B3607

NÉMETH ZOLTÁN

A CESÀRO MÓDSZER ÁLTALÁNOSÍTÁSAI ÉS ALKALMAZÁSAI

egyetemi doktori (PhD) értekezés

JATE Bolyai Intézet
Szeged, 1999

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek,

Dr. Móricz Ferenc

professzor úrnak, a tőle kapott sok segítséget, biztatást és türelmet.

Sokat tanultam Dr. Leindler László és Dr. Tandori Károly professzoroktól, Dr. Németh József és Dr. Szalay István docensektől is. Az ő segítségük nélkül aligha jutottam volna el idáig.

Mindannyiuknak köszönöm!

Tartalom

0. Bevezetés 4
0.1. Egy elemi megközelítés 4
0.2. Lineáris sorozat–sorozat transzformációk 5
0.3. A Cesàro-módszer 6
0.4. Kettős sorozatok és sorok 7
1. Általánosított abszolút Cesàro szummálhatóság 9
1.1. A definíciókról 9
1.2. Permanenciatételek 11
1.3. Bizonyítások 13
1.4. Ortogonális sorok 19
1.5. Az együttható-feltétel bizonyítása 20
2. A Fourier-együtthatók nagyságrendjéről 27
2.1. Előzmények 27
2.2. A diszkrét eset 28
2.3. Bizonyítások 29
2.4. A folytonos eset 35
2.5. Bizonyítás 38
3. Tauber típusú tételek 42
3.1. A $(C,1,1)$ szummálhatóság egy jellemzése 42
3.2. Bizonyítások 45
3.3. Alkalmazások 50
3.4. A folytonos eset 54
3.5. Bizonyítások 58
4. Summary 60
Irodalomjegyzék 68

0. Bevezetés

Mivel az értekezés három fő fejezete egyaránt a Cesàro szummálhatósággal foglalkozik, célszerűnek tűnt néhány fontosabb definíciót, eredményt és problémát egy bevezető fejezetben összefoglalni. A rövidség kedvéért, a dolgozatban sokszor fogunk ismert definíciókra, tételekre indoklás nélkül hivatkozni, ezek legtöbbje megtalálható Hardy [Ha1] és Zygmund [Zy] monográfiáiban.

Noha egy doktori értekezés nem tankönyv, engedtessék meg, hogy vizsgálódásainkat egy elemi feladattal indítsuk.

0.1. Egy elemi megközelítés

Tekintsük a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{0.1}$$

sort, és

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{0.2}$$

részletösszegét. A bevezető analízisből ismeretes, hogy valahányszor $s_n \to l$, mindannyiszor $\sigma_n \to l$, ahol

$$\sigma_n := \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \tag{0.3}$$

az úgynevezett $(C,1)$-közép (vagy számtani közép). Ez a tény motiválja az alábbi definíciót:

0.1. DEFINÍCIÓ. Az s_n sorozat határértéke $(C,1)$-értelemben az l szám, ha $\sigma_n \to l$. Hasonlóan, a (0.1) sor $(C,1)$-értelemben szummálható az l számhoz, ha $\sigma_n \to l$, ahol σ_n a részletösszeg-sorozatból képzett $(C,1)$-közép.*

A fentiek szerint, a „$(C,1)$-értelemben vett határérték" a közönséges határérték-fogalom egy kiterjesztése. Azt, hogy valódi kiterjesztés, Leibniz híres során mutatjuk be.

A $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ sor közönséges értelemben nem konvergens, hiszen

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Azonban könnyű kiszámolni, hogy

$$\sigma_n = \frac{[n/2]+1}{n+1},$$

azaz, a sor összege $(C,1)$ értelemben $1/2$.

---

* Természetesen a szummálható („summable") helyett használhatnánk az „összegezhető" kifejezést is, azonban – talán – a „szummálható" jobban elterjedt. Ezzel ellentétben, a „limitable" helyett nem elfogadott a „limitálható", ezért ez utóbbit mindig körül fogjuk írni a fenti definícióhoz hasonlóan.

Könnyen meggyőződhetünk a következő összefüggés érvényességéről is:

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k a_k. \tag{0.4}$$

Ennek alapján azonnal adódik a következő két eredmény:

0.2. ÁLLÍTÁS. *Ha a* (0.1) *sor konvergens, akkor* $ka_k \to 0$ $(C,1)$ *értelemben.*

Az állítás bizonyítása egyszerű: Ha (0.4) baloldala 0-hoz tart, nyilván a jobboldala is. ez pedig definíció szerint éppen a ka_k sorozat $(C,1)$ értelemben vett 0-hoz tartását jelenti. □

Emlékeztetünk arra, hogy ha a (0.1) sor konvergens, $a_k \to 0$ fennáll, de ez a konvergencia tetszőlegesen lassú lehet, azaz, $\lambda_k a_k \to 0$ általában nem igaz semmilyen $\lambda_k \to \infty$ sorozatra.

Természetesen a $(C,1)$ szummálhatóságból a sor konvergenciája általában nem következik. Tauber-típusúnak nevezzük azokat a tételeket, amelyek a szummálhatóságból és valamely pótfeltétel teljesüléséből következtetnek a konvergenciára. Az első ilyen jellegű eredmény:

0.3. ÁLLÍTÁS (A. Tauber, 1897). *Ha a* (0.1) *sor* $(C,1)$ *értelemben szummálható. és* $ka_k \to 0$, *akkor a sor közönséges értelemben is konvergens.*

Ezúttal a feltételből először (0.4) jobboldalának 0-hoz tartására következtetünk. Ekkor, a baloldal miatt, s_n és σ_n egyszerre, ugyanoda konvergál. □

0.2. Lineáris sorozat–sorozat transzformációk

Legyen $\mathbf{R}^\infty$ az összes sorozatok (lineáris) tere, és V ennek egy (lineáris) altere. Jelöljük továbbá c-vel a közönséges értelemben konvergens sorozatok alterét.

0.4. DEFINÍCIÓ. *Szummációs eljárásnak* nevezzük az olyan lineáris $V \to \mathbf{R}$ funkcionálokat, amelyek c-n egybeesnek a szokásos határérték-képzéssel.

Sorozatokról lévén szó, helyesebb lett volna a „határérték-képzési eljárás" kifejezés. Gondolhatunk azonban arra, hogy egy $\sum a_k$ sor s_n részletösszegeit vizsgáljuk. A továbbiakban, ha ez nem zavaró, általában nem hangsúlyozzuk a „sor vagy sorozat" kettősséget.

Az ilyen lineáris funkcionálok előállítására egy nagyon általános módszer az ún. mátrix-transzformáció.

Legyen $\mathcal{A} = (a_{nk})$, $n, k = 0, 1, \ldots$, egy kétszeresen végtelen mátrix, és legyen

$$t_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \tag{0.5}$$

az s_n sorozat transzformáltja.

0.5. DEFINÍCIÓ. A $\sum a_\nu$ sort $\mathcal{A}$-módszerrel szummálhatónak nevezzük az s számhoz. ha a sor s_k részletösszegeinek (0.5) szerinti transzformáltjára $t_n \to s$.

0.6. TÉTEL (Toeplitz–Schur). *Az* $\mathcal{A}$ *mátrix által létesített transzformáció szerinti összeg akkor és csak akkor esik egybe c-n a közönséges határértékkel (azaz a transzformáció konvergenciatartó), ha*

$$\text{(i)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \le K \qquad n\text{-ben egyenletesen},$$

(ii) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \to 1 \qquad (n \to \infty),$$

(iii) $$a_{nk} \to 0 \qquad (n \to \infty, \textit{ bármely } k \textit{ esetén}).$$

Sokféle szummációs eljárás létezik. A témakör klasszikus monográfiája [Ha1]. A következő szakaszban bemutatjuk a számunkra legfontosabb Cesàro-módszert. A Cesàro-módszerrel kapcsolatos tételeket egyben az általános elmélet illusztrációinak is szánjuk.

0.3. A Cesàro-módszer

Definiáljuk a Cesàro-számokat a következőképpen:

(0.6) $$A_n^\alpha := \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}{n!}, \qquad A_0^\alpha := 1, \qquad \alpha > -1.$$

Könnyen meggyőződhetünk a Cesàro-számok alábbi két tulajdonságáról: Ha $\alpha, \delta, \alpha+\delta > -1$,

(0.7) $$A_n^{\alpha+\delta} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} A_k^\alpha \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

(0.8) $$A_n^\alpha / n^\alpha \to 1/\Gamma(\alpha+1) \qquad (n \to \infty).$$

Tekintsük a következő mátrix-transzformációt:

(0.9) $$\mathcal{A}^\alpha := (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}, \qquad \text{ahol} \qquad a_{nk} = \begin{cases} A_{n-k}^{\alpha-1}/A_n^\alpha, & \text{ha } k \le n, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az $\mathcal{A}^\alpha$ mátrix alulról trianguláris, (0.7) és (0.8) miatt $\alpha \ge 0$ esetén a Toeplitz–Schur tétel feltételei teljesülnek, így jogos az alábbi definíció.

0.7. Definíció. A $\sum a_k$ sort (C,α)-szummálhatónak nevezzük az s számhoz, ha az s_k részletösszegeiből képezett

(0.10) $$\sigma_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} A_{n-k}^\alpha a_k$$

α-adrendű Cesàro-közepekre $\sigma_n \to s$.

0.8. Megjegyzés. Az itt definiált (C,α) módszer az $\alpha = 0$ esetben a közönséges konvergenciával, az $\alpha = 1$ esetben pedig a 0.1. fejezetben vizsgált átlagolással esik egybe.

Az alábbiakban felsorolunk néhány jellegzetes tételt a Cesàro-módszerrel kapcsolatban.

0.9. Tétel (permanenciatétel). *Ha egy sor (C,α)-szummálható s-hez, akkor bármely $\beta > \alpha$ esetén (C,β)-szummálható is s-hez.*

Bizonyítás. A (0.7) összefüggés felhasználásával könnyen kiszámolhatjuk, hogy a $\delta := \beta - \alpha$ jelöléssel

(0.11) $$\sigma_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{A_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha,$$

azaz,

$$\mathcal{A}^\beta(s) = \mathcal{A}^{\beta-\alpha}(\mathcal{A}^\alpha(s)),$$

amiből a 0.1. tétel figyelembevételével állításunk következik. □

0.10. Megjegyzés. A továbbiakban az ilyen szituációt röviden $(C,\alpha) \Longrightarrow (C,\beta)$-val fogjuk jelölni.

0.11. TÉTEL (limitációs tétel). *Ha* $0 < \alpha < \beta$ *és egy sor* (C, β) *szummálható, akkor* $|\sigma_n^\alpha| \leq Kn^{\beta-\alpha}$. *

0.12. TÉTEL (Hardy–Landau-féle Tauber típusú tétel). *Ha a* $\sum a_k$ *sor* $(C, \alpha > 0)$ *szummálható, és* $|ka_k| \leq K$ *(vagy csupán* $ka_k > -K$*), akkor a sor közönséges értelemben is konvergens.*

Ennek a tételnek egy lehetséges bizonyításáról a 3. fejezetben lesz szó.

Végezetül: Bár jelen dolgozatnak nem célja, hogy a szummációs eljárások alkalmazási lehetőségeit részletesen taglalja, annyit mindenképpen meg kell említenünk, hogy a Fourier-sorok (vagy általában az ortogonális sorok) általában „egyszerűbben", „természetesebben" viselkednek a különféle átlagoló eljárásokkal vizsgálva, mint a közönséges konvergencia esetén. Itt elegendő például arra utalnunk, hogy egy $f \in L$ függvényt a Fourier-sora akár normában, akár majdnem mindenütt pontonként $(C, 1)$ értelemben előállít, ugyanakkor a Fourier-sor majdnem mindenütt divergens is lehet.

0.4. Kettős sorozatok és sorok

Hogyan értelmezhetjük egy $(s_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ kettős sorozat konvergenciáját? A válasz kézenfekvőnek tűnik:

0.13. DEFINÍCIÓ (Pringsheim). $s_{mn} \to s$, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan ν, hogy bármely $n, m > \nu$ esetén $|s_{mn} - s| < \varepsilon$.

Azonban ezt a definíciót használva, a legtöbb régi tételünk nem marad érvényben, hiszen például ha $s_{0n} = n$, és $s_{mn} = 0$ különben, akkor egyrészt s_{mn} konvergál (a 0-hoz). másrészt nem korlátos. A fenti definíció mellé persze megkövetelhetjük az $|s_{mn}| \leq K$ korlátosságot is, de ez már egy újabb, kevésbé természetes definíció.

Még több a lehetőség kettős sorok esetén. A

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$$

sort elképzelhetjük úgy, mintha egy „két irányban végtelem mátrix" összes elemeit össze kellene adni – de hogyan?

Összeadhatjuk a számokat előbb átlósan,mint a Cauchy-szorzatsor, majd ezeket a részletösszegeket egy közönséges sorként, vagy képezhetünk „negyedkör-részletösszegeket"; összeadhatjuk a számokat előbb soronként, majd oszloponként, vagy fordítva, így tulajdonképpen „$\omega \cdot \omega$ rendtípusú" sorrá rendezve át a kettős sort. Talán érdemes formalizálni is:

$$\sum_{n}^{\infty}\Big(\sum_{k+l=n} a_{kl}\Big), \quad \lim_{n}\Big(\sum_{k^2+l^2\leq n^2} a_{kl}\Big); \quad \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\Big), \quad \sum_{l=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl}\Big).$$

Azt is megtehetjük, hogy képezve az

$$s_{mn} := \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \tag{0.12}$$

téglalap-részletösszegeket, feladatunkat visszavezetjük a kettős sorozatok problémájára.

* Itt és a továbbiakban, K valamely pozitív konstanst jelöl, nem feltétlenül mindenütt ugyanazt. K tehát nem függ az adott formula változóitól (mint itt n), de esetleg függhet a paraméterektől (mint itt α és β).

Szegedi Egyetemi Könyvtár SZTE

Példákkal bizonyítható, hogy a fenti definíciók egymástól különböznek, sőt, általában nem is összehasonlíthatók. (Bár pozitív tagú soroknál minden „rendtípus szerinti" átrendezés, így a fenti definíciók mindegyike egyenértékű.)

Sok szempontból kényelmes az alábbi definíció:

0.14. DEFINÍCIÓ. A $\sum a_{kl}$ kettős sort *regulárisan konvergensnek* nevezzük az s számhoz, ha a (0.12) szerinti téglalap-részletösszegei Pringsheim értelemben s-hez konvergálnak, és a kettős sor valamennyi sora és oszlopa szintén konvergál, mint egyszeres sor.

Ehhez a definícióhoz természetes módon megfogalmazható a Cauchy-kritérium is:

0.15. TÉTEL (Móricz F., [Mo1]). *A* $\sum a_{kl}$ *kettős sor regulárisan konvergens akkor és csak akkor, ha bármely* $\varepsilon > 0$*-hoz megadható olyan* ν*, hogy valahányszor* $\max\{m, n\} > \nu$*, bármely* $p, q \geq 0$ *esetén*

$$\Big|\sum_{k=m}^{m+p}\sum_{l=n}^{l+q} a_{kl}\Big| < \varepsilon.$$

1. Általánosított abszolút Cesàro szummálhatóság

1.1. A definíciókról

A $\sum a_k$ egyszeres sor esetében az abszolút konvergenciát a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n - s_{n-1}| < \infty \tag{1.1}$$

feltétellel definiáltuk.

Ennek mintájára, megalkothatjuk az abszolút Cesàro szummálhatóság fogalmát. A formulákat egyszerűsíti, ha bevezetjük a

$$\tau_n^\alpha := n(\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} k a_k$$

jelölést.

1.1. DEFINÍCIÓ. A $\sum a_k$ egyszeres sort α rendben abszolút Cesàro szummálhatónak, röviden $|C,\alpha|$ szummálhatónak nevezzük, ha $\alpha > -1$ és

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\tau_n^\alpha| < \infty.$$

A sort $|C,\alpha|_\lambda$ szummálhatónak nevezzük, ha $\alpha > -1$, $\lambda \geq 1$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha|^\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\tau_n^\alpha|^\lambda < \infty.$$

A sort $|C,\alpha,u|_\lambda$ szummálhatónak nevezzük, ha $\alpha > -1$, $\lambda \geq 1$, $u \geq 0$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda u+\lambda-1} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha|^\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda u-1} |\tau_n^\alpha|^\lambda < \infty. \tag{1.2}$$

A definíció második és harmadik része Flett-től származik [Fl1, Fl2]. A definíciók egymásutánja szebben látszik a τ-s alakoknál. Valójában τ_n^α nem pusztán ügyes jelölés, hanem a ka_k sorozat (C,α)-közepe is.

Ha kettős sorokra is ki akarjuk terjeszteni az abszolút konvergencia fogalmát, természetesen kínálkozik a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |s_{mn} - s_{m-1,n} - s_{m,n-1} + s_{m-1,n-1}| < \infty \tag{1.3}$$

feltétel. Az 0.4. szakaszban már láttuk, hogy kettős sorok esetében a sorokra és oszlopokra is ki kell róni valamilyen feltételt. Követeljük meg tehát, hogy

$$\sum_{m=1}^{\infty} |s_{m0} - s_{m-1,0}| < \infty, \tag{1.4}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_{0n} - s_{0,n-1}| < \infty. \tag{1.5}$$

Ez a három feltétel már elegendő is, hiszen (1.3)-ból speciálisan $n = 1$ választással

$$\sum_{m=1}^{\infty} |s_{m1} - s_{m-1,1} - s_{m0} + s_{m-1,0}| < \infty,$$

amit (1.4)-gyel összeadva és felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |s_{m1} - s_{m-1,1}| < \infty,$$

és így tovább, minden sorra és oszlopra.

Az abszolút szummálhatóság hasonló formulákkal definiálható, az s_{mn} részletösszegek helyett a

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta} = \frac{1}{A_m^{\alpha}} \frac{1}{A_n^{\beta}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-i}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} a_{ik}, \quad m, n = -1, 0, 1, \ldots,$$

Cesàro-közepek segítségével.

Kettős sorok abszolút Cesàro szummálhatóságával sokan foglalkoztak, többek között I. E. Zak és M. F. Timan [ZT], Móricz Ferenc [Mo2], Szalay István [Sz1]. Mi most rögtön a legáltalánosabb definíciót adjuk meg.

1.2. DEFINÍCIÓ (Németh Z., [Ne1]). Legyen $\alpha, \beta > -1$, $u, v \geq 0$, $\lambda \geq 1$. A $\sum a_{ik}$ kettős sort $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_{\lambda}$ szummálhatónak nevezzük, ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\lambda u - 1} |z_{i0}^{\alpha\beta}|^{\lambda} < \infty, \tag{1.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda v - 1} |t_{0k}^{\alpha\beta}|^{\lambda} < \infty \tag{1.7}$$

és

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} i^{\lambda u - 1} k^{\lambda v - 1} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^{\lambda} < \infty, \tag{1.8}$$

ahol

$$z_{mn}^{\alpha\beta} = m(\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha\beta}) = \frac{1}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-i}^{\alpha-1} A_{n-k}^{\beta} i a_{ik},$$

$$t_{mn}^{\alpha\beta} = n(\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha\beta}) = \frac{1}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-i}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta-1} k a_{ik}$$

és

$$\tau_{mn}^{\alpha\beta} = mn(\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha\beta} + \sigma_{m-1,n-1}^{\alpha\beta}) =$$

$$= \frac{1}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-i}^{\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-1} ik a_{ik}, \qquad m, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

---

* A tovabbiakban soreleji *-gal jelöljük az értekezés új fogalmait és eredményeit.

1.2. Permanenciatételek

Természetesen vetődik föl a kérdés, hogy a paraméterek változtatásakor milyen kapcsolat van a $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda$ eljárások között. Ezeket a kapcsolatokat írják le az alábbi tételek, melyek Flett [Fl2], Kogbetlianz [Ko], Szalay [Sz1], Zak és Timan [ZT] eredményeinek általánosításai.

*1.3. TÉTEL (Németh Z., 1992 [Ne1]). *Legyenek* $\lambda \geq 1$, $u,v \geq 0$, $\alpha > \lambda u - 1$. *és* $\beta > \lambda v - 1$. *Ekkor* $\gamma,\delta \geq 0$ *esetén* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow |C,(\alpha+\gamma,\beta+\delta),(u,v)|_\lambda$. *és érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek (beleértve a jobb oldalon álló sorok konvergenciáját is)*:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}|z_{m0}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}|^\lambda \leq K\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}|z_{m0}^{\alpha\beta}|^\lambda,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda v-1}|t_{0n}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}|^\lambda \leq K\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda v-1}|t_{0n}^{\alpha\beta}|^\lambda,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}n^{\lambda v-1}|\tau_{mn}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}|^\lambda \leq K\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}n^{\lambda v-1}|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|^\lambda.$$

*1.4. TÉTEL (Németh Z., 1992 [Ne1]). *Legyenek* $u,v \geq 0$, $\alpha > \lambda u - 1$, *és* $\beta > \lambda v - 1$. *Ekkor*

(i) $\mu > \lambda > 1$ *és* $\delta = 1/\lambda - 1/\mu$, *vagy*

(ii) $\mu > \lambda = 1$ *és* $\delta > 1/\lambda - 1/\mu$ *esetén* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow |C,(\alpha+\gamma,\beta+\delta),(u,v)|_\mu$. *és érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek*:

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\mu u-1}|z_{m0}^{\alpha+\delta,\beta+\delta}|^\mu\Big)^{1/\mu} \leq K\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}|z_{m0}^{\alpha\beta}|^\lambda\Big)^{1/\lambda}, \tag{1.9}$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu v-1}|t_{0n}^{\alpha+\delta,\beta+\delta}|^\mu\Big)^{1/\mu} \leq K\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda v-1}|t_{0n}^{\alpha\beta}|^\lambda\Big)^{1/\lambda}, \tag{1.10}$$

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\mu u-1}n^{\mu v-1}|\tau_{mn}^{\alpha+\delta,\beta+\delta}|^\mu\Big)^{1/\mu} \leq K\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}n^{\lambda v-1}|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|^\lambda\Big)^{1/\lambda}. \tag{1.11}$$

*1.5. TÉTEL (Németh Z., 1992 [Ne1]). *Legyenek* $\lambda \geq 1$, $u,v \geq 0$, $\alpha > \lambda u-1$, $\beta > \lambda v-1$, $\xi \leq u$, $\eta \leq v$, $\gamma \geq \xi - u$, $\delta \geq \eta - v$, *és* $\alpha+\gamma,\beta+\delta > -1$. *Ekkor* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow |C,(\alpha+\gamma,\beta+\delta),(\xi,\eta)|_\lambda$, *és érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek*:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda\xi-1}|z_{m0}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}|^\lambda \leq K\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}|z_{m0}^{\alpha\beta}|^\lambda,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda\eta-1}|t_{0n}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}|^\lambda \leq K\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda v-1}|t_{0n}^{\alpha\beta}|^\lambda,$$

és

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\lambda\xi-1}n^{\lambda\eta-1}|\tau_{mn}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}|^\lambda \leq K\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}n^{\lambda v-1}|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|^\lambda.$$

A későbbi alkalmazások érdekében érdemes specializálni az 1.5. tételt:

*1.6. KÖVETKEZMÉNY (Németh Z., 1992 [Ne1]).
(i) *Legyenek* $\lambda \geq 1$, $0 \leq \xi' \leq \alpha$, $0 \leq \eta' \leq \beta$. *Ekkor, ha a* $\sum a_{ik}$ *kettős sor* $|C,(\alpha,\beta),(0,0)|_\lambda$ *szummálható, érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-\lambda\xi'}|z_{m0}^{\alpha-\xi',\beta-\eta'}|^\lambda \leq K\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}|z_{m0}^{\alpha\beta}|^\lambda,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\lambda\eta'}|t_{0n}^{\alpha-\xi',\beta-\eta'}|^\lambda \leq K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|t_{0n}^{\alpha\beta}|^\lambda,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-1-\lambda\xi'}n^{-1-\lambda\eta'}|\tau_{mn}^{\alpha-\xi',\beta-\eta'}|^\lambda \leq K\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-1}n^{-1}|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|^\lambda.$$

(ii) $\lambda \geq 1$, $\alpha,\beta \geq 0$ *esetén, ha a sor* $|C,(\alpha,\beta),(0,0)|_\lambda$ *szummálható, érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda-1-\lambda\alpha}|a_{m0}|^\lambda \leq K\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}|z_{m0}^{\alpha\beta}|^\lambda,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1-\lambda\beta}|a_{0n}|^\lambda \leq K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|t_{0n}^{\alpha\beta}|^\lambda,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\lambda-1-\lambda\alpha}n^{\lambda-1-\lambda\beta}|a_{mn}|^\lambda \leq K\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-1}n^{-1}|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|^\lambda.$$

*1.7. TÉTEL (Németh Z., 1992 [Ne1]). *Legyenek* $\lambda > \mu \geq 1$, $u,v \geq 0$, $\alpha > \mu u - 1$, $\beta > \mu v - 1$, $\xi \leq u$, $\eta \leq v$, $\gamma > \xi - u$, $\delta > \eta - v$. *Ekkor* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow |C,(\alpha+\gamma,\beta+\delta),(\xi,\eta)|_\mu$, *és érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\mu\xi-1}|z_{m0}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}|^\mu\Big)^{1/\mu} \leq K\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}|z_{m0}^{\alpha\beta}|^\lambda\Big)^{1/\lambda},$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu\eta-1}|t_{0n}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}|^\mu\Big)^{1/\mu} \leq K\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda v-1}|t_{0n}^{\alpha\beta}|^\lambda\Big)^{1/\lambda},$$

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\mu\xi-1}n^{\mu\eta-1}|\tau_{mn}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}|^\mu\Big)^{1/\mu} \leq K\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\lambda u-1}n^{\lambda v-1}|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|^\lambda\Big)^{1/\lambda}.$$

Vizsgáljuk még meg az abszolút és a közönséges szummálhatóság kapcsolatát. Még az egyszeres sorok esetében is, az 1.1. definíció szerinti $|C,\alpha|_\lambda$ szummálhatóságból $\lambda > 1$ esetén nem következik a (C,α) szummálhatóság (míg $\lambda = 1$ esetén igen) (lásd [Sz2]).

Érvényes azonban az alábbi

*1.8. TÉTEL (Németh Z., 1992 [Ne1]). *Legyenek* $\lambda > 1$, $u,v > 0$, $\alpha > u - 1$, $\beta > v - 1$, $\gamma > \alpha - u - 1/\lambda > 0$, *és* $\delta > \beta - v - 1/\lambda > 0$. *Ekkor* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow (C,(\gamma,\delta))$, *azaz, a* $\sigma_{mn}^{\gamma\delta}$*-közepek korlátosak és Pringsheim értelemben konvergensek.*

Példákkal megmutatható, hogy fenti tételeink a „lehető legjobbak".

*1.9. PÉLDA (Németh Z., 1992 [Ne1]). Ha $\mu > \lambda > 1$ és $\min(\gamma,\delta) < 1/\lambda - 1/\mu$, akkor bármely $\xi,\eta \geq 0$ esetén található olyan sor, amely $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda$ szummálható, de nem $|C,(\alpha+\gamma,\beta+\delta),(\xi,\eta)|_\mu$ szummálható.

*1.10. PÉLDA (Németh Z., 1992 [Ne1]). Ha $\mu > \lambda = 1$ és $\min(\gamma, \delta) \leq 1 - 1/\mu$, akkor bármely $\xi, \eta \geq 0$ esetén található olyan sor, amely $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_1$ szummálható, de nem $|C, (\alpha + \gamma, \beta + \delta), (\xi, \eta)|_\mu$ szummálható.

*1.11. PÉLDA (Németh Z., 1992 [Ne1]). Ha $\lambda, \mu \geq 1$, $u, v \geq 0$, $\alpha > u - 1$, $\beta > v - 1$, és $\xi > u$ vagy $\eta > v$, akkor bármely α_1, β_1 ($\alpha_1 > \xi - 1$, $\beta_1 > \eta - 1$) esetén található olyan sor, amely $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda$ szummálható, de nem $|C, (\alpha_1, \beta_1), (\xi, \eta)|_\mu$ szummálható.

*1.12. PÉLDA (Németh Z., 1992 [Ne1]). Legyenek $\lambda > \mu \geq 1$ és $u, v \geq 0$. Ekkor bármely $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ ($\alpha, \alpha_1 > u - 1$, $\beta, \beta_1 > v - 1$) esetén található olyan sor, amely $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda$ szummálható, de nem $|C, (\alpha_1, \beta_1), (u, v)|_\mu$ szummálható.

A $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda$ szummálhatóságra vonatkozó eredményeink segítségével új eredményeket nyerhetünk a kevésbé általános $|C, (\alpha, \beta)|_\lambda$ módszerre is. Ilyen a következő „approximációs" tétel, mely az 1.2 és 1.3 tételek analogonja.

*1.13. TÉTEL (Németh Z., 1991, [Ne2]). *Legyen $\alpha, \beta > -1$, s egy tetszőleges szám (akár a sor összege) és*
(i) $\mu > \lambda > 1$ *és* $\min(\gamma, \delta) \geq 1/\lambda - 1/\mu$, *vagy*
(ii) $\mu > \lambda = 1$ *és* $\min(\gamma, \delta) > 1/\lambda - 1/\mu$, *vagy*
(iii) $\mu = \lambda \geq 1$ *és* $\min(\gamma, \delta) \geq 0$. *Ekkor érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} |\sigma_{m0}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta} - s|^\mu \Big)^{1/\mu} \leq K \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} |\sigma_{m0}^{\alpha\beta} - s|^\lambda \Big)^{1/\lambda},$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\sigma_{0n}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta} - s|^\mu \Big)^{1/\mu} \leq K \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\sigma_{0n}^{\alpha\beta} - s|^\lambda \Big)^{1/\lambda},$$

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} n^{-1} |\sigma_{mn}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta} - s|^\mu \Big)^{1/\mu} \leq$$

$$\leq K \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} n^{-1} |\sigma_{mn}^{\alpha,\beta} - s|^\lambda \Big)^{1/\lambda}.$$

Ennek azonnali következménye a következő elegendő feltétel:

*1.14. TÉTEL (Németh Z., 1991, [Ne2]). *Legyenek $\alpha, \beta > -1$, és $\lambda \geq 1$. Ekkor, ha a*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} |\sigma_{m0}^{\alpha\beta} - s|^\lambda,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\sigma_{0n}^{\alpha\beta} - s|^\lambda,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1} n^{-1} |\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - s|^\lambda$$

sorok konvergensek, a $\sum a_{ik}$ sor $|C, (\alpha + 1, \beta + 1)|_\lambda$ szummálható.

1.3. Bizonyítások

Az 1.2. szakasz tételeit és példáit részletesen tárgyalják a [Ne1, Ne2] cikkek. Mivel a bizonyítások hasonló technikákat, ötleteket alkalmaznak, itt csak az egyik legjellegzetesebbet, az 1.4. tétel (i) esetét tárgyaljuk részletesen.

A bizonyításhoz szükségünk lesz néhány lemmára.

1.15. LEMMA. *Érvényes az alábbi, ún. Kogbetlianz-azonosság:*

$$\tau_{mn}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta} = \frac{1}{A_m^{\alpha+\gamma} A_n^{\beta+\delta}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-i}^{\gamma-1} A_{n-k}^{\delta-1} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} \tau_{ik}^{\alpha\beta}.$$

Hasonló összefüggés érvényes a z_{mn} és t_{mn} közepekre is.

1.16. LEMMA (Hardy, Littlewood, Pólya, 1926 [HLP]). *Legyen $(d_i)_{i=0}^{\infty}$ egy nemnegatív tagú sorozat. Ha $\mu > \lambda > 1$ és $\delta = 1/\lambda - 1/\mu$, létezik olyan $K = K(\lambda, \mu)$ állandó, hogy*

$$\Big(\sum_{m=0}^{M} \Big(\sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^{\delta-1} d_i \Big)^{\mu} \Big)^{1/\mu} \le K \Big(\sum_{i=0}^{M} d_i^{\lambda} \Big)^{1/\lambda}$$

$M = 0, 1, 2, \ldots$ értékre.

Ennek a kettős változata az alábbi

1.17. LEMMA (Szalay, 1991 [Sz3]). *Legyen $(d_{ik})_{i,k=0}^{\infty}$ egy nemnegatív tagú kettős sorozat. Ha $\mu > \lambda > 1$ és $\delta = 1/\lambda - 1/\mu$, létezik olyan $K = K(\lambda, \mu)$ állandó, hogy*

$$\Big(\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} (m-i)^{\delta-1} (n-k)^{\delta-1} d_{ik} \Big)^{\mu} \Big)^{1/\mu} \le K \Big(\sum_{i=0}^{M} \sum_{k=0}^{N} d_{ik}^{\lambda} \Big)^{1/\lambda}$$

fennáll bármely $M, N = 0, 1, 2, \ldots$ értékre.

Az 1.4. tétel bizonyítására rátérve, először is jegyezzük meg, hogy az (1.9) és (1.10) egyenlőtlenségek következnek Flett [Fl2] egyszeres sorokra vonatkozó eredményeiből (hiszen az 1.15. lemma értelmében például a $z_{m0}^{\alpha\beta}$ β-tól függetlenül a $\sum_{i=0}^{\infty} a_{i0}$ egyszeres sor közönséges α-rendű Cesàro-közepe), így nekünk csak (1.11)-et kell bizonyítanunk.

Jelöljük az (1.11) jobb oldalán álló sor összegét S-sel. Az 1.3. tétel értelmében az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $\delta = 1/\lambda - 1/\mu$. Az 1.15. lemma szerint

$$|\tau_{mn}^{\alpha+\delta,\beta+\delta}| \le \frac{1}{A_m^{\alpha+\delta} A_n^{\beta+\delta}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-i}^{\delta-1} A_{n-k}^{\delta-1} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}| \le$$

$$\le \frac{1}{A_m^{\alpha+\delta}} \frac{1}{A_n^{\beta+\delta}} \Big(\sum_{i=0}^{m/2} \sum_{k=0}^{n/2} + \sum_{i=0}^{m/2} \sum_{k=n/2}^{n} + \sum_{i=m/2}^{m} \sum_{k=0}^{n/2} + \sum_{i=m/2}^{m} \sum_{k=n/2}^{n} \Big) =: T_{mn}^1 + T_{mn}^2 + T_{mn}^3 + T_{mn}^4.$$

Felhasználva a (0.8) aszimptotikát,

$$T_{mn}^1 = \frac{1}{A_m^{\alpha+\delta}} \frac{1}{A_n^{\beta+\delta}} \sum_{i=0}^{m/2} \sum_{k=0}^{n/2} A_{m-i}^{\delta-1} A_{n-k}^{\delta-1} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}| \le K \frac{1}{A_m^{\alpha+1}} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_i^{\alpha} A_k^{\beta} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|.$$

Legyen ω egy olyan szám, amelyre

$$\max(-\alpha - 1/\lambda + u, -\beta - 1/\lambda + v) < \omega < (\lambda - 1)/\lambda.$$

Könnyen kiszámolható, hogy

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} i^{-\omega\lambda/(\lambda-1)} k^{-\omega\lambda/(\lambda-1)} \Big)^{(\lambda-1)/\lambda} \le K m^{-\omega+(\lambda-1)/\lambda} n^{-\omega+(\lambda-1)/\lambda}. \tag{1.12}$$

Alkalmazva a Hölder egyenlőtlenséget a μ, $\lambda/(\lambda-1)$, $\mu\lambda/(\mu-\lambda)$ kitevőkkel, kapjuk, hogy

$$T^1_{mn} \le Km^{-\alpha-1}n^{-\beta-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(i^{\alpha+\omega-(\lambda u-1)(\mu-\lambda)/\lambda\mu}k^{\beta+\omega-(\lambda v-1)(\mu-\lambda)/\lambda\mu}|\tau^{\alpha\beta}_{ik}|^{\lambda/\mu}) \times$$

$$\times (i^{-\omega}k^{-\omega})(i^{(\lambda u-1)(\mu-\lambda)/\lambda\mu}k^{(\lambda v-1)(\mu-\lambda)/\lambda\mu}|\tau^{\alpha\beta}_{ik}|^{(\mu-\lambda)/\mu}) \le$$

$$\le Km^{-\alpha-1}n^{-\beta-1}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} i^{\alpha\mu+\omega\mu-(\lambda u-1)(\mu-\lambda)/\lambda}k^{\beta\mu+\omega\mu-(\lambda v-1)(\mu-\lambda)/\lambda}|\tau^{\alpha\beta}_{ik}|^{\lambda}\Big)^{1/\mu} \times$$

$$\times \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} i^{-\omega\lambda/(\lambda-1)}k^{-\omega\lambda/(\lambda-1)}\Big)^{(\lambda-1)/\lambda}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} i^{\lambda u-1}k^{\lambda v-1}|\tau^{\alpha\beta}_{ik}|^{\lambda}\Big)^{\mu-\lambda)/\lambda\mu} \le$$

$$\le KS^{\mu-\lambda)/\lambda\mu}m^{-\alpha-\omega-1/\lambda}n^{-\beta-\omega-1/\lambda} \times$$

$$\times \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} i^{\alpha\mu+\omega\mu-(\lambda u-1)(\mu-\lambda)/\lambda}k^{\beta\mu+\omega\mu-(\lambda v-1)(\mu-\lambda)/\lambda}|\tau^{\alpha\beta}_{ik}|^{\lambda}\Big)^{1/\mu},$$

ezért

$$(T^1_{mn})^{\mu} \le KS^{\mu-\lambda)/\lambda}m^{-\alpha\mu-\omega\mu-\mu/\lambda}n^{-\beta\mu-\omega\mu-\mu/\lambda}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} i^{\lambda u-1}k^{\lambda v-1} \times$$

$$\times |\tau^{\alpha\beta}_{ik}|^{\lambda}i^{\alpha\lambda\mu+\omega\lambda\mu-u\lambda\mu+\mu)/\lambda}k^{\beta\lambda\mu+\omega\lambda\mu-v\lambda\mu+\mu)/\lambda},$$

és bármely $M, N = 1, 2, \dots$ értékre

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} m^{\mu u-1}n^{\mu v-1}(T^1_{mn})^{\mu} \le KS^{\mu-\lambda)/\mu}\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} i^{\lambda u-1}k^{\lambda v-1}|\tau^{\alpha\beta}_{ik}|^{\lambda} \times$$

$$\times i^{\alpha\lambda\mu+\omega\lambda\mu-u\lambda\mu+\mu)/\lambda}k^{\beta\lambda\mu+\omega\lambda\mu-v\lambda\mu+\mu)/\lambda} \times$$

$$\times \sum_{m=i}^{M}\sum_{n=k}^{N} m^{-\alpha\mu-\omega\mu-\mu/\lambda+\mu u-1}n^{-\beta\mu-\omega\mu-\mu/\lambda+\mu v-1} \le KS^{\mu/\lambda},$$

hiszen, mint az könnyen kiszámolható,

$$i^{\alpha\lambda\mu+\omega\lambda\mu-u\lambda\mu+\mu)/\lambda}\sum_{m=i}^{M} m^{-\alpha\mu-\omega\mu-\mu/\lambda+\mu u-1} \le K. \tag{1.13}$$

A következő tagra

$$T^2_{mn} = \frac{1}{A^{\alpha+\delta}_m}\frac{1}{A^{\beta+\delta}_n}\sum_{i=0}^{m/2}\sum_{k=n/2}^{n} A^{\delta-1}_{m-i}A^{\delta-1}_{n-k}A^{\alpha}_i A^{\alpha}_k|\tau^{\alpha\beta}_{ik}| \le$$

$$\le K\frac{1}{A^{\alpha+1}_m}\sum_{i=0}^{m/2}\sum_{k=n/2}^{n} A^{\delta-1}_{n-k}A^{\alpha}_i k^{-\delta}|\tau^{\alpha\beta}_{ik}|$$

és

$$n^{v-1/\mu}T^2_{mn} \le K\frac{1}{A^{\alpha+1}_m}\sum_{i=0}^{m/2}\sum_{k=n/2}^{n}(n-k+1)^{\delta-1}A^{\alpha}_i k^{v-1/\lambda}|\tau^{\alpha\beta}_{ik}| \le$$

$$\le K\frac{1}{A^{\alpha+1}_m}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^{\delta-1}A^{\alpha}_i(k+1)^{v-1/\lambda}|\tau^{\alpha\beta}_{ik}| +$$

$$+ K\frac{1}{A^{\alpha+1}_m}\sum_{i=0}^{m} A^{\alpha}_i n^{v-1/\lambda}|\tau^{\alpha\beta}_{in}| =: T^{2,1}_{mn} + T^{2,2}_{mn}.$$

Alkalmazva az 1.16. lemmát a

$$d_k^m = (k+1)^{v-1/\lambda} \sum_{i=1}^{m} A_i^\alpha |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|,$$

sorozatra, azt nyerjük, hogy bármely $N = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\sum_{n=1}^{N} (T_{mn}^{2,1})^\mu \le K m^{-\mu\alpha-\mu} \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^{\delta-1} d_k^m \Big)^\mu \le$$

$$\le K m^{-\mu\alpha-\mu} \Big(\sum_{k=0}^{N} (k+1)^{\lambda v-1} \Big(\sum_{i=1}^{m} A_i^\alpha |\tau_{ik}^{\alpha\beta}| \Big)^\lambda \Big)^{\mu/\lambda}.$$

Ismét a Hölder egyenlőtlenséget (λ és $\lambda/(\lambda-1)$ kitevőkkel), és (1.12)-t fölhasználva,

$$\sum_{i=1}^{m} A_i^\alpha |\tau_{ik}^{\alpha\beta}| \le K \sum_{i=0}^{m} \Big(i^{\alpha+\omega} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}| \Big) (i^{-\omega}) \le \tag{1.14}$$

$$\le K \Big(\sum_{i=1}^{m} i^{\lambda\alpha+\lambda\omega} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^\lambda \Big)^{1/\lambda} \Big(\sum_{i=1}^{m} i^{-\omega\lambda/(\lambda-1)} \Big)^{\lambda-1)/\lambda} \le$$

$$\le K m^{-\omega+(\lambda-1)/\lambda} \Big(\sum_{i=1}^{m} i^{\lambda\alpha+\lambda\omega} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^\lambda \Big)^{1/\lambda}.$$

valamint, a Hölder egyenlőtlenséget μ/λ és $\mu/(\mu-\lambda)$ kitevőkkel alkalmazva,

$$\sum_{n=1}^{N} (T_{mn}^{2,1})^\mu \le K m^{-\mu\alpha-\mu-\omega\mu+(\lambda-1)\mu/\lambda} \Big(\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} (k+1)^{\lambda v-1} i^{\lambda\alpha+\lambda\omega} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^\lambda \Big)^{\mu/\lambda} = \tag{1.15}$$

$$= K m^{-\mu\alpha-\mu-\omega\mu+(\lambda-1)\mu/\lambda} \Big(\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} ((k+1)^{\lambda v-1)\lambda/\mu} i^{\lambda\alpha+\lambda\omega-(\lambda u-1)(\mu-\lambda)/\mu} \times$$

$$\times |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^{\lambda^2/\mu}) ((k+1)^{\lambda v-1)(\mu-\lambda)/\mu} i^{\lambda u-1)(\mu-\lambda)/\mu} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^{\mu-\lambda)\lambda/\mu}) \Big)^{\mu/\lambda} \le$$

$$K m^{-\mu\alpha-\mu-\omega\mu+(\lambda-1)\mu/\lambda} S^{\mu-\lambda)/\mu} \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} (k+1)^{\lambda v-1} i^{\alpha\mu+\omega\mu-(\lambda u-1)(\mu-\lambda)/\lambda} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^\lambda.$$

(1.13) felhasználásával bármely $M = 1, 2, \ldots$ értékre kapjuk, hogy

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} m^{\mu u-1} (T_{mn}^{2,1})^\mu \le K S^{\mu-\lambda)/\lambda} \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} i^{\lambda u-1} (k+1)^{\lambda v-1} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^\lambda \times$$

$$\times i^{\alpha\mu+\omega\mu-u\mu+\mu/\lambda} \sum_{m=i}^{M} m^{-\alpha\mu-\omega\mu-\mu/\lambda+\mu u-1} \le K S^{\mu/\lambda}.$$

(1.14) felhasználásával, bármely $N = 1, 2, \ldots$ értékre

$$\sum_{n=1}^{N} (T_{mn}^{2,2})^\mu = K m^{-\mu\alpha-\mu} \sum_{n=1}^{N} n^{v-1/\lambda)\mu} \Big(\sum_{i=1}^{m} A_i^\alpha |\tau_{in}^{\alpha\beta}| \Big)^\mu \le$$

$$\le K m^{-\mu\alpha-\mu-\omega\mu+(\lambda-1)\mu/\lambda} \sum_{n=1}^{N} n^{v-1/\lambda)\mu} \Big(\sum_{i=1}^{m} i^{\lambda\alpha+\lambda\omega} |\tau_{in}^{\alpha\beta}|^\lambda \Big)^{\mu/\lambda}.$$

Jól ismert az az elemi egyenlőtlenség, hogy $a_i \ge 0$, $0 < p \le 1$ esetén

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^p \le a_1^p + a_2^p + \ldots + a_k^p, \tag{1.16}$$

SZTE Egyetemi Könyvtár SZTCDD

így

$$\sum_{n=1}^{N}(T_{mn}^{2,2})^{\mu} \le Km^{-\mu\alpha-\mu-\omega\mu+(\lambda-1)\mu/\lambda}\Big(\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} n^{\lambda v-1}i^{\lambda\alpha+\lambda\omega}|\tau_{in}^{\alpha\beta}|^{\lambda}\Big)^{\mu/\lambda},$$

és ugyanúgy fejezhetjük be a becslést, mint az (1.15)-nél.

Ezzel igazoltuk, hogy

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} m^{\mu u-1}n^{\mu v-1}(T_{mn}^{2})^{\mu} \le KS^{\mu/\lambda}.$$

Hasonló érveléssel látható be, hogy

$$\sum_{n=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} m^{\mu u-1}n^{\mu v-1}(T_{mn}^{3})^{\mu} \le KS^{\mu/\lambda}.$$

Tekintsük most T_{mn}^{4}-et.

$$T_{mn}^{4} = \frac{1}{A_m^{\alpha+\delta}A_n^{\beta+\delta}}\sum_{i=m/2}^{m}\sum_{k=n/2}^{n} A_{m-i}^{\delta-1}A_{n-k}^{\delta-1}A_i^{\alpha}A_k^{\beta}|\tau_{ik}^{\alpha\beta}| \le$$

$$\le K\sum_{i=m/2}^{m}\sum_{k=n/2}^{n} i^{-\delta}k^{-\delta}A_{m-i}^{\delta-1}A_{n-k}^{\delta-1}|\tau_{ik}^{\alpha\beta}|,$$

és

$$m^{u-1/\mu}n^{v-1/\mu}T_{mn}^{4} \le K\sum_{i=m/2}^{m-1}\sum_{k=n/2}^{n-1}(m-i)^{\delta-1}(n-k)^{\delta-1}i^{u-1/\lambda}k^{v-1/\lambda}|\tau_{ik}^{\alpha\beta}| +$$

$$+ Kn^{v-1/\lambda}\sum_{i=m/2}^{m-1}(m-i)^{\delta-1}i^{u-1/\lambda}|\tau_{in}^{\alpha\beta}| + Km^{u-1/\lambda}\sum_{k=n/2}^{n-1}(n-k)^{\delta-1}k^{v-1/\lambda}|\tau_{m,k}^{\alpha\beta}| +$$

$$+ Km^{u-1/\lambda}n^{v-1/\lambda}|\tau_{mn}^{\alpha\beta}| =: T_{mn}^{4,1} + T_{mn}^{4,2} + T_{mn}^{4,3} + T_{mn}^{4,4}.$$

Alkalmazva az 1.17. lemmát a

$$d_{ik} = (i+1)^{u-1/\lambda}(k+1)^{v-1/\lambda}|\tau_{ik}^{\alpha,\beta}|$$

kettős sorozatra, kapjuk, hogy bármely $M, N = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(T_{mn}^{4,1})^{\mu} \le K\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}(m-i)^{\delta-1}(n-k)^{\delta-1}d_{ik}\Big)^{\mu} \le$$

$$\le K\Big(\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}(i+1)^{\lambda u-1}(k+1)^{\lambda v-1}|\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^{\lambda}\Big)^{\mu/\lambda} \le KS^{\mu/\lambda}.$$

Alkalmazva az 1.16. lemmát a

$$d_i^n = (i+1)^{u-1/\lambda}|\tau_{in}^{\alpha\beta}|$$

sorozatra, kapjuk, hogy bármely $M = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\sum_{m=1}^{M}(T_{mn}^{4,2})^{\mu} \le Kn^{v\mu-\mu/\lambda}\sum_{m=1}^{M}\Big(\sum_{i=0}^{m-1}(m-i)^{\delta-1}d_i^n\Big)^{\mu} \le$$

$$\le Kn^{v\mu-\mu/\lambda}\Big(\sum_{i=1}^{M}(i+1)^{\lambda u-1}|\tau_{in}^{\alpha\beta}|^{\lambda}\Big)^{\mu/\lambda},$$

felhasználva (1.16)-ot, bármely $N = 1, 2, \ldots$ értékre

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(T_{mn}^{4,2})^{\mu} \le K\Big(\sum_{i=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(i+1)^{\lambda u-1}n^{\lambda v-1}|\tau_{in}^{\alpha\beta}|^{\lambda}\Big)^{\mu/\lambda} \le KS^{\mu/\lambda}.$$

Hasonló érveléssel látható be, hogy

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(T_{mn}^{4,3})^{\mu} \le KS^{\mu/\lambda},$$

és végezetül, ismét (1.16)-ot alkalmazva,

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(T_{mn}^{4,4})^{\mu} \le K\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}m^{u\mu-\mu/\lambda}n^{v\mu-\mu/\lambda}|\tau_{mn}^{\alpha,\beta)}|^{\mu} \le$$

$$\le K\Big(\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}m^{\lambda u-1}n^{\lambda v-1}|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|^{\lambda}\Big)^{\mu/\lambda} \le KS^{\mu/\lambda}.$$

Összegyűjtve becsléseinket, az $i = 1, 2, 3, 4$ értékekre egyaránt fennáll, hogy

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}m^{\mu u-1}n^{\mu v-1}(T_{mn}^{i})^{\mu} \le KS^{\mu/\lambda},$$

s ezzel a bizonyítás kész. □

A teljesség kedvéért vizsgáljuk meg a megfelelő negatív eredményt is, azaz az 1.9. példát!

Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $\gamma < 1/\lambda - 1/\mu$ és $0 \le u, v \le 1/\lambda$. Legyen

$$a_{ik} = \begin{cases} c_i, & \text{ha } k = 0, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ekkor, mint az könnyen ellenőrizhető, a $\sum c_i$ sor $|C, \alpha, u|_{\lambda}$ szummálhatósága, és a $\sum a_{ik}$ kettős sor $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_{\lambda}$ szummálhatósága ekvivalens fogalmak.

Az $u > 0$ esetben, válasszunk egy p számot, amelyre $\lambda/(1 - u\lambda) < p < \lambda$, és legyen $\sum c_i$ olyan sor, amelyre

$$\tau_m^{\alpha} = \begin{cases} m^{1/p}, & \text{ha } m = 2^{\nu}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A $\sum c_i$ sor $|C, \alpha, u|_{\lambda}$ szummálható, hiszen

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{\lambda u-1}|\tau_m^{\alpha}|^{\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(u\lambda-1-\lambda/p)} < \infty,$$

de nem $|C, \alpha+\gamma, 0|_{\mu}$ szummálható, mert

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1-\mu\gamma}|\tau_m^{\alpha}|^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(-1-\mu\gamma+\mu/p)} = \infty$$

és felhasználhatjuk az 1.6. következményt. Mivel nyilván igaz, hogy $|C, (\alpha+\gamma, \beta+\delta), (\xi, \eta)|_{\mu}$ $\Longrightarrow |C, (\alpha+\gamma, \beta+\delta), (0, 0)|_{\mu}$, az állítást beláttuk.

Az $u = 0$ esetben a megfelelő ellenpélda megtalálható Flett [Fl1] cikkében. □

1.4. Ortogonális sorok

Ebben a részben

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}\varphi_{ik}(x) \tag{1.17}$$

ortogonális sorokról lesz szó, ahol φ_{ik} egy (kettősen indexezett) ortonormált rendszer valamely $(X, \mathcal{A}, \mu)$ pozitív mértéktéren. (Ilyen például a $\varphi_{ik}(x,y) := \operatorname{sign}\sin i\pi x \operatorname{sign}\sin k\pi y$ kettős Rademacher rendszer az egységnégyzeten.)

Első eredményünk az „előjel-típusú" ortonormált rendszerekre vonatkozik (ilyen a Rademacher vagy a Walsh rendszer).

*1.18. TÉTEL (Németh Z., 1991, [Ne2]). *Legyen* $|\varphi_{ik}(x)| = 1$ *majdnem mindenütt,* $\alpha, \beta \geq 0$, *és* $\lambda \geq 1$. *Ekkor, ha az* (1.17) *sor majdnem mindenütt* $|C, (\alpha,\beta), |_\lambda$ *szummálható, a*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda-1-\lambda\alpha}|a_{m0}|^\lambda,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1-\lambda\beta}|a_{0n}|^\lambda,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\lambda-1-\lambda\alpha}n^{\lambda-1-\lambda\beta}|a_{mn}|^\lambda$$

sorok konvergensek.

Ez az eredmény az 1.4. tétel következménye. □

Tételezzük föl, hogy az a_{ik} együttható-sorozat mindkét indexében monoton csökken, azaz $a_{ik} \geq a_{i+1,k}$ és $a_{ik} \geq a_{i,k+1}$, továbbá, legyen $\alpha, \beta \geq 1 - 1/\lambda$. Ekkor az 1.18 tételben szereplő sorokat „diadikusan blokkolva", a szummálhatóság egy szükséges feltételét kapjuk. Hasonló feltételt bizonyítottak Móricz Ferenc és Szalay István [MSz] más úton, a $\lambda = 1$ esetben.

*1.19. KÖVETKEZMÉNY (Németh Z., 1991, [Ne2]). *Legyen* $|\varphi_{ik}(x)| = 1$ *majdnem mindenütt,* $\alpha, \beta \geq 1 - 1/\lambda$, $\lambda \geq 1$ *és* a_{ik} *mindkét indexében csökkenő. Ekkor, ha az* (1.17) *sor majdnem mindenütt* $|C, (\alpha,\beta), |_\lambda$ *szummálható, a*

$$\sum_{i=1}^{\infty}(2^{i(1-\alpha)}|a_{2^i,0}|)^\lambda,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k(1-\beta)}|a_{0,2^k}|)^\lambda,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(2^{i(1-\alpha)}2^{k(1-\beta)}|a_{2^i,2^k}|)^\lambda$$

sorok konvergensek.

Szakaszunk fő eredménye az ortogonális sorok $|C, (\alpha,\beta)|_\lambda$ szummálhatóságára vonatkozó együttható-feltételek megadása. Az első ilyen jellegű eredmény Tandori K.-tól származik:

1.20. TÉTEL (Tandori K., 1960, [Ta]). *Ha*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{2^{m-1}}^{2^m-1} a_i^2\Big)^{1/2} < \infty,$$

az (1.17) *sor majdnem mindenütt* $|C,1|$ *szummálható.*

Ezt az eredményt később Leindler László [Le] általánosította a $|C,\alpha \geq 0|$ esetre olyan módon, hogy a nagy zárójelen belül szerepel még egy α-tól függő multiplikátor, majd megint Leindler László és H. Schwinn [LeSch] úgy, hogy ilyen multiplikátor nem szerepel, helyette a nagy zárójelen belüli összegzés nem 2-hatványok, hanem más, α-tól függő határok között történik. Az utóbbi „tiszta blokkos" feltétel az általános esetben gyöngébb. Az $1 \leq \lambda < 2$ esetet Szalay István vizsgálta [Sz4].

A kettős sorokra vonatkozó feltételek az alábbiak:

*1.21. TÉTEL (Németh Z., 1991, [Ne2]). *Legyen* φ_{ik} *tetszőleges ortogonális rendszer,* $1 \leq \lambda < 2$, *és* $\alpha, \beta > 1 - 1/\lambda$. *Ekkor, ha*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} a_{ik}^2\Big)^{\lambda/2} < \infty,$$

az (1.17) *sor majdnem mindenütt* $|C,(\alpha,\beta)|_\lambda$ *szummálható, ahol*

$$\mu_m \equiv \mu_m^{\alpha\lambda} := \begin{cases} 2^{m-1}, & ha \quad \alpha > 1/2, \\ 2^{(m-1)^{(2-\lambda)/2}}, & ha \quad \alpha = 1/2, \\ m^{(2-\lambda)/(\lambda(1-2\alpha))}, & ha \ 1 - 1/\lambda < \alpha < 1/2. \end{cases}$$

Ha $\alpha \leq 1 - 1/\lambda$, hasonló, de nem „tiszta blokkos" feltételt bizonyíthatunk. A lehetséges esetek közül az egyik:

*1.22. TÉTEL (Németh Z., 1991, [Ne2]). *Legyen* φ_{ik} *tetszőleges ortogonális rendszer,* $1 \leq \lambda < 2$, $-1 < \alpha \leq 1 - 1/\lambda$, *és* $1 - 1/\lambda < \beta$. *Ekkor, ha*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=2^{m-1}}^{2^m-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} i^{1-2\alpha} a_{ik}^2\Big)^{\lambda/2} < \infty,$$

az (1.17) *sor majdnem mindenütt* $|C,(\alpha,\beta)|_\lambda$ *szummálható.*

1.23. MEGJEGYZÉS. A szokásos módszerekkel az is bebizonyítható, hogy ha φ_{ik} a kettős Rademacher rendszer és a_{ik} mindkét indexében monoton csökken, a fenti feltételek szükségesek is, ebben az értelemben tételeink a „lehető legjobbak" (lásd pl. [Ne3]).

1.24. MEGJEGYZÉS. Hasonló feltételeket sikerült bizonyítanunk az általánosabb $|C, (\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda$ esetben is [Ne3]. Azért nem ezeket idézzük, mert nem „tiszta blokkos", hanem „multiplikátoros", tehát kevésbé elegáns eredmények.

1.5. Az együttható-feltétel bizonyítása

Az 1.3. szakaszhoz hasonlóan, itt is csak a legfontosabb 1.21. tétel bizonyítását adjuk meg. Mivel a bizonyítás igen sok rutinjellegű számolást tartalmaz, megpróbáljuk [Ne2]-höz képest kicsit rövidíteni. A bizonyítás alapvetően [LeSch]-ra épül.

Először alakítsuk át a feltételt:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}a_{ik}^2\Big)^{\lambda/2}=$$

$$=a_{0,0}^{\lambda}+\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}a_{i,0}^2\Big)^{\lambda/2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}a_{k,0}^2\Big)^{\lambda/2}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}a_{ik}^2\Big)^{\lambda/2}.$$

A második és harmadik tagban szereplő összeg végessége miatt, Szalay [Sz4] megfelelő eredményeit alkalmazva kapjuk a z_{mn} és t_{mn} közepekre vonatkozó, az (1.6)-(1.7)-nek megfelelő eredményeket. Az (1.8) egyenlőtlenség bizonyításához, a Beppo Levi-tételt használva, elegendő belátnunk, hogy

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m^{-1}n^{-1}\int_X|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|^{\lambda}\,d\mu\le K\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}a_{ik}^2\Big)^{\lambda/2}. \tag{1.18}$$

Jelöljük a jobb oldalon álló sor összegét S-sel. Legyen továbbá

$$L_{ip}^{\alpha}=\frac{A_{i+1-p}^{\alpha}}{A_i^{\alpha}}-\frac{A_{i-p}^{\alpha}}{A_i^{\alpha}},\qquad L_{ikpq}^{\alpha\beta}=L_{ip}^{\alpha}\cdot L_{kq}^{\beta},$$

$$\kappa_m\equiv\kappa_m^{\alpha\lambda}:=(\mu_{m+1})^{\lambda/(2-\lambda)}-(\mu_m)^{\lambda/(2-\lambda)}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely $m=1,2,\dots$ esetén

$$\kappa_m\le\begin{cases}K2^{m\lambda/(2-\lambda)}, & \text{ha }\ \alpha>1/2,\\ Km^{-\lambda/2}2^{\lambda/(2-\lambda)m^{(2-\lambda)/2}}, & \text{ha }\ \alpha=1/2,\\ Km^{2\alpha/(1-2\alpha)}, & \text{ha }\ \alpha<1/2.\end{cases} \tag{1.19}$$

Alkalmazva a Hölder egyenlőtlenséget a $2/\lambda$, $2/(2-\lambda)$ kitevőkkel,

$$I:=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m^{-1}n^{-1}\int_X|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|^{\lambda}\,d\mu\le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}(i+1)^{\lambda-1}(k+1)^{\lambda-1}\Big(\int_X|\sigma_{i+1,k+1}^{\alpha\beta}-\sigma_{i,k+1}^{\alpha\beta}-\sigma_{i+1,k}^{\alpha\beta}+\sigma_{ik}^{\alpha\beta}|^2\,d\mu\Big)^{\lambda/2}\le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}((i+1)^{\lambda-1}(k+1)^{\lambda-1})^{2/(2-\lambda)}\Big)^{(2-\lambda)/2}\times$$

$$\times\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\int_X|\sigma_{i+1,k+1}^{\alpha\beta}-\sigma_{i,k+1}^{\alpha\beta}-\sigma_{i+1,k}^{\alpha\beta}+\sigma_{ik}^{\alpha\beta}|^2\,d\mu\Big)^{\lambda/2}\le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_m^{(2-\lambda)/2}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\int_X|\sigma_{i+1,k+1}^{\alpha\beta}-\sigma_{i,k+1}^{\alpha\beta}-\sigma_{i+1,k}^{\alpha\beta}+\sigma_{ik}^{\alpha\beta}|^2\,d\mu\Big)^{\lambda/2}\le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_m^{(2-\lambda)/2}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\Big(\sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{k}(L_{ikpq}^{\alpha\beta})^2a_{pq}^2+$$

$$+\Big(\frac{1}{A_{i+1}^{\alpha}}\Big)^2\sum_{q=0}^{k}(L_{kq}^{\beta})^2a_{i+1,q}^2+\Big(\frac{1}{A_{k+1}^{\beta}}\Big)^2\sum_{p=0}^{i}(L_{ip}^{\alpha})^2a_{p,k+1}^2+\Big(\frac{1}{A_{i+1}^{\alpha}}\Big)^2\Big(\frac{1}{A_{k+1}^{\beta}}\Big)^2a_{i+1,k+1}^2\Big)\Big)^{\lambda/2}.$$

Könnyen kiszámolható, hogy bármely $i,k=1,2\dots,\ p,q=0,1\dots$ értékekre

$$|L_{ip}^{\alpha}| = K\frac{(i+1-p)^{\alpha-1}p}{i^{\alpha+1}},$$

$$|L_{ikpq}^{\alpha\beta}| = K\frac{(i+1-p)^{\alpha-1}p}{i^{\alpha+1}}\frac{(k+1-q)^{\beta-1}q}{k^{\beta+1}}.$$

Ezeket a becsléseket felhasználva,

$$I \le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_m^{(2-\lambda)/2}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\times$$

$$\times\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{k} i^{-2\alpha-2}k^{-2\beta-2}(i+1-p)^{2\alpha-2}(k+1-q)^{2\beta-2}p^2q^2a_{pq}^2\Big)^{\lambda/2}+$$

$$+K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_m^{(2-\lambda)/2}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\Big(\sum_{i=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} i^{-2\alpha}\sum_{q=0}^{k}k^{-2\beta-2}(k+1-q)^{2\beta-2}q^2a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2}+$$

$$+K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_m^{(2-\lambda)/2}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} k^{-2\beta}\sum_{p=0}^{i}i^{-2\alpha-2}(i+1-p)^{2\alpha-2}p^2a_{pk}^2\Big)^{\lambda/2}+$$

$$+K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_m^{(2-\lambda)/2}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\Big(\sum_{i=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}\sum_{k=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} i^{-2\alpha}k^{-2\beta}a_{ik}^2\Big)^{\lambda/2} =: I_1+I_2+I_3+I_4.$$

A negyedik taggal könnyű dolgunk van. Észrevéve, hogy bármely $\alpha > 1-1/\lambda$-ra

$$\kappa_m^{(2-\lambda)/2}\mu_m^{-\alpha\lambda} \le K, \tag{1.20}$$

azonnal kapjuk, hogy

$$I_4 \le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_m^{(2-\lambda)/2}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\mu_m^{-\alpha\lambda}\mu_n^{-\beta\lambda}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}a_{ik}^2\Big)^{\lambda/2} \le KS.$$

Foglalkozzunk most a második taggal. (1.20)-at használva,

$$I_2 \le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_m^{(2-\lambda)/2}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} i^{-2\alpha}\sum_{q=0}^{k}k^{-2\beta-2}(k+1-q)^{2\beta-2}q^2a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} \le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\kappa_n^{(2-\lambda)/\lambda}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\sum_{q=0}^{k}k^{-2\beta-2}(k+1-q)^{2\beta-2}q^2a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} \le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\kappa_n^{(2-\lambda)/\lambda}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\sum_{r=0}^{n-2}\sum_{q=\mu_r}^{\mu_{r+1}-1}k^{-2\beta-2}(k+1-q)^{2\beta-2}q^2a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2}+$$

$$+K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\kappa_n^{(2-\lambda)/\lambda}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\sum_{q=\mu_{n-1}}^{\mu_n-1}k^{-2\beta-2}(k+1-q)^{2\beta-2}q^2a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2}+$$

$$+K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\sum_{q=\mu_n}^{k}k^{-2\beta-2}(k+1-q)^{2\beta-2}q^2a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} =: I_{21}+I_{22}+I_{23}.$$

Bevezetve a

$$\nu_n \equiv \nu_n^{\beta\lambda} = \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} (i+1-\mu_n)^{2\beta-2}$$

jelölést, könnyen ellenőrizhetjük, hogy

$$\nu_n \le \begin{cases} K\mu_n^{2\beta-1}, & \text{ha } \beta > 1/2, \\ K\log\mu_n, & \text{ha } \beta = 1/2, \\ K, & \text{ha } 1-1/\lambda < \beta < 1/2, \end{cases}$$

és

$$\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\mu_n^{-\beta\lambda}\nu_n^{\lambda/2} \le K. \tag{1.21}$$

Ezt a becslést használva,

$$I_{22} \le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\kappa_n^{(2-\lambda)/\lambda}\mu_n^{-2\beta}\Big(\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}(k+1-\mu_n)^{2\beta-2}\Big)\Big(\sum_{q=\mu_{n-1}}^{\mu_n-1}a_{iq}^2\Big)\Big)^{\lambda/2} \le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_n^{(2-\lambda)/\lambda}\mu_n^{-\beta\lambda}\nu_n^{\lambda/2}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{q=\mu_{n-1}}^{\mu_n-1}a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} \le KS,$$

és

$$I_{23} \le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\kappa_n^{(2-\lambda)/\lambda}\sum_{q=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\sum_{k=q}^{\mu_{n+1}-1}k^{-2\beta-2}(k+1-q)^{2\beta-2}q^2a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} \le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_n^{(2-\lambda)/\lambda}\mu_n^{-\beta\lambda}\nu_n^{\lambda/2}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{q=\mu_{n-1}}^{\mu_n-1}a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} \le KS.$$

Az I_{21} becslése kicsit hosszadalmasabb. (1.16) felhasználásával

$$I_{21} \le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\kappa_n^{(2-\lambda)/\lambda}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\sum_{r=0}^{n-2}\sum_{q=\mu_r}^{\mu_{r+1}-1}k^{-2\beta-2}(k+1-q)^{2\beta-2}q^2a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} \le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\kappa_n^{(2-\lambda)/\lambda}\sum_{r=0}^{n-2}\sum_{q=\mu_r}^{\mu_{r+1}-1}\mu_n^{-2\beta-2}(\mu_n-\mu_{r+1})^{2\beta-2}\mu_r^2a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} \le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\mu_n^{-\beta\lambda-2}(\mu_{n+1}-\mu_n)^{\lambda/2}\Big(\sum_{r=0}^{n-2}(\mu_n-\mu_{r+1})^{2\beta-2}\mu_r^2\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{q=\mu_r}^{\mu_{r+1}-1}a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} \le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\mu_n^{-\beta\lambda-2}(\mu_{n+1}-\mu_n)^{\lambda/2}\sum_{r=0}^{n-2}(\mu_n-\mu_{r+1})^{\lambda\beta-\lambda}\mu_r^{\lambda}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{q=\mu_r}^{\mu_{r+1}-1}a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2} \le$$

$$\le K\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{q=\mu_r}^{\mu_{r+1}-1}a_{iq}^2\Big)^{\lambda/2}T_r,$$

ahol

$$T_r \equiv T_r^{\beta\lambda} := \mu_r^{\lambda}\sum_{n=r+2}^{\infty}\kappa_n^{(2-\lambda)/2}\mu_n^{-\beta\lambda-\lambda}(\mu_{n+1}-\mu_n)^{\lambda/2}(\mu_n-\mu_{r+1})^{\lambda\beta-\lambda}.$$

I_{21} becsléséhez azt kell belátnunk, hogy

$$T_r < K. \tag{1.22}$$

A $\beta > 1/2$ esetben

$$T_r \le K2^{r\lambda} \sum_{n=r+2}^{\infty} 2^{n\lambda/2} 2^{-\beta\lambda n - \lambda n} 2^{n\lambda/2} (2^n - 2^{r+1})^{\beta\lambda-\lambda} \le K2^{r\lambda} \sum_{n=r+2}^{\infty} 2^{-\lambda n} \le K.$$

A $\beta = 1/2$ esetben legyen

$$T_r = \mu_r^\lambda \sum_{n=r+2}^{\infty} = \mu_r^\lambda \sum_{n=r+2}^{r+r^{\lambda/2}} + \mu_r^\lambda \sum_{n=r+r^{\lambda/2}+1}^{\infty} =: T_r^1 + T_r^2.$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy

$$\mu_n - \mu_{r+1} \ge \begin{cases} K(2-\lambda)/2(n-r-1)2^{-\lambda/2} r^{-\lambda/2} \mu_{r+1}, & \text{ha } r+2 \le n \le r + r^{\lambda/2}, \\ K(1 - 2^{-((2-\lambda)/2)3^{-\lambda/2}})\mu_n, & \text{ha } r + r^{\lambda/2} + 1 \le n. \end{cases}$$

és

$$\mu_{n+1} - \mu_n = K\mu_n n^{-\lambda/2},$$

ezeket a becsléseket használva T_r tovább becsülhető:

$$T_r^1 = \mu_r^\lambda \sum_{n=r+2}^{r+r^{\lambda/2}} \kappa_n^{(2-\lambda)/2} \mu_n^{-3/2\lambda} (\mu_{n+1} - \mu_n)^{\lambda/2} (\mu_n - \mu_{r+1})^{-1/2\lambda} \le$$

$$\le K2^{\lambda r^{(2-\lambda)/2}} \sum_{n=r+2}^{r+r^{\lambda/2}} n^{-\lambda(2-\lambda)/4} 2^{\lambda/2 n^{(2-\lambda)/2}} 2^{-3/2\lambda n^{(2-\lambda)/2}} \times$$

$$\times 2^{\lambda/2 n^{(2-\lambda)/2}} n^{-\lambda^2/4} r^{\lambda^2/4} 2^{(-1/2\lambda(r+1))^{(2-\lambda)/2}} (n-r-1)^{-1/2\lambda} \le$$

$$\le Kr^{-\lambda/2+\lambda^2/4} \sum_{n=r+2}^{r+r^{\lambda/2}} (n-r-1)^{-1/2\lambda} \le K$$

és

$$T_r^2 = \sum_{n=r+r^{\lambda/2}+1}^{\infty} \kappa_n^{(2-\lambda)/2} \mu_n^{-3/2\lambda} (\mu_{n+1} - \mu_n)^{\lambda/2} (\mu_n - \mu_{r+1})^{-1/2\lambda} \le$$

$$\le K2^{\lambda r^{(2-\lambda)/2}} \sum_{n=r+r^{\lambda/2}+1}^{\infty} n^{-\lambda(2-\lambda)/4} 2^{\lambda/2 n^{(2-\lambda)/2}} 2^{-3/2\lambda n(2-\lambda)/2} 2^{\lambda/2 n^{(2-\lambda)/2}} \times$$

$$\times n^{-\lambda^2/4} 2^{-\lambda/2 n^{(2-\lambda)/2}} \le K2^{\lambda r^{(2-\lambda)/2}} \sum_{n=r+2}^{\infty} n^{-\lambda/2} 2^{-\lambda n^{(2-\lambda)/2}} \le K.$$

Végül, a $1 - 1/\lambda < \beta < 1/2$ esetben, az előző esethez hasonlóan járhatunk el:

$$T_r = \mu_r^\lambda \sum_{n=r+2}^{\infty} = \mu_r^\lambda \sum_{n=r+2}^{2r+1} + \mu_r^\lambda \sum_{n=2r+2}^{\infty} =: T_r^1 + T_r^2,$$

$$\mu_n - \mu_{r+1} \ge \begin{cases} K \frac{2-\lambda}{\lambda(1-2\beta)} \frac{m-r-1}{r+1} \mu_{r+1}, & \text{ha } r+2 \le n \le 2r+1, \\ K(1 - 2^{(\lambda-2)/(\lambda(1-2\beta))})\mu_n, & \text{ha } 2r+2 \le n, \end{cases}$$

$$\mu_{n+1} - \mu_n = Kn^{2(1-\lambda+\beta\lambda)/(\lambda(1-2\beta))},$$

$$T_r^1 = \mu_r^\lambda \sum_{n=r+2}^{2r+1} \kappa_n^{(2-\lambda)/2} \mu_n^{-\beta\lambda-\lambda} (\mu_{n+1} - \mu_n)^{\lambda/2} (\mu_n - \mu_{r+1})^{\lambda\beta-\lambda} \le$$

SZTE Egyetemi Könyvtár

$$\leq Kr^{(2-\lambda)/(1-2\beta)} \sum_{n=r+2}^{2r+1} n^{(2-\lambda)\beta/(1-2\beta)} n^{(\lambda-2)(\beta+1)/(1-2\beta)} \times$$

$$\times n^{(1-\lambda+\beta\lambda)/(1-2\beta)} (n-r+1)^{(\beta-1)\lambda} (r+1)^{(1-\beta)\lambda} (r+1)^{(2-\lambda)(\beta-1)/(1-2\beta)} \leq$$

$$\leq Kr^{-1+\lambda-\beta\lambda} \sum_{n=r+2}^{2r+1} (n-r+1)^{(\beta-1)\lambda} \leq K$$

és

$$T_r^2 = \mu_r^\lambda \sum_{n=2r+2}^{\infty} \kappa_n^{(2-\lambda)/2} \mu_n^{-\beta\lambda-\lambda} (\mu_{n+1}-\mu_n)^{\lambda/2} (\mu_n - \mu_{r+1})^{\lambda\beta-\lambda} \leq$$

$$\leq Kr^{(2-\lambda)/(1-2\beta)} \sum_{n=2r+2}^{\infty} n^{(2-\lambda)\beta/(1-2\beta)} n^{(\lambda-2)(\beta+1)/(1-2\beta)} n^{(1-\lambda+\beta\lambda)/(1-2\beta)} \times$$

$$\times n^{(2-\lambda)(\beta-1)/(1-2\beta)} \leq Kr^{(2-\lambda)/(1-2\beta)} \sum_{n=2r+2}^{\infty} n^{(2\beta+\lambda-3)/(1-2\beta)} \leq K.$$

Ezzel beláttuk, hogy $I_2 \leq KS$. Hasonlóan igazolható $I_3 \leq KS$ is.

Ezután rátérünk I_1 becslésére.

$$I_1 = K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_m^{(2-\lambda)/2} \kappa_n^{(2-\lambda)/2} \times$$

$$\times \Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \sum_{p=0}^{i} \sum_{q=0}^{k} i^{-2\alpha-2} k^{-2\beta-2} (i+1-p)^{2\alpha-2} (k+1-q)^{2\beta-2} p^2 q^2 a_{pq}^2 \Big)^{\lambda/2} \leq$$

$$\leq K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \sum_{p=\mu_m}^{i} \sum_{q=\mu_n}^{k} +$$

$$+ K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \sum_{p=\mu_m}^{i} \sum_{q=\mu_{n-1}}^{\mu_n-1} +$$

$$+ K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \sum_{p=\mu_m}^{i} \sum_{r=0}^{n-2} \sum_{q=\mu_r}^{\mu_{r+1}-1} +$$

$$+ K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \sum_{\mu_{m-1}}^{\mu_m} \sum_{q=\mu_n}^{k} +$$

$$+ K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \sum_{p=\mu_{m-1}}^{\mu_m-1} \sum_{q=\mu_{n-1}}^{\mu_n-1} +$$

$$+ K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \sum_{p=\mu_{m-1}}^{\mu_m-1} \sum_{r=0}^{n-2} \sum_{q=\mu_r}^{\mu_{r+1}-1} +$$

$$+ K \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \sum_{s=0}^{m-2} \sum_{p=\mu_s}^{\mu_{s+1}-1} \sum_{q=\mu_n}^{k} +$$

$$+K\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\sum_{s=0}^{m-2}\sum_{p=\mu_s}^{\mu_{s+1}-1}\sum_{q=\mu_{n-1}}^{\mu_n-1}+$$

$$+K\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1}\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1}\sum_{s=0}^{m-2}\sum_{r=0}^{n-2}\sum_{p=\mu_s}^{\mu_{s+1}-1}\sum_{q=\mu_r}^{\mu_{r+1}-1}.$$

Ezt a kilenc tagot külön-külön becsülhetjük, lényegében ugyanúgy, mint az előző esetekben. Most mindkét indexben külön-külön kell elvégeznünk az előző két eset valamelyikének megfelelő becslést. Felhasználva (1.18)–(1.22)-t és a másik indexhez tartozó megfelelőiket, végül kapjuk, hogy $I_1 \leq KS$, s ezzel a bizonyítás kész. □

2. A Fourier-együtthatók nagyságrendjéről

2.1. Előzmények

Tekintsünk egy 2π szerint periodikus, integrálható $f \in L(\mathbf{T})$ függvényt, ahol $\mathbf{T} := (-\pi, \pi]$ jelöli az ún. egydimenziós tóruszt. Az f Fourier-sorát az

$$a_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos kt \, dt, \qquad k \geq 0,$$

$$b_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin kt \, dt, \qquad k \geq 1,$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

formulák definiálják.

A Fourier-sorok elméletéből jól ismert a Riemann–Lebesgue lemma, amely szerint bármely $f \in L$ esetén

$$\lim_{k \to \infty} a_k(f) = \lim_{k \to \infty} b_k(f) = 0.$$

Jól ismert az is, hogy ez a konvergencia „tetszőlegesen lassú" lehet, még akkor is, ha az L helyett szűkebb függvényosztályokat tekintünk. Pontosabban, akárhogyan is választunk egy $\lambda_k \to \infty$ sorozatot, található olyan $f \in C(\mathbf{T})$ folytonos függvény, amelynek Fourier együtthatóira $\lambda_k a_k(f)$ és $\lambda_k b_k(f)$ nem korlátosak.

J. B. Reade vette észre, hogy közönséges konvergencia helyett Cesàro értelemben vett határértéket tekintve, a Fourier együtthatók nullához tartásának nagyságrendje becsülhető.

2.1. Tétel (Reade, 1986 [Re]). *Ha $f \in L^2(\mathbf{T})$, akkor*

$$k^{1/2} a_k(f) \to 0 \qquad \text{és} \qquad k^{1/2} b_k(f) \to 0 \qquad (C,1) \text{ értelemben.}$$

Ezt az eredményt később Yu. E. Kuprikov általánosította, $f \in L^p$ $(p > 1)$ függvények és (C, α) $(\alpha > 0)$ értelemben vett határérék esetén meghatározta a lehető legjobb λ_k multiplikátorokat, amelyekre még

$$\lambda_k a_k(f) \to 0 \qquad \text{és} \qquad \lambda_k b_k(f) \to 0$$

teljesül.

Jegyezzük meg, hogy Kuprikov bizonyítása meglehetősen hosszú, és nagyon erősen kihasználja a trigonometrikus rendser speciális tulajdonságait. Sikerült észrevennünk, hogy hasonló eredmények nyerhetők egyszerű(bb) szummációelméleti megfontolásokkal is. Ez tette lehetővé, hogy ezeket az eredményeket tovább általánosítsuk: általános ortogonális sorokra, kettős ortogonális sorokra, illetve bizonyos „Fourier-típusú" integráltranszformáltakra is.

2.2. Megjegyzés. Mindezekben az általánosításokban, a (C, α) értelemben vett határérték kicserélhető közönséges határértékre, amennyiben megkövetelünk még valamilyen „Tauber-típusú" feltételt, például az együttható-sorozat monotonitását.

A kérdés nemcsak az L^p, hanem a C osztály függvényeire is vizsgálható.

2.3. TÉTEL (Reade [Re]). *Ha* $f \in C(\mathbf{T})$, *akkor*

$$ka_k(f) \to 0 \qquad \text{és} \qquad kb_k(f) \to 0 \qquad (C,2) \text{ értelemben.}$$

2.4. TÉTEL (Kuprikov [Ku]). *Ha* $f \in C(\mathbf{T})$ *és* $\alpha > 0$, *akkor*

$$ka_k(f) \to 0 \qquad \text{és} \qquad kb_k(f) \to 0 \qquad (C, 1+\alpha) \text{ értelemben.}$$

2.2. A diszkrét eset

Tekinsünk egy $\{\varphi_k(x) : k \geq 0\}$ egyenletesen korlátos ortonormált rendszert az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ véges pozitív mértéktéren. Tetszőleges $f \in L(X)$ integrálható függvény esetén a

$$c_k(f) := \int_X f(t)\varphi_k(t)\, d\mu(t), \qquad k \geq 0,$$

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

formulákkal értelmezhető a (φ) rendszer szerinti általánosított Fourier sor.

Ezekre az együtthatókra igaz a következő állítás:

*2.5. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., 1996 [MN1]). *Legyen* $1 \leq p \leq 2$, $\alpha > 0$ *és* $1/p + 1/q = 1$. *Ha* $f \in L^p(X)$, *akkor*

$$\lambda_k^\alpha |c_k(f)| \to 0 \qquad (C,\alpha) \text{ értelemben,} \tag{2.1}$$

ahol

$$\lambda_k^\alpha = \begin{cases} (k+1)^{1/q}, & \text{ha } \alpha > 1/q, \\ (k+1)^{1/q}(\ln(k+2))^{(1/q)-1}, & \text{ha } \alpha = 1/q, \\ (k+1)^\alpha, & \text{ha } 0 < \alpha < 1/q. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.6. MEGJEGYZÉS. Kuprikov eredményei (a trigonometrikus rendszerre) ezzel az $\alpha \neq 1/q$ esetben megegyeznek. Az $\alpha = 1/q$ esetben Kuprikov multiplikátora jobb, $(k+1)^{1/q}(\ln(k+2))^{-(1/q)}$.

2.7. MEGJEGYZÉS. Miután Kuprikov multiplikátorai a trigonometrikus rendszerre a lehető legjobbak, nyilván az általános esetben is, $\alpha \neq 1/q$ esetén a 2.4. tétel nem élesíthető. Nyitott kérdés, hogy ha $\alpha = 1/q$, általános ortonormált rendszer esetén mi a pontos multiplikátor. Annyit tudunk, hogy a Rademacher rendszer esetében is a Kuprikov-féle multiplikátor a jó.

Ez a megjegyzés értelemszerűen ezen fejezet további általánosításaira is érvényes.

A kettős sorok esetében, először néhány definíciót kell megadnunk.

2.8. DEFINÍCIÓ. A 0.5. és 0.7. definíciókkal analóg módon, egy $\{u_{jk} : j,k \geq 0\}$ kettős sorozatot $(C, \alpha > 0, \beta > 0)$-értelemben 0-hoz tartónak nevezünk, ha

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-1} u_{jk} = 0.$$

A teljesség kedvéért emlékeztetünk arra, hogy egy, az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ véges, pozitív mértéktéren adott $\{\varphi_{jk} : j, k \geq 0\}$ kettős ortonormált rendszer szerinti Fourier-sor együtthatói

$$c_{jk}(f) := \int_X f(t)\varphi_{jk}(t)\, d\mu(t), \qquad j, k \geq 0,$$

speciálisan a kettős Fourier-együtthatók

$$a_{jk}(f) := \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbf{T}^2} f(u, v) \cos ju \cos kv \, du \, dv, \qquad j, k \geq 0,$$

$$b_{jk}(f) := \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbf{T}^2} f(u, v) \sin ju \sin kv \, du \, dv, \qquad j, k \geq 1,$$

$$c_{jk}(f) := \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbf{T}^2} f(u, v) \cos ju \sin kv \, du \, dv, \qquad j \geq 0, k \geq 1,$$

és

$$d_{jk}(f) := \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbf{T}^2} f(u, v) \sin ju \cos kv \, du \, dv, \qquad j \geq 1, k \geq 0,$$

ahol $f \in L(X)$, illetve $f \in L(\mathbf{T}^2)$.

A 2.5. tétel kettős megfelelője a következő:

*2.9. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., 1996 [MN1]). *Legyen* $1 \leq p \leq 2$, $\alpha, > 0$. $\beta > 0$ *és* $1/p + 1/q = 1$. *Ha* $f \in L^p(X)$, *akkor*

$$\lambda_j^\alpha \lambda_k^\beta |c_{jk}(f)| \to 0 \qquad (C, (\alpha, \beta)) \text{ értelemben},$$

ahol λ_j^α *ugyanaz, mint* (2.2)*-ben.*

A folytonos függvényekről szóló 2.3. és 2.4. tételek kettős megfelelője pedig:

*2.10. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., 1996 [MN1]). *Ha* $f \in C(\mathbf{T}^2)$ *és* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *akkor*

$$(j+1)(k+1)a_{jk}(f) \to 0 \qquad (C, (1+\alpha, 1+\beta)) \text{ értelemben},$$

és ugyanez igaz a b_{jk}, c_{jk}, d_{jk} *együtthatókra is.*

2.3. Bizonyítások

A 2.5. és 2.9. tételek bizonyításában legfontosabb eszközünk az ún. Kronecker-lemma (lásd pl. [Al, 71. o.]) és változatai lesznek.

2.11. LEMMA (Kronecker lemma). *Ha* a

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

sor véges összeghez konvergál, fennáll, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (k+1)u_k = 0.$$

Kettős sorokra a lemmát a téglalap-részletösszegek segítségével terjeszthetjük ki.

2.12. LEMMA. *Ha egy kettős sor* (0.12) *szerinti* s_{mn} *részletösszegei korlátosak és véges határértékhez tartanak, ha* $m, n \to \infty$, *akkor*

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(j+1)(k+1)u_{jk} = 0.$$

Felhasználva, hogy

$$u_{jk} = s_{jk} - s_{j-1,k} - s_{j,k-1} + s_{j-1,k-1}$$

(a szokásos

$$s_{j,-1} = s_{-1,k} = s_{-1,-1} = 0$$

jelöléssel), végrehajtva egy „kettős Abel-féle* átrendezést", kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(j+1)(k+1)u_{jk} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(j+1)(k+1)s_{jk} - \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}(j+2)(k+1)s_{jk} -$$

$$- \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}(j+1)(k+2)s_{jk} + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}(j+2)(k+2)s_{jk} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} s_{jk} - (n+1)\sum_{j=0}^{m-1} s_{jn} - (m+1)\sum_{k=0}^{n-1} s_{mk} + (m+1)(n+1)s_{mn}.$$

Ebből

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(j+1)(k+1)u_{jk} =$$

$$= s_{mn} - \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m-1} s_{jn} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} s_{mk} + \frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} s_{jk},$$

amiből az állítás adódik, felhasználva a $(C,1)$ és $(C,(1,1))$ módszerek konvergenciatartását (lásd 0.1. szakasz).

Figyeljük meg, hogy a bizonyításban fontos szerepe volt az s_{jk} részletösszegek korlátosságának is, a 0.13. Pringsheim-definíció mellett. □

A Kronecker lemma tovább általánosítható a (C,α) módszerre is. Most a kettős változatra lesz szükségünk.

*2.13. LEMMA (Móricz F., Németh Z., 1996 [MN1]). *Tekintsünk egy* $\sum u_{jk}$ *kettős sort, melynek*

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta} := \frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^\alpha A_{n-k}^\beta u_{jk}$$

$(C,(\alpha \geq 0, \beta \geq 0))$ *közepei korlátosak és véges határértékhez konvergálnak. Ekkor*

$$(j+1)(k+1)u_{jk} \to 0 \qquad (C,(1+\alpha,1+\beta)) \text{ értelemben.}$$

* Szokás Hardy-átrendezésnek is nevezni.

Legyen

$$\lim \sigma_{mn}^{\alpha\beta} = s.$$

Mivel a $(C, (\alpha \geq 0, \beta \geq 0))$ módszerek konvergenciatartók,

$$\lim \sigma_{mn}^{\alpha+1,\beta} = \lim \sigma_{mn}^{\alpha,\beta+1} = \lim \sigma_{mn}^{\alpha+1,\beta+1} = s.$$

Felhasználva, hogy

$$A_l^{\alpha+1} = \frac{l+1+\alpha}{1+\alpha} A_l^{\alpha}, \qquad l \geq 0,$$

könnyen kiszámolhatjuk, hogy

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{mn}^{\alpha+1,\beta} - \sigma_{mn}^{\alpha,\beta+1} + \sigma_{mn}^{\alpha+1,\beta+1} =$$

$$= \frac{1}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} u_{jk} - \frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha+1} A_{n-k}^{\beta} u_{jk} -$$

$$- \frac{1}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta+1}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta+1} u_{jk} + \frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha+1} A_{n-k}^{\beta+1} u_{jk} =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)} \frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} u_{jk} \times$$

$$\times \Big((m+1+\alpha)(n+1+\beta) - (m-j+1+\alpha)(n+1+\beta) -$$

$$- (m+1+\alpha)(n-k+1+\beta) + (m-j+1+\alpha)(n-k+1+\beta) \Big) =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)} \frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} jk u_{jk}.$$

Mivel

$$\lim(\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{mn}^{\alpha+1,\beta} - \sigma_{mn}^{\alpha,\beta+1} + \sigma_{mn}^{\alpha+1,\beta+1}) = s - s - s + s = 0,$$

fennáll, hogy

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} jk u_{jk} = 0. \tag{2.3}$$

Hasonló módon levezethető, hogy

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{mn}^{\alpha+1,\beta} = \frac{1}{1+\alpha} \frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} j u_{jk},$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} j u_{jk} = 0. \tag{2.4}$$

(2.4)-et, a másik indexre vonatkozó szimmetrikus megfelelőjét, valamint (2.3)-at összeszedve, az állítás adódik. □

SZTE Egyetemi Könyvtár SZEGED

A 2.5. és 2.9. tételek bizonyítása

Mivel a két tétel bizonyítása teljesen analóg, csak a technikailag nehezebb 2.9. tételt bizonyítjuk.

A 2.8. definíció szerint azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta} := \frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-1} \lambda_j^\alpha \lambda_k^\beta |c_{jk}(f)| \to 0 \qquad \text{ha} \qquad \min(m,n) \to \infty.$$

Alkalmazva a Hölder egyenlőtlenséget p és q kitevőkkel, (2.2)-t is figyelembe véve, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta} = \frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (\kappa_{mj}^\alpha \kappa_{nk}^\beta)((j+1)^{1/q}(k+1)^{1/q}|c_{jk}(f)|) \leq \tag{2.5}$$

$$\leq K(\alpha,\beta,p)(m+1)^{-\alpha+1/q}(n+1)^{-\beta+1/q}\Big(\sum_{j=0}^{m}(\kappa_{mj}^\alpha)^p \sum_{k=0}^{n}(\kappa_{nk}^\beta)^p\Big)^{1/p} \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(j+1)(k+1)|c_{jk}(f)|^q\Big)^{1/q},$$

ahol

$$\kappa_{mj}^\alpha := \begin{cases} A_{m-j}^{\alpha-1}, & \text{ha } \alpha > 1/q, \\ A_{m-j}^{\alpha-1}(\ln(j+2))^{(1/q)-1}, & \text{ha } \alpha = 1/q, \\ A_{m-j}^{\alpha-1}(j+1)^{\alpha-1/q}, & \text{ha } \alpha < 1/q. \end{cases}$$

A következő lépésben megmutatjuk, hogy van olyan $K = K(\alpha,p)$ állandó, amelyre

$$S_m^\alpha := (m+1)^{-\alpha+1/q}\Big(\sum_{j=0}^{m}(\kappa_{mj}^\alpha)^p\Big)^{1/p} \leq K, \quad m \geq 0. \tag{2.6}$$

Az $\alpha > 1/q$ esetben a (0.8) aszimptotikát használjuk fel:

$$S_m^\alpha \leq K(\alpha,p)(m+1)^{-\alpha+1/q}\Big(\sum_{j=0}^{m}(m-j+1)^{(\alpha-1)p}\Big)^{1/p} \leq$$

$$\leq K(\alpha,p)(m+1)^{-\alpha+1/q}(m+1)^{\alpha-1+1/p} = K(\alpha,p).$$

Az $\alpha = 1/q$ esetben hasonló számolással kapjuk, hogy

$$S_m^\alpha \leq K(\alpha,p)\Big(\sum_{j=0}^{m}(m-j+1)^{-1}(\ln(j+2))^{-1}\Big)^{1/p} \leq$$

$$\leq K(\alpha,p)\Big(\Big(\frac{1}{m-\sqrt{m}+1}\sum_{j=0}^{\sqrt{m}}(\ln(j+2))^{-1}\Big)^{1/p} + \Big(\frac{1}{\ln(m+2)}\sum_{j=\sqrt{m}}^{m}(m-j+1)^{-1}\Big)^{1/p}\Big) \leq$$

$$\leq K(\alpha,p)\Big(\Big(\frac{\sqrt{m}+1}{m-\sqrt{m}+1}\Big)^{1/p} + \Big(\frac{\ln(m-\sqrt{m}+2)}{\ln(m+2)}\Big)^{1/p}\Big) \leq K(\alpha,p).$$

Végül, az $\alpha < 1/q$ esetben a következőképpen becsülhetünk:

$$S_m^\alpha \leq K(\alpha,p)(m+1)^{-\alpha+1/q}\Big(\sum_{j=0}^{m}(m-j+1)^{(\alpha-1)p}(j+1)^{(\alpha-1/q)p}\Big)^{1/p} \leq$$

$$\leq K(\alpha,p)(m+1)^{-\alpha+1/q}\Big((m+1)^{(\alpha-1)p}\sum_{j=0}^{m/2}(j+1)^{(\alpha-1/q)p}+$$

$$+(m+1)^{(\alpha-1/q)p}\sum_{j=m/2}^{m}(m-j+1)^{(\alpha-1)p}\Big)^{1/p}\leq$$

$$\leq K(\alpha,p)(m+1)^{-\alpha+1/q}\Big((m+1)^{(\alpha-1)p}(m+1)^{(\alpha-1/q)p+1}+(m+1)^{(\alpha-1/q)p}\Big)^{1/p}\leq$$

$$\leq K(\alpha,p)(m+1)^{-\alpha+1/q}((m+1)^{(\alpha-1/q)p})^{1/p}=K(\alpha,p).$$

Végül, (2.5) és (2.6) felhasználásával nyerjük, hogy

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta}\leq K(\alpha,\beta,p)S_m^{\alpha}S_n^{\beta}\Big(\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(j+1)(k+1)|c_{jk}(f)|^q\Big)^{1/q}. \tag{2.7}$$

A Hausdorff–Young–Riesz egyenlőtlenség szerint (lásd pl. [Zy, Vol. 2, 102. o.]), egy $f\in L^p(X)$ $(1<p\leq 2)$ függvény Fourier-együtthatóira igaz, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|c_{jk}(f)|^q<\infty. \tag{2.8}$$

Ezekután a tétel állítása (2.6)–(2.8)-ból, a 2.12. lemma felhasználásával azonnal adódik. □

A 2.10. tétel bizonyítása

A cosinus-együtthatók esetében a tétel egyszerűen bizonyítható. M. Riesz tétele szerint (lásd [Zy, Vol. 1, 94. o., Vol. 2, 304. o.]), mivel az f függvény az origóban folytonos, a

$$\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}(f)$$

numerikus sor bármely $\alpha>0$, $\beta>0$ esetén $(C,(\alpha,\beta))$ szummálható az $f(0,0)$ számhoz, és a $\sigma_{mn}^{\alpha\beta}$ közepei korlátosak. Így a tétel állítása a 2.13. lemmából adódik.

Sajnos, a sinusos és vegyes együtthatókra ez az egyszerű ötlet nem alkalmazható. Az általánosabb gondolatmenet a funkcionálanalízis eszközeit használja. A bizonyítást csak vázoljuk.

2.14. LEMMA. *Legyen B tetszőleges Banach tér, és $\{L_{mn}:m,n\geq 1\}$ B-n értelmezett lineáris funkcionálok olyan sorozata, amelyre $\|L_{mn}\|$ korlátos m,n-ben. Ekkor, ha*

$$\lim_{m,n\to\infty}L_{mn}(f)=0 \tag{2.9}$$

fennáll minden olyan f-re, amelyek a B tér valamely fundamentális halmazába tartoznak, akkor (2.9) a B tér minden f elemére igaz.

A lemma szinte nyilvánvaló, csak azt említjük meg, hogy a „fundamentális halmaz" a tér egy olyan részhalmaza, melynek lineáris burka a B-ben sűrű. □

Könnyen igazolhatók az alábbi összefüggések:

$$\frac{1}{A_n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha}ka_k(f)=\int_{\mathbf{T}}f(t)\phi_n^{\alpha}(t)\,dt,$$

ahol

$$\phi_n^{\alpha}(t):=\frac{1}{\pi A_n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha}k\cos kt=\frac{1}{\pi A_n^{\alpha+1}}\frac{d}{dt}\Big(\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha}\sin kt\Big)$$

valamint

$$\frac{1}{\pi A_n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha} k b_k(f) = \int_{\mathbf{T}} f(t) \psi_n^{\alpha}(t)\, dt,$$

ahol

$$\psi_n^{\alpha}(t) := \frac{1}{\pi A_n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha} k \sin kt = \frac{1}{\pi A_n^{\alpha+1}} \frac{d}{dt}\Big(- \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha} \cos kt\Big).$$

2.15. LEMMA. *Minden $\alpha > 0$ értékre*

$$\int_{\mathbf{T}} |\phi_n^{\alpha}(t)|\, dt = O(1) \qquad \text{és} \qquad \int_{\mathbf{T}} |\psi_n^{\alpha}(t)|\, dt = O(1), \qquad n \geq 0.$$

A lemma levezethető a Bernstein egyenlőtlenségből (lásd pl. [Zy, Vol. 2, 276. o.]), a Cesàro számok tulajdonságaiból, valamint abból, hogy

$$\int_{\mathbf{T}} \Big| \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha} \sin kt \Big|\, dt = O(n^{\alpha})$$

és

$$\int_{\mathbf{T}} \Big| \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha} \cos kt \Big|\, dt = O(n^{\alpha}).$$

A két utóbbi becslés a [Ku] cikkben is szerepel. □

Most már rátérhetünk a tétel bizonyítására. A (kettős) Riemann–Lebesgue lemma szerint

$$\lim_{j+k \to \infty} a_{jk}(f) = 0.$$

Ezt felhasználva, a bizonyítandó

$$\frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} (j+1)(k+1) a_{jk}(f) \to 0, \qquad \text{ha} \qquad m, n \to \infty$$

állítás ekvivalens azzal, hogy

$$L_{mn}^{\alpha\beta}(f) := \frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} jk a_{jk}(f) \to 0, \qquad \text{ha} \qquad m, n \to \infty. \tag{2.10}$$

Az $L_{mn}^{\alpha\beta}(f)$ lineáris funkcionál a $C(\mathbf{T}^2)$ Banach téren bármely $m, n \geq 1$ értékre, és, mint az könnyen ellenőrizhető,

$$L_{mn}^{\alpha\beta}(f) = \iint_{\mathbf{T}^2} f(u,v) \phi_m^{\alpha}(u) \phi_n^{\beta}(v)\, du\, dv. \tag{2.11}$$

A 2.15. lemma felhasználásával

$$\|L_{mn}^{\alpha\beta}\| = \int_{\mathbf{T}} |\phi_m^{\alpha}(u)|\, du \int_{\mathbf{T}} |\phi_n^{\beta}(v)|\, dv = O(1).$$

A (2.10)-ben szereplő limes-reláció nyilván igaz a kettős trigonometrikus rendszer véges lineáris kombinációiból álló fundamentális halmazra, így a 2.14. lemma segítségével az állítást beláttuk.

A $b_{jk}(f)$, $c_{jk}(f)$, és $d_{jk}(f)$ együtthatók esetében hasonló módon bizonyíthatunk, azzal a különbséggel, hogy az

$$\frac{1}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_{m-j}^{\alpha} A_{n-k}^{\beta} jk b_{jk}(f) = \iint_{\mathbf{T}^2} f(u,v) \psi_m^{\alpha}(u) \psi_n^{\beta}(v)\, du\, dv,$$

$$\frac{1}{A_m^{\alpha+1}A_n^{\beta+1}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}A_{m-j}^{\alpha}A_{n-k}^{\beta}jkc_{jk}(f)=\iint_{\mathbf{T}^2}f(u,v)\phi_m^{\alpha}(u)\psi_n^{\beta}(v)\,du\,dv,$$

$$\frac{1}{A_m^{\alpha+1}A_n^{\beta+1}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}A_{m-j}^{\alpha}A_{n-k}^{\beta}jkd_{jk}(f)=\iint_{\mathbf{T}^2}f(u,v)\psi_m^{\alpha}(u)\phi_n^{\beta}(v)\,du\,dv$$

előállításokat kell használnunk. □

2.4. A folytonos eset

Sorok helyett integrálokra is kidolgozhatjuk a Cesàro szummálhatóság elméletét.

2.16. DEFINÍCIÓ. (i) Az $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+)$ függvénynek az ℓ szám (C,α) értelemben vett határértéke $(x\to\infty)$, ha

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha}{x}\int_0^x\Big(1-\frac{u}{x}\Big)^{\alpha-1}f(u)\,du=\ell. \tag{2.12}$$

(ii) Az $\int_0^\infty f(x)\,dx$ integrál (C,α) értelemben szummálható az s számhoz, ha

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x\Big(1-\frac{u}{x}\Big)^{\alpha}f(u)\,du=s. \tag{2.13}$$

Nyilván az $\alpha=0$ eset a közönséges konvergencia. Ha $\alpha=1$, a (2.13) feltétel azt jelenti, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du=\ell,$$

ami a (0.3) formula integrális megfelelője. Továbbá, parciális integrálással adódik, hogy $\int_0^\infty f(x)\,dx=s$ (C,α) értelemben pontosan akkor, ha $F(u)\to s$ $(u\to\infty)$ (C,α) értelemben, ahol $F(u):=\int_0^u f(x)\,dx$. Végezetül, ha $\alpha>0$, szintén parciális integrálással nyerjük, hogy

$$\frac{\alpha}{x}\int_0^x\Big(1-\frac{u}{x}\Big)^{\alpha-1}F(u)\,du=\int_0^x\Big(1-\frac{u}{x}\Big)^{\alpha}f(u)\,du.$$

Látható, hogy sorok szummációelméletének pontos megfelelője építhető ki – a részletek például [Ti, 26–29. o.]-ben megtalálhatók.

A folytonos Fourier transzformált nagyságrendjére vonatkozó első eredmény a következő:

2.17. TÉTEL (Bagota M., D. Giang, Móricz F. [BGM]). *Ha $f\in L^1\cap L^p(\mathbf{R})$ valamely $1<p\le 2$ értékre, $1/p+1/q=1$, és $\alpha\in(0,1/q)$, akkor*

$$u^{\alpha}\widehat{f}(u)\to 0,\qquad \text{ha}\qquad |u|\to\infty\qquad (C,1/q)\ \text{értelemben.}$$

Ha $f\in L^p(\mathbf{R})$ valamely $1<p\le 2$ értékre, $1/p+1/q=1$, és $\alpha\in(1/q,\infty)$, akkor

$$u^{1/q}\widehat{f}(u)\to 0,\qquad \text{ha}\qquad |u|\to\infty\qquad (C,\alpha)\ \text{értelemben,}$$

ahol

$$\widehat{f}(u):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixu}\,dx,\qquad u\in\mathbf{R}. \tag{2.14}$$

az f függvény Fourier transzformáltja.

Ahhoz, hogy eredményünket általánosan megfogalmazhassuk, szükségünk van egy újabb definícióra.

2.18. DEFINÍCIÓ (Németh Z. [Ne4]). Legyenek p és q olyanok, hogy $1 < p \leq 2$ és $1/p + 1/q = 1$. Legyen továbbá Φ egy $L^p(\mathbf{R}_+) \longrightarrow L^q(\mathbf{R}_+)$ lineáris operátor, és használjuk a $\Phi(f) =: \widehat{f}$ jelölést. A Φ operátort Hausdorff–Young típusúnak nevezzük, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

(i) Bármely $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$ függvényre érvényes, hogy

$$\Big(\int_0^\infty |\widehat{f}(u)|^q \, du\Big)^{1/q} \leq K(p)\Big(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx\Big)^{1/p} \tag{2.15}$$

(Hausdorff–Young egyenlőtlenség).

(ii) Bármely $f \in L^1(\mathbf{R}_+)$ függvényre

$$\widehat{f}(u) \to 0, \qquad \text{ha} \qquad u \to \infty \qquad \text{(közönséges értelemben)} \tag{2.16}$$

(Riemann–Lebesgue lemma).

Az ilyen operátorok szerinti transzformáltakra is kimondható a 2.9. tétel megfelelője.

*2.19. TÉTEL (Németh Z. [Ne4]). *Legyen $f \in L^1 \cap L^p(\mathbf{R}_+)$ valamely $1 < p \leq 2$ értékre, $1/p + 1/q = 1$, és $\alpha > 0$. Ha $\widehat{f}$ jelöli f egy Hausdorff-Young típusú transzformáltját, akkor*

$$\lambda_\alpha(x)|\widehat{f}(x)| \to 0, \qquad \textit{ha} \qquad x \to \infty \qquad \textit{(C, α) értelemben}, \tag{2.17}$$

ahol

$$\lambda_\alpha(x) := \begin{cases} x^{1/q}, & \textit{ha} \quad \alpha > 1/q, \\ x^\alpha, & \textit{ha} \quad 0 < \alpha < 1/q, \\ x^{1/q}(\log(x+2))^{1/q-1}, & \textit{ha} \quad \alpha = 1/q. \end{cases} \tag{2.18}$$

*2.20. MEGJEGYZÉS. A bizonyításból látni fogjuk, hogy az $\alpha > 1/q$ esetben a tétel $f \in L^1 \cap L^p$ helyett csupán $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$ feltételezése mellett is igaz (mert ekkor a 2.18. definíció (ii) részét nem használjuk fel).

A következő részben néhány példát mutatunk be Hausdorff–Young típusú operátorra.

A Fourier transzformált

Ha $f \in L^1(\mathbf{R})$, az $\widehat{f}$ Fourier transzformáltja a (2.14)-ban definiált. Ha az f függvény páros, $f(-x) = f(x)$ minden $x \in \mathbf{R}$-re, akkor (2.14) az

$$\widehat{f}(u) = \widehat{f}_c(u) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos ux \, dx$$

cosinus-transzformálttal egyezik meg, ha pedig az f páratlan, $f(-x) = -f(x)$, akkor lényegében a sinus-transzformálttal:

$$\widehat{f}(u) = -i\widehat{f}_s(u), \qquad \text{ahol} \qquad \widehat{f}_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin ux \, dx.$$

* A jelölés nem teljesen konzekvens, hiszen (2.14)-ben a Fourier transzformáltat jelöltük így. Mégis ezt a jelölést használjuk, egyrészt hogy ezzel is hangsúlyozzuk az analógiát, másrészt, mint látni fogjuk, lényegében a Fourier transzformáció is Hausdorff–Young típusú.

Tudjuk, hogy bármely $f \in L^1(\mathbf{R})$ felbontható páros és páratlan függvények összegére:

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) =: g(x) + h(x),$$

ahol $g, h \in L_1(\mathbf{R})$, g páros és h páratlan, továbbá, $f(u) = \widehat{g}_c(u) - i\widehat{h}_s(u)$. Jól ismert, hogy mind a cosinus-, mind a sinus-transzformált teljesíti a (2.15) és (2.16) feltételeket, azaz Hausdorff–Young típusú. A 2.19. tétel szerint tehát

*2.21. KÖVETKEZMÉNY (Németh Z. [Ne4]). *Ha* $f \in L^1 \cap L^p(\mathbf{R})$, $1 < p \le 2$, $1/p + 1/q = 1$, *és* $\widehat{f}$ *az* f *Fourier transzformáltja, akkor*

$$\lambda_\alpha(|x|)|\widehat{f}(x)| \to 0, \qquad \textit{ha} \qquad |x| \to \infty \qquad (C, \alpha)\ \textit{értelemben},$$

ahol $\lambda_\alpha(x)$ *ugyanaz, mint* (2.18)*-ban.*

Ez az eredmény az $\alpha \neq 1/q$ esetekben megegyezik a 2.17. tétellel. Az $\alpha = 1/q$ esetben pedig egy részleges válasz [BGM, Problem 1]-re.

A Walsh–Fourier transzformált

A $[0, 1)$ intervallumon a Rademacher rendszert a

$$r_k(x) = \operatorname{sign} \sin(2^k x), \qquad k \in \mathbf{N}$$

formula, a Walsh függvényeket pedig a

$$w_n(x) := \prod_{j=1}^{\ell} r_{k_j+1}, \quad \text{ahol} \quad n = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_\ell}, \quad k_i \in \mathbf{N} \qquad \text{és} \qquad w_0(x) := 1$$

képletek definiálják. Terjesszük ki a $w_n(x)$ függvények értelmezését a $[0, 1)$ intervallumról az egész $\mathbf{R}_+$ félegyenesre periodikus módon, azaz, legyen $\psi_n(x) := w_n(x - [x])$. Végezetül, legyen

$$\psi_u(x) := \psi_{[u]}(x) \cdot \psi_{[x]}(u), \qquad u, x \in \mathbf{R}_+ .$$

Ezen függvények segítségével a Walsh–Fourier transzformált

$$\widehat{f}_w(u) := \int_0^\infty f(x)\psi_u(x)\,dx, \qquad u \in \mathbf{R}_+$$

módon definiált. A részleteket illetően csak utalunk [SWSP]-re, számunkra most csak az a lényeges, hogy a Walsh–Fourier transzformált teljesíti a (2.15) és (2.16) feltételeket (lásd [SWSP, 422. és 427. o.]).

*2.22. KÖVETKEZMÉNY (Németh Z. [Ne4]). *Ha* $f \in L^1 \cap L^p(\mathbf{R})$, $1 < p \le 2$, $1/p + 1/q = 1$, *és* $\widehat{f}$ *az* f *most definiált Walsh–Fourier transzformáltja, akkor*

$$\lambda_\alpha(|x|)|\widehat{f}(x)| \to 0, \qquad \textit{ha} \qquad |x| \to \infty \qquad (C, \alpha)\ \textit{értelemben},$$

ahol $\lambda_\alpha(x)$ *ugyanaz, mint* (2.18)*-ban.*

Operátorok Fourier-típusú magfüggvénnyel

Tekintsünk egy

$$\widehat{f}_F(u) := \int_a^\infty k(ux)f(x)\,dx$$

alakú transzformációt. Mindenesetre föltesszük, hogy a $k \in L^1_{\text{loc}}$ függvény korlátos, továbbá, hogy

$$\int_0^\infty k_1(xu)k_1(yu)\frac{du}{u^2} = \min(x, y), \qquad \text{ahol} \qquad k_1(u) = \int_0^u k(x)\,dx. \tag{2.19}$$

Az ilyen $k(ux)$ magfüggvényeket nevezzük Fourier-típusú magnak. Ilyen például a $k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$, amely a cosinus-transzformáltat származtatja, de valójában a (2.19) „konvolúciós feltétel" teljesülésekor ki lehet építeni a „Fourier-elmélet" analogonját. A részleteket illetően Titschmartz monográfiájára [Ti, Ch. 8] utalunk.

Belátható, hogy a $\Phi(f) := \widehat{f}_F$ operátor Hausdorff–Young típusú. Egyrészt, ha $f \in L^1(\mathbf{R}_+)$, akkor

$$|\widehat{f}_F(u)| \le \int_0^\infty \|k\|_\infty |f(x)|\,dx, \qquad \|\widehat{f}\|_\infty \le \|k\|_\infty \|f\|_1,$$

azaz a Φ operátor $(1,\infty)$-típusú. Ha $f \in L^2(\mathbf{R}_+)$, legyen

$$g(x) := \frac{d}{dx} \int_0^\infty k_1(xu) f(u) \frac{du}{u},$$

ez a g majdnem mindenütt definiált, $g \in L^2(\mathbf{R}_+)$, továbbá,

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty k_1(xu) g(u) \frac{du}{u} \quad \text{m.m.}, \qquad \text{és} \qquad \|f\|_2 = \|g\|_2,$$

azaz a Φ operátor $(2,2)$ típusú. A Riesz–Thorin-féle konvexitási tétel alkalmazásával (2.15) adódik.

Másrészt, legyen g egy kompakt tartójú, folytonosan differenciálható függvény. Könnyen látható, hogy

$$|u\widehat{g}_F(u)| = \left|u \int_0^\infty g(x)k(xu)\,dx\right| = \left|\int_0^\infty g'(x)k_1(xu)\,dx\right|.$$

Ha a k_1 függvény korlátos, nyilván $\widehat{g}_F(u) \to 0$, ha $u \to \infty$. Az $f \in L^1$ függvényhez válasszunk egy olyan g-t, amelyre $g' \in C_c$, és $\|f - g\| < \varepsilon$. Φ linearitása miatt

$$\|\widehat{f}_F - \widehat{g}_F\|_1 < \varepsilon \|k\|_\infty,$$

ebből

$$\limsup_{n\to\infty} \widehat{g}_F(u) < \varepsilon \|k\|_\infty,$$

és mivel $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsinek választható, $\lim_{u\to\infty} \widehat{f}_F(u) = 0$, azaz (2.16) is teljesül.

*2.23. KÖVETKEZMÉNY (Németh Z. [Ne4]). *Egy $f \mapsto \widehat{f}_F$ Fourier típusú transzformációra, feltéve, hogy k és $k_1(u) = \int_0^u k(x)\,dx$ korlátosak, valamint* (2.19) *teljesül, érvényes a* 2.19. *tétel.*

2.5. Bizonyítás

A bizonyítás a 2.9. tétel bizonyításának folytonos változata. Itt is a Kronecker lemma játssza a fő szerepet.

2.24. LEMMA. *Ha* $g \in L^1_{\text{loc}}$ *és*

$$G(x) := \int_0^x g(u)\,du \to s, \qquad \textit{ha} \qquad x \to \infty,$$

akkor

$$\frac{1}{x} \int_0^x ug(u)\,du \to 0, \qquad \textit{ha} \qquad x \to \infty.$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x}\int_0^x ug(u)\,du = G(x) - \frac{1}{x}\int_0^x G(u)\,du =: I(x).$$

Bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan R szám, hogy $s - \varepsilon < G(x) < s + \varepsilon$ minden $x > R$ esetén. Ezért

$$\frac{1}{x}\int_0^R G(u)\,du + \frac{x-R}{x}(s-\varepsilon) \le \frac{1}{x}\Big(\int_0^R G(u)\,du + \int_R^x G(u)\,du\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{x}\int_0^R G(u)\,du + \frac{x-R}{x}(s+\varepsilon)$$

is teljesül minden $x > R$-re, továbbá, mivel $G(u)$ korlátos,

$$\frac{1}{x}\int_0^R G(u)\,du \le \frac{RK}{x} \to 0, \qquad \text{ha} \qquad x \to \infty,$$

amiből

$$I(x) \to s - s = 0, \qquad \text{ha} \qquad x \to \infty$$

azonnal következik. □

Most már rátérhetünk a 2.19. tétel bizonyítására. Azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{\alpha}{x}\int_0^x \Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{\alpha-1}\lambda_\alpha(u)|\widehat{f}(u)|\,du \to 0 \qquad \text{ha} \qquad x \to \infty. \tag{2.20}$$

1. *rész.* $\alpha > 1/q$. Alkalmazzuk a Hölder egyenlőtlenséget a p, q kitevőkkel:

$$\frac{\alpha}{x}\int_0^x \Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{\alpha-1}\lambda_\alpha(u)|\widehat{f}(u)|\,du =$$

$$\frac{\alpha}{x}\int_0^x \Big(\Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{\alpha-1}\lambda_\alpha(u)u^{-1/q}\Big)\Big(u^{1/q}|\widehat{f}(u)|\Big)\,du \le$$

$$\le \Big(\frac{\alpha}{x}\int_0^x \Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{p\alpha-p}(\lambda_\alpha(u))^p u^{-p/q}\,du\Big)^{1/p}\Big(\frac{\alpha}{x}\int_0^x u|\widehat{f}(u)|^q\,du\Big)^{1/q} =:$$

$$=: (I_{x,\alpha})^{1/p}\Big(\frac{\alpha}{x}\int_0^x u|\widehat{f}(u)|^q\,du\Big)^{1/q}. \tag{2.21}$$

A (2.15) feltételből $\int_0^\infty |\widehat{f}(u)|^q\,du < \infty$, a 2.24. lemma szerint a (2.21) második tagja tart 0-hoz, ha $x \to \infty$.

Végrehajtva a $\xi = u/x$ helyettesítést,

$$I_{x,\alpha} = \frac{\alpha}{x}\int_0^x \Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{p\alpha-p} u^{p/q}u^{-p/q}\,du =$$

$$= \frac{\alpha}{x}\int_0^1 (1-\xi)^{p\alpha-p}d\xi \le K(\alpha,p),$$

hiszen $p\alpha - p > -1$, s ezzel (2.20)-et beláttuk.

2 *rész.* $\alpha \le 1/q$. A (2.20)-ben szereplő integrált kettébontjuk:

$$\frac{\alpha}{x}\int_0^x \Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{\alpha-1}\lambda_\alpha(u)|\widehat{f}(u)|\,du = \frac{\alpha}{x}\Big(\int_0^{x-1} + \int_{x-1}^x\Big). \tag{2.20*}$$

Először a második tagot becsüljük. A (2.16) feltétel szerint $|\widehat{f}(x)| < \varepsilon$, ha x elég nagy. Legyen x elegendően nagy. Az $0 < \alpha < 1/q$ esetben

$$\frac{\alpha}{x}\int_{x-1}^x \Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{\alpha-1}\lambda_\alpha(u)|\widehat{f}(u)|\,du = \frac{\alpha}{x}\int_{x-1}^x \Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{\alpha-1}u^\alpha|\widehat{f}(u)|\,du \le$$

$$\leq \frac{\alpha}{x}\varepsilon x^{1-\alpha}x^{\alpha}\int_{x-1}^{x}(x-u)^{\alpha-1}\,du = \varepsilon,$$

az $\alpha = 1/q$ esetben pedig

$$\frac{\alpha}{x}\int_{x-1}^{x}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1}\lambda_{\alpha}(u)|\widehat{f}(u)|\,du =$$

$$= \frac{\alpha}{x}\int_{x-1}^{x}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{1/q-1}u^{1/q}(\log(u+2))^{1/q-1}|\widehat{f}(u)|\,du \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{x}x^{1-1/q}x^{1/q}(\log(x+1))^{1/q-1}\varepsilon\int_{x-1}^{x}(x-u)^{1/q-1}\,du = \alpha(\log(x+1))^{1/q-1}\varepsilon\frac{1}{\alpha} \leq \varepsilon.$$

Most már csak a (2.20*) jobb oldalának első tagja van hátra. Ugyanúgy járhatunk el, mint az 1. részben. Alkalmazva a Hölder egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\frac{\alpha}{x}\int_{0}^{x-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1}\lambda_{\alpha}(u)|\widehat{f}(u)|\,du \leq$$

$$\left(\frac{\alpha}{x}\int_{0}^{x-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{p\alpha-p}(\lambda_{\alpha}(u))^{p}u^{-p/q}\,du\right)^{1/p}\left(\frac{\alpha}{x}\int_{0}^{x-1}u|\widehat{f}(u)|^{q}\,du\right)^{1/q} =:$$

$$(2.21^*) \qquad =: (I'_{x,\alpha})^{1/p}\left(\frac{\alpha}{x}\int_{0}^{x-1}u|\widehat{f}(u)|^{q}\,du\right)^{1/q}.$$

A (2.21)-hez hasonlóan, az első tényező most is 0-hoz tart. Elegendő tehát belátnunk, hogy a második tényező korlátos.

Az $0 < \alpha < 1/q$ esetben

$$I'_{x,\alpha} = \frac{\alpha}{x}\int_{0}^{x-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{p\alpha-p}u^{p\alpha-p/q}\,du =$$

$$= \alpha x^{-1-p\alpha+p}\int_{0}^{x-1}(x-u)^{p\alpha-p}u^{p\alpha-p/q}\,du =$$

$$= \alpha x^{-1-p\alpha+p}\left(\int_{0}^{x/2}+\int_{x/2}^{x-1}\right) =: I_1 + I_2,$$

és könnyen kiszámolható, hogy

$$I_1 = \alpha x^{-1-p\alpha+p}\int_{0}^{x/2}(x-u)^{p\alpha-p}u^{p\alpha-p/q}\,du \leq$$

$$\leq K(p,\alpha)x^{-1}\int_{0}^{x/2}u^{p\alpha-p/q}\,du \leq K(p,\alpha)x^{p\alpha-p/q} \leq K(p,\alpha),$$

mivel $-1 < p\alpha - p/q < 0$, valamint

$$I_2 = \alpha x^{-1-p\alpha+p}\int_{x/2}^{x-1}(x-u)^{p\alpha-p}u^{p\alpha-p/q}\,du \leq$$

$$\leq K(p,\alpha)x^{-1+p-p/q}\int_{x/2}^{x-1}(x-u)^{p\alpha-p}\,du \leq K(p,\alpha)\int_{1}^{x/2}\xi^{p\alpha-p}d\xi \leq K(p,\alpha),$$

mivel $-p < p\alpha - p < p/q - p = -1$.

Az $\alpha = 1/q$ eset hasonlóan kezelhető. Kettébontva az integrált

$$I'_{x,\alpha} = \frac{\alpha}{x}\int_{0}^{x-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{p/q-p}u^{p/q}(\log(u+2))^{p/q-p}u^{-p/q}\,du =$$

SZTE Egyetemi Könyvtár SZOTE

$$= \frac{1}{q}\int_0^{x-1}(x-u)^{-1}(\log(u+2))^{-1}\,du = \frac{1}{q}\Big(\int_0^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^{x-1}\Big) =: I_3 + I_4,$$

az előzőhöz hasonló számolással

$$I_3 = \frac{1}{q}\int_0^{\sqrt{x}}(x-u)^{-1}(\log(u+2))^{-1}\,du \le$$

$$\le \frac{1}{q}\frac{1}{x-\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}}(\log(u+2))^{-1}\,du \le \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\frac{1}{q\log 2} \le K(q),$$

és végezetül

$$I_4 = \frac{1}{q}\int_{\sqrt{x}}^{x-1}(x-u)^{-1}(\log(u+2))^{-1}\,du \le$$

$$\le K(q)(\log(x+2))^{-1}\int_1^{x-\sqrt{x}}\frac{1}{\xi}d\xi \le K(q).$$

Összegyűjtve becsléseinket, a tételt bebizonyítottuk. □

3. Tauber típusú tételek

Mint arra már a 0.3. szakaszban is utaltunk, általában Tauber típusúnak nevezzük azokat az eredményeket, amelyek egy sor szummálhatóságából és valamely további feltétel teljesüléséből a sor konvergenciájára (vagy „gyengébb" szummálhatóságára következtetnek. Az egyik legnevezetesebb klasszikus eredmény a 0.12-es, „Hardy–Landau-féle féloldalas" feltétel.

A Tauber típusú eredmények igen fontosak a szummációelméletben. Illusztrációképpen mutatjuk be az alábbi példát.

A 0.3. szakasz végén idéztük Fejér tételét: Egy $f \in L$ függvény Fourier sora $(C,1)$ szummálható az $\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$ értékhez minden olyan x_0 pontban, ahol ez az érték egyáltalán létezik. A 0.12. tétel szerint, ha a függvény Fourier együtthatóira teljesül az $|\widehat{f}(n)| \leq K(1/n)$ feltétel, a Fourier sor az $\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$ értékhez *konvergál*. Könnyen belátható, hogy ez a feltétel teljesül a korlátos változású függvényekre, így a 0.12. tételből egyszerűen levezethető a Dirichlet–Jordan-féle kritérium [Zy, 57. o.].

Mindazonáltal, a Tauber típusú eredmények igen sokfélék lehetnek (a 2.2. megjegyzésben mi is más típusú feltételt használtunk). Ebben a fejezetben alapvetően két eredményt mutatunk be: kettős sorok $(C,1,1)$ reguláris szummálhatóságát, illetve integrálok $(C,1)$ szummálhatóságát vizsgáljuk.

3.1. A $(C,1,1)$ szummálhatóság egy jellemzése

Tekintsünk egy

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{3.1}$$

sort. Feltéve, hogy ez a sor $(C,1)$ szummálható, értelmezhetjük a

$$b_n := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}, \qquad n = 0,1\ldots, \tag{3.2}$$

sorozatot (belátható, hogy a jobb oldal konvergens). A b_n sorozat segítségével megfogalmazható a $(C,1)$ szummálhatóság egy szükséges és elegendő feltétele.

3.1. Tétel (Hardy [H2]). *Az* (1.1) *sor akkor és csak akkor* $(C,1)$ *szummálható az* L *(véges) számhoz, ha a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \tag{3.3}$$

sor konvergál ugyanahhoz az L *számhoz.*

Érdemes megjegyezni, hogy Hardy eredetileg az alábbi módon fogalmazta meg a tételt:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = s_n + (n+1)b_{n+1} \to L, \qquad \text{ha} \qquad n \to \infty. \tag{3.4}$$

Ezt az eredményt terjesztjük ki regulárisan szummálható kettős sorokra. 0.14-ben definiáltuk a reguláris konvergenciát. Ennek mintájára a reguláris $(C,1,1)$ szummálhatóságot az alábbi módon definiáljuk:

3.2. DEFINÍCIÓ. Tekintsük a

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \tag{3.5}$$

kettős sort, és

$$\sigma_{mn} := \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} s_{jk} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\Big(1-\frac{j}{m+1}\Big)\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)a_{jk}$$

elsőrendű Cesàro közepeit. A sor regulárisan $(C,1,1)$ szummálható, ha Pringsheim értelemben szummálható, azaz bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ szám, hogy

$$|\sigma_{mn} - L| < \varepsilon, \qquad \text{valahányszor} \qquad \min(m,n) \geq N, \tag{3.6}$$

továbbá a kettős sor „sorai" és „oszlopai", azaz a

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{3.7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}, \qquad j = 0,1,\ldots, \tag{3.8}$$

sorok $(C,1)$ szummálhatók.

A 0.15. tételhez hasonlóan, most is érvényes a Cauchy kritérium következő alakja:

3.3. TÉTEL (Móricz F., [Mo1]). *A* (3.5) *kettős sor akkor és csak akkor regulárisan* $(C,1,1)$ *szummálható, ha bármely* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik olyan* $N = N(\varepsilon)$ *szám, hogy*

$$|\sigma_{m_1,n_1} - \sigma_{m_2,n_1} - \sigma_{m_1,n_2} + \sigma_{m_2,n_2}| < \varepsilon, \tag{3.9}$$

valahányszor $max(m_1,n_1) > N$, $0 \leq m_1 \leq m_2$, $0 \leq n_1 \leq n_2$, *továbbá, tetszőleges* $n \geq 0$ *esetén*

$$|\sigma_{m_1,n} - \sigma_{m_2,n}| < \varepsilon, \qquad \textit{valahányszor} \qquad \min(m_1,m_2) > N \tag{3.10}$$

és $m \geq 0$ *esetén*

$$|\sigma_{m,n_1} - \sigma_{m,n_2}| < \varepsilon, \qquad \textit{valahányszor} \qquad \min(n_1,n_2) > N. \tag{3.11}$$

A reguláris konvergencia és szummálhatóság néhány fontos tulajdonságát három lemmában foglaljuk össze.

3.4. LEMMA. *Ha a* (3.5) *kettős sor regulárisan konvergens, akkor téglalap-részletösszegei korlátosak, azaz,*

$$|s_{mn}| \leq B, \qquad m,n = 0,1,\ldots.$$

3.5. LEMMA. *Ha a* (3.5) *kettős sor regulárisan* $(C,1,1)$ *szummálható, akkor*

$$|\sigma_{mn}| \le K, \qquad m,n = 0,1,\dots,$$

$$s_{mn}/(m+1)(n+1) \to 0 \qquad \textit{ha} \qquad \max(m,n) \to \infty,$$

speciálisan

$$|s_{mn}|/(m+1)(n+1) \le K, \qquad m,n = 0,1,\dots.$$

A 3.4. lemma szinte nyilvánvaló. A 3.5. lemma egy bizonyítása megtalálható [MN2]-ben, de ez is ismert eredmény. Érdemes még megjegyezni, hogy lemmánk részben a 0.11. tétel egy analogonja.

Végezetül, bevezethetjük a sor $(C,1,0)$ közepeit is:

$$\sigma_{mn}^{10} := \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} s_{jn} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\Big(1-\frac{j}{m+1}\Big)a_{jk}, \qquad m,n = 0,1,\dots.$$

A (3.5) kettős sort $(C,1,0)$ szummálhatónak nevezzük, ha a (σ_{mn}^{10}) (kettős) sorozat Pringsheim értelemben egy véges számhoz konvergál. Hasonló módon értelmezhető a $(C,0,1)$ közép (és szummálhatóság) is. Végezetül, a szokásos módszerekkel könnyen igazolható, hogy ezek konvergenciatartó módszerek.

3.6. LEMMA. *Ha a* (3.5) *kettős sor Pringsheim értelemben egy véges* L *számhoz konvergál, és téglalap-részletösszegei korlátosak, akkor a sor* $(C,1,1)$, $(C,1,0)$, *valamint* $(C,0,1)$ *szummálható is ugyanahhoz az* L *számhoz.*

A fentiekben körüljártuk a regularitás koncepcióját. Most már megfogalmazhatjuk fő eredményünket.

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$b_{mn} := \sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_{jk}}{(j+1)(k+1)}, \qquad m,n = 0,1,\dots. \tag{3.12}$$

A 3.9. lemmában látni fogjuk, hogy ha a (3.5) kettős sor regulárisan $(C,1,1)$ szummálható, a jobb oldalon álló sor konvergens, így a definíció értelmes.

*3.7. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., [MN2]). *A* (3.5) *kettős sor akkor és csak akkor regulárisan* $(C,1,1)$ *szummálható egy véges* L *számhoz, ha a*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} \tag{3.13}$$

kettős sor regulárisan konvergál ugyanahhoz az L *számhoz.*

A 3.7. tétel szerint tehát, ha a (3.5) sor regulárisan $(C,1,1)$ szummálható egy véges L számhoz, akkor a (3.12) sor bármely $m,n \ge 0$ esetén konvergens, és a (3.13)-ban definiált új kettős sor regulárisan konvergens ugyanahhoz a határértékhez. Fordítva, ha a (3.12) sor bármely $m,n \ge 0$ esetén konvergens, és a (3.13)-ban definiált kettős sor regulárisan konvergens, akkor az eredeti (3.5) sor regulárisan $(C,1,1)$ szummálható ugyanahhoz a határértékhez.

A 3.2. definíció szerint a (3.5) sor reguláris $(C,1,1)$ szummálhatóságából következik, hogy „sorai" és „oszlopai", azaz a (3.7) és (3.8) egyszeres sorok $(C,1)$ szummálhatók. A 3.1. tétel szerint ekkor a

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_{jk}}{j+1}, \qquad k = 0,1,\dots, \tag{3.14}$$

és a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{jk}}{k+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{3.15}$$

sorok konvergensek. Könnyen belátható, hogy a (3.12) sor *valamely* $m, n \geq 0$ értek esetén, illetve *minden* $m, n \geq 0$ értek esetén való konvergenciája ekvivalens.

Természetesen merül föl a kérdés, hogy vajon csakugyan szükség van-e a regularitás feltételezésére a 3.1. tétel általánosításakor?

*3.8. PÉLDA (Móricz F., Németh Z., [MN2]). *Van olyan Pringsheim értelemben* $(C, 1, 1)$ *szummálható kettős sor, amelyhez a* b_{mn} *sorozat nem értelmezhető.*

Nyitott kérdés, hogy ha a (3.5) sor csupán Pringsheim értelemben $(C, 1, 1)$ szummálható, de a b_{mn} sorozat létezik, érvényes-e a 3.7. tételhez hasonló jellemzés? [MN2]-ben megfogalmazott sejtésünk szerint nem, de ilyen példát nem sikerült konstruálnunk.

3.2. Bizonyítások

Mindenekelőtt belátjuk a (3.12) definíció jogosságát.

*3.9. LEMMA (Móricz F., Németh Z., [MN2]). *Ha a* (3.5) *sor regulárisan* $(C, 1, 1)$ *szummálható, akkor a* (3.12) *sor minden* $m, n = 0, 1, \ldots$ *értékre konvergens.*

Mivel a (3.14) és (3.15) sorok konvergensek, a (3.12) konvergenciája reguláris.

A 3.9 lemma bizonyítása

Kényelmesebb, ha a (3.12)-ben definiált $b_{m+1,n+1}$ sorral dolgozunk, ahol $m, n = -1, 0, 1, \ldots$ rögzítettek. Legyen $M > m + 2$ és $N > n + 2$. Mivel

$$a_{jk} = s_{jk} - s_{j-1,k} - s_{j,k-1} + s_{j-1,k-1}, \tag{3.16}$$

a szokásos

$$s_{-1,k} = s_{j,-1} = s_{-1,-1} := 0, \qquad j, k = 0, 1, \ldots$$

jelöléssel, végrehajtva egy kettős Abel-átrendezést, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=m+1}^{M} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{a_{jk}}{(j+1)(k+1)} = \tag{3.17}$$

$$= \sum_{j=m+1}^{M} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{s_{jk}}{(j+1)(j+2)(k+1)(k+2)} +$$

$$+ \frac{1}{N+1} \sum_{j=m+1}^{M-1} \frac{s_{jN}}{(j+1)(j+2)} + \frac{1}{M+1} \sum_{k=n+1}^{N-1} \frac{s_{Mk}}{(k+1)(k+2)} -$$

$$- \frac{1}{n+2} \sum_{j=m+1}^{M-1} \frac{s_{jn}}{(j+1)(j+2)} - \frac{1}{m+2} \sum_{k=n+1}^{N-1} \frac{s_{mk}}{(k+1)(k+2)} +$$

$$+ \frac{s_{mn}}{(m+2)(n+2)} - \frac{s_{mN}}{(m+2)(N+1)} - \frac{s_{Mn}}{(M+1)(n+2)} + \frac{s_{MN}}{(M+1)(N+1)}.$$

Felhasználva a 3.5. Lemmát és végrehajtva egy újabb kettős Abel-átrendezést,

$$\sum_{j=m+1}^{M-1}\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{s_{jk}}{(j+1)(j+2)(k+1)(k+2)} = \tag{3.18}$$

$$= 4\sum_{j=m+1}^{M-2}\sum_{k=n+1}^{N-2}\frac{\sigma_{jk}}{(j+2)(j+3)(k+2)(k+3)} +$$

$$+\frac{2}{N+1}\sum_{j=m+1}^{M-2}\frac{\sigma_{j,N-1}}{(j+2)(j+3)}+\frac{2}{M+1}\sum_{k=n+1}^{N-2}\frac{\sigma_{M-1,k}}{(k+2)(k+3)}-$$

$$-\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)}\sum_{j=m+1}^{M-2}\frac{\sigma_{jn}}{(j+2)(j+3)}-\frac{2(m+1)}{(m+2)(m+3)}\sum_{k=n+1}^{N-2}\frac{\sigma_{mk}}{(k+2)(k+3)}-$$

$$-\frac{\sigma_{M-1,N-1}}{(M+1)(N+1)}-\frac{(m+1)\sigma_{m,N-1}}{(m+2)(m+3)(N+1)}-$$

$$-\frac{(n+1)\sigma_{M-1,n}}{(M+1)(n+2)(n+3)}+\frac{(m+1)(n+1)\sigma_{mn}}{(m+2)(m+3)(n+2)(n+3)}.$$

Ismét a 3.5. Lemmát használva, ha (4.18)-ban $M, N \to \infty$,

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{s_{jk}}{(j+1)(j+2)(k+1)(k+2)} = \tag{3.19}$$

$$= 4\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sigma_{jk}}{(j+2)(j+3)(k+2)(k+3)} -$$

$$-\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)}\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{\sigma_{jn}}{(j+2)(j+3)}-\frac{2(m+1)}{(m+2)(m+3)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sigma_{mk}}{(k+2)(k+3)}+$$

$$+\frac{(m+1)(n+1)\sigma_{mn}}{(m+2)(m+3)(n+2)(n+3)}, \qquad m,n=-1,0,1,\ldots.$$

Mivel a jobb oldalon álló sorok abszolút konvergensek, (3.19) bal oldala is konvergens.

Egyszeres Abel-átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\sum_{j=m+1}^{N-1}\frac{s_{jN}}{(j+1)(j+2)} = 2\sum_{j=m+1}^{M-2}\frac{(N+1)\sigma_{jN}-N\sigma_{j,N-1}}{(j+2)(j+3)}+$$

$$+\frac{(N+1)\sigma_{M-1,N}-N\sigma_{M-1,N-1}}{M+1}-\frac{(m+1)((N+1)\sigma_{mN}-N\sigma_{m,N-1})}{(m+2)(m+3)}.$$

Legyen $M, N \to \infty$. Felhasználva, hogy minden

$$\sigma_{m,N} = \sum_{j=0}^{m}\Big(1-\frac{j}{m+1}\Big)\sigma_N(j), \qquad N=0,1,\ldots,$$

egyszeres sorozat konvergens, ha $N \to \infty$ és $m = 0,1,\ldots$ rögzített, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{N+1}\sum_{j=m+1}^{M-1}\frac{s_{jN}}{(j+1)(j+2)} \to 0, \qquad \text{ha} \qquad M,N\to\infty. \tag{3.20}$$

A formula szimmetrikus megfelelője a másik indexben

$$\frac{1}{M+1}\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{s_{Mk}}{(k+1)(k+2)} \to 0, \qquad \text{ha} \qquad M,N\to\infty. \tag{3.21}$$

JATE Egyetemi Könyvtár SZEGED

Hasonló számolással nyerjük, hogy

$$\sum_{j=m+1}^{M-1} \frac{s_{jn}}{(j+1)(j+2)} = 2 \sum_{j=m+1}^{M-2} \frac{(n+1)\sigma_{jn} - n\sigma_{j,n-1}}{(j+2)(j+3)} +$$

$$+ \frac{(n+1)\sigma_{M-1,n} - n\sigma_{M-1,n-1}}{M+1} - \frac{(m+1)((n+1)\sigma_{mn} - n\sigma_{m,n-1})}{(m+2)(m+3)}.$$

Ismét a 3.5. Lemmát használva, $M \to \infty$ határátmenettel nyerjük, hogy

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{s_{jn}}{(j+1)(j+2)} = \tag{3.22}$$

$$= 2 \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{(n+1)\sigma_{jn} - n\sigma_{j,n-1}}{(j+2)(j+3)} - \frac{(m+1)((n+1)\sigma_{mn} - n\sigma_{m,n-1})}{(m+2)(m+3)}.$$

Mivel a jobb oldalon álló sorok abszolút konvergensek, (3.22) bal oldala is konvergens. Hasonlóan,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{s_{mk}}{(k+1)(k+2)} = \tag{3.23}$$

$$= 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(m+1)\sigma_{mk} - m\sigma_{m-1,k}}{(k+2)(k+3)} - \frac{(n+1)((m+1)\sigma_{mn} - m\sigma_{m-1,n})}{(n+2)(n+3)}.$$

A 3.5. lemma szerint, a (3.17) jobb oldalán álló utolsó három tag nullához tart, ha $M, N \to \infty$. Összegyűjtve a (3.17)–(3.23) formulákat, a lemmát bebizonyítottuk. □

A (3.12), (3.17), (3.20) és (3.21) formulákból levezethetjük az alábbi előállítást is:

$$b_{m+1,n+1} = \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{s_{jk}}{(j+1)(j+2)(k+1)(k+2)} - \tag{3.24}$$

$$- - \frac{1}{n+2} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{s_{jn}}{(j+1)(j+2)} - \frac{1}{m+2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{s_{mk}}{(k+1)(k+2)} + \frac{s_{mn}}{(m+2)(n+2)},$$

ahol a jobb oldalon minden sor konvergens.

A 3.7. tétel bizonyítása

(i) *Szükségesség.* Mivel

$$b_{jk} - b_{j+1,k} - b_{j,k+1} + b_{j+1,k+1} = \frac{a_{jk}}{(j+1)(k+1)},$$

kettős Abel átrendezéssel kapjuk, hogy

$$s_{mn} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (j+1)(k+1)(b_{jk} - b_{j+1,k} - b_{j,k+1} + b_{j+1,k+1}) = \tag{3.25}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_{jk} - (n+1) \sum_{j=0}^{m} b_{j,n+1} - (m+1) \sum_{k=0}^{n} b_{m+1,k} + (m+1)(n+1) b_{m+1,n+1}.$$

Könnyen kiszámolhatjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{m} b_{j,n+1} = \Big\{ \sum_{j=0}^{\infty} + \sum_{j=1}^{\infty} + \ldots + \sum_{j=m}^{\infty} \Big\} \frac{1}{j+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{k+1} = \tag{3.26}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{k+1} + (m+1)b_{m+1,n+1},$$

és hasonlóan

$$\sum_{k=0}^{n} b_{m+1,k} = \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{jk}}{j+1} + (n+1)b_{m+1,n+1}. \tag{3.27}$$

Egyesítve a (3.25)–(3.27) formulákat, kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_{jk} = s_{mn} + (n+1) \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{k+1} + \tag{3.28}$$

$$+ (m+1) \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{jk}}{j+1} + (m+1)(n+1)b_{m+1,n+1}.$$

Végrehajtva egy Abel átrendezést,

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{a_{jk}}{k+1} = -\frac{s_{mn}}{n+2} + \sum_{k=n+1}^{N-1} \frac{s_{mk}}{(k+1)(k+2)} + \frac{s_{mN}}{N+1},$$

ahonnan $N \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{k+1} = -\frac{s_{mn}}{n+2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{s_{mk}}{(k+1)(k+2)}. \tag{3.29}$$

(3.23)-ban már láttuk, hogy a jobb oldalon álló sor konvergens, így a bal oldali sor is. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{jk}}{j+1} = -\frac{s_{mn}}{m+2} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{s_{jn}}{(j+1)(j+2)}. \tag{3.30}$$

Összegezve (3.28)–(3.30)-at, felírhatjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_{jk} = (m+1)(n+1) \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{s_{jk}}{(j+1)(j+2)(k+1)(k+2)}, \tag{3.31}$$

ahol, mint (3.19)-ben láttuk, a jobb oldali sor konvergens.

(3.19) és (3.31) felhasználásával az alábbi előállítást kapjuk:

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_{jk} = 4(m+1)(n+1) \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sigma_{jk}}{(j+2)(j+3)(k+2)(k+3)} - \tag{3.32}$$

$$- \frac{2(m+1)n}{n+2} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{\sigma_{j,n-1}}{(j+2)(j+3)} - \frac{2m(n+1)}{m+2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sigma_{m-1,k}}{(k+2)(k+3)} + \frac{mn\sigma_{m-1,n-1}}{(m+2)(n+2)}.$$

Könnyen beláthatjuk, hogy (3.32) akkor is érvényes marad, ha a bal oldalból kivonunk L-et, a jobb oldalon pedig σ_{jk}-t kicseréljük $\sigma_{jk} - L$-re. Így a (3.13) sor Pringsheim értelemben konvergens, ha a (3.5) sor regulárisan $(C,1,1)$ szummálható. A

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_{jk} \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk}, \tag{3.33}$$

sorok konvergenciája (ahol $k = 0, 1, \ldots$, illetve $j = 0, 1, \ldots$ rögzítettek), következik a 3.1. tételből. Ezzel a (3.13) sor reguláris konvergenciáját beláttuk.

(ii) *Elegendőség.* Legyen

$$t_{mn} := \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_{jk}, \qquad m, n = 0, 1, \ldots$$

a (3.13) sor téglalap-részletösszege. Világos, hogy

$$\sum_{j=0}^{m} b_{j,n+1} = t_{m,n+1} - t_{mn}, \qquad \sum_{k=0}^{n} b_{m+1,k} = t_{m+1,n} - t_{mn},$$

és

$$b_{m+1,n+1} = t_{m+1,n+1} - t_{m,n+1} - t_{m+1,n} + t_{mn}.$$

Ebből, (3.25)-öt fölhasználva,

$$s_{mn} = t_{mn} - (n+1)(t_{m,n+1} - t_{mn}) + (m+1)(t_{m+1,n} - t_{mn}) +$$

$$+ (m+1)(n+1)(t_{m+1,n+1} - t_{m,n+1} - t_{m+1,n} + t_{mn}),$$

amiből könnyen adódik, hogy

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} s_{mn} = 4 \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} t_{mn} - 2(N+1) \sum_{m=0}^{M} t_{m,N+1} -$$

$$- 2(M+1) \sum_{n=0}^{N} t_{M+1,n} + (M+1)(N+1) t_{M+1,N+1}.$$

Ezt felhasználva,

$$\sigma_{MN} = \frac{4}{(M+1)(N+1)} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} t_{mn} - \tag{3.34}$$

$$- \frac{2}{M+1} \sum_{m=0}^{M} t_{m,N+1} - \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N} t_{M+1,n} + t_{M+1,N+1}.$$

Tegyük fel, hogy a (3.13) sor regulárisan konvergál egy véges L számhoz. A 3.4. és 3.6. lemmákat felhasználva, (3.34)-ből adódik, hogy

$$\sigma_{MN} \to 4L - 2L - 2L + L = L, \qquad \text{ha} \qquad M, N \to \infty.$$

A (σ_{MN}) reguláris konvergenciájának teljes bizonyításához be kell még látnunk, hogy a $(\sigma_{MN} : M = 0, 1, \ldots)$ és $(\sigma_{MN} : N = 0, 1, \ldots)$ egyszeres sorozatok is konvergensek. Ez azonban a 3.1. tételből, az előző esethez hasonlóan, azonnal következik. Ezzel a 3.7. tételt beláttuk. □

A 3.8. példa konstrukciója

Legyen

$$a_{j0} := \begin{cases} 1/2, & \text{ha } j = 0, \\ (-1)^j, & \text{ha } j = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{3.35}$$

$$a_{jk} := (-1)^k (k+1) a_{j0}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

és tekintsük a megfelelő

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$$

sort. Könnyen belátható, hogy

$$s_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right), \qquad m,n = 0,1,\dots,$$

(ahol $[\cdot]$ az alsó egészrészt jelöli), valamint, hogy

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } m \text{ vagy } n = 1,3,5,\dots, \\ \dfrac{1}{2(m+1)(n+1)}\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+1\right) & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha $m,n \to \infty$, a (σ_{mn}) sorozat 0-hoz tart, azaz a (3.35)-ben definiált sor Pringsheim értelemben $(C,1,1)$ szummálható a 0-hoz. A szummálhatóság azonban nem reguláris, hiszen a kettős sor (3.8)-nak megfelelő „oszlopai" $(C,1)$ értelemben divergensek, például a $j=0$ esetben a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)}{2}$$

egyszeres sor nem $(C,1)$ szummálható.

Másrészt, a b_{mn} definíciójában szereplő sor Pringsheim értelemben sem konvergens. Ha $m=n=0$, a (3.12) sor téglalap-részletösszegei

$$\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{N}\frac{a_{jk}}{(j+1)(k+1)} = \sum_{j=0}^{M}\frac{a_{j0}}{j+1}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k =$$

$$= \begin{cases} -\displaystyle\sum_{j=0}^{M}\frac{a_{j0}}{j+1}, & \text{ha } N = 0,2,4,\dots, \\ 0, & \text{ha } N = 1,3,5,\dots, \end{cases}$$

nem konvergensek $M,N \to \infty$ esetén, hiszen

$$\sum_{j=0}^{M}\frac{a_{j0}}{j+1} = \sum_{j=1}^{M+1}\frac{(-1)^{j-1}}{j} - \frac{1}{2} \to \log 2 - \frac{1}{2} \neq 0, \qquad \text{ha} \qquad M \to \infty.$$

Következésképpen a (3.13) sor nem értelmezhető. □

3.3. Alkalmazások

Bár a 3.7. tétel önmagában is érdekes, legfontosabb alkalmazása Tauber típusú tételek bizonyítása. Hardy idézett cikkében ([H2]) a 3.1. tételből levezeti a klasszikus 0.12. tételt, valamint az alábbi más jellegű eredményt:

3.10. TÉTEL (Hardy, [H2]). *Ha a $\sum a_n$ sor $(C,1)$ szummálható, és $\sum n^p|a_n|^{p+1} < \infty$ valamely $p > 0$ értékre, akkor $\sum a_n$ konvergens.*

Hardy gondolatmenetét követve, ebben a szakaszban a $(C,1,1)$ szummálhatóságra vonatkozó Tauber típusú tételeket bizonyítunk. A szakasz új eredményei még nem jelentek meg cikk formájában. Mivel a témával jelenleg is foglalkozunk, lehetséges, hogy az eredményeket vagy a bizonyításokat nem kiforrott formájukban közöljük. Mégis, úgy érezzük, hogy ezeknek az eredményeknek is helyük van az értekezésben, mind a téma fontosságára való tekintettel, mind a 3.7. tétel alkalmazásaként.

A 0.12. tételt kettős sorokra Móricz Ferenc általánosította.

3.11. TÉTEL (Móricz F., [Mo3]). *Ha az* (s_{jk}) *sorozat* $(C,1,1)$ *szummálható, és léteznek olyan* $N > 0$ *és* $H > 0$ *számok, hogy*

$$jk|s_{jk} - s_{j-1,k} - s_{j,k-1} + s_{j-1,k-1}| \leq H, \qquad \textit{valahányszor} \qquad j,k > N, \tag{3.36}$$

$$j|s_{jn} - s_{j-1,n}| \leq H, \qquad \textit{valahányszor} \qquad j,n > N, \tag{3.37}$$

valamint

$$k|s_{mk} - s_{m,k-1}| \leq H, \qquad \textit{valahányszor} \qquad m,k > N, \tag{3.38}$$

akkor az (s_{jk}) *sorozat konvergens.*

A mi eredményünk a következő:

*3.12. TÉTEL. *Ha a* (3.5) *sor regulárisan* $(C,1,1)$ *szummálható, és léteznek olyan* $N > 0$ *és* $H > 0$ *számok, hogy a sor téglalap-részletösszegeire*

$$j(s_{jn} - s_{j-1,n}) \geq -H, \qquad \textit{valahányszor} \qquad j,n > N, \tag{3.39}$$

valamint

$$k(s_{mk} - s_{m,k-1}) \geq -H, \qquad \textit{valahányszor} \qquad m,k > N, \tag{3.40}$$

teljesülnek, akkor a sor Pringsheim értelemben konvergens.

*3.12′. TÉTEL. *Ha a* (3.5) *sor regulárisan* $(C,1,1)$ *szummálható, és léteznek olyan* $N > 0$ *és* $H > 0$ *számok, hogy a sor téglalap-részletösszegeire*

$$j(s_{jn} - s_{j-1,n}) \geq -H, \qquad \textit{valahányszor} \qquad \max(j,n) > N, \tag{3.39′}$$

valamint

$$k(s_{mk} - s_{m,k-1}) \geq -H, \qquad \textit{valahányszor} \qquad \max(m,k) > N \tag{3.40′}$$

teljesülnek, akkor a sor regulárisan konvergens.

3.13. MEGJEGYZÉS. A 3.11. tételt „kétoldalas", míg a 3.12. tételt „féloldalas" feltétellel fogalmaztuk meg. A két alak között nincs lényegi különbség. A féloldalas feltételt használhatjuk valós sorokra, a komplex soroknál a kétoldalas alakra van szükség, ezután a valós és képzetes részt külön-külön tárgyalhatjuk.

3.14. MEGJEGYZÉS. Móricz Ferenc is észrevette, hogy a 3.11. tételben a (3.36) feltétel elhagyható ([Mo4]). Ennek ismeretében a 3.12. tétel nem új. Azért tárgyaljuk mégis, mert a 3.7. tétel segítségével más úton, egyszerűbben bizonyítható, mint a szokásos módon. (A „szokásos" technikát használják pl. a [Mo3], [Mo4], [MN3] cikkek.)

Másik eredményünk a 3.10. tétel kettős változata.

*3.15. TÉTEL. *Legyen a* (3.5) *sor regulárisan* $(C,1,1)$ *szummálható, és* $0 < q \leq p$. *Ekkor, ha létezik olyan* $N > 0$ *szám, hogy a téglalap-részletösszegekre*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^p|s_{mk} - s_{m,k-1}|^{p+1} < \infty, \qquad \textit{ha} \qquad m > N, \tag{3.41}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^q|s_{jn} - s_{j-1,n}|^{q+1} < \infty, \qquad \textit{ha} \qquad n > N, \tag{3.42}$$

valamint

$$(3.43)\qquad \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^q\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^p|s_{jk}-s_{j-1,k}-s_{j,k-1}+s_{j-1,k-1}|^{p+1}\Big)^{(q+1)/(p+1)}<\infty$$

teljesülnek, akkor a (3.5) *sor regulárisan konvergens.*

*3.16. MEGJEGYZÉS. (3.41)-(3.42)-ben a p és q számok, valamint (3.43)-ban a j és k indexek fölcserélhetők.

$p=q$ választással kevésbé általános, de szimmetrikusabb feltételeket kapunk.

*3.17. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen a* (3.5) *sor regulárisan* $(C,1,1)$ *szummálható, és* $0<p$. *Ekkor, ha létezik olyan* $N>0$ *szám, hogy a téglalap-részletösszegekre*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^p|s_{mk}-s_{m,k-1}|^{p+1}<\infty, \qquad ha \qquad m>N,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^p|s_{jn}-s_{j-1,n}|^{p+1}<\infty, \qquad ha \qquad n>N,$$

valamint

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(j+1)^p(k+1)^p|s_{jk}-s_{j-1,k}-s_{j,k-1}+s_{j-1,k-1}|^{p+1}<\infty$$

teljesülnek, akkor a (3.5) *sor regulárisan konvergens.*

A 3.12. tétel bizonyítása

Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy a (3.5) sor 0-hoz szummálható. Tegyük fel, hogy $\limsup s_{mn}=\lambda>0$. Ekkor létezik az (m,n) indexeknek egy olyan részsorozata, hogy

$$s_{m_\kappa,n_\kappa}\to\lambda, \qquad m_\kappa\to\infty, \quad n_\kappa\to\infty, \qquad \text{ha} \qquad \kappa\to\infty,$$

így, ha κ elég nagy, $s_{m_\kappa,n_\kappa}>\lambda/2$. Válasszuk meg az $\omega>0$ számot akkorának, hogy $H\omega<\lambda/3$ legyen. Legyenek továbbá μ és ν olyanok, hogy

$$m_\kappa<\mu<m_\kappa+\omega m_\kappa \qquad \text{és} \qquad n_\kappa<\nu<n_\kappa+\omega n_\kappa.$$

Nyilván

$$(3.44)\qquad s_{\mu\nu}=s_{m_\kappa,n_\kappa}+\sum_{j=m_\kappa+1}^{\mu}\sum_{k=0}^{n_\kappa}a_{jk}+\sum_{j=0}^{\mu}\sum_{k=n_\kappa+1}^{\nu}a_{jk}.$$

Fölhasználva a (3.39) feltételt,

$$\sum_{j=m_\kappa+1}^{\mu}\sum_{k=0}^{n_\kappa}a_{jk}=\sum_{j=m_\kappa+1}^{\mu}(s_{j,m_\kappa}-s_{j-1,m_\kappa})\geq$$

$$\geq -H\sum_{j=m_\kappa+1}^{\mu}\frac{1}{j+1}\geq -H\frac{\mu-m_\kappa}{m_\kappa+1}\geq -H\omega\geq -\lambda/3.$$

Hasonló módon, a (3.40) feltételből kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{\mu}\sum_{k=n_\kappa+1}^{\nu}a_{jk}=\sum_{k=n_\kappa+1}^{\nu}(s_{\mu,k}-s_{\mu,k-1})\geq$$

$$\geq -H \sum_{k=n_\kappa+1}^{\nu} \frac{1}{k+1} \geq -H\omega \geq -\lambda/3.$$

Ezt a két becslést (3.44)-be helyettesítve, azt kapjuk, hogy

$$(3.45) \qquad (m_\kappa+1)(n_\kappa+1) \sum_{j=m_\kappa+1}^{m_\kappa+\omega m_\kappa} \sum_{k=n_\kappa+1}^{n_\kappa+\omega n_\kappa} \frac{s_{jk}}{(j+1)(j+2)(k+1)(k+2)} \geq$$

$$\geq (m_\kappa+1)(n_\kappa+1)\frac{\lambda}{3} \sum_{j=m_\kappa+1}^{m_\kappa+\omega m_\kappa} \sum_{k=n_\kappa+1}^{n_\kappa+\omega n_\kappa} \frac{1}{(j+1)(j+2)(k+1)(k+2)} \geq \frac{1}{6}\lambda\omega.$$

Ez azonban ellentmond annak, hogy a (3.19) formula szerint a bal oldalon álló összegnek $\kappa \to \infty$ esetén 0-hoz kellene tartania, mert $\sigma_{jk} \to 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\limsup s_{mn} \leq 0$.

Hasonló gondolatmenettel, (3.45)-ben a

$$\sum_{j=m_\kappa-\omega m_\kappa}^{m_\kappa} \sum_{k=n_\kappa-\omega n_\kappa}^{n_\kappa}$$

összeget használva, belátható, hogy $\liminf s_{mn} \geq 0$. Ezzel a Pringsheim értelemben vett konvergenciára vonatkozó 3.12. tételt beláttuk.

A 3.12′. tétel esetében a regularitás igazolásához vizsgálnunk kell még a (3.5) kettős sor sorait és oszlopait, mint egyszeres sorokat. Világos azonban, hogy a (3.39′) és (3.40′) feltételek teljesülése esetén ezekre a sorokra alkalmazható a 0.12. tétel. □

A 3.15. tétel bizonyítása

A (3.28) formula szerint

$$(3.46) \qquad s_{mn} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} b_{jk} - (n+1)\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{k+1} -$$

$$- (m+1)\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{jk}}{j+1} + (m+1)(n+1)b_{m+1,n+1} =: S^1_{mn} - S^2_{mn} - S^3_{mn} + S^4_{mn}.$$

A 3.15. tételben feltettük, hogy $s_{mn} \to L$ $(C,1,1)$ értelemben. A 3.7. tétel szerint ekkor $S^1_{mn} \to L$, ha $m,n \to \infty$.

A jobb oldal második összegére a Hölder egyenlőtlenséget alkalmazva a $p+1$, $(p+1)/p$ kitevőkkel,

$$|S^2_{mn}| = \Big|(n+1)\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{k+1}\Big| \leq (n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k+1}\Big|\sum_{j=0}^{m} a_{jk}\Big| =$$

$$= (n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty} \Big((k+1)^{-(2p+1)/(p+1)}\Big)\Big((k+1)^{p/(p+1)}\Big|\sum_{j=0}^{m} a_{jk}\Big|\Big) \leq$$

$$\leq (n+1)\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^{-(2p+1)/p}\Big)^{p/(p+1)}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^p\Big|\sum_{j=0}^{m} a_{jk}\Big|^{p+1}\Big)^{1/(p+1)} \leq$$

$$\leq K\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^p|s_{mk} - s_{m,k-1}|^{p+1} \to 0, \qquad \text{ha} \qquad m,n \to \infty,$$

a (3.41) feltétel miatt.

A (3.42) feltételből hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$S^3_{mn} \to 0, \qquad \text{ha} \qquad m,n \to \infty.$$

A negyedik tag vizsgálatakor is hasonló átalakításokat végzünk, és kétszer alkalmazzuk a Hölder egyenlőtlenséget:

$$|S^4_{mn}| = |(m+1)(n+1)b_{m+1,n+1}| \le \sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_{jk}|}{(j+1)(k+1)} =$$

$$= (m+1)(n+1)\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{j+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big((k+1)^{-(2p+1)/(p+1)}\Big)\Big((k+1)^{p/(p+1)}|a_{jk}|\Big) \le$$

$$\le (m+1)(n+1)\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{j+1}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^{-(2p+1)/p}\Big)^{p/(p+1)} \times$$

$$\times\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^p|a_{jk}|^{p+1}\Big)^{1/(p+1)} \le$$

$$\le K(m+1)\sum_{j=m+1}^{\infty}\Big((j+1)^{-(2q+1)/(q+1)}\Big)\Big((j+1)^{q/(q+1)}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^p|a_{jk}|^{p+1}\Big)^{1/(p+1)}\Big) \le$$

$$\le K(m+1)\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty}(j+1)^{-(2q+1)/q}\Big)^{q/(q+1)} \times$$

$$\times\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty}(j+1)^q\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^p|a_{jk}|^{p+1}\Big)^{(q+1)/(p+1)}\Big)^{1/(q+1)} \le$$

$$\le K\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty}(j+1)^q\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^p|a_{jk}|^{p+1}\Big)^{(q+1)/(p+1)}\Big)^{1/(q+1)} \to 0, \qquad \text{ha} \qquad m,n \to \infty.$$

Eredményeinket összegyűjtve nyerjük, hogy (3.46) jobb oldala konvergens, így $s_{mn} \to L$. □

3.4. A folytonos eset

Ebben a szakaszban is a 0.12. tétellel rokon Tauber típusú eredményekkel foglalkozunk, ezúttal azonban eredményeinket integrálokra fogalmazzuk meg.

Értekezésünk 2.3. fejezetében már definiáltuk integrálok Cesàro szummálhatóságát. Emlékeztetünk arra, hogy ha $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$, értelmezhetők a

$$s(t) := \int_0^t f(x)\,dx \qquad \text{és} \qquad \sigma(t) := \frac{1}{t}\int_0^t s(u)\,du, \qquad t > 0$$

függvények. Az

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \tag{3.47}$$

integrál (improprius értelemben) konvergál a (véges) A számhoz, ha

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = A, \tag{3.48}$$

SZTE Egyetemi Könyvtár SZEGED

illetve $(C,1)$ értelemben szummálható a (véges) A számhoz, ha

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = A. \tag{3.49}$$

Most is igaz, hogy (3.48)-ból (3.49) következik, de fordítva nem. Mindenesetre, ha az f függvény állandó előjelű, a két limes ekvivalens, hiszen Fubini tételét fölhasználva, írhatjuk, hogy

$$\sigma(t) = \frac{1}{t}\int_0^t du \int_0^u f(x)\,dx = \int_0^t \Big(1 - \frac{x}{t}\Big) f(x)\,dx.$$

Az is világos, hogy a (3.47) integrál $(C,1)$ szummálhatósága nem függ attól, hogy a függvény valamely rögzített $(0, x_0)$ intervallumon milyen értékeket vesz fel.

Első tételünkben egy „féloldalas" feltételt fogalmazunk meg valós függvényekrre.

*3.18. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., [MN3]). *Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+)$ valós értékű függvény, és tegyük fel, hogy a* (3.47) *integrál* $(C,1)$ *szummálható a véges A számhoz. Ekkor* (3.48) *pontosan akkor áll fent, ha*

$$\sup_{\lambda>1} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t}\int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]\,dx \geq 0 \tag{3.50}$$

és

$$\sup_{0<\lambda<1} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t - \lambda t}\int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]\,dx \geq 0; \tag{3.51}$$

e feltételek teljesülésekor szükségképpen

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t}\int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]\,dx = 0 \tag{3.52}$$

minden $\lambda > 1$ értékre, valamint

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - \lambda t}\int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]\,dx = 0 \tag{3.53}$$

minden $0 < \lambda < 1$ értékre.

Valós sorozatokra R. Schmidt [Sch] vezette be a a „lassú csökkenés"* fogalmát.

3.19. DEFINÍCIÓ. Egy, az $\mathbf{R}_+$-on értelmezett, valós értékű $s(t)$ függvényt lassan csökkenőnek nevezünk, ha

$$\lim_{\lambda\to 1+0} \liminf_{t\to\infty} \min_{t\leq x\leq \lambda t} [s(x) - s(t)] \geq 0. \tag{3.54}$$

Ez a definíció szokatlannak tűnhet. Érdemes átfogalmazni az alábbi, ekvivalens alakba is: Bármely $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $t_0 \geq 0$ és $\lambda > 1$ számok, hogy

$$s(x) - s(t) \geq -\varepsilon \qquad \text{valahányszor} \qquad t_0 < t < x \leq \lambda t.$$

Ezt az alakot tekinthetjük a Cauchy kritériumban szereplő feltétel egyfajta (féloldalas) „gyengítésének". Tudjuk, hogy a konvergencia és a Cauchy kritérium ekvivalensek. A Hardy–Schmidt féle tétel úgy is interpretálható, hogy a lassú csökkenés és a $(C,1)$ szummálhatóság együtt ekvivalens a konvergenciával. A mi eredményünk pedig „átlagban való" lassú csökkenésről szól.

* „slowly decreasing sequences"

A (3.54) feltétel az alábbi módon is átfogalmazható:

$$\lim_{\lambda\to 1-0} \liminf_{t\to\infty} \min_{\lambda t\le x\le t} [s(t)-s(x)] \ge 0. \tag{3.55}$$

Valóban, ha $\lambda > 1$ esetén

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{t\le x\le \lambda t} [s(x)-s(t)] = L$$

valamely véges L számra, akkor

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{\lambda^{-1}x\le t\le x} [s(x)-s(t)] \le L$$

is fennáll. Fordítva, ha a második limes inferior véges, az előző is legfeljebb akkora.

Ezen megjegyzés alapján azonnal adódik Schmidt klasszikus tételének integrális alakja:

*3.20. KÖVETKEZMÉNY (Móricz F., Németh Z., [MN3]). *Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+)$ valós értékű függvény, és tegyük fel, hogy a* (3.47) *integrál* $(C,1)$ *szummálható a véges A számhoz. Ekkor, ha az f függvény $s(t)$ integrálfüggvénye lassan csökkenő, akkor* (3.48) *fennáll.*

Hasonlóan vezethetjük le a Landau-féle 0.12. tétel megfelelőjét is.

*3.21. KÖVETKEZMÉNY (Móricz F., Németh Z., [MN3]). *Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+)$ valós értékű függvény, és tegyük fel, hogy a* (3.47) *integrál* $(C,1)$ *szummálható a véges A számhoz. Ekkor, ha vannak olyan $H > 0$ és $x_0 \ge 0$ konstansok, hogy*

$$xf(x) \ge -H \qquad \text{majdnem minden } x > x_0 \text{ esetén} \tag{3.56}$$

fönnáll, akkor (3.48) *teljesül.*

Valóban, ha $x_0 < t < x < \infty$, írhatjuk, hogy

$$s(x)-s(t) = \int_t^x f(u)\,du \ge -H\int_t^x \frac{du}{u} = -H\log\frac{x}{t} \ge -H\log\lambda,$$

amiből

$$\liminf_{t\to 0} \min_{t\le x\le \lambda t} [s(x)-s(t)] \ge -H\log\lambda, \qquad \lambda > 1,$$

ahonnan $\lambda \to 1+0$ határátmenettel adódik a (3.54) egyenlőtlenség.

A (3.50) és (3.51) feltételek szimmetrikus megfelelői a következők:

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t}\int_t^{\lambda t} [s(x)-s(t)]\,dx \le 0 \tag{3.57}$$

és

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t-\lambda t}\int_{\lambda t}^{t} [s(t)-s(x)]\,dx \le 0. \tag{3.58}$$

A 3.18. tétel akkor is érvényes marad, ha a (3.50)-(3.51) feltételeket kicseréljük (3.57)-(3.58)-cal. Előző gondolatmenetünk mintájára értelmezhetjük a lassan növekedés fogalmát a

$$\lim_{\lambda\to 1+0} \limsup_{t\to\infty} \max_{t\le x\le \lambda t} [s(x)-s(t)] \le 0$$

feltétellel, beláthatjuk, hogy ez következik a

$$xf(x) \le H \qquad \text{majdnem minden } x > x_0 \text{ esetén}$$

feltételből, és megfogalmazhatjuk a 3.20. és 3.21. következmények szimmetrikus megfelelőit.

A további részletezés helyett inkább arra mutatunk rá, hogy a 3.18. tételben szereplő (3.50) és (3.51) feltételek egymástól függetlenek. Értelmezzük az f függvényt a következő módon:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [2^n - 1, 2^n), \\ -1, & \text{ha } x \in [2^n, 2^n + 1), \quad n = 1, 2 \ldots, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyen kiszámolható, hogy ekkor

$$s(t) = \begin{cases} t - 2^n + 1, & \text{ha } t \in [2^n - 1, 2^n), \\ 2^n + 1 - t, & \text{ha } t \in [2^n, 2^n + 1), \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

$\lim \sigma(t) = 0$, továbbá

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]\, dx = -\limsup_{t \to \infty} s(t) = -1, \qquad \text{ha} \qquad \lambda > 1,$$

és

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]\, dx = \liminf_{t \to \infty} s(t) = 0, \qquad \text{ha} \qquad 0 < \lambda < 1.$$

A komplex értékű függvényekre is hasonló tételek érvényesek.

*3.22. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., [MN3]). *Legyen $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$ komplex értékű függvény, és tegyük fel, hogy a* (3.47) *integrál* $(C, 1)$ *szummálható a véges A számhoz. Ekkor* (3.48) *pontosan akkor áll fent, ha*

$$\inf_{\substack{0 < \lambda < \infty \\ \lambda \neq 1}} \limsup_{t \to \infty} \left| \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]\, dx \right| = 0.$$

A valós esethez hasonlóan itt is megkaphatjuk a 3.20 és 3.21 következményekkel analóg eredményeket. Ha a (3.47) integrál $(C, 1)$ szummálható, a (3.48) teljesüléséhez elegendő akár a Schmidt típusú

$$\lim_{\lambda \to 1+0} \limsup_{t \to \infty} \max_{t \le x \le \lambda t} |s(x) - s(t)| = 0$$

feltétel (ezt lassú változásnak* nevezzük), akár a Landau típusú

$$|xf(x)| \le H \qquad \text{majdnem minden } x > x_0 \text{ esetén}$$

feltétel.

*3.23. MEGJEGYZÉS. Ha az itt leírt módszert numerikus sorokra alkalmazzuk, a 3.18 és a 3.22 tételek mintájára egy kicsit javíthatjuk Móricz Ferenc előző eredményeit [Mo5]. A részleteket illetően [MN3]-ra utalunk.

Végezetül jegyezzük meg, hogy a diszkrét és a folytonos eset analógiája nem véletlen. Definícióink és bizonyításaink szinte szó szerint vihetők át arra az esetre, ha μ egy véges pozitív Borel mérték $\mathbf{R}_+$-on, és Lebesgue–Stieltjes értelemben tekintjük az integrálokat. Ekkor a mérték megfelelő választásával mindkét „szélső" esetet megkaphatjuk. E szakasz eredményei a $d\mu = dx$ Lebesgue mértéket használják. Ha $\mu(k) = 1$, ha $k = 0, 1, \ldots$ („számláló mérték"), valamint $f(k) = s_k - s_{k-1}$ szakaszonként lineáris, $\mathbf{R}_+$-on folytonos függvény, a 3.23 megjegyzésben említett, sorozatokra vonatkozó eredményeket nyerjük.

* „slowly oscillating function"

3.5. Bizonyítások

Szükségünk lesz az alábbi, önmagában is érdekes lemmára:

3.24. LEMMA (Móricz F., Németh Z., [MN3]). *Ha a* (3.47) *integrál* $(C,1)$ *szummálható egy véges* A *számhoz, akkor minden* $0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1$ *esetén*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x)\,dx = A \tag{3.59}$$

fennáll.

A $\lambda > 1$ esetben, a definíció szerint,

$$\frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x)\,dx = \frac{1}{\lambda t}\Big(1 + \frac{1}{\lambda - 1}\Big) \int_0^{\lambda t} s(x)\,dx - \frac{1}{(\lambda-1)t} \int_0^t s(x)\,dx =$$

$$= \sigma(\lambda t) - \frac{1}{\lambda - 1}[\sigma(\lambda t) - \sigma(t)].$$

A $0 < \lambda < 1$ esetben hasonló módon eljárva,

$$\frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t s(x)\,dx = \frac{1}{(1-\lambda)t} \int_0^t s(x)\,dx + \frac{1}{\lambda t}\Big(1 - \frac{1}{1-\lambda}\Big) \int_0^{\lambda t} s(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda}[\sigma(t) - \sigma(\lambda t)] + \sigma(\lambda t).$$

Így mindkét esetben (3.59) következik (3.49)-ből. □

Most már rátérhetünk a 3.18. tétel bizonyítására.

Szükségesség. Tételezzük fel, hogy (3.48) fennáll. Felhasználva az előző lemmát,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]\,dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x)\,dx - \lim_{t\to\infty} s(t) = A - A = 0.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy (3.52) és (3.53) teljesül a $\lambda > 1$, illetve a $0 < \lambda < 1$ esetben.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy (3.49), valamint (3.50) és (3.51) fönnállnak. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. A (3.50) szerint van olyan $\lambda_1 > 1$ érték, amelyre

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda_1 t - t} \int_t^{\lambda_1 t} [s(x) - s(t)]\,dx \geq -\varepsilon, \tag{3.60}$$

a (3.51) szerint pedig van olyan $0 < \lambda_2 < 1$, amelyre

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t - \lambda_2 t} \int_{\lambda_2 t}^t [s(t) - s(x)]\,dx \geq -\varepsilon. \tag{3.61}$$

Felhasználva (3.49)-et, valamint a 3.24. lemmát, minden $\lambda > 1$ értékre

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]\,dx = A - \limsup_{t\to\infty} s(t),$$

továbbá minden $0 < \lambda < 1$ értékre

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)]\,dx = \liminf_{t\to\infty} s(t) - A$$

fennállnak. Következésképpen (3.60) és (3.61) ekvivalensek az alábbi állítással:

$$A - \varepsilon \leq \liminf_{t \to \infty} s(t) \leq \limsup_{t \to \infty} s(t) \leq A + \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi lehet, (3.48)-at bebizonyítottuk. □

A 3.22. tétel hasonló módon bizonyítható.

4. Summary

Introduction

The main topic of this dissertation is the Cesàro summability and its generalizations and applications. Therefore, it's convenient to sum up the basic notations and definitions of this topic.

Let's denote by $\mathbf{R}^\infty$ the linear space of all sequences and by V its some subspace. Moreover, c denotes the space of all convergent sequences.

DEFINITION 0.4.* By summability method we mean a linear functional of type $V \to \mathbf{R}$ which coincides the usual limit on space c.

There are a lot of different summability methods, one can find many of them, for example, in Hardy's book [H1]. In the present dissertation we investigate the Cesáro method, which is defined below.

First we define the Cesàro numbers by

$$A_n^\alpha := \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}{n!}, \qquad A_0^\alpha := 1, \qquad \alpha > -1. \tag{0.6}$$

Let's consider the following matrix transformation:

$$\mathcal{A}^\alpha := (a_{nk})_{n,k=0}^\infty, \qquad \text{where} \qquad a_{nk} = \begin{cases} A_{n-k}^{\alpha-1}/A_n^\alpha, & \text{if } k \le n, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{0.9}$$

DEFINITION 0.7. The series $\sum a_k$ is said to be summable (C,α) to the number s, if its Cesàro means of order α, defined by

$$\sigma_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} A_{n-k}^{\alpha} a_k, \tag{0.10}$$

converge to s as $n \to \infty$.

The different summability methods have a lot of areas of application. Roughly speaking, the orthogonal series or Fourier series behave more regular and simpler handling them with summability methods instead of ordinary convergence. (For example, we can see this phenomenon via the classical Fejér theorem.)

The other main concept of our dissertation is the convergence of double series. We could present the following definition in plausible way.

DEFINITION 0.13 (Pringsheim). The double sequence $(s_{mn})_{m,n=0}^\infty$ tends to s if for any $\varepsilon > 0$ there is a number ν such that $|s_{mn} - s| < \varepsilon$ for any $n, m > \nu$.

---

* In this summary the referring numbers are corresponding to that of the original text.

Howewer, using this definition, the most of the theorems analogous to previous ones are not valid any more. For example, if $s_{0n} = n$ and $s_{mn} = 0$ otherwise, then $s_{mn} \to 0$ as $m, n \to \infty$, on the other hand, the sequence s_{mn} even is not bounded. Of course, we can demand the boundedness of the sequence s_{mn}, but this leads to a new definition, which is a less natural one.

In the case of double series there are much more possibilities.

If the double series

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$$

is thought as the sum of the elements of a matrix, infinite in two directions, then the method of summing is ambigious. One of the possibilities that we consider the double sequence of rectangular partial sums

$$s_{mn} := \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl}.$$

One of the most convenient definitions is the following:

DEFINITION 0.14. The double series $\sum a_{kl}$ is regularly convergent to the number s, if the sequence of its rectangular partial sums converges to s in Pringsheim's sense, and each "row series" and "column series" of it are convergent as single series.

The generalized absolute Cesàro summability

In the case of single series $\sum a_k$, the absolute convergence is defined by the following condition:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n - s_{n-1}| < \infty. \tag{1.1}$$

Motivated by above definition, we define the absolute Cesàro summability. For the sake of brevity, we use the folloving notation:

$$\tau_n^{\alpha} := n(\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha}) = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} k a_k.$$

DEFINITION 1.1. The single series $\sum a_k$ is said to be summable $|C, \alpha|$, where $\alpha > -1$, if

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\tau_n^{\alpha}| < \infty.$$

The series is said to be summable $|C, \alpha|_{\lambda}$, where $\alpha > -1$ and $\lambda \geq 1$, if

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha}|^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\tau_n^{\alpha}|^{\lambda} < \infty.$$

The series is said to be summable $|C, \alpha, u|_{\lambda}$, where $\alpha > -1$, $\lambda \geq 1$, and $u \geq 0$, if

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda u+\lambda-1} |\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha}|^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda u-1} |\tau_n^{\alpha}|^{\lambda} < \infty. \tag{1.2}$$

The second and third parts of above definition is due to T. M. Flett [Fl1, Fl2]. It is easier to see the inner logic of definitions in the second form using τ means.

In order to extend the concept of the absolute convergence to double series, we naturally suppose that the condition

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|s_{mn}-s_{m-1,n}-s_{m,n-1}+s_{m-1,n-1}|<\infty \tag{1.3}$$

holds.

As we saw in Section 0.4., in the case of double series we must suppose additional conditions for the rows and columns of double series. Therefore we require that the conditions

$$\sum_{m=1}^{\infty}|s_{m0}-s_{m-1,0}|<\infty \tag{1.4}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_{0n}-s_{0,n-1}|<\infty \tag{1.5}$$

hold.

Finally, we define the absolute summability in similar way, using the σ means instead of the partial sums s_{mn}. The absolute Cesàro summability of double series are investigated by many authors, for example, I. E. Zak and M. F. Timan [ZT], Ferenc Móricz [Mo2], and István Szalay [Sz1].

Our definiton reads as follows:

DEFINITION 1.2 (Z. Németh, [Ne1]). The double series $\sum a_{ik}$ is said to be summable $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda$, where $\alpha,\beta>-1$, $u,v\geq 0$, and $\lambda\geq 1$, if the following conditions

$$\sum_{i=1}^{\infty}i^{\lambda u-1}|z_{i0}^{\alpha\beta}|^\lambda<\infty, \tag{1.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{\lambda v-1}|t_{0k}^{\alpha\beta}|^\lambda<\infty, \tag{1.7}$$

and

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}i^{\lambda u-1}k^{\lambda v-1}|\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^\lambda<\infty, \tag{1.8}$$

hold, where

$$z_{mn}^{\alpha\beta}=m(\sigma_{mn}^{\alpha\beta}-\sigma_{m-1,n}^{\alpha\beta})=\frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}A_{m-i}^{\alpha-1}A_{n-k}^{\beta}ia_{ik},$$

$$t_{mn}^{\alpha\beta}=n(\sigma_{mn}^{\alpha\beta}-\sigma_{m,n-1}^{\alpha\beta})=\frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}A_{m-i}^{\alpha}A_{n-k}^{\beta-1}ka_{ik},$$

and

$$\tau_{mn}^{\alpha\beta}=mn(\sigma_{mn}^{\alpha\beta}-\sigma_{m-1,n}^{\alpha\beta}-\sigma_{m,n-1}^{\alpha\beta}+\sigma_{m-1,n-1}^{\alpha\beta})=$$

$$=\frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}A_{m-i}^{\alpha-1}A_{n-k}^{\beta-1}ika_{ik},\qquad m,n=0,1,2,\ldots.$$

This is a natural question that what kind of connections are between different $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda$ methods if the parameters are varied. In Section 1.2 we investigate these connections. Our results are extensions of those of Flett [Fl2], Kogbetlianz [Ko], I. Szalay [Sz1], and I. E. Zak and M. F. Timan [ZT].

The main results of this section are the following:

THEOREM 1.3 (Z. Németh, [Ne1]). *Let* $\lambda \geq 1$, $u, v \geq 0$, $\alpha > \lambda u - 1$, *and* $\beta > \lambda v - 1$. *If* $\gamma, \delta \geq 0$ *then* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow |C,(\alpha+\gamma,\beta+\delta),(u,v)|_\lambda$.

THEOREM 1.4 (Z. Németh, [Ne1]). *Let* $u, v \geq 0$, $\alpha > \lambda u - 1$, *and* $\beta > \lambda v - 1$. *If*
(i) $\mu > \lambda > 1$ *and* $\delta = 1/\lambda - 1/\mu$, *or*
(ii) $\mu > \lambda = 1$ *and* $\delta > 1/\lambda - 1/\mu$, *then* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow |C,(\alpha+\gamma,\beta+\delta),(u,v)|_\mu$.

THEOREM 1.5 (Z. Németh, [Ne1]).*Let* $\lambda \geq 1$, $u, v \geq 0$, $\alpha > \lambda u - 1$, $\beta > \lambda v - 1$, $\xi \leq u$, $\eta \leq v$, $\gamma \geq \xi - u$, $\delta \geq \eta - v$, *and* $\alpha + \gamma, \beta + \delta > -1$. *In this case* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow |C,(\alpha+\gamma,\beta+\delta),(\xi,\eta)|_\lambda$.

THEOREM 1.7 (Z. Németh, [Ne1]). *Let* $\lambda > \mu \geq 1$, $u, v \geq 0$, $\alpha > \mu u - 1$, $\beta > \mu v - 1$, $\xi \leq u$, $\eta \leq v$, $\gamma > \xi - u$, *and* $\delta > \eta - v$. *In this case* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow |C,(\alpha+\gamma,\beta+\delta),(\xi,\eta)|_\mu$.

THEOREM 1.8 (Z. Németh, [Ne1]). *Let* $\lambda > 1$, $u, v > 0$, $\alpha > u - 1$, $\beta > v - 1$, $\gamma > \alpha - u - 1/\lambda > 0$, *and* $\delta > \beta - v - 1/\lambda > 0$. *In this case* $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda \Longrightarrow (C,(\gamma,\delta))$.

Counterexamples show that our results are the best possible.

Moreover, we can specialize our general results for the summability $|C,(\alpha,\beta),(u,v)|_\lambda$ to the method $|C,(\alpha,\beta)|_\lambda$ which is less general but more familiar.

The concept of generalized absolute Cesàro summability can be applied to orthogonal series

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}\varphi_{ik}(x), \tag{1.17}$$

where (φ_{ik}) is a double orthogonal system on some positive measure space $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

The main results in Section 1.4 are the theorems containing the coefficient condition of summability $|C,\alpha,\beta|_\lambda$ of the general orthogonal series.

The first result in this topic was the following:

THEOREM 1.20 (Károly Tandori, 1960, [Ta]). *If*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{2^{m-1}}^{2^m-1} a_i^2 \Big)^{1/2} < \infty,$$

then series (1.17) *is summable* $|C,1|$ *almost everywhere.*

This result was generalized by László Leindler for the case of summability $|C,\alpha|$. In his condition there is a multiplier depending on α inside of big parentheses. Later L. Leindler and H. Schwinn generalized this result without this multiplier, such that the summation is taken between other limits depending on α, instead of the powers of 2. These conditions with "pure blocks" are weaker in general. Finally, the case of $|C,\alpha|_\lambda$, $1 \leq \lambda < 2$ was investigated by István Szalay.

We proved analogous results for double series. One of our typical result reads as follows:

THEOREM 1.21 (Z. Németh, [Ne2]). *If* $1 \le \lambda < 2$, $\alpha, \beta > 1 - 1/\lambda$, *and*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} a_{ik}^2 \Big)^{\lambda/2} < \infty,$$

then the orthogonal series (1.17) *is summable* $|C, (\alpha, \beta)|_\lambda$ *almost everywhere, where*

$$\mu_m \equiv \mu_m^{\alpha\lambda} := \begin{cases} 2^{m-1}, & \text{if } \alpha > 1/2, \\ 2^{(m-1)^{(2-\lambda)/2}}, & \text{if } \alpha = 1/2, \\ m^{(2-\lambda)/(\lambda(1-2\alpha))}, & \text{if } 1 - 1/\lambda < \alpha < 1/2. \end{cases}$$

On the order of magnitude of Fourier coefficients

Let f be a periodic function, integrable in Lebesgue's sense, in sign: $f \in L^1(\mathbf{T})$, where $\mathbf{T} := (-\pi, \pi]$ is the one-dimensional torus, and let

$$a_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos kt \, dt, \qquad k \ge 0$$

and

$$b_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin kt \, dt, \qquad k \ge 1$$

be its Fourier coefficients.

In the basic theory of Fourier series the Riemann–Lebesgue lemma is well known: for any function $f \in L^1$ the following relations

$$\lim_{k \to \infty} a_k(f) = \lim_{k \to \infty} b_k(f) = 0$$

hold. It is also well known, that this convergence can be arbitrarily slow. More precisely, for all sequence $\lambda_k \to \infty$ there is a continuous function $f \in C$ such that the sequences $\lambda_k a_k(f)$ and $\lambda_k b_k(f)$ are not bounded.

In 1986, J. B. Reade discovered that the order of magnitude of Fourier coefficients can be estimated using the limit in Cesàro sense instead of ordinary convergence.

THEOREM 2.1 (Reade, [Re]). *If* $f \in L^2(\mathbf{T})$, *then*

$$k^{1/2} a_k(f) \to 0 \qquad \textit{and} \qquad k^{1/2} b_k(f) \to 0 \qquad \textit{in } (C,1) \textit{ sense.}$$

Later this result was generalized by Yu. E. Kuprikov. He appointed the best multipliers such that

$$\lambda_k a_k(f) \to 0 \qquad \text{and} \qquad \lambda_k b_k(f) \to 0$$

in the case of $f \in L^p$, in $(C, \alpha > 0)$ sense.

We remark that Kuprikov's proof is long and strongly depend on special properties of the trigonometric system. We proved similar results by using simpler methods from summability theory. Using our method we could generalize these results to general orthogonal systems, double orthogonal series, and some integral transforms of "Fourier type".

In the discrete case, our first result is the following:

Let $\{\varphi_k(x) : k \ge 0\}$ be a uniformly bounded orthonormal system on a finite positive measure space $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Given $f \in L(X)$, let

$$c_k(f) := \int_X f(t) \varphi_k(t) \, d\mu(t), \qquad k \ge 0,$$

be its Fourier coefficients with respect to (φ_k).

THEOREM 2.5 (F. Móricz, Z. Németh, [MN1]). *If* $f \in L^p(X)$ *for some* $1 \le p \le 2$, $\alpha > 0$, *and* $1/p + 1/q = 1$, *then*

$$\lambda_k^\alpha |c_k(f)| \to 0 \qquad \text{in } (C,\alpha) \text{ sense}, \tag{2.1}$$

where

$$\lambda_k^\alpha = \begin{cases} (k+1)^{1/q} & \text{if } \alpha > 1/q, \\ (k+1)^{1/q}(\ln(k+2))^{(1/q)-1} & \text{if } \alpha = 1/q, \\ (k+1)^\alpha & \text{if } 0 < \alpha < 1/q, \end{cases} \tag{2.2}$$

The double counterpart of above theorem reads as follows.

THEOREM 2.9 (F. Móricz, Z. Németh, [MN1]). *If* $f \in L^p(X)$ *for some* $1 \le p \le 2$, $\alpha, > 0$, $\beta > 0$, *and* $1/p + 1/q = 1$, *then*

$$\lambda_j^\alpha \lambda_k^\beta |c_{jk}(f)| \to 0 \qquad \text{in } (C,(\alpha,\beta)) \text{ sense},$$

where λ_j^α *is defined by* (2.2).

Finally, we proved similar results in the case of $f \in C$.

In the continuous case, firstly we define the Cesàro summability of integrals.

DEFINITION 2.16. (i) We say that a function $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$ has the limit ℓ as $x \to \infty$ in the sense of Cesàro of order $\alpha > 0$ (or briefly, $f(x) \to \ell$ as $x \to \infty$ in (C,α) sense), if

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x} \int_0^x \Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{\alpha-1} f(u)\,du = \ell. \tag{2.12}$$

(ii) We say that the integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$ is summable to the sum s in (C,α) sense, where $\alpha \ge 0$, if

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \Big(1 - \frac{u}{x}\Big)^{\alpha} f(u)\,du = s. \tag{2.13}$$

The Theorem 2.1 was generalized by Mónika Bagota, Dang Vu Giang, and Ferenc Móricz to trigonometric Fourier transform.

We have proved that the common root of these continuous generalizations is not the special property of the trigonometric system, but more general ones of the transforms.

Before formulating our results, we need the following

DEFINITION 2.18 (Z. Németh, [Ne4]). Let p, q be two numbers such that $1 < p \le 2$ and $1/p + 1/q = 1$, and Φ be a linear operator from $L^p(\mathbf{R}_+)$ to $L^q(\mathbf{R}_+)$, $\Phi(f) =: \widehat{f}$. We say that the operator Φ is one of Hausdorff–Young type if the following two conditions are fulfilled:

(i) For all $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, the estimate

$$\Big(\int_0^\infty |\widehat{f}(u)|^q\,du\Big)^{1/q} \le K(p)\Big(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \tag{2.15}$$

is valid (Hausdorff–Young inequality).

(ii) For all $f \in L^1(\mathbf{R}_+)$,

$$\widehat{f}(u) \to 0 \qquad \text{as} \qquad u \to \infty \qquad \text{(in ordinary sense)} \tag{2.16}$$

(Riemann–Lebesgue lemma).

The result corresponding to Theorem 2.9 is as follows.

THEOREM 2.19 (Z. Németh, [Ne4]). *If* $f \in L^1 \cap L^p(\mathbf{R}_+)$ *for some* $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\alpha > 0$, *and* $\widehat{f}$ *denotes the Hausdorff–Young transform of the function* f, *then*

$$\lambda_\alpha(x)|\widehat{f}(x)| \to 0 \qquad as \qquad x \to \infty \qquad in\ (C,\alpha)\ sense, \tag{2.17}$$

where

$$\lambda_\alpha(x) := \begin{cases} x^{1/q}, & if\ \alpha > 1/q, \\ x^\alpha, & if\ 0 < \alpha < 1/q, \\ x^{1/q}(\log(x+2))^{1/q-1}, & if\ \alpha = 1/q. \end{cases} \tag{3.2}$$

We show that the well known cosine, sine, Fourier, Fourier–Walsh transforms are of Hausdorff–Young type. A more general construction is the following:

We consider the integral transform

$$\widehat{f}_F(u) := \int_a^\infty k(ux) f(x)\, dx, \tag{3.4}$$

where $k \in L^1_{\mathrm{loc}}$ is bounded, furthermore the conditions

$$\int_0^\infty k_1(xu)k_1(yu)\frac{du}{u^2} = \min(x,y), \qquad \text{where} \qquad k_1(u) = \int_0^u k(x)\, dx \tag{2.19}$$

hold. If the functions k és k_1 are bounded then this transform is of Hausdorff–Young type, too.

Tauberian theorems

As usual a Tauberian result contains a convergence statement building up the summability of a series and certain additional condition.

Let's consider a single series

$$\sum_{k=0}^\infty a_k \tag{3.1}$$

which is summable $(C,1)$. Hardy [H2] introduced a new sequence by setting

$$b_n := \sum_{k=n}^\infty \frac{a_k}{k+1}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

and proved the following

THEOREM 3.1 (Hardy [H2]). *The series* (3.1) *is summable* $(C,1)$ *to a finite number* L *if and only if the series*

$$\sum_{n=0}^\infty b_n \tag{3.3}$$

converges to the same limit L.

We extend above theorem to double series.

Given a double series

$$\sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty a_{jk}$$

we set

$$b_{mn} := \sum_{j=m}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{a_{jk}}{(j+1)(k+1)}, \qquad m, n = 0, 1, \ldots. \tag{3.12}$$

Our result can be formulated as follows:

THEOREM 3.7 (F. Móricz, Z. Németh, [MN2]). *Series* (3.5) *of complex numbers is regularly summable* $(C,1,1)$ *to a finite number* L *if and only if the series*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} \tag{3.13}$$

converges regularly to the same limit L.

It is important to note that the Theorem 3.1 cannot be extended to double series without the regularity condition.

In Section 3.3, applying this theorem, Tauberian results of Hardy and Landau are extended to double series.

In the next section we are dealing with integrals again. Our basic result is the following:

THEOREM 3.18 (F. Móricz, Z. Németh, [MN3]). *If a real-valued function* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+)$ *is such the integral* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *is summable* $(C,1)$ *to a finite number* A, *then we have* $s(t) \to A$ *as* $t \to \infty$ *if and only if*

$$\sup_{\lambda>1} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]\,dx \geq 0 \tag{3.50}$$

and

$$\sup_{0<\lambda<1} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]\,dx \geq 0; \tag{3.51}$$

in which case we necessarily have

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]\,dx = 0 \tag{3.52}$$

for every $\lambda > 1$, *and*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]\,dx = 0 \tag{3.53}$$

for every $0 < \lambda < 1$.

Using this theorem some Tauberian results are obtained for $(C,1)$ summable integrals. In the discrete case the usual way in this topic is based on the conditions of type $O(1/n)$ and the concept of slowly decreasing sequences, due to Landau, Schmidt, and Hardy.

Our method can be used in the case where the integration is taken with respect to a Borel measure on $\mathbf{R}_+$. So, we can treat the discrete and continuous cases together choosing the corresponding measures.

Irodalomjegyzék

[Al] G. Alexits, *Convergence problems of orthogonal series*, Pergamon (Oxford, 1961).

[BGM] M. Bagota, D. V. Giang, F. Móricz, On the order of magnitude of Fourier transforms, *Acta Math. Hungar.*, 75(1997), 227–243.

[Fl1] T. M. Flett, On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley, *Proc. London Math. Soc.*, **7**(1957), 113–141.

[Fl2] T. M. Flett, Some more theorems concerning the absolute summability of Fourier series and power series, *Proc. London Math. Soc.*, **8**(1958), 357–387.

[Ha1] G. H. Hardy, *Divergent series*, Clarendon Press (Oxford, 1949).

[Ha2] G. H. Hardy, A theorem concerning summable series, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **20**(1920-21), 304–307.

[HLP] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, The maximum of certain bilinear form, *Proc. London Math. Soc.*, **25**(1926), 265–282.

[Ko] E. Kogbetliantz, Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques, *Bull des Sci. Math.*, (2) **49**(1925), 234–256.

[Ku] Yu. E. Kuprikov, On the order of Fourier coefficients in the sense of Cesàro means, *Analysis Math.*, **19**(1993), 113–134.

[Le] L. Leindler, Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **22**(1961), 243–268.

[LeSch] L. Leindler, H. Schwinn, Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **43**(1981), 311–319.

[Mo1] F. Móricz, On the convergence in a restricted sense of multiple series, *Analysis Math.*, **5**(1979), 135–147.

[Mo2] F. Móricz, On the $|C,(\alpha,\beta)|$-summability of double orthogonal series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **48**(1985), 315–328.

[Mo3] F. Móricz, Tauberian theorems for double sequences, *Studia Math.*, **110**(1)(1994), 83–96.

[Mo4] F. Móricz, Tauberian theorems for Cesàro summable double integrals over $\mathbf{R}_+^2$, kézirat.

[Mo5] F. Móricz, Necessary and sufficient Tauberian conditions, under which convergence follows from summability $(C,1)$, *Bull. London Math. Soc.*, **26**(1994), 288–294.

[MN1] F. Móricz, Z. Németh, On the order of magnitude of Fourier coefficients with respect to uniformly bounded orthonormal systems, *Analysis Math.*, **21**(1996), 187–198.

[MN2] F. Móricz, Z. Németh, A new characterization of regular summability $(C,1,1)$ of double series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **63**(1997), 471–485.

[MN3] Móricz, Z. Németh, Tauberian conditions under which convergence of integrals follows from summability $(C,1)$ over $\mathbf{R}_+$, *Analysis Math.*, megjelenés alatt.

[MSz] F. Móricz, I. Szalay, Absolute summability of double orthogonal series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **52**(1988), 349–371.

[Ne1] Z. Németh, On the generalized absolute summability of double series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **56**(1992), 97–114.

[Ne2] Z. Németh, On the generalized Cesàro summability, Proc. Conf. of Approx. Theory (Kecskemét, 1990), *Coll. Math. Soc. János Bolyai*, 58(1991), North Holland (Amsterdam, 1992); 549–569.

[Ne3] Németh Z., Kettős sorok $|C,(\alpha,\beta),(\mu,\nu)|_\kappa$ szummálhatóságáról, *Szakdolgozat* (kézirat), Szeged, 1985.

[Ne4] Z. Németh, On the order of maagnitude of Hausdorff–Young transforms, *Acta Math. Hungar.*, megjelenés alatt.

[Re] J. B. Reade, On the order of magnitude of Fourier coefficients, *SIAM J. Math. Anal.*, **17**(1986), 469–476.

[SWSP] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, J. Pál, *Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger (Bristol-New York, 1990).

[Sch] R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbindungen, *Math. Z.*, **22**(1925), 89–152.

[Sz1] I. Szalay, On the generalized absolute summability of double orthogonal series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **48**(1985), 451–458.

[Sz2] I. Szalay, On the properties of the strong Cesàro summability and strong convergence of series, *Analysis Math.*, **15**(1989), 195–209.

[Sz3] I. Szalay, A high-indices theorem for strong Cesàro summability of double series, *Analysis Math.*, **16**(1990), 65–80.

[Sz4] I. Szalay, On the generalized absolute Cesaro summability of double series and the strong approximation of orthogonal series, *Proc. Conf. of Constructive Function Theory '81, Sofia*, 1983, 543–550.

[Ta] K. Tandori, Über die Orthogonalen Funktionen. IX (Absolute Summation), *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **21**(1960), 292–299.

[Ti] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Clarendon Press (Oxford, 1937).

[ZT] I. E. Zak, M. F. Timan, On the summability of double series, *Mat. Sbornik*, **35**(77)(1954), 21–56 (orosz nyelven).

[Zy] A. Zygmund, *Trigonometric series*, University Press (Cambridge, 1959).