

B 3660

DOKTORI (PhD) ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

WIGNER-FÜGGVÉNYEK A KVANTUMOPTIKÁBAN

Írta:

Czirják Attila



JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM

ELMÉLETI FIZIKAI TANSZÉK

SZEGED, 1999

1 Tudományos előzmények és célkitűzések

A Wigner-függvényt, és általában a kvázivalószínűségi sűrűségfüggvényeket, széles körben és igen eredményesen használják a modern fizika számos területén, mint például a statisztikus fizikában és a szilárdtestfizikában, a klasszikus optikában, atomi és nukleáris szórásfolyamatok elemzésében, szemiklasszikus fizikában, a kvantum-káosz kutatásában és a kvantumoptikában. Úgy tűnik, hogy a Wigner-függvényt — amely speciális tulajdonságai miatt kitüntetett szerepet játszik a kvázivalószínűségi sűrűségfüggvények között — legnagyobb sikerrel a kvantumoptikában alkalmazzák. Ezért is tűztem ki célul a Wigner-függvényes módszer vizsgálatát és alkalmazását a kvantumoptikával kapcsolatos témákban.

A Wigner-függvény segítségével egy kvantumrendszer a megfelelő klasszikus rendszer fázis-terén értelmezett függvényekkel kezelhető, szemben a szokásos leírással. A fizikai mennyiségeket maguk a klasszikus fizikai mennyiségek mint fázis-terület függvények reprezentálják. A rendszer állapotát a sűrűségoperátorból előállítható Wigner-függvény írja le. Ez valós értékű, de általában negatív függvényértékeket is felvesz, emiatt klasszikus valószínűségi értelmezése nem lehetséges. Valamely fizikai mennyiség várható értéke az illető operátorhoz és a sűrűségoperátorhoz tartozó Wigner-függvények szorzatának a fázis-területre vett integráljaként számolható. Az operátorok időfejlődését leíró differenciálegyenletek a függvényekre vonatkozó (általában igen bonyolult) parciális differenciálegyenletekbe mennek át, azonban ha a potenciál nem tartalmaz négyzetesnél magasabb kitevőjű tagokat, akkor az állapot időfejlődését a klasszikus Liouville-egyenlet adja.

A kvantummechanika egyik legmeglepőbb, klasszikus fogalmakkal nem értelmezhető eredménye az alagúteffektus, amely atomok nagy intenzitású lézerekkel történő ionizációjában is fontos szerepet játszik. Ennek alapvető modellje egy vonzó Dirac-delta potenciál kötött állapotából a külső homogén statikus elektromos mező hatására alagút effektussal kilépő elektron viselkedése. Ez a modell alapozza meg azon széles körben használt formulákat, amelyeket valódi atomok alagút effektussal történő ionizációja esetén használnak. Ezen jelenségek szemiklasszikus leírására többlepéses modellek használhatók. Ezek első eleme a kötött állapotból a kontinuumba való kijutás alagút effektussal,

ennek időtartamát egy olyan időállandóval szokás jellemezni, amely a klasszikus mozgásegyenletben formálisan képzetes időt feltételezve kapható meg. A következő lépés a klasszikus részecske, vagy egy javított modellben a megfelelő hullámcsomag terjedése a külső mezőben, amely viszont kezdeti feltételeket igényel. A szokásos feltételezés, amely szerint az elektron az alagút kijáratától zéró kezdősebességgel indul, a kísérleti eredményekkel jó egyezést mutat, azonban néhány újabb munkában már felmerült más kezdőállapot lehetősége is. A Wigner-függvény — amelyet korábban már sikerrel alkalmaztak az alagúteffektus vizsgálatára néhány egyszerű modell-potenciál stationárius állapotai esetén — igen alkalmas eszköznek tűnik annak felderítésére, milyen klasszikus kép adható erről a kvantumjelenségről. Célul tűztem ki a fenti modell Wigner-függvényes vizsgálatát, és annak megállapítását, alátámasztható vagy pedig cáfolható az alagutat elhagyó elektron sebességével kapcsolatos szokásos feltételezés.

A Wigner-függvény valós volta azt sejteti, hogy léteznie kell egy, a fázistéren értelmezett hermitikus operátornak, amelynek várható értéke a Wigner-függvény. Az 1970-es évek óta már ismert volt, hogy ez az operátor nem más mint az eltolt paritás operátora. Természetes módon felvetődik a kérdés, más kvázivalószínűségi sűrűségfüggvények is előállíthatóak-e valamely, a paritás operátorával kapcsolatos operátorok várható értékeként, és ha igen, hogyan? Mivel Cahill és Glauber munkája nyomán ismert volt a kvázivalószínűségi sűrűségfüggvények egy igen tág osztálya, az u.n. s -rendezett a kvázivalószínűségi sűrűségfüggvények, megsejthető, hogy a vonatkozó operátor magok is hasonlóképpen paraméterezhetőek. Egyik célom ennek a kérdésnek a tisztázása és a keresett operátor induktív megkonstruálása volt a Wigner függvény esetének kiterjesztésével. A téma aktualitását az az 1980-as évek végéről származó felismerés adta, miszerint ezen függvények fontos szerepet játszanak a kvantumoptikában a mező állapotának homodyn rekonstrukcióval történő mérésében.

A Wigner-függvénynek a kvantumoptikában a mező vizsgálatára történő sikeres alkalmazása alapján logikus feltenni a kérdést, vajon a kölcsönható partner, az atomi rendszer is leírható-e Wigner függvénnyel. Az egy mezőmóddal közel rezonánsan kölcsönható atomok nagyon jó közelítéssel kétnívósra tekinthetőek, ezek pedig a kvantummechanikai leírás szerint ekvivalensek a feles spinnel. Spinnel rendelkező rendszerek Wigner-függvényes leírására számos javaslat született. A problémát az

jelenti, hogy — úgy tűnik — az eredeti Wigner-függvény számos nevezetes tulajdonsága nem vihető át maradéktalanul az ilyen rendszerek fázisteres leírásába. Az eredetileg Stratonovich által konstruált, majd Agarwal által a 1980-as években újra felfedezett és kidolgozott gömbi Wigner-függvényt választottam az atomi rendszer vizsgálatára. Az igen érdekesnek ígérkező atomi Schrödinger-macska állapotok vizsgálatát tűztem ki célul. Ezeket az állapotokat két atomi koherens állapot szuperponálásával kaphatjuk meg, kísérleti megvalósításukra az utóbbi években már számos javaslat született. Mivel kísérleti körülmények között, vagy mérést végezve rajtuk, óhatatlanul kölcsönhatásba kerülnek környezetükkel, fontos kérdés, vajon a sérülékeny kvantum szuperpozíció milyen feltételek esetén figyelhető meg? Ennek tisztázása érdekében megvizsgáltam atomi Schrödinger-macska állapotok viselkedését környezetükkel való kölcsönhatásuk közben. Ez a probléma perspektivikusan közvetlen kapcsolatba hozható Schrödinger eredeti problémafelvetésével is, miszerint mi okozza azt, hogy makroszkopikus rendszerek nem figyelhetőek meg makroszkopikusan különböző állapotok szuperpozíciójában.

A kvantumoptika atomi rendszerek és elektromágneses sugárzás kvantumos kölcsönhatását vizsgálja, a hangsúlyt azonban általában inkább a mező állapotának vizsgálatára, manipulálására helyezi. A kvantumoptikából fokozatosan külön területté váló atomoptika viszont már az atomi rendszerre helyezi a hangsúlyt, a mezőt használva annak befolyásolására. Mindkét területen döntő jelentőségű a kölcsönhatás vizsgálata. Mivel a Wigner reprezentáció már adott volt mind a mező, mind az atomi rendszer esetén, célul tűztem ki egy olyan Wigner-függvény konstruálását, amely egyszerre képes a kölcsönhatás mindkét résztvevőjét kezelni, és mindkettőnek valóban Wigner reprezentációja. Hasonló céllal ugyanis más, különböző konstrukciók megjelentek az irodalomban a közelműlban, de azok általában csak a mezőt kezelték Wigner-függvénnyel. A valódi egyesített Wigner-függvény alkalmas lehet az atomok és mező kölcsönhatásának vizsgálatában különböző korrelációk kimutatására az atomi rendszert és a mezőt jellemző változók között.

2 Vizsgálati módszerek

Kutatómunkám során az elméleti fizika különböző analitikus és numerikus módszereit alkalmaztam. Az analitikus számítások során gyakran használtam a *Mathematica* szoftvert, amely bizonyos esetekben nagyban megkönnyíti a hosszú és bonyolult analitikus számítások elvégzését, továbbá kitűnően alkalmazható az eredmények grafikus megjelenítésére is.

A kisebb számításigényű numerikus feladatok megoldására részben szintén a *Mathematica* szoftvert vettem igénybe. A nagyobb feladatok megoldására általában C programnyelven írt saját programjaimat használtam. Az előző szakaszban említett ionizációs modell numerikus szimulációja során az egydimenziós Schrödinger-egyenlet megoldására a Crank–Nicholson algoritmust használtam, amelyet úgy módosítottam, hogy a potenciál Dirac-delta tagját a hullámfüggvényre kirótt megfelelő határfeltétel vegye figyelembe.

3 Új tudományos eredmények

1. Wigner függvényes módszerrel vizsgáltam egy vonzó Dirac-delta potenciálból a külső homogén sztatikus elektromos mező hatására alagút effektussal kilépő elektron viselkedését. Az egydimenziós esetben az időfüggő Schrödinger-egyenletet numerikusan megoldva, majd ebből a Wigner-függvényt kiszámítva követtem az időfejlődést.

Megállapítottam, hogy a klasszikus pályákkal összefüggésbe hozható fázisrajektóriák az origóból indulnak és az alagút tartományában lényegében egyenesek. Ezek az alagutat határozottan nem zéró impulzussal hagyják el, szemben a korábban feltételezett zéró értékkel. Megmutattam, hogy a trajektóriák az alagúton kívül fokozatosan megközelítik a klasszikus részecskét jellemző parabolát. Ezen a tartományon kívül viszont a Wigner-függvény gyors oszcillációkat mutat és jelentős tartományokban negatív [1].

2. Megmutattam, hogy nem túl erős mezők esetén az egydimenziós időfüggő numerikus szimulációt jól helyettesíti egy közelítő analitikus kvázistacionárius Wigner függvény: ez utóbbi a centrum

közelében olyan állapotot ír le, amely a szimuláció szerint nagyon gyorsan kialakul és sokáig fennáll [1].

Kimutattam, hogy a háromdimenziós közelítő analitikus kvázistacionárius Wigner-függvény longitudinális jellemzőit hűen tükrözi a megfelelő egydimenziós Wigner-függvény is [1].

3. Megvizsgálva a Wigner-függvény operátor magját, megmutattam, hogy a fázistér különböző pontjaihoz tartozó Wigner-operátorok egyidejűleg nem mérhető fizikai mennyiségeket reprezentálnak [2].

Bevezettem a paritás operátor trace-class általánosítását, ez alapján pedig definiáltam az általánosított Wigner operátort mint az általánosított paritás operátor eltoltját. Meghatároztam a sajátállapot bázisát. Megadtam az általánosított Wigner-operátornak az eltolás operátorok bázisán vett integrálreprezentációját, és ennek segítségével igazoltam, hogy az további ismert (s -rendezett) kvázivalószínűségi sűrűségfüggvények tág osztályának operátor magja [3].

4. Megvizsgáltam atomi Schrödinger-macska állapotok viselkedését sokmódusú elektromágneses mezőben mint termikus környezetben. Numerikusan megoldottam a rendszer időbeli fejlődését leíró master egyenletet poláris Schrödinger-macska kezdeti állapotot feltételezve. Meghatároztam a folyamat jellemzésére alkalmas karakterisztikus időket [4], nevezetesen a dekoherencia időt, a disszipációs időt és a nemklasszikusság idejét. Megállapítottam, hogy a dekoherencia idő fordítottan arányos az atomok számával, a nemklasszikusság ideje előbbinél kevésbé, de szintén monoton csökken, ha az atomok számát növeljük. Az energia disszipációjának karakterisztikus ideje nem zero hőmérsékleten először lassan nő, elér egy a hőmérséklettől függő maximumot, végül az atomok számával közel fordított arányban csökken. Mindhárom jellemző csökken a hőmérséklet növelésével [4].

Rámutattam, hogy a poláris Schrödinger-macska állapot dekoherencia ideje meglepően hosszú, azaz a dekoherencia és a disszipáció karakterisztikus időinek hányadosa jóval kisebb, mint más, szokásos esetekben: pl. 1000 atom esetén zero hőmérsékleten mindössze 4.04, és 250 K-en is csupán 350. Ez a tény ezen állapotokat különösen alkalmassá teheti a dekoherencia jelenségek kísérleti vizsgálatára, illetve kvantuminformatikai alkalmazásokra [4].

5. Kétnívós atomok rendszere Wigner reprezentációjának grafikus szemléltetésére alkalmas módszert dolgoztam ki: a megfelelő gömbi Wigner-függvényt polárdiagrammal ábrázoltam, megkülönböztetve a negatív előjelű részeket [5].

Ezzel a módszerrel nyomon követtem a poláris Schrödinger-macska állapot dekoherencia és disszipációs folyamatát. Megmutattam, hogy a Wigner-függvény időbeli mozgása hűen tükrözi az atomi rendszer viselkedését: a dekoherencia az interferenciát jelző, váltakozó előjelű "fodrok" fokozatos eltűnésével azonosítandó, míg a disszipációt a kezdetben a koherens összetevőknek megfelelő alsó és felső pozitív csúcsok egymásba olvadása jelzi. Valamely állapot nemklasszikus jellegét, definíciójának megfelelően, az jelzi, hogy Wigner-függvénye negatív részeket is tartalmaz [4].

A fenti módszert alkalmazva különböző nempoláris Schrödinger-macska állapotok esetén, megállapítottam, hogy a Wigner-függvény kifejezően mutatja az állapot préselt voltát: a polárdiagram szélessége a préseltségtől függően változik [6].

6. Kétnívós atomok rendszere és egymódusú fény kvantumok kölcsönhatásának fázisteres leírására bevezettem az egyesített karakterisztikus függvényt az eltolás operátorok és a multipólus operátorok tenzori szorzatai által alkotott bázis segítségével. Ennek alkalmas transzformáltjaként definiáltam az egyesített Wigner-függvényt, a gömbfelület és a sík direkt szorzata mint fázistér felett [7].

Egyetlen kétnívós atom és a mező kölcsönhatására a Jaynes–Cummings modellt használva levezettem az egyesített karakterisztikus függvényre vonatkozó mozgásegyenletet, amely egyszerűen általánosítható a Dicke modell esetére is. Alkalmazva a megfelelő transzformációt, felírtam az egyesített Wigner-függvény mozgásegyenletét a Jaynes–Cummings modell esetében [8].

7. A fizikai probléma szempontjából releváns változókat megtartva, a többi változókra kiátlagolva az egyesített Wigner-függvényt, különböző redukált egyesített Wigner-függvényeket vezettem be. Ezek segítségével rámutattam az atom-mező kölcsönhatási folyamat során kialakuló összefonódott állapotban a mező amplitúdója és az atomi gerjesztés, illetve a mező fázisa és az atomi fázis korrelációs tulajdonságaira [9, 10, 11].

Az értekezés alapját képező tudományos közlemények

- [1] **A. Czirják**, R. Kopold, W. Becker, M. Kleber, and W. P. Schleich,
The Wigner function for tunneling in a uniform static electric field,
Optics Communications, (in print)
- [2] **A. Czirják** and M. G. Benedict:
Quasiprobability density operators and generalized parity
Acta Physica Slovaca **45**, 341-345 (1995)
- [3] M. G. Benedict and **A. Czirják**,
Generalized parity and quasi-probability density functions
Journal of Physics A: Mathematical and General **28**, 4599-4608 (1995)
- [4] M. G. Benedict and **A. Czirják**,
Wigner functions, squeezing properties and slow decoherence of a mesoscopic superposition of two-level atoms,
Physical Review A **60**, 4034-4044 (1999)
- [5] M. G. Benedict, **A. Czirják**, and Cs. Benedek,
Wigner function description of atomic Schrödinger cats,
Acta Physica Slovaca **47**, 259-262 (1997)
- [6] M. G. Benedict and **A. Czirják**,
Wigner functions and squeezing properties of "atomic Schrödinger cats",
in Proceedings of the Fifth International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, Eds.: D. Han, J. Janszky, Y. S. Kim, and V. I. Man'ko, (NASA/CP-1998-206855) pp. 269-274 (1998)
- [7] **A. Czirják** and M. G. Benedict:
Joint phase space description of atom-field interactions,
Acta Physica Slovaca **46**, 343-348 (1996)
- [8] **A. Czirják** and M. G. Benedict,
Joint Wigner function for atom-field interactions,
Quantum and Semiclassical Optics **8**, 975-981 (1996)
- [9] **A. Czirják** and M. G. Benedict,
Fully phase space approach to atom-field interactions,
Acta Physica Slovaca **47**, 263-266 (1997)

- [10] A. Czirják and M. G. Benedict,
Atom-field interaction: joint Wigner function approach,
in Proceedings of the Fifth International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, Eds.: D. Han, J. Janszky, Y. S. Kim, and V. I. Man'ko, (NASA/CP-1998-206855) pp. 287-292 (1998)
- [11] A. Czirják and M. G. Benedict,
Joint Wigner function for the Jaynes-Cummings model,
in Proceedings of the 5th Wigner Symposium, Eds.: P. Kasperkovitz and D. Grau, (World Scientific, Singapore, 1998) pp. 343-345 (1998)