

DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI



Vékonyító algoritmusok 3D képekre

Palágyi Kálmán

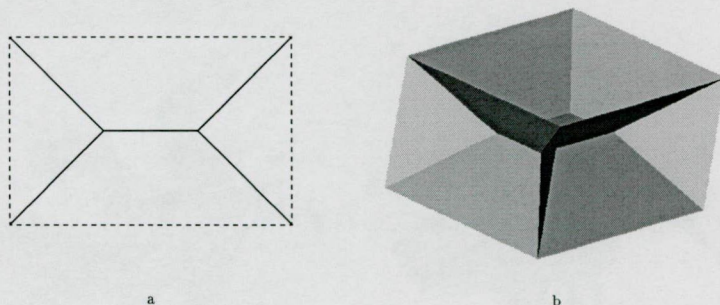
Szeged

2000.

Bevezetés

A váz egy gyakran alkalmazott régió-alapú alakjellemző, melynek a diszkrét objektumokra történő meghatározására többféle módszer ismert. A dolgozat kulcsproblémája a vékonyítással történő vázkijelölés 3-dimenziós (a továbbiakban 3D) objektumokra.

A váz (*skeleton*) fogalmát Blum vezette be mint a középtengely-transzformáció eredményét (Blum, 1964; Blum, 1967). A *középtengely-transzformáció* az objektum minden egyes pontjára megkeresi a hozzá legközelebbre eső határponto(ka)t. Ha az eljárás egy belső pontra egynél több legközelebbi határpontot talál, akkor azt a vázhoz tartozónak, vázpontnak minősíti. A vázat Blum egy szemléletes hasonlattal, a prérítűz terjedésével illusztrálta: Ha a vizsgált objektum határának minden pontját egyidejűleg meggyújtjuk és feltételezzük, hogy a tűzfrontok minden irányba egyenletes sebességgel terjednek, akkor a váz azokból a pontokból áll, ahol az objektum belsejében a tüzek találkoznak, kioltják egymást. A vázat egy 2D téglalapra és egy 3D téglalatra az 1. ábrával illusztráljuk.



1. ábra Egy 2D tömör téglalap (a) és egy 3D tömör téglalast (b) váza. (A téglalap határát szaggatott, a vázát pedig folytonos vonalakkal rajzoltuk meg.)

A vázra formális definíciót Calabi adott (Calabi, 1965): 2D-ben egy objektum vázát azon pontok alkotják, melyek középpontjai az objektumba írt maximális nyílt körlapoknak. Ez a meghatározás általánosítható magasabb dimenziókra is: nD -ben a nyílt körlapokat n -dimenziós nyílt hipergömbökkel kell helyettesíteni.

A váz a következő három tulajdonsága miatt alkalmas alakjellemzőnek (*shape feature*):

- A váz invariáns az eltolásra, a skálázásra, az elforgatásra és ezen geometriai transzformációk tetszőleges kompozíciójára.
- A váz reprezentálja a kiindulási objektum topológiai szerkezetét.
- A váz (egy pont "vastagságú") szakaszokból, görbékől (3D-ben még felszínszegmensekből) áll, így általában jóval kevesebb pontot tartalmaz, mint az eredeti ki-terjedt objektum.

A fenti tulajdonságok miatt a váz számos területen alkalmazható, pl. az alakfelismerésben (*pattern recognition*) (Bow, 1992) vagy a képillesztés/képregisztráció (*image matching/image registration*) problémájának (Brown, 1992) megoldásakor is.

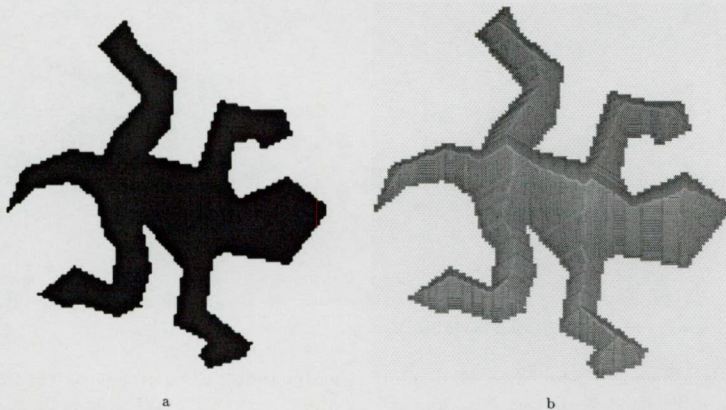
A diszkrét objektumok vázának kijelölésére adott módszereknek az alábbi két követelményre — a geometriaira és a topológiaira — kell tekintettel lenniük (Székely, 1996):

- A váz a geometriailag korrekt pozíció (az objektum “közepén”) helyezkedjen el és legyen invariáns az eltolásra, a skálázásra és az elforgatásra.
- A kijelölt váz legyen topológikusan ekvivalens a kiindulási objektummal.

Diszkrét képterekre a vázkijelölés három fő technikáját különböztetjük meg:

- a távolság-transzformáció (*distance transform*) (Borgefors, 1984),
- a Voronoi-diagram (Aurenhammer, 1985; Preparata, Shamos, 1990) és
- a vékonyítás (*thinning*) (Suen, Wang, 1994).

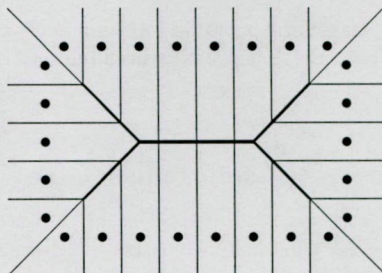
A váz távolság-transzformáción alapuló kijelölése a *távolságtérkép* (*distance map*) kiszámításával indul — ahol az egyes objektumpontoknak megfelelő pozíció az adott objektumpontnak a tőle legközelebbre eső jellemző ponttól vett távolsága szerepel —, majd a lokális maximumhelyeket kell detektálni a távolságtérképen. Egy 2D bináris objektum és annak távolságtérképe a 2. ábrán látható. A módszer (amennyiben az a pontos euklidészi távolságon alapul) képes geometriailag korrekt eredményt adni, de a topológiai kritérium teljesülését nem garantálja.



2. ábra Példa távolságtérképre. A kiindulási 2D objektumon (a) a távolságtérképet 3D bináris objektumként (b) ábrázoltuk.

A második vázkijelölő technika a Voronoi-diagramokon alapul. Egy 2D pontthalmaz által generált Voronoi-diagram a síkot (véges vagy végtelen konvex) régiókra osztja oly módon, hogy egy régióba azon pontok kerülnek, amelyek közelebb vannak a generálóhalmaz egy adott eleméhez, mint az összes többihez. A régiókat határoló szakaszokat és félegyeneseket Voronoi-élekknek, a régiók csúcsait pedig Voronoi-csúcsoknak nevezzük. A 3D pontthalmazokra is megadható a Voronoi-diagram: ekkor a Voronoi-regiók 3D konvex poliéderek lesznek, melyek lapjai, élei és csúcsai adják rendre a diagram 2D, 1D és 0D elemeit.

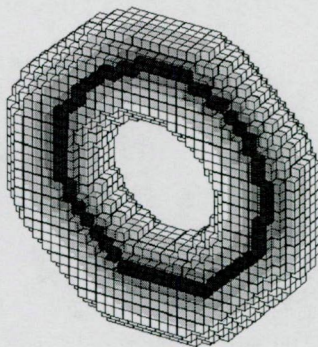
A Voronoi-diagram kapcsolatban áll a vázzal: ha a generálóhalmaz pontjait egyenletes, minden határon túl finomodó mintavételezés szerint vesszük az objektum határáról, akkor a Voronoi-diagramnak az objektumba eső elemei a vázhoz konvergálnak (Boissonat, Kofakis, 1985; Schmitt, 1989; Brandt, Algazi, 1992). Voronoi-diagrammal közelített



3. ábra Egy 2D téglalap határán (egyenletes mintavételezéssel) megadott ponthalmaz Voronoi diagramja. A téglalap vázához tartozó Voronoi-éleket vastagított vonalak jelölik. Könnyen belátható, hogy a mintavételezés finomításával a vázhoz tartozó élek egyre közelebb kerülnek a téglalap sarkaihoz, vagyis a váz egyre pontosabb közelítést kapjuk.

vázra a 3. ábra mutat példát. A módszer hátránya az, hogy a folytonos modell feldolgozása nagymennyiségű, lebegőpontos aritmetikát igénylő számítást igényel.

A harmadik vázkijelölő módszer a vékonyítás. A vékonyítás a tűzfront-terjedést modellezi diszkrét képtereken. A folyamat egy időegysége alatt tűzfrontok tőlük "egységnyi" távolságra lévő rácspontokat érik el. Az iteratív eljárást a 4. ábra szemlélteti.



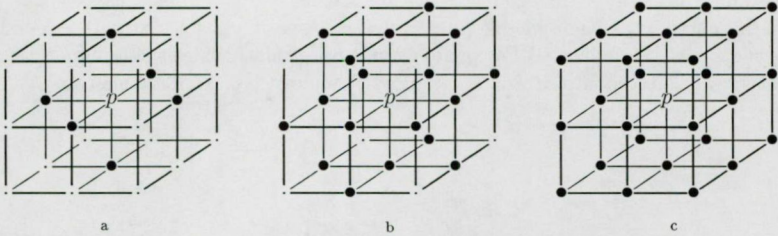
4. ábra Egy 3D, tórusz-szerű objektum vékonyítása. Az egymást követő iterációs lépések eredményeit egyre sötétebb árnyalatokkal jelentettük meg. A legsötétebb pontok adják a váz közelítését. (Minden egyes kocka egy-egy objektumpontot reprezentál.)

A legtöbb vékonyító eljárás párhuzamos, mivel a tűzfront-terjedés párhuzamos jelenség (Suen, Wang, 1994). A vékonyító algoritmusok eleget tesznek a topológiai kritériumnak, viszont nem képesek geometriailag korrekt vázközéltést adni. A hiányosság oka az, hogy az eljárások által vizsgált lokális környezetek által indukált távolságfogalom nem adja jó közelítését az euklidészi távolságnak. Ha egy adott alkalmazásnál a geometriai korrektséget is garantálni kell, akkor a vékonyítás és a távolság-transzformáció kombinálását javasolják: első lépésben távolság-transzformációval meghatározunk egy "félkész" vázat, majd a kiindulási objektumra egy speciális vékonyítás következik, ami

nem törölheti a távolság-transzformációval kapott vázpontokat. Ily módon a vékonyítás kiegészíti, összefüggővé teszi a távolság-transzformáció geometriailag korrekt eredményét.

Alapfogalmak

Jelölje $\mathbb{Z}^3$ a 3D tér egész koordinátájú pontjait. Legyenek $p = (p_1, p_2, p_3)$ és $q = (q_1, q_2, q_3)$ $\mathbb{Z}^3$ -beli pontok és tekintsük azok $\|p - q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (p_i - q_i)^2}$ euklidészi távolságát. A p és a q pontok *6-szomszédosak*, ha $\|p - q\| \leq 1$, *18-szomszédosak*, ha $\|p - q\| \leq \sqrt{2}$, *26-szomszédosak*, ha $\|p - q\| \leq \sqrt{3}$. Jelölje $N_j(p)$ ($j = 6, 18, 26$) a p -vel j -szomszédos $\mathbb{Z}^3$ -beli pontok halmazát (5. ábra). A fenti szomszédossági relációk reflexívek és szimmetrikusak, azaz: $\forall p, q \in \mathbb{Z}^3 : p \in N_j(p)$ és $p \in N_j(q) \rightarrow q \in N_j(p)$ ($j = 6, 18, 26$).



5. ábra Az (a), a (b) és a (c) ábrákon a “•” szimbólumok rendre a $p \in \mathbb{Z}^3$ pont 6-, 18- és 26- szomszédait jelölik.

A p pont j -szomszédos ($j = 6, 18, 26$) a nem-üres S pontthalmazzal, ha van olyan $s \in S$, hogy $s \in N_j(p)$. A különböző pontokból álló $\langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle$ sorozat $n \geq 0$ hosszú j -út ($j = 6, 18, 26$) az s_0 pontból s_n -be az S pontthalmazban, ha a sorozat minden pontja S -beli és minden i -re ($1 \leq i \leq n$) s_i és s_{i-1} j -szomszédosak. (Megjegyezzük, hogy $\langle s_0 \rangle$ egy 0-hosszú j -út.) Az $s_1 \in S$ és az $s_2 \in S$ pontok j -összefüggők ($j = 6, 18, 26$) az S pontthalmazban, ha létezik j -út s_1 és s_2 között S -ben. Az S pontthalmaz j -összefüggő ($j = 6, 18, 26$) az S' pontthalmazban ($S' \supseteq S$), ha S bármely két pontja j -összefüggő S' -ben. Könnyű belátni, hogy a j -összefüggőségi reláció — vagyis a reflexív és szimmetrikus j -szomszédossági reláció tranzitív lezártja — ekvivalenciareláció ($j = 6, 18, 26$). A j -összefüggőségi reláció tehát tetszőleges pontthalmazon megad egy osztályozást, ahol az ekvivalenciaosztályokat, j -összefüggő komponenseknek vagy j -komponenseknek nevezzük ($j = 6, 18, 26$).

Egy 3D bináris digitális kép (a továbbiakban kép) a $\mathbb{Z}^3$ -t képezi le a $\{0, 1\}$ halmazba, vagyis minden pont intenzitása/világosságcódja 0 vagy 1. A $\mathcal{P}$ képet a $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$ rendezett négyessel írjuk le (Kong, Rosenfeld, 1989; Kong, Roscoe, Rosenfeld, 1992), ahol:

- V a diszkrét *képpontok* halmaza, esetünkben $V = \mathbb{Z}^3$,
- $B \subseteq V$ a *fekete pontok* halmaza, mely pontokhoz "1" értéket rendelünk. $V \setminus B$ a *fehér pontok* halmaza, melynek elemei "0" értékűek.
- m a B -hez, a fekete pontokhoz rendelt szomszédsági reláció: $(m \in \{6, 18, 26\})$.
- n a $V \setminus B$ -re, a fehér pontokra érvényes szomszédsági reláció $(m \in \{6, 18, 26\})$ és általában feltesszük, hogy $n \neq m$.

A $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$ képet röviden (m, n) képnek is nevezzük. A $\mathcal{P}$ kép *véges*, ha B véges. A véges képek reprezentálhatók egy (véges) bináris tömbbel, ahol valamennyi tömbön kívüli pont értéke "0".

Az m -összefüggőségi (ekvivalencia)reláció a fekete pontok halmazán létrehoz egy osztályozást. Az egy ekvivalenciaosztályba eső fekete pontok halmaza az adott kép egy m -komponense, más elnevezésekkel *fekete komponense* vagy *objektuma*. Hasonlóképpen: az n -összefüggőségi reláció a fehér pontokat n -komponensekre vagy *fehér komponensekre* osztja fel. Véges képen egyetlen végtelen fehér komponens található, amit *hátternek* nevezünk. A véges fehér komponens neve *üreg* (*cavity*).

A $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$ képen a $p \in B$ fekete pont *határpont*, ha n -szomszédos legalább egy fehér ponttal, azaz: $N_n(p) \setminus B \neq \emptyset$. A $p \in B$ fekete pont *izolált*, ha $(N_m(p) \setminus \{p\}) \cap B = \emptyset$ (vagyis a $\{p\}$ halmaz egy egyelemű objektum).

A topológia 3D-ben jóval bonyolultabb, mint 2D esetén, mivel 3D-ben a fehér pontok *lyukakat* (*hole*, *tunnel*) is alkothatnak (Lee, Poston, Rosenfeld, 1993).

Egy $\mathcal{T}$ (egyváltozós) *képművelet* a $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$ kiindulási képre a $\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = (V, m, n, \mathcal{T}(B))$ képet eredményezi. A következőkben — a vékonyítás szempontjából különösen fontos — három képműveletosztályt definiálunk: A $\mathcal{T}$ képművelet *redukció*, ha tetszőleges kép B halmazára $\mathcal{T}(B) \subseteq B$, vagyis csak a fekete pontok törölődhetnek (változhatnak fehérre), a fehérek pedig változatlanul maradnak. Egy képművelet *párhuzamos*, ha valamennyi képpont új értéke egyidejűleg számítható ki (egyetlen pont új értéke sem függ más pontok új értékétől). Egy képművelet *lokális*, ha valamennyi képpont új értéke az adott pontnak csak egy szűk, a képmérettől (a fekete pontokat befoglaló tömb méretétől) független környezetétől függ. Számos képművelet leírható lokális és párhuzamos morfológiai műveletek (Serra, 1982) sorozatával. A lokális és párhuzamos képműveletek megadására az *általánosított maszkillesztést* (Palágyi, 1993) javasoltuk, amire az alábbi két állítás teljesül:

1. TÉTEL (a dolgozat 1.4.4. pontja)

A morfológiai műveletekkel leírt képműveletek (ahol a halmazokat a képek fekete pontjai alkotják és a szerkesztőelemek is az adott diszkrét rácson értelmezettek) megadhatók maszkillesztéssel és pontonkénti Boole-műveletekkel.

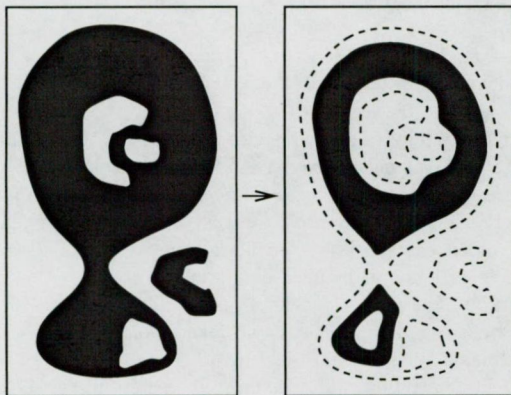
2. TÉTEL (Palágyi, 1993)

Bármely lokális párhuzamos képművelet leírható általánosított maszkillesztéssel.

A vázkijelölés topológiai kritériuma megkívánja a kiindulási és az eredménykép topológiai ekvivalenciáját, vagyis hogy az alkalmazott képművelet *topológia-megőrző* (*topology preserving*) redukció legyen.

Egy képművelet akkor *topológia-megőrző redukció*, ha a kiindulási kép egyetlen objektumát sem vágja szét (kettő vagy több objektummá); egyetlen objektumot sem tüntet el teljesen (nem törli annak valamennyi pontját); a kiindulási kép egyetlen üregét sem

olvasztja össze más üreggel vagy a háttérrel; nem hoz létre olyan üreget, ami nem volt az eredeti képen (6. ábra). 3D-ben egy topológia-megőrző redukción továbbá nem szabad a kiindulási kép egyetlen lyukát sem megszüntetnie vagy más lyukkal összevonnia; vagy új lyukat létrehoznia. A fenti kritériumoknak teljesülniük kell minden lehetséges kiindulási képre (Kong, Rosenfeld, 1989).



6. ábra Példa olyan 2D redukcióra, ami nem őrzí meg a topológiát. A kiindulási kép kettő objektuma közül az egyik három üreget tartalmaz. (Az eredménykép szaggatott vonalai csak az eredeti komponensek határvonalait jelzik, valójában nem szerepelnek a képen.) A képművelet a következők miatt nem őrzí meg a topológiát: a nagyobbik objektumot kettő objektummá vágta szét, a kisebbik objektumot teljesen eltüntette, (egy vadonatúj) üreget hozott létre, kettő üreget összeolvasztott, a harmadik üreget pedig megszüntette (összeolvasztotta a háttérrel).

A topológia-megőrzés vizsgálatában kulcsfogalom az *egyszerű pont* (simple point) (Morgenthaler, 1981). A $p \in B$ pont egyszerű a (V, m, n, B) képen, ha a $(V, m, n, B \setminus \{p\})$ képet előállító képművelet topológia-megőrző redukció. Más szavakkal: azok a pontok egyszerűek, amelyeknek színe (fehér vagy fekete mivolta) nincs hatással az adott kép topológiájára.

Az egyszerű pontokra számosan határoztak meg feltételeket. Vékonyító eljárásaink topológiai-megőrző voltának bizonyításakor a következő eredményt alkalmaztuk:

3. KRITÉRIUM (Malandain, Bertrand, 1992; Saha, Chaudhuri, 1994)

A p fekete pont akkor és csakis akkor egyszerű a $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen, ha az alábbi feltételek mind teljesülnek:

1. $A \cap N_{26}(p) \cap (B \setminus \{p\})$ ponthalmaz pontosan egy 26-komponenst tartalmaz.
2. $(\mathbb{Z}^3 \setminus B) \cap N_6(p) \neq \emptyset$ (vagyis p 6-szomszédos legalább egy fehér ponttal).
3. $A \cap (\mathbb{Z}^3 \setminus B) \cap N_6(p)$ ponthalmaz bármely két pontja 6-összefüggő $(\mathbb{Z}^3 \setminus B) \cap N_{18}(p)$ -ben (vagyis p fehér 6-szomszédai 6-úttal összeköthetők a p fehér 18-szomszédai alkotta ponthalmazban).

A 3. kritérium szerint egy pont egyszerű volta eldönthető lokálisan, vagyis az adott pont $3 \times 3 \times 3$ -as környezete alapján.

Az egyszerű pont fogalma segítségével könnyen eldönthető, hogy egyetlen pont törlése mint redukció topológia-megőrző képművelet-e vagy sem. Több egyszerű pontot egyidejűleg törölő párhuzamos redukció viszont nem biztos, hogy topológia-megőrző képművelet. (Például egy 2D képen egy 2×2 pontból álló objektum valamennyi pontja egyszerű. Párhuzamos törlésük esetén viszont egy objektum teljesen eltűnik a képről, ami nem megengedett a topológia-megőrző redukcióknál.)

A fentiek miatt szükségünk van az egyszerű halmaz fogalmára is: Fekete pontok egy $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ halmaza *egyszerű halmaz* (*simple set*) a $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$ képen, ha a halmaz elemei olyan $\langle d_{i_1}, \dots, d_{i_k} \rangle$ sorozatba rendezhetők, ahol minden egyes d_{i_j} ($j = 1, \dots, k$) pont egyszerű a $\{d_{i_1}, \dots, d_{i_{j-1}}\}$ ponthalmaz törlése után (Kong, 1993). (Az üres halmaz legyen — definíció szerint — egyszerű halmaz.)

Az egyszerű halmaz meghatározásából következik, hogy egy párhuzamos redukció akkor és csakis akkor topológia-megőrző, ha minden lehetséges képre, az általa törölt halmaz egyszerű. A párhuzamos redukciók topológia-megőrzésére 2D-ben Ronse, 3D-ben pedig Ma fogalmazott meg elegendő feltételeket (Ronse, 1988; Ma, 1994). Vékonyító algoritmusaink (és a dolgozat 3. fejezetében leírt 3D zsugorító eljárásunk) topológiai korrektségét a következő tétel segítségével bizonyítottuk:

4. TÉTEL (Palágyi, Kuba, 1998/1; Palágyi, Kuba, 1999/2)

Legyen $\mathcal{T}$ egy párhuzamos redukció, $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ pedig egy tetszőleges 3D kép. Legyen továbbá $p \in B$ és $Q \subseteq (N_{18}(p) \setminus \{p\}) \cap B$ tetszőleges olyan fekete pont és ponthalmaz, amelyeket töröl a $\mathcal{T}$ képművelet. A $\mathcal{T}$ képművelet topológia-megőrző, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

1. p egyszerű a $(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B \setminus Q)$ képen.
2. $\mathcal{T}$ egyetlen egység-rácskocka által tartalmazott (más szavakkal: egy $2 \times 2 \times 2$ -es tömbbe befoglalható) objektumot sem töröl teljesen.

A 4. tétel bizonyításában megmutattuk, hogy az általunk megfogalmazott feltételekből következik C.M. Ma kritériumának teljesülése (Ma, 1994).

A vékonyítás módszerei

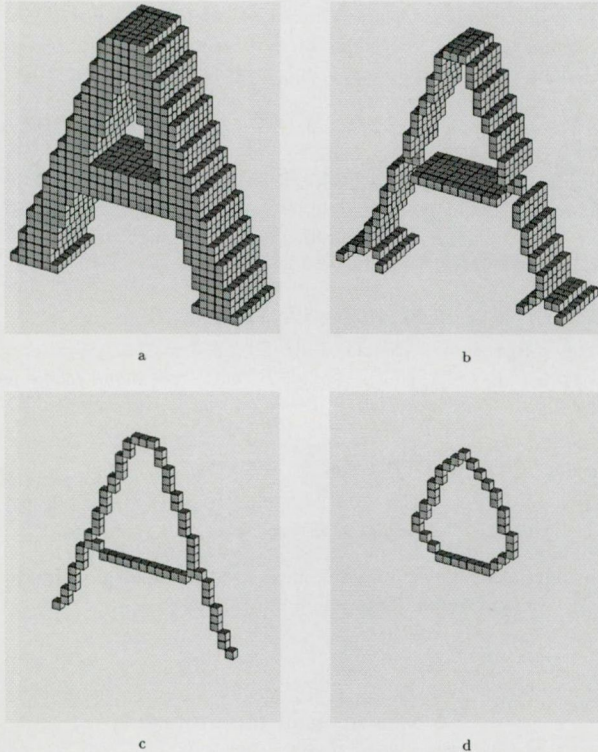
A vékonyítás menete az alábbi, teljesen általános sémával írható le:

repeat
 a "törölhető" határpontok eltávolítása
until nem történt változás

A repeat-ciklus magja a vékonyítás egy iterációs lépésének felel meg. Az egyes vékonyító eljárások az iterációs lépések megszervezésében és a "törölhető" pontokra adott feltételekben különböznek egymástól.

A vékonyító eljárásokkal szemben — a topológia-megőrzésen túl — követelmény az is, hogy őrizze meg az objektumok alakját. Az *alakmegőrzés* (*shape preservation*) biztosítása elsősorban azon múlik, hogy a fronterjedést modellező eljárások mely konfigurációk esetén detektálják a tűzfrontok találkozását, mely pontokat minősítenek megőrzendőeknek. Az ilyen védett pontokat végpontoknak nevezzük. A 3D eljárások — az alkalmazott

végpont-kritériumtól függően — középfelszínre (*medial surface thinning*) vagy pedig középvonalra (*medial line thinning*) vékonyítanak (7. ábra). Amennyiben nem alkalmazunk végpont-kritériumot (csak a topológia-megőrzés a cél), úgy az objektum *topológiai magját* (*topological kernel*) kapjuk, ami nem a vékonyításnak, hanem a zsugorításnak (*shrinking*) a feladata.



7. ábra Példa különböző végpont-kritériumokkal történő vékonyításra. Az eredeti objektum (a), annak középfelszíne (b), középvonala (c) és topológikus magja (d). Megjegyezzük, hogy a középfelszín közelebb áll a 3D vázhoz, mint a középvonal, viszont bizonyos "csőszerű" objektumokra (pl. szegmentált vérekre, légutakra) célszerűbb meghatározni a középvonalat.

A 4. tételből (és a párhuzamos redukciónak topológia-megőrzésére megfogalmazott más elegendő feltételekből) kitűnik, hogy nem konstruálható olyan 3D vékonyító algoritmus, ami csak a képpontok $3 \times 3 \times 3$ -as környezetét vizsgálná (iterációs lépésként egyetlen lokális és párhuzamos redukciónal). Ugyanakkor a $3 \times 3 \times 3$ -as környezet is viszonylag nagy, mivel egy pont 26 szomszédja 2^{26} -féle (bő 67 millió) konfigurációt alkothat.

A 3D párhuzamos algoritmusok alapvetően háromféle stratégiát követnek a topológia-megőrzés érdekében:

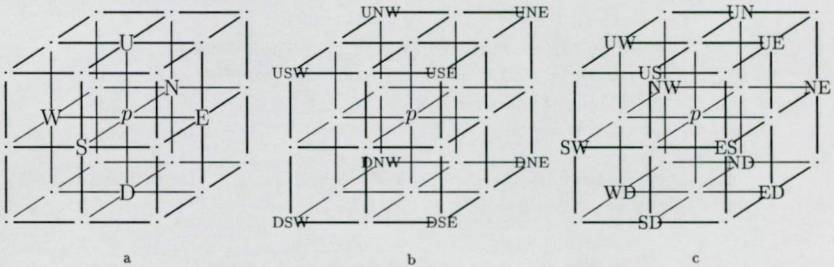
Az első az *irány-szekvenciális* technika, ahol egy iterációs lépés tevékenysége több egymást követő *al-iteráció*ból áll. Az al-iterációk olyan különböző lokális és párhuzamos

redukciókkal adhatók meg, amelyek csak a képpontok $3 \times 3 \times 3$ -as környezete alapján döntenek azok sorsáról és csak bizonyos típusú/irányú határpontokat törölhetnek.

A k al-iterációs ($k \geq 2$) módszer tehát az alábbi általános sémával írható le:

```
repeat
  for  $i = 1$  to  $k$  do
    egyidejű törlése mindazon határpontoknak, amelyek
    kielégítik az  $i$ -edik irányhoz tartozó feltételt
  until nem történt változás
```

Valamennyi mások által kifejlesztett irány-szekvenciális 3D vékonyító algoritmus egy iterációs lépést 6 al-iterációra bont fel. Egy 6 al-iterációs eljárás konstruálása mellett javasoltunk 8 és 12 törlési irányral dolgozó algoritmusokat is. A törlési irányokat a 8. ábra szemlélteti.



8. ábra Az irány-szekvenciális 3D vékonyító algoritmusokhoz javasolt törlési irányok a hagyományos 6 al-iterációs (a) és az általunk javasolt 8 al-iterációs (b), illetve 12 al-iterációs (c) eljárásoknál. A törlési irányokat rendre az "U", "N", ... iránykódokkal jelölt pontokat a "p" ponttal összekötő vektorok adják.

A következő nyolc 3D irány-szekvenciális vékonyító eljárásról van tudomásunk:

- Tsao és Fu 6 al-iterációs algoritmus (Tsao, Fu, 1981),
- Gong és Bertrand 6 al-iterációs algoritmus (Gong, Bertrand, 1990),
- Mukherjee, Das és Chatterjee 6 al-iterációs algoritmus (Mukherjee, Das, Chatterjee, 1990),
- Lee, Kashyap és Chu 6 al-iterációs algoritmus (Lee, Kashyap, Chu, 1994),
- Bertrand 6 al-iterációs algoritmus (Bertrand, 1995/2),
- Palágyi és Kuba 6 al-iterációs algoritmus (Palágyi, Kuba, 1998/1),
- Palágyi és Kuba 8 al-iterációs algoritmus (Palágyi, Kuba, 1999/1),
- Palágyi és Kuba 12 al-iterációs algoritmus (Palágyi, Kuba, 1997/1; Palágyi, Kuba, 1997/2; Palágyi, Kuba, 1999/2).

Az irány-szekvenciális vékonyítás — mint valamennyi vékonyító technika — megőrzi a topológiát és az objektum határának körbejárása (a törlési irányokból) képes biztosítani a "váz" pozíciójának korrektségét, azt, hogy a vékonyított objektum az eredeti "közepén" helyezkedjen el. A módszer előnye még, hogy nem érzékeny az objektum pozíciójára, vagyis invariáns az eltolásra. Ugyanakkor nem garantált a *gyengített izotrópia kritérium*

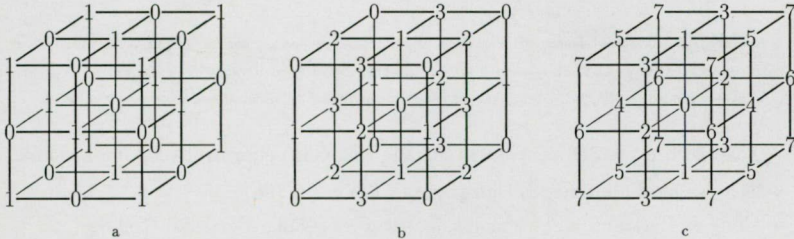
teljesülése (Manzanera et al., 1999/1), miszerint a vékonyítás és az elforgatás legyen felcserélhető legalább azokra a forgatási szögekre, amelyek a 90° többszörösei. Ez utóbbi (hátrányos) tulajdonság abból fakad, hogy a módszer érzékeny a törlési irányok bejárási sorrendjére.

A vékonyító algoritmusok második csoportja az *almező-szekvenciális* technikát követi. Az almező-szekvenciális eljárások a $\mathbb{Z}^3$ diszkrét képrácsot $k \geq 2$ diszjunkt részhalmazra, almezőre osztják fel. A k al-iterációból álló iterációs lépés során az almezők felváltva aktivizálódnak és csak az aktív almezőbe eső, a törlési szabályokat kielégítő fekete pontok változnak meg.

Az irány-szekvenciális eljárásoknál mindegyik al-iterációhoz más és más törlési feltétel tartozik, míg az eddig közölt almező-szekvenciális vékonyító algoritmusok globális törlési szabályt alkalmaznak, vagyis minden egyes al-iteráció során ugyanaz a feltétel érvényes. A k al-iterációs almező-szekvenciális eljárások az alábbi általános sémával írhatók le:

```
repeat
  for  $i = 1$  to  $k$  do
    egyidejű törlése mindazon fekete pontoknak, amelyek
    egyrészt az  $i$ -edik almezőbe esnek, másrészt kielégítik
    a (globális) törlési feltételt
until nem történt változás
```

3D-ben az egész koordinátájú rácpontok $\mathbb{Z}^3$ halmazára a 9. ábrával illusztrált 2-, 4- és 8-almezős felbontások merültek fel.



9. ábra A $\mathbb{Z}^3$ halmaz felbontása 2 almezőre (a), 4 almezőre (b) és 8 almezőre (c). Az „ i ”-vel jelölt rácpontok az i -edik almezőhöz tartoznak ($i = 0, 1, \dots$).

Mindeössze kettő almező-szekvenciális 3D vékonyító eljárásról tudunk:

- Bertrand es Aktouf algoritmus (Bertrand, Aktouf, 1994),
- Saha, Chaudhuri és Majumder algoritmus (Saha, Chaudhuri, Majumder, 1997).

Minkettő algoritmus (a 9/c. ábrán látható) 8 almezővel dolgozik, mivel az esetben a topológia-megőrzés biztosítása triviális (elegendő csak a törlésre kijelölt pontok egyszerű voltát garantálni).

Az almező-szekvenciális vékonyítás is megőrzi a topológiát és képes biztosítani azt, hogy a vékonyított objektum az eredetinek a „közepén” helyezkedjen el. A módszer előnye még, hogy kevésbé érzékeny az objektum elforgatására, mint az irány-szekvenciális algoritmusok. Érzékeny viszont az objektum pozíciójára, vagyis nem eltolás-invariáns. A

vékonyított kép egyenes vonalai gyakran "beremegnek", hajlamosak kirajzolni az almezők mintázatát. Ez az egyenetlenség viszonylag könnyen korrigálható utófeldolgozással.

A harmadik módszer a *teljesen párhuzamos* vékonyítás, ahol egy iterációs lépést egyetlen párhuzamos redukció írja le, vagyis nem alkalmaznak al-iterációkat. Ennek ára az, hogy nem elegendő csupán a pontok $3 \times 3 \times 3$ -as környezetét vizsgálni. Az alábbi négy teljesen párhuzamos vékonyító eljárást ismerjük:

- Ma algoritmusa a pontok 29 elemből álló környezetét vizsgálja és a törlésre megjelölt pontokra egy párhuzamos újraellenőrző fázist is igényel (Ma, 1995).
- Ma és Sonka algoritmusa 49 pontból álló lokális környezetet vizsgál (Ma, Sonka, 1996).
- Manzanera, Bernard, Pretêux és Longuet eljárásánál a lokális környezet 80 pontot tartalmaz (Manzanera et al., 1999/3).
- Ma és Sonka eljárását (Ma, Sonka, 1996) módosítottuk úgy, hogy topológia-megőrző legyen. A — a dolgozat 2.3.3. pontjában ismertetett — módosított eljárás nem vizsgál az eredetnél tágabb környezetet, a képpontok új értéke továbbra is a 49 pontból álló lokális környezetüktől függ.

A teljesen párhuzamos vékonyítás — csakúgy, mint a másik kettő fő vékonyító technika — megőrzi a topológiát és képes biztosítani azt, hogy a vékonyított objektum az eredetinek a "közepén" helyezkedjen el. Nem érzékeny az objektum pozíciójára sem, vagyis eltolás-invariáns. A módszer előnye még, hogy kevésbé érzékeny az objektum elforgatására, mint az irány-szekvenciális algoritmusok, de a gyengített izotrópia kritérium (Manzanera et al., 1999/1) teljesítésére ezúttal sincs garancia, mivel az ismert eljárások asszimmetrikus lokális szomszédságot vizsgálnak.

A fenti három vékonyító stratégia mellett egy negyediket is javasoltunk, ami az irány-szekvenciális és az almező-szekvenciális stratégiákat kombinálja (Palágyi, Kuba, 1998/2). A hibrid módszer egy iterációs lépése k_1 irány-szekvenciális és k_2 almező-szekvenciális al-iterációból áll a következő séma szerint:

```
repeat
  remark a  $k_1$  irány-szekvenciális al-iteráció
  for  $i = 1$  to  $k_1$  do
    egyidejű törlése mindazon fekete pontoknak, amelyek
    kielégítik az  $i$ -edik irányhoz tartozó feltételt
  remark a  $k_2$  almező-szekvenciális al-iteráció
  for  $j = 1$  to  $k_2$  do
    egyidejű törlése mindazon fekete pontoknak, amelyek
    a  $j$ -edik almezőbe esnek és teljesítik a minden
    egyes almezőre érvényes (globális) törlési feltételt
until nem történt változás
```

A fenti mószert követve egy olyan hibrid algoritmust terveztünk, ami (a 8/b. ábrán látható) $k_1 = 8$ iránnyal és (a 9/a. ábrával leírt) $k_2 = 2$ almezővel dolgozik (Palágyi, Kuba, 1998/2).

Saját algoritmusok

Az általunk kifejlesztett valamennyi 3D vékonyító algoritmust az általánosított maszk-illesztés (Palágyi, 1993) segítségével adtuk meg. A módszer fő előnye az, hogy a szemléletes megadási mód segíti az eljárások topológiai tulajdonságainak bizonyítását és hatékony Boole-implementációt tesz lehetővé.

Algoritmusaink a következő végpontkritériumokat alkalmazzák:

5. DEFINÍCIÓ

$A(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen a $p \in B$ pont akkor és csakis akkor vonalvégpont, ha az $(N_{26}(p) \setminus \{p\}) \cap B$ halmaz egyelemű (vagyis p -vel csak egyetlen más fekete pont 26-szomszédos).

6. DEFINÍCIÓ

$A(\mathbb{Z}^3, 26, 6, B)$ képen a $p \in B$ pont akkor és csakis akkor felszínvégpont, ha p -nek legalább kettő, egymással "szemközti" 6-szomszédja fehér (vagyis a $\mathbb{Z}^3 \setminus B$ halmazba esik).

A következő 3D vékonyító algoritmusokat fejlesztettük ki:

- A 6 al-iterációs irány-szekvenciális vékonyító algoritmusunk a középvonal és a középfelszín meghatározására egyaránt alkalmas (Palágyi, Kuba, 1997/3; Palágyi, Kuba, 1998/1). Ez az algoritmus hagyományosnak mondható, mivel korábban már mások is közölték 6 törlési irányt alkalmazó eljárásokat. Algoritmusunk eredetisége abban rejlik, hogy egyrészt maszkokkal adtuk meg a törlési feltételeket, másrészt pedig a középvonal kivonása közvetlenül történik (nem határozzuk meg előtte a középfelszín).
- A 8 al-iterációs irány-szekvenciális vékonyító algoritmusunk is képes mind a középvonal mind pedig a középfelszín meghatározására (Palágyi, Kuba, 1999/1). Ez az eljárás először javasolt 8 törlési irányt.
- A 12 al-iterációs irány-szekvenciális vékonyító algoritmusunk — ami a középvonal és a középfelszín meghatározására egyaránt alkalmas — elsőként javasol 12 törlési irányt. Az eljárás első és módosított változatát a középvonal meghatározására fejlesztettük ki (Palágyi, Kuba, 1997/1). A módszert kiterjesztettük a középfelszín meghatározására és közöltük a topológiai korrektségre vonatkozó bizonyítást is (Palágyi, Kuba, 1999/2). A 8 és a 12 al-iterációs algoritmusainkkal megmutattuk, hogy a 3D irány-szekvenciális vékonyító algoritmusok tervezésekor el lehet térni a szokásos 6 törlési iránytól.
- Kidolgoztunk egy, az irány-szekvenciális és az almező-szekvenciális stratégiákat kombináló vékonyító stratégiát középvonal meghatározására és kifejlesztettünk egy hibrid algoritmust (Palágyi, Kuba, 1998/2).

Megjegyezzük, hogy a 8 és a 12 al-iterációs eljárásaink gyorsabbak, mint a hagyományos 6 törlési irányt alkalmazók. Míg pl. egy $16 \times 16 \times 16$ -os tömör kockára a 6 al-iterációs vékonyító algoritmusok egy iterációs lépése egy $14 \times 14 \times 14$ -es kockát eredményez (vagyis egyetlen réteget hámoz le), addig a 8 és a 12 törlési irányt alkalmazó eljárásaink egyetlen iterációs lépéssel egy $8 \times 8 \times 8$ -as kockát állítanak elő (vagyis négy réteget távolítanak el). Az al-iterációk nagyobb száma miatt az újfajta algoritmusok egy iterációs lépése lassabb lesz, mint a 6 törlési irányt alkalmazóké, de várhatóan jóval kevesebb iterációs lépést igényelnek. A vékonyító algoritmusaink futási igényét nehéz meghatározni, mivel

a feldolgozás idejét egy iterációs lépés időigényének és az iterációk számának a szorzata adja. Egyrészt a törlési szabályokhoz tartozó minimalizált Boole-függvényt kellene meghatároznunk, hogy megadhatassuk egy iteráció komplexitását, másrészt pedig a szükséges iterációs lépések száma erősen függ a vékonyítandó objektumoknak nem csak a méretétől, hanem az alakjától/szerkezetétől is.

A fenti vékonyító algoritmusokon kívül Ma és Sonka eljárását (Ma, Sonka, 1996) is módosítottuk úgy, hogy topológia-megőrző legyen (ld. a dolgozat 2.3.3. pontja), továbbá kifejlesztettünk egy 6 al-iterációs irány-szekvenciális 3D zsugorító algoritmust is (ld. a dolgozat 3.1. pontja).

A következőkben a legegyszerűbb algoritmusunkat, a 6 al-iterációs irány-szekvenciális 3D vékonyító eljárást ismertetjük középvonal meghatározására. Az eljárást az alábbi séma írja le:

Input: a vékonyítandó (26,6) képet reprezentáló X bináris tömb.

Output: a vékonyított képet tároló Y bináris tömb.

6_al-iterációs_vékonyító_algoritmus(X, Y)

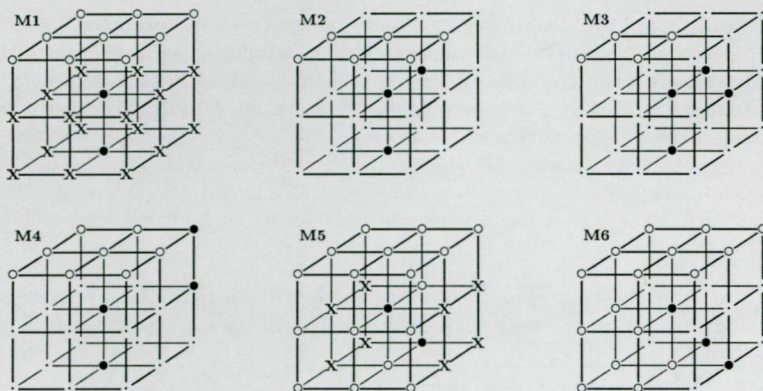
```
begin
  Y = X;
  repeat
    Y = törlés_U_irányból(Y);
    Y = törlés_D_irányból(Y);
    Y = törlés_N_irányból(Y);
    Y = törlés_S_irányból(Y);
    Y = törlés_E_irányból(Y);
    Y = törlés_W_irányból(Y);
  until nem történt változás;
end.
```

Az eljárás a 8/a. ábrán bemutatott 6 törlési irányt alkalmazza. Mind a hat al-iterációhoz egy-egy lokális és párhuzamos redukció tartozik. Az "U" törlési irányhoz rendelt képműveletet a 10. ábra maszkjaival adjuk meg.

A 10. ábra hat alapmaszkjának a függőleges tengely körül 90° , 180° , 270° fokkal elforgatott változatai a maszkkészlethez tartoznak. A fenti maszkokkal adott képművelet — az általánosított maszkillesztés szerint — törli mindazon fekete pontokat, amelyekre a maszkkészlet legalább egy tagja illeszkedik. Egy maszk akkor és csakis akkor illeszkedik egy pont $3 \times 3 \times 3$ -as környezetére, ha az adott pontra az adott maszkot a középpontjával (elforgatás és tükrözés nélkül) ráhelyezve valamennyi "•" maszkelem fekete képponttal és valamennyi "o" maszkelem fehér ponttal kerül fedésbe. A "." maszkelemek semlegesek, vagyis tetszőleges lehet a velük fedésbe került képpontok színe. A maszkkészlet elemszámának csökkentése érdekében más jelöléssel is éltünk: ha egy maszkban "x" elemek is szerepelnek, akkor közülük legalább egynek fekete ponttal kell fedésbe kerülnie. (Az "x" maszkelemek bevezetése a vonalvégpontok (5. definíció) megőrzését garantálja.)

Megjegyezzük, hogy a fenti maszkkészlet egy eleme többféle fekete pontra is illeszkedhet (pl. az M3 maszk 2^{19} pont-konfiguráció esetén töröl). Ugyanakkor egy pontot a maszkkészlet több eleme is törölhet.

A fennmaradó öt al-iterációhoz tartozó képműveletek maszkjai megkaphatók az "U" törlési irányhoz rendelt maszkok megfelelő elforgatásával és/vagy tükrözésével.



10. ábra A középvonal meghatározására szolgáló 6 al-itéációs vékonyító eljárásunk "U" törlési irányhoz tartozó alpmaszkjai. Az **M1** és az **M5** maszkoknál az "x"-szel jelölt pozíciók közül legalább egy "•" (fekete). Az **M1–M6** maszkoknak a függőleges tengely körül 90° , 180° , 270° fokkal elforgatott változatai is a maszkkészlethez tartoznak. Könnyen ellenőrizhető, hogy a készlet minden egyes eleme csak olyan fekete pontokat törölhet, amelyeknek az "U" irányú 6-szomszédjuk fehér és nem töröl vonalvégpontot (5. definíció).

Hangsúlyozandó, hogy az eljárás — mint minden irány-szekvenciális algoritmus — érzékeny a törlési irányok bejárás sorrendjére. A **repeat** ciklusban szereplő hat utasítás permutációi újabb és újabb algoritmushoz vezetnek.

Az eljárás topológiai korrektségét a következő tétel mondja ki:

7. TÉTEL (Palágyi, Kuba, 1998/1)

A 6 al-itéációs irány-szekvenciális vékonyító algoritmusunk topológia-megőrző a $(26, 6)$ képeken.

A 7. tétel bizonyítása a 3. kritérium és a 4. tétel segítségével történt. Az alábbi tételek bizonyításához ugyanazokat az eszközöket használtuk fel.

8. TÉTEL (Palágyi, Kuba, 1998/2)

A hibrid vékonyító algoritmusunk topológia-megőrző a $(26, 6)$ képeken.

9. TÉTEL (Palágyi, Kuba, 1999/1)

A 8 al-itéációs irány-szekvenciális vékonyító algoritmusunk topológia-megőrző a $(26, 6)$ képeken.

10. TÉTEL (Palágyi, Kuba, 1999/2)

A 12 al-itéációs irány-szekvenciális vékonyító algoritmusunk topológia-megőrző a $(26, 6)$ képeken.

11. TÉTEL (a dolgozat 2.3.3. pontja)

Ma és Sonka teljesen párhuzamos vékonyító algoritmusának (Ma, Sonka, 1996) általunk javasolt módosítása topológia-megőrző a $(26, 6)$ képeken.

12. TÉTEL (a dolgozat 3.1. pontja)

Zsugorító algoritmusunk topológia-megőrző a $(26, 6)$ képeken.

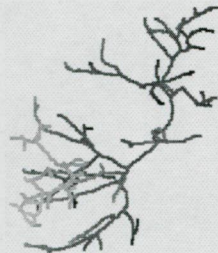
A középvonalat meghatározó vékonyító algoritmusaink hatását a 11. ábra, a közép-felszín kivonására alkalmasokat pedig a 12. ábra mutatja be. Eljárásainkat vérerek és légutak átmérőjének a meghatározására alkalmztuk (Palágyi, Kuba, 1998/3; Palágyi, Sorantin, Halmai, Kuba, 1999; Palágyi és mtrai, 2000).



eredeti objektum



6 al-iterációs algoritmus



8 al-iterációs algoritmus

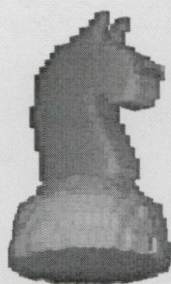


12 al-iterációs algoritmus

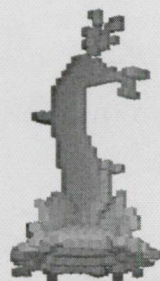


hibrid algoritmus

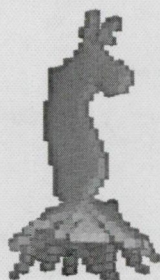
11. ábra A középvonalakat kivonó vékonyító algoritmusaink eredménye májból szegmentált véerekre. (A tesztkép mérete: $272 \times 285 \times 241$.)



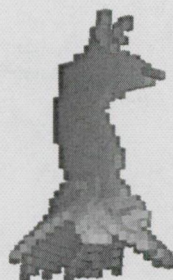
eredeti objektum



6 al-iterációs algoritmus



8 al-iterációs algoritmus



12 al-iterációs algoritmus

12. ábra A középfelzín kivonására javasolt vékonyító algoritmusaink eredményei egy sakkfigurára. (A kiindulási objektum mérete: $25 \times 40 \times 25$).

Irodalom

AURENHAMMER, 1985

F. Aurenhammer, Voronoi diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure, *ACM Comput. Surveys* **23**, 1985, 345–405.

BERTRAND, 1995/2

G. Bertrand, A parallel thinning algorithm for medial surfaces, *Pattern Recognition Letters* **16**, 1995, 979–986.

BLUM, 1964

H. Blum, A transformation for extracting new descriptors of shape, Symposium on Models for the perception of Speech and Visual Form, 1964.

BLUM, 1967

H. Blum, Biological shape and visual science, *J. Theoretical Biology* **38**, 1967, 205–287.

BOISSONAT, KOFAKIS, 1985

J.D. Boissonat, P. Kofakis, Use of the Delaunay triangulation for the identification and the localization of objects, in *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*, 1985, 398–401.

BORGEFORS, 1984

G. Borgefors, Distance transformations in arbitrary dimensions, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **27**, 1984, 321–345.

BOW, 1992

S.-T. Bow, *Pattern recognition and image preprocessing*, Marcel Dekker, Inc., 1992.

BRANDT, ALGAZI, 1992

J.W. Brandt, V.R. Algazi, Continuous skeleton computation by Voronoi diagram, *CVGIP: Image Understanding* **55**, 1992, 329–338.

BROWN, 1992

L.G. Brown, A Survey of Image Registration Techniques, *ACM Computing Surveys* **24** 1992, 325–376.

CALABI, 1965

L. Calabi, *A study of the skeleton of plane figures*, Technical report 60429 Parke Mathematical Laboratories, 1965.

GONG, BERTRAND, 1990

W.X. Gong and G. Bertrand, A simple parallel 3D thinning algorithm, in *Proc. 10th IEEE Int. Conf. Pattern Recognition*, 1990, 188–190.

KONG, 1993

T.Y. Kong, On the problem of determining whether a parallel reduction operator for n -dimensional binary images always preserves topology, in *Proc. Conf. Vision Geometry II*, Proc. SPIE **2060**, 1993, 69–77.

KONG, ROSENFELD, 1989

T.Y. Kong, A. Rosenfeld, Digital topology: Introduction and survey, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **48**, 1989, 357–393.

- KONG, ROSCOE, ROSENFELD, 1992
T.Y. Kong, A.W. Roscoe, A. Rosenfeld, Concepts of digital topology, *Topology and its Applications* **46**, 1992, 219–262.
- LEE, KASHYAP, CHU, 1994
T. Lee, R.L. Kashyap, C. Chu, Building skeleton models via 3-D medial surface/axis thinning algorithms, *CVGIP: Graphical Models and Image Processing* **56**, 1994, 462–478.
- LEE, POSTON, ROSENFELD, 1993
C. Lee, T. Poston, A. Rosenfeld, Holes and genus of 2D and 3D digital images, *CVGIP: Graphical Models and Image Processing* **55**, 1993, 20–47.
- MA, 1994
C.M. Ma, On topology preservation in 3D thinning, *CVGIP: Image Understanding* **59**, 1994, 328–339.
- MALANDAIN, BERTRAND, 1992
G. Malandain, G. Bertrand, Fast characterization of 3D simple points, in *IEEE Int. Conf. Pattern Recognition*, 1992, 232–235.
- MANZANERA ET AL., 1999/3
A. Manzanera, T.M. Bernard, F. Pret  ux, B. Longuet, Medial faces from a concise 3D thinning algorithm, in *Proc. 7th IEEE Int. Conf. Computer Vision, ICCV'99*, 337–343, 1999.
- MORGENTHALER, 1981
D.G. Morgenthaler, *Three-Dimensional Simple Points: Serial Erosion, Parallel Thinning and Skeletonization*, TR-1005, Computer Vision Laboratory, University of Maryland, 1981.
- MUKHERJEE, DAS, CHATTERJEE, 1990
J. Mukherjee, P.P. Das, B.N. Chatterjee, On connectivity issues of MESPTA, *Pattern Recognition Letters* **11**, 1990, 643–648.
- PALÁGYI, 1993
Palágyi K., Lokális párhuzamos eljárás bináris képek zajsz  r  s  re, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **17**, 1993, 373–396.
- PALÁGYI, KUBA, 1997/1
K. Palágyi, A. Kuba, A thinning algorithm to extract medial lines from 3D medical images, in *Proc. 15th Int. Conf. on Information Processing in Medical Imaging, IPMI'97*, Lecture Notes in Computer Science **1230**, Springer, 1997, 411–416.
- PALÁGYI, KUBA, 1997/2
K. Palágyi, A. Kuba, A parallel 12-subiteration 3D thinning algorithm to extract medial lines, in *Proc. 7th Int. Conf. on Computer Analysis of Images and Patterns, CAIP'97*, Lecture Notes in Computer Science **1296**, Springer, 1997, 400–407.
- PALÁGYI, KUBA, 1997/3
K. Palágyi, A. Kuba, An Algorithm for Thinning 3D Medical Images, in *Proc. 1st KEPAF Conf. Image Analysis and Pattern Recognition*, 1977, 64–71.
- PALÁGYI, KUBA, 1998/1
K. Palágyi, A. Kuba, A 3D 6-subiteration thinning algorithm for extracting medial lines, *Pattern Recognition Letters* **19**, 1998, 613–627.

- PALÁGYI, KUBA, 1998/2
K. Palágyi, A. Kuba, A hybrid thinning algorithm for 3D medical images, *J. Computing and Information Technology* **6**, 1998, 149–164.
- PALÁGYI, KUBA, 1998/3
Palágyi K., Kuba A., Vékonyító algoritmusok 3D orvosi képekre, *A számítástechnika orvosi és biológiai alkalmazásai, A XXI. Neumann Kollokvium Kiadványa*, NJSZT Orvosbiológiai Szakosztálya, 1998, 63–66.
- PALÁGYI, KUBA, 1999/1
K. Palágyi, A. Kuba, Directional 3D thinning using 8 subiterations, in *Proc. 8th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI'99*, Lecture Notes in Computer Science **1568**, Springer, 1999, 325–336.
- PALÁGYI, KUBA, 1999/2
K. Palágyi, A. Kuba, A parallel 3D 12-subiteration thinning algorithm, *Graphical Models and Image Processing* **61**, 1999, 199–221.
- PALÁGYI, SORANTIN, HALMAI, KUBA, 1999
K. Palágyi, E. Sorantin, Cs. Halmai, A. Kuba, 3D thinning and its applications to medical image processing, *TASK Quarterly* **3**, 1999, 397–408.
- PALÁGYI ÉS MTRSAI, 2000
Palágyi K., E. Sorantin, Halmai Cs., Martonossy L., Erdőhelyi B., Kuba A., 3D vékonyítás és alkalmazása vérerek és légutak átmérőjének meghatározására, *A Magyar Képfeldolgozók és Alakfelismerők 2. Országos Konferenciája 2000*, 95–100.
- PREPARATA, SHAMOS, 1990
F.P. Preparata, M.I. Shamos, *Computational Geometry*, Springer–Verlag, 1990.
- RONSE, 1988
C. Ronse, Minimal test patterns for connectivity preservation in parallel thinning algorithms for binary digital images, *Discrete Appl. Math.* **21**, 1988, 67–79.
- SAHA, CHAUDHURI, 1996
P.K. Saha, B.B. Chaudhuri, 3D digital topology under binary transformation with applications, *Computer Vision and Image Processing* **63**, 1996, 418–429.
- SCHMITT, 1989
M. Schmitt, Some examples of algorithms analysis in computational geometry by means of mathematical morphological techniques, in *Proc. Conf. Geometry and Robotics*, Lecture Notes in Computer Science **391**, Springer–Verlag, 1989, 225–246.
- SERRA, 1982
J. Serra, *Image analysis and mathematical morphology*, Academic Press, London, 1982.
- SUEN, WANG, 1994
C.Y. Suen, P.S.P. Wang (eds.), *Thinning methodologies for pattern recognition*, Series in Machine Perception and Artificial Intelligence **8**, World Scientific, 1994.
- SZÉKELY, 1996
G. Székely, *Shape characterization by local symmetries*, Habilitationsschrift, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1996.
- TSAO, FU, 1981
Y.F. Tsao, K.S. Fu, A parallel thinning algorithm for 3-D pictures, *Computer Graphics and Image Processing* **17**, 1981, 315–331.

Az értekezés eredményeit tartalmazó közlemények

PALÁGYI, 1993

Palágyi K., Lokális párhuzamos eljárás bináris képek zajszűrésére, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **17**, 1993, 373–396.

PALÁGYI, KUBA, 1997/1

K. Palágyi, A. Kuba, A thinning algorithm to extract medial lines from 3D medical images, in *Proc. 15th Int. Conf. on Information Processing in Medical Imaging, IPMI'97*, Poultny, USA, Lecture Notes in Computer Science **1230**, Springer, 1997, 411–416.

PALÁGYI, KUBA, 1997/2

K. Palágyi, A. Kuba, A parallel 12-subiteration 3D thinning algorithm to extract medial lines, in *Proc. 7th Int. Conf. on Computer Analysis of Images and Patterns, CAIP'97*, Kiel, Germany, Lecture Notes in Computer Science **1296**, Springer, 1997, 400–407.

PALÁGYI, KUBA, 1998/1

K. Palágyi, A. Kuba, A 3D 6-subiteration thinning algorithm for extracting medial lines, *Pattern Recognition Letters* **19**, 1998, 613–627.

PALÁGYI, KUBA, 1998/2

K. Palágyi, A. Kuba, A hybrid thinning algorithm for 3D medical images, *J. Computing and Information Technology* **6**, 1998, 149–164.

PALÁGYI, KUBA, 1999/1

K. Palágyi, A. Kuba, Directional 3D thinning using 8 subiterations, in *Proc. 8th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI'99*, Marne-la-Vallée, France, Lecture Notes in Computer Science **1568**, Springer, 1999, 325–336.

PALÁGYI, KUBA, 1999/2

K. Palágyi, A. Kuba, A parallel 3D 12-subiteration thinning algorithm, *Graphical Models and Image Processing* **61**, 1999, 199–221.