transforms II.*, Analysis Math. (submitted)

[4] M. Bagota, D.V. Giang and F. Móricz, *On the order of magnitude of Fourier transforms*, Acta. Math. Hungar., 75(1997), 203-219.

[5] M. Bagota and F. Móricz, *The maximal Riemann operator for functions in Hardy spaces on the two-dimensional torus*, Acta Sci. Math. (Szeged), 64(1998),

[6] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc., New York, 1988.

[7] R.R. Coifman and G. Weiss, *Extension of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83, 569-645 (1977).

[8] R. Fefferman, *Some recent developments in Fourier analysis and H^p theory on product domains, II.*, Function Spaces and Applications, Proc. Conf. Lund, 1986, Lecture Notes in Math. 1302, Springer, Berlin, 1988; 44-51.

[9] A.M. Garsia, *Martingale Inequalities*, Benjamin, New York, 1973.

[10] G.G. Gevorkyan, *On uniqueness of multiple trigonometric series*, Russian Acad. Sci. Sb. Math., 80(1995), 335-365.

[11] G. H. Hardy, *Divergent Series,* Clarendon Press, Oxford, 1949.

[12] Yu.E. Kuprikov, *On the order of Fourier coefficients in the sense of Cesàro means,* Anal. Math. 19(1993), 113-134.

[13] F. Móricz, *On the maximal Fejér operator for double Fourier series of functions in Hardy spaces*, Studia Math., 116(1995), 89-100.

[14] F. Móricz, *The maximal Fejér operator is bounded from $H^1(T)$ into $L^1(T)$*, Analysis, 16(1996), 125-135.

[15] F. Móricz and Z. Németh, *On the order of magnitude of Fourier coefficients with respect to uniformly bounded orthonormal systems*, Analysis Math., 22(1996), 187-198.

[16] F. Móricz, F. Schipp and W.R. Wade, *Cesàro summability of double Walsh-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 329, 131-140 (1992).

[17] J.B. Reade, *On the order of magnitude of Fourier coefficients*, SIAM J. Math. Anal. 17(1986), 469-476.

[18] F. Schipp, W. R. Wade, and P. Simon, *Walsh Series an Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990.

[19] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, N.J., 1970.

[20] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1937.

[21] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press, 1959.

ON THE RIEMANN SUMMABILITY OF FOURIER SERIES AND ORDER OF MAGNITUDE OF FOURIER TRANSFORMS

By

MÓNIKA BAGOTA

Ph.D. Thesis

Supervisor : Ferenc Móricz

University of Szeged
Bolyai Institute

Szeged
1998.

I. Introduction

The theory of Fourier series, or more generally, the theory of trigonometric series has been a source of new ideas for analysis during the last two centuries, and is likely to be so in years to come. Many basic notions and results of the theory of functions have been obtained by mathematicians while working on trigonometric series. For example, the notion of function generally accepted now was first formulated in the celebrated memoir of Dirichlet in 1837 dealing with the convergence of Fourier series; or the definition of the Riemann integral in its general form appeared in Riemann's "Habilitationsschrift" devoted to trigonometric series; or the theory of sets, one the most important developments of 19th century mathematics, was created by Cantor in his attempts to solve the problem of the sets of uniqueness for trigonometric series. In more recent times, the Lebesgue integral was developed in close connection with the theory of Fourier series, and the theory of generalized functions (so-called distributions) with that of Fourier integrals.

Nowadays, we are witnesses of the increasing interest in the study of new function spaces such as the real Hardy space H^1 or BMO. Among others, my supervisor Professor Ferenc Móricz managed to prove in 1995 that the maximal Fejér operator is bounded from H^1 into L^1 on the one-dimensional torus (see [14]). Furthermore, he introduced new Hardy type spaces on the two-dimensional torus and proved the boundedness of the maximal Fejér operator defined for double Fourier series (see [13]).

I joined to these investigations and proved in [1] that the maximal Riemann operator is bounded from H^1 into L^1. Although the Riemann summability was originally introduced to study the uniqueness of the representation by trigonometric series and the problem of localization, I managed to reveal good convergence behaviour of the Riemann means. The proofs of these results are mainly based on the fact that the Riemann kernel resembles rather the Fejér kernel, and does not the Dirichlet kernel. I also managed in [5] to extend the maximal Riemann operator for double Fourier series on the two-dimensional torus.

The other field of my research is connected with the study of order of magnitude of the Fourier transform of integrable functions. In this direction, I was inspired by the recent results of J.B. Reade [17], Yu.E. Kuprikov [12], and my supervisor and Z. Németh [15]. In these papers, the order of magnitude of Fourier coefficients of integrable functions has

been studied since the mid 80's. To go into details, by the Riemann-Lebesgue lemma, the Fourier transform $\hat{f}(t)$ of a function $f \in L^1(\mathbb{R})$ tends to 0 as $|t| \to \infty$. It is well known that this convergence to 0 can be arbitrarily slow. On the other hand, if first we form the $(C, \alpha > 0)$ means of the Fourier transform $\hat{f}$, and then let $|t| \to \infty$, then the rate of convergence to 0 improves drastically. For instance, in [4] we proved that if $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ and $0 < \alpha < 1/2$, then the $(C, 1/2)$ means of even the product $|t|^\alpha \hat{f}(t)$ tend to 0 as $|t| \to \infty$. Or if $f \in L^1$, $0 < \alpha < 1$ and $x = 0$ is a Lebesgue point of f, then the (C, α) means of the product $t\hat{f}(t)$ tend to 0 as $|t| \to \infty$.

Acknowledgements

I would like to express my gratitude to my supervisor Professor Ferenc Móricz for acquainting me with this subject, constant help and encouragement.

II. Basic notions

(a) Given a periodic function f, integrable in the sense of Lebesgue on the torus $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$, in symbol : $f \in L^1(\mathbb{T})$, its Fourier series

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

is defined by

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt, \quad b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

We recall that the conjugate function $\tilde{f}$ of $f \in L^1(\mathbb{T})$ is defined by

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &:= (P.V.)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cot(t/2)\, dt \\ &:= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(x+t) - f(x-t)]\cot(t/2)dt.\end{aligned}$$

As it is well known, $\tilde{f}(x)$ exists a.e., but $\tilde{f} \notin L^1(\mathbb{T})$ in general.

This gives rise to the definition of the real Hardy space $H^1(\mathbb{T})$ as follows

$$H^1(\mathbb{T}) := \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})\},$$

endowed with the norm

$$\|f\|_{H^1} := \|f\|_{L^1} + \|\tilde{f}\|_{L^1},$$

where, as usual,

$$\|f\|_{L^1} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$$

It is also well known that if $f \in H^1(\mathbb{T})$, then the Fourier series of $\tilde{f}$ is the following

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx), \tag{2}$$

which is called the conjugate series to (1).

(b) Given a function $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, we denote by $\tilde{f}^{(1,0)}$ the conjugate function to f with respect to the first variable:

$$\tilde{f}^{(1,0)}(x,y) := \text{ (P.V.) } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u,y)\cot(u/2)du.$$

The hybrid Hardy space $H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$ is defined by

$$H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \tilde{f}^{(1,0)} \in L^1(\mathbb{T}^2)\},$$

endowed with the norm

$$\|f\|_{H^{(1,0)}} := \|f\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(1,0)}\|_{L^1},$$

where this time

$$\|f\|_{L^1} := \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(u,v)|\, du\, dv.$$

We denote by $H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$ the symmetric counterpart of $H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, that is,

$$H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \tilde{f}^{(0,1)} \in L^1(\mathbb{T}^2)\},$$

endowed with the norm

$$\|f\|_{H^{(0,1)}} := \|f\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(0,1)}\|_{L^1},$$

where

$$\tilde{f}^{(0,1)}(x,y) := (\text{P.V.})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y-v)\cot(v/2)\,dv.$$

is the conjugate function to f with respect to the second variable.

Finally, the double conjugate function $\tilde{f}^{(1,1)}$ is defined by

$$\tilde{f}^{(1,1)}(x,y) := (\text{P.V})\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u,y-v)\cot(u/2)\cot(v/2)dudv.$$

It is known that if $f \in H^{(1,0)} \cap H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, then $\tilde{f}^{(1,1)}(x,y)$ exists at almost every $(x,y) \in \mathbb{T}^2$, but $\tilde{f}^{(1,1)} \notin L^1(\mathbb{T}^2)$ in general. This gives rise to the definition of the product Hardy space

$$H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \tilde{f}^{(1,0)}, \tilde{f}^{(0,1)}, \tilde{f}^{(1,1)} \in L^1(\mathbb{T}^2)\}$$

endowed with the norm

$$\|f\|_{H^{(1,1)}} := \|f\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(1,0)}\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(0,1)}\|_{L^1} + \|\tilde{f}^{(1,1)}\|_{L^1}.$$

(c) Given a function f, integrable in the sense of Lebesgue on the real line $\mathbb{R} := (-\infty,\infty)$, in symbol : $f \in L^1(\mathbb{R})$, its (complex) Fourier transform is defined by

$$\hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

It is easy to see that $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$, and by the Riemann-Lebesgue lemma,

$$\hat{f}(t) \to 0 \quad \text{as} \quad |t| \to \infty.$$

This convergence can be arbitrarily slow. In other words, given any function ϕ defined on $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ with the property

$$\phi(t) \to \infty \quad \text{as} \quad t \to \infty,$$

there exists a function $f \in L^1(\mathbb{R})$ such that

$$\limsup_{t\to\infty} \phi(t)\hat{f}(t) = \infty.$$

We note that if the function $f \in L^1(\mathbb{R})$ is even

$$f(-x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

then (3) is a (Fourier) cosine transform

$$\hat{f}(t) = \hat{f}_c(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos tx \, dx;$$

while if $f \in L^1(\mathbb{R})$ is odd

$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

then (3) is basically a (Fourier) sine transform

$$\hat{f}(t) = -i\hat{f}_s(t), \quad \text{where} \quad \hat{f}_s(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin tx dx.$$

If $f \in L^p(\mathbb{R})$ for some $1 < p \leq 2$, then definition (3) makes no sense. In this case, the Fourier transform $\hat{f}$ is defined as the limit of the truncated integrals

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_1}^{x_2} f(x) e^{-itx} \, dx \quad \text{as} \quad x_1, x_2 \to \infty$$

in the $L^q(\mathbb{R})$ norm, where q denotes the exponent conjugate to p:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Thus, in this case $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R})$ but $\hat{f}(t)$ is defined only up to a set of measure zero on $\mathbb{R}$.

(d) Given a function $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, its double (complex) Fourier transform is defined by

$$\hat{f}(u,v) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(ux+vy)} \, dx \, dy, \qquad u, v \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Now, we also have $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^2)$ and by the Riemann-Lebesgue lemma,

$$\hat{f}(u,v) \to 0 \qquad \text{as} \qquad |u| + |v| \to \infty.$$

Again, this convergence can be arbitrary slow.

We note that if the function $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ is even in both variables

$$f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

then (4) reduces to a double cosine transform:

$$\hat{f}(u,v) = \hat{f}_{cc}(u,v) := \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\cos ux \cos vy \, dx\, dy;$$

if $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ is odd in both variables

$$f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y), \qquad x,y \in \mathbb{R},$$

then (4) is essentially a double sine transform:

$$\hat{f}(u,v) = -\hat{f}_{ss}(u,v) := -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\sin ux \sin vy \, dx\, dy.$$

If $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ is even in x and odd in y, then (4) is essentially a cosine-sine transform:

$$\hat{f}(u,v) = -i\hat{f}_{cs}(u,v) := -i\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\cos ux \sin vy \, dx\, dy;$$

while if $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ is odd in x and even in y, then (4) is essentially a sine-cosine transform:

$$\hat{f}(u,v) = -i\hat{f}_{sc}(u,v) := -i\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\sin ux \cos vy \, dx\, dy.$$

In case $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ for some $1 < p \leq 2$, definition (4) makes no sense. In this case, the double Fourier transform $\hat{f}$ is defined as the limit of the truncated integrals

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-x_1}^{x_2}\int_{-y_1}^{y_2} f(x,y)e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy \qquad \text{as} \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \to \infty$$

in the $L^q(\mathbb{R}^2)$ norm, where $1/p + 1/q = 1$. Thus, in this case $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R}^2)$ but $\hat{f}(u,v)$ is defined only up to a set of measure zero on the plane $\mathbb{R}^2$.

(e) Given a function $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ and $\alpha > 0$, we write

$$(C,\alpha) - \lim_{t\to\infty} f(t) = \ell$$

if

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} f(t)\, dt = \ell. \tag{5}$$

In words, we say that the (C, α) means of the function $f(t)$ tend to the finite limit ℓ as $t \to \infty$. In the particular case $\alpha = 1$, then (5) is of the form

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t)\, dt = \ell,$$

which is analogous to the existence of the finite limit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \ell.$$

The latter means the convergence of the first arithmetic means of the numerical sequence $\{a_k : k = 1, 2, \ldots\}$, which occurs in the definition of $(C, 1)$ summability of sequences.

(f) Given a function $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+{}^2)$ and $\alpha, \beta > 0$, we write

$$(C; \alpha, \beta) - \lim f(u, v) = \ell$$

if

$$\lim \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\beta}{\mu} \int_0^\lambda \int_0^\mu \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha - 1} \left(1 - \frac{v}{\mu}\right)^{\beta - 1} f(u, v)\, du\, dv = \ell,$$

where the limit is taken in the following two cases: (1) $u + v \to \infty$ (that is $\max(u, v) \to \infty$) and $u, v \geq 0$; (2) $u, v \to \infty$ (that is $\min(u, v) \to \infty$) and $u, v \geq 0$.

In words, we say that the $(C; \alpha, \beta)$ means of the function $f(u, v)$ tend to the finite limit ℓ as $u + v \to \infty$ or $u, v \to \infty$, where $u, v \geq 0$.

As a background literature, we suggest the reader to consult with [6-11], [16] and [18-21].

III. New results

1. Given a trigonometric series (1) with

$$a_k, b_k \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty,$$

consider the function

$$F(x) = \frac{1}{4} a_0 x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2},$$

obtained by integrating series (1) formally twice. Since the series on the right-hand side converges absolutely and uniformly, its sum $F(x)$ is continuous. It is easy to see that

$$
\begin{aligned}
S_h(x) :&= \frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2 .
\end{aligned} \tag{6}
$$

We say that series (1) is Riemann summable to a finite number s if

$$S_h(x) \to s \quad \text{as} \quad h \to 0.$$

In the sequel, we assume that series (1) is the Fourier series of a function $f \in L^1(\mathbf{T})$. In this case, we denote by $S_h(f;x)$ the Riemann mean in (6) and define the maximal Riemann operator by

$$S_*(f;x) := \sup_{h>0} |S_h(f;x)|.$$

One of my main results proved in [1] says that the operator $S_*(f)$ is bounded from $H^1(\mathbf{T})$ into $L^1(\mathbf{T})$, that is, the operator $S_*(f)$ is of type (H^1, L^1).

THEOREM 1.1. *There exists a constant C such that for all $f \in H^1(\mathbf{T})$, we have*

$$\|S_*(f)\|_{L^1} \le C\|f\|_{H^1}.$$

Similarly to (6), for the conjugate series (2) we define the conjugate Riemann means by

$$\widetilde{S}_h(x) := \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2,$$

and introduce the conjugate maximal Riemann operator by

$$\widetilde{S}_*(f;x) := \sup_{h>0} |\widetilde{S}_h(f;x)|,$$

provided that (1) is the Fourier series of a function $f \in H^1(\mathbf{T})$; consequently, (2) is the Fourier series of $\tilde{f}$.

From Theorem 1.1. it follows immediately that the operator $\widetilde{S}_*(f)$ is also of type (H^1, L^1).

COROLLARY 1.1. *For all $f \in H^1(\mathbb{T})$, we have*

$$\|\widetilde{S}_*(f)\|_{L^1} \leq 2C\|f\|_{H^1},$$

where C is the same constant as in Theorem 1.1.

2. Given a function $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, its double Fourier series

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)} \tag{7}$$

is defined by

$$\hat{f}(m,n) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)e^{-i(mu+nv)}\, du\, dv.$$

Now, the Riemann means $S_{h,k}(f;x,y)$ are defined by

$$S_{h,k}(f;x,y) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)} \left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2 \left(\frac{\sin nk}{nk}\right)^2,$$

while

$$S_*(f;x,y) := \sup_{h,k>0} |S_{h,k}(f;x,y)|$$

is the maximal Riemann operator.

In a joint paper [5] with F. Móricz, we proved the following.

THEOREM 2.1. *There exists a constant C such that for all $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, we have*

$$\|S_*(f)\|_{weak-L^1} := \sup_{\lambda>0} \lambda|\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : S_*(f;x,y) > \lambda\}| \leq C\|f\|_{H^{(1,0)}}.$$

The symmetric counterpart of Theorem 2.1. reads as follows.

THEOREM 2.2. *For all $f \in H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, we have*

$$\|S_*(f)\|_{weak-L^1} \leq C\|f\|_{H^{(0,1)}}$$

with the same constant C as in Theorem 2.1.

Applying the familiar density argument due to Marcinkiewicz and Zygmund (see, e.g. [21, Vol 2, p. 309]) yields the following pointwise convergence result.

COROLLARY 2.1. *If* $f \in H^{(1,0)} \cup H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, *then we have*

$$\lim_{h,k\to 0} S_{h,k}(f;x,y) = f(x,y) \quad a.e.$$

It is well known that if $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, then the Fourier series of $\tilde{f}^{(1,0)}$ is given by

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i\text{sign}m)\hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)}, \tag{8}$$

which is called the conjugate series to (7) with respect to the first variable. If $f \in H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, then the Fourier series of $\tilde{f}^{(0,1)}$ is given by

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i\text{sign}n)\hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)}, \tag{9}$$

which is called the conjugate series to (7) with respect to the second variable. Finally, if $f \in H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$, then the Fourier series of $\tilde{f}^{(1,1)}$ coincides with the conjugate series to (7) with respect to both variables:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i\text{sign}m)(-i\text{sign}n)\hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)}. \tag{10}$$

Denote by

$$\widetilde{S}_{h,k}^{(1,0)}(f;x,y), \quad \widetilde{S}_{h,k}^{(0,1)}(f;x,y), \quad \widetilde{S}_{h,k}^{(1,1)}(f;x,y)$$

the Riemann means of the conjugate series (8)-(10), respectively. The corresponding maximal conjugate Riemann operators are defined analogously, for example,

$$\widetilde{S}_{*}^{(1,0)}(f;x,y) := \sup_{h,k>0}|\widetilde{S}_{h,k}^{(1,0)}(f;x,y)|.$$

COROLLARY 2.2. *If* $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, *then*

$$\|\widetilde{S}_{*}^{(1,0)}(f)\|_{weak-L^1} \le 2C\|f\|_{H^{(1,0)}};$$

if $f \in H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, *then*

$$\|\widetilde{S}_{*}^{(0,1)}(f)\|_{weak-L^1} \le 2C\|f\|_{H^{(0,1)}};$$

and if $f \in H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$, *then*

$$\|\widetilde{S}_*^{(1,1)}(f)\|_{weak-L^1} \leq 2C\|f\|_{H^{(1,1)}}.$$

COROLLARY 2.3. *If* $f \in H^{(1,0)}(\mathbb{T}^2)$, *then*

$$\lim_{h,k\to 0} \widetilde{S}_{h,k}^{(1,0)}(f;x,y) = \tilde{f}^{(1,0)}(x,y) \quad a.e.;$$

if $f \in H^{(0,1)}(\mathbb{T}^2)$, *then*

$$\lim_{h,k\to 0} \widetilde{S}_{h,k}^{(0,1)}(f;x,y) = \tilde{f}^{(0,1)}(x,y) \quad a.e.;$$

and if $f \in H^{(1,1)}(\mathbb{T}^2)$, *then*

$$\lim_{h,k\to 0} \widetilde{S}_{h,k}^{(1,1)}(f;x,y) = \tilde{f}^{(1,1)}(x,y) \quad a.e.$$

3. In a joint paper [4] with D.V. Giang and F. Móricz, we proved the following two theorems.

THEOREM 3.1. (i) *If* $f \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R})$ *for some* $1 < p \leq 2$ *and* $\alpha \in (0, 1/q)$, *where* $1/p + 1/q = 1$, *then*

$$(C, 1/q) - \lim_{|t|\to\infty} |t|^\alpha \hat{f}(t) = 0.$$

(ii) *If* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *for some* $1 < p \leq 2$ *and* $\alpha \in (1/q, \infty)$, *then*

$$(C, \alpha) - \lim_{|t|\to\infty} |t|^{1/q} \hat{f}(t) = 0.$$

In the particular case $\alpha = 1$, we get the following.

COROLLARY 3.1. *If* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *for some* $1 < p \leq 2$, *then*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda |t|^{(p-1)/p} \hat{f}(t)\, dt = 0.$$

We recall that $x \in \mathbb{R}$ is said to be a Lebesgue point of the function $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ if

$$\lim_{h\to 0} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0.$$

THEOREM 3.2. (i) *If* $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *and* $\alpha \in (0,1)$, *then*

$$(C,1) - \lim_{|t|\to\infty} |t|^\alpha \hat{f}(t) = 0.$$

(ii) *If* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x = 0$ *is a Lebesgue point of* f, *and* $\alpha \in (1,\infty)$, *then*

$$(C,\alpha) - \lim_{|t|\to\infty} t\hat{f}(t) = 0.$$

Finally, by a Tauberian type argument we obtain an estimate of the order of magnitude of Fourier transform in the ordinary sense, provided a monotonicity condition is satisfied.

COROLLARY 3.2. *Assume that a function* f *is even (or odd) and its cosine (or sine) Fourier transform* $\hat{f}(t)$ *is nonincreasing for* $t \geq t_0 (\geq 0)$.

(i) *If* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *for some* $1 < p \leq 2$, *then*

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/q} \hat{f}(t) = 0.$$

(ii) *If* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *and* $x = 0$ *is a Lebesgue point of* f, *then*

$$\lim_{t\to\infty} t\hat{f}(t) = 0,$$

in the ordinary sense in both cases.

4. Extending the above results from single to double Fourier transforms, in [2] and [3], I proved the following three theorems.

THEOREM 4.1. (i) *If* $f \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2)$ *for some* $1 < p \leq 2$ *and* $\alpha, \beta \in (0, 1/q)$, *where* $1/p + 1/q = 1$, *then*

$$(C; 1/q, 1/q) - \lim_{|u|+|v|\to\infty} |u|^\alpha |v|^\beta \hat{f}(u,v) = 0.$$

(ii) *If* $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ *for some* $1 < p \leq 2$ *and* $\alpha, \beta \in (1/q, \infty)$, *then*

$$(C; \alpha, \beta) - \lim_{|u|,|v|\to\infty} |uv|^{1/q} \hat{f}(u,v) = 0.$$

In the particular case $\alpha = \beta = 1$, we get the following.

COROLLARY 4.1. *If $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ for some $1 < p \leq 2$, then*

$$\lim_{|\lambda|,|\mu|\to\infty} \frac{1}{\lambda\mu} \int_0^\lambda \int_0^\mu |uv|^{(p-1)/p} \hat{f}(u,v)\, du\, dv = 0.$$

THEOREM 4.2. *If $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$,*

$$\int_{|y|\geq 1} |f(x,y)|\, dy \qquad \text{and} \qquad \int_{|x|\geq 1} |f(x,y)|\, dx \in L^\infty(\mathbb{R}),$$

and $\alpha, \beta \in (0,1)$, then

$$(C;1,1) - \lim_{|u|+|v|\to\infty} |u|^\alpha |v|^\beta \hat{f}(u,v) = 0.$$

We recall that $(x,y) = (0,0)$ is said to be a strong Lebesgue point of the function $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ if the following three conditions are satisfied.

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{1}{hk} \int_0^h \int_0^k |f(x,y) - f(0,0)|\, dx\, dy = 0,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{-\infty}^\infty |f(x,y) - f(0,y)|\, dx\, dy = 0,$$

and

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^\infty \int_0^k |f(x,y) - f(x,0)|\, dx\, dy = 0.$$

THEOREM 4.3. *Assume that the function $f(x,y)$ is odd at least in one variable. If $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $(x,y) = (0,0)$ is a strong Lebesgue point of f, and $\alpha, \beta \in (1,\infty)$, then*

$$(C;\alpha,\beta) - \lim_{|u|,|v|\to\infty} uv\hat{f}(u,v) = 0.$$

References

[1] M. Bagota, *The maximal Riemann operator is bounded from $H^1(T)$ into $L^1(T)$*, Acta Sci. Math. (Szeged), 62(1996), 557-564.

[2] M. Bagota, *On the order of magnitude of double Fourier transforms*, Approximation Theory and Function Series, Proc. Conf. Budapest, Hungary, 1995 Bolyai Society, Math. Studies 5, 163-174.

[3] M. Bagota, *On the order of magnitude of double Fourier transforms II.*, Analysis Math. (submitted)

[4] M. Bagota, D.V. Giang and F. Móricz, *On the order of magnitude of Fourier transforms*, Acta. Math. Hungar., 75(1997), 203-219.

[5] M. Bagota and F. Móricz, *The maximal Riemann operator for functions in Hardy spaces on the two-dimensional torus*, Acta Sci. Math. (Szeged), 64(1998),

[6] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc., New York, 1988.

[7] R.R. Coifman and G. Weiss, *Extension of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83, 569-645 (1977).

[8] R. Fefferman, *Some recent developments in Fourier analysis and H^p theory on product domains, II.*, Function Spaces and Applications, Proc. Conf. Lund, 1986, Lecture Notes in Math. 1302, Springer, Berlin, 1988; 44-51.

[9] A.M. Garsia, *Martingale Inequalities*, Benjamin, New York, 1973.

[10] G.G. Gevorkyan, *On uniqueness of multiple trigonometric series*, Russian Acad. Sci. Sb. Math., 80(1995), 335-365.

[11] G. H. Hardy, *Divergent Series,* Clarendon Press, Oxford, 1949.

[12] Yu.E. Kuprikov, *On the order of Fourier coefficients in the sense of Cesàro means,* Anal. Math. 19(1993), 113-134.

[13] F. Móricz, *On the maximal Fejér operator for double Fourier series of functions in Hardy spaces*, Studia Math., 116(1995), 89-100.

[14] F. Móricz, *The maximal Fejér operator is bounded from $H^1(T)$ into $L^1(T)$*, Analysis, 16(1996), 125-135.

[15] F. Móricz and Z. Németh, *On the order of magnitude of Fourier coefficients with respect to uniformly bounded orthonormal systems*, Analysis Math., 22(1996), 187-198.

[16] F. Móricz, F. Schipp and W.R. Wade, *Cesàro summability of double Walsh-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 329, 131-140 (1992).

[17] J.B. Reade, *On the order of magnitude of Fourier coefficients*, SIAM J. Math. Anal. 17(1986), 469-476.

[18] F. Schipp, W. R. Wade, and P. Simon, *Walsh Series an Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990.

[19] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, N.J., 1970.

[20] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1937.

[21] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press, 1959.

Tartalomjegyzék

Bevezetés 1

Köszönetnyilvánítás 2

I. Fejezet

A maximál Riemann-operátor az egydimenziós tóruszon 3

II. Fejezet

A maximál Riemann-operátor a kétdimenziós tóruszon 12

III. Fejezet

Az egydimenziós Fourier-transzforrmált nagyságrendje 20

IV. Fejezet

A kétdimenziós Fourier-transzformált nagyságrendje 37

Irodalomjegyzék 58

Ph.D. Thesis 60