B 3623

Nagy Gábor Péter*

Bol-tükrözések alkalmazásai

doktori disszertáció tézisek

SZTE Egyetemi Könyvtár SZEGED 13.

Témavezető: Dr. Szőnyi Tamás (ELTE)

JATE Bolyai Intézet, Szeged
1999.

Bevezetés

Az első impulzust nem-asszociatív struktúrák tanulmányozására a geometria alapjainak megteremtése, ezen belül a nem-Desargues–féle síkok koordinátázásának kérdései adták századunk első évtizedeiben. W. BLASCHKE érdeklődését loopok és kvázicsoportok iránt a differenciálgeometria topológiai kérdései motiválták ([Bla38]). R. BAER [Bae39], A.A. ALBERT [Alb43, Alb44] és R.H. BRUCK [Bru58] alkották meg a kvázicsoportok és loopok önálló algebrai elméletét. Baer számára a loophoz rendelt geometria töltött be fontos szerepet, míg Bruck tárgyalásában az elmélet az univerzális algebra része. Albert a loop eltolásainak halmazát mint szelést tekintette az általuk generált csoportban. A loopok és kvázicsoportok elmélete ebben a három irányban fejlődött ki az utóbbi 50 évben. Fontos irány loopok topológiai algebrai, topológiai geometriai és differenciálgeometriai keretekben történő vizsgálata, amely K.H. HOFMANN, H. SALZMANN, M.A. AKIVIS és L.V. SABININ nevéhez fűződik, ld. a [Che90] összefoglaló gyűjteményt, valamint NAGY PÉTER T. és K. STRAMBACH előkészület alatt álló [NS99] monográfiáját.

*Doktori tanulmányaimhoz 1995. és 1998. között az alábbi intézmények nyújtottak anyagi támogatást: Országos Tudományos Kutatási Alap (F021271, T020066), a Magyar Művelődési Minisztérium Felsőoktatási Kutatási és Fejlesztési Pályázata (FKFP-0152/1997), Soros Alapítvány (1995), Eötvös Állami Ösztöndíj (1998). Köszönettel tartozom még az Universität Erlangen-Nürnberg (Németország) és a potenzai Università di Basilicata (Olaszország) matematikai intézeteinek vendégszeretetéért.

Jelen dolgozatban a loopokat, kvázicsoportokat és a hozzájuk társított geometriákat mint absztrakt objektumat tanulmányozzuk. Ennek a megközelítésnek egyik fontos képviselője V.D. BELOUSOV [Bel76]. A témakör nyugati nyelvű standard referenciái közé a [Bru58], [Pfl90], [Che90] és [BS83] művek számítanak, orosz nyelven a [Bel76] művet említjük meg.

A tézisekben megfogalmazott tételek, néhány kivétellel, *új eredményeket* tartalmaznak. Egyes esetekben, ezen eredményekből ismert korábbi tételek *új bizonyítását* nyerjük, ezeket a disszertációban külön megjegyezve közöljük.

A Bol-tükrözések elméletének *továbbfejlesztése*, illetve az elmélet *alkalmazása* több irányban képzelhető el. Az egyik lehetséges irány a véges Bol-loopok és involutórikus Bol-loopok témaköréhez, ezen belül a téziseink végén megfogalmazott három problémához kapcsolódik. Ezek a problémák a csoportelmélet nyelvén megfogalmazva is érdeklődésre tartanak számot. Egy másik szóba jöhető alkalmazás az *algebrai B-loopok témaköre*. Ezen belül az első természetes lépés például az algebrai kommutatív Moufang-loopok leírása lehet.

1. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben, bevezető jellegéből kifolyólag, nem szerepelnek jelentősebb önálló eredmények. A témakör fontosabb referenciáiból ([Bru58], [Pfl90], [Che90], [BS83]) a fejezet állításai, az 1.2.8 és 1.5.3 tételek kivételével, több-kevesebb erőfeszítéssel összeollózhatók.

A *kvázicsoportok* a csoport nem-asszociatív általánosításának tekinthetők. Az egységelemmel rendelkező kvázicsoportokat nevezzük *loopoknak*. Ezeket a fogalmakat az univerzális algebra nyelvén is definiálhatjuk.

A loophoz „kívülről" rendelünk különböző permutáció- és szimmetriacsoportokat, amelyek közvetett módon szolgáltatnak információt a loopról. A legfontosabb ilyen csoportok az *eltoláscsoportok*. Bevezetjük a $\lambda_x : L \to L$, $\lambda_x(y) = xy$ bal és $\rho_x : L \to L$, $\rho_x(y) = yx$ jobb oldali eltolás, valamint a

$$G_{\text{bal}}(L) = \langle \lambda_x | x \in L \rangle, \qquad G_{\text{jobb}}(L) = \langle \rho_x | x \in L \rangle$$

bal illetve *jobb oldali eltoláscsoport* fogalmát. Az $(L, \cdot)$ loop *teljes eltoláscsoportjának* vagy *multiplikációcsoportjának* nevezzük az

$$M(L) = \langle G_{\text{bal}}(L), G_{\text{jobb}}(L) \rangle$$

csoportot. Az egységelem stabilizátor részcsoportja is fontos szerepet játszik, ezért erre külön jelölést vezetünk be: $I(L) = M(L)_1$ és $U(L) = G_{\text{bal}}(L)_1$. Az $I(L)$ csoport elemeit *belső leképezéseknek* is nevezzük.

A csoportok elméletében a centrum az, ami „belülről méri" a kommutativitástól való távolságot. Hasonló szerepet töltenek be a loopok elméletében az N_λ, N_μ, N_ρ *nukleuszok*.

Az 1.2.8 és 1.5.3 tételek tartalma kapcsolódik korábbi eredményekhez (ld. pl. a [Gla64, Lemma 8.] bizonyítását), de ebben a számunkra hasznos formátumban újak.

1.2.8. Tétel. *Legyen π az L halmaz egy tetszőleges permutációja. π pontosan akkor centralizálja az $(L,\cdot)$ bal oldali eltoláscsoportját, ha $\pi = \rho_n$, valamely $n \in N_\rho$ jobb oldali nukleuszelemre. Analóg állítás teljesül a jobb oldali eltoláscsoport centralizátorára. Végül $Z(L) \cong Z(M(L))$.*

A loopok és kvázicsoportok vizsgálatát eredendően nem csoportelméleti, hanem geometriai kérdések motiválták, mint pl. a nem Desargues-féle projektív síkok koordinátázása, vagy a differenciálható sokaságokon megadható görbeseregek vizsgálata.

A kvázicsoporthoz illetve loophoz rendelt pont-egyenes illeszkedési struktúra a *3-hálózat*. Fordítva, egy 3-hálózathoz egy origó kiválasztásával *koordinátaloopot* rendelhetünk. A kvázicsoportok és loopok osztályán ilyen módon kapott ekvivalenciarelációt *izotópiának* nevezzük.

A 3-hálózatok iránytartó kollineációit leíró algebrai eszköz az *autotopizmusok* fogalma. Pontosabban az

$$(x,y) \mapsto (\alpha(x), \beta(y))$$

leképezés akkor és csak akkor lesz a 3-hálózat iránytartó kollineációja, ha létezik egy $\gamma : L \to L$ invertálható leképezés úgy, hogy az $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ hármas az $(L,\cdot)$ loop autotopizmusa. A γ leképezés geometriai jelentése az (α, β) kollineáció hatása a ferde egyenesosztályon.

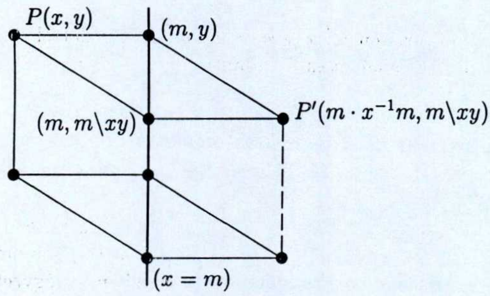
Ezen belül, az origóra illeszkedő vízszintes illetve függőleges egyenest fixen hagyó kollineációk pontosan megfeleltethetők a koordinátaloop *bal* illetve *jobb oldali pszeudo-automorfizmusainak.*

Az *univerzális tulajdonságok* a 3-hálózat geometriai (koordinátamentes) jellemzőit írják le. A következő tétel a loophoz rendelt algebrai fogalmak geometriai és csoportelméleti jellemzésére ad példát. A tételben szereplő megfeleltetés hasznos eszköznek fog bizonyulni a dolgozatban.

1.5.3. Tétel. *Létezik egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a bal oldali nukleusz elemeihez tartozó $\{\lambda_n; n \in N_\lambda\}$ baleltolások, a jobb oldali eltoláscsoport $C_{M(L)}(G_{\mathrm{jobb}}(L)) = \{\lambda_n; n \in N_\lambda\}$ centralizátora és az összes vízszintes egyenest rögzítő $\{(\lambda_n, id); n \in N_\lambda\}$ kollineációk csoportja között.*

2. Bol-loopok

Ebben a fejezetben olyan speciális looposztályokat vizsgálunk, amelyekben az asszociativitás bizonyos gyenge formái vannak jelen. Ezek közül a „legerősebbnek", azaz a csoportokhoz legközelebb állóaknak a *Moufang-loopok* osztályát tekinthetjük, amire a klasszikus példa az *oktávok*, vagy más néven a *Cayley-számok* multiplikatív struktúrája. A mi tárgyalásunkban a



1. ábra. A Bol-konfiguráció és Bol-tükrözés.

Bol-loopok a Moufang-loopok természetes általánosításai, pontosabban a Moufang-loopokat mint a Bol-loopok speciális esetét tekintjük.

Bol-hálózatok és Bol-loopok

A 2.1 alfejezetben az

$$x\cdot(y\cdot xz)=(x\cdot yx)\cdot z \tag{1}$$

azonosság által meghatározott *Bol-loopokat* és a hozzájuk tartozó 3-hálózatoknak a szakirodalomból általánosan ismert tulajdonságait tárgyaljuk.

A Bol-féle 3-hálózatok osztálya azzal a tulajdonsággal is jellemezhető, hogy a hozzárendelt 3-hálózatban az 1. ábrán látható konfiguráció záródik. Mint látható, a konfiguráció záródása ekvivalens azzal a ténnyel, hogy a $\sigma_m : P \mapsto P'$ leképezés egy nem iránytartó involutív kollineáció. Ezeket a kollineációkat nevezzük *Bol-tükrözésnek.* Koordinátákkal megadva a Bol-tükrözés alakja

$$\sigma_m : (x,y) \mapsto (m\cdot x^{-1}m, m\backslash xy). \tag{2}$$

Ebből a $\sigma_m\sigma_1$ *Bol-eltolásra*

$$\sigma_m\sigma_1 = (\lambda_m\rho_m, \lambda_m^{-1}) \tag{3}$$

adódik. Vizsgálódásaink egyik legfontosabb célja és egyben eszköze a Bol-tükrözések által generált

$$N=\langle\sigma_x; x\in L\rangle, \qquad N_0=\langle\sigma_x\sigma_1; x\in L\rangle$$

kollineációcsoportok. N_0 iránytartó kollineációcsoport, az N csoport egy 2 indexű részcsoportja. N-et és N_0-at normalizálja az összes iránytartó kollineáció. Az N csoport nem iránytartó, a ferde és a vízszintes irányokat felcseréli.

A (3) képlet azt mondja, hogy az N_0 csoport elemei úgy hatnak a vízszintes egyenesek halmazán, ahogy a $G_{\text{bal}}(L)$ eltoláscsoport hat a loop tartóhalmazán. Ezt fejezi ki a

$$\Phi : \sigma_x\sigma_1 \mapsto \lambda_x^{-1}$$

leképezést leíró 2.2.2 tétel.

Az $(L,\cdot)$ Bol-loop esetén az $x+y=x\cdot y^{-1}x$ művelettel definiáljuk a loop $(L,+)$ *szívét.* A szívnek geometriai jelentést is adhatunk, amiből azonnal következik a fogalom izotóp-invarienciája (ld. [Rob66]): $\sigma_x\sigma_y\sigma_x=\sigma_{x+y}$.

B-loopok

Azokban a Bol-loopokban, amelyekben az $x\mapsto x^2$ leképezés bijektív, a loop szíve kvázicsoport. Ennek a kvázicsoportnak a loop-izotópját a *loophoz társított B-loopnak* nevezzük. A *(B'-loopok) B-loopok* olyan Bol-loopok, amelyekben a négyzetre emelés bijekció, az inverzképzés művelete pedig (jobb oldali pszeudo-) automorfizmus. A B'-loopok osztályában a szív közvetlenül tartalmazza a loop teljes struktúráját.

A B'-loopok osztályának bevezetését az indokolja, hogy ez az osztály geometriailag is leírható, azaz a B'-loop tulajdonság izotópinvariáns. A 2.3 alfejezetben geometriai szemszögből vizsgáljuk ezt a looposztályt. A következő három tétel új eredmény, a 2.3.3 tétel ad egy új, geometriai bizonyítást [Rob66, Corollary 3.2.2.]-re (ld. 2.3.4 következmény).

2.3.3. Tétel. *Legyen $(L,\cdot)$ egy Bol-loop, jelölje N a Bol-tükrözések által generált kollineáció-csoportot és legyen $N_{x\text{-teng}}$ az x-tengely N-beli stabilizátora. Az invertálás $J: x\mapsto x^{-1}$ művelete akkor és csak jobb pszeudo-automorfizmus, ha $N_{x\text{-teng}}$ az x-tengely valamely pontját stabilizálja. Ha a fixpont koordinátája $(c,1)$, akkor c a J kísérőeleme.*

2.3.4. Következmény. *Az univerzális B-loopok pontosan az Abel-csoportok.*

2.3.5. Tétel.

(i) A B'-loop tulajdonság izotópia-invariáns.

(ii) Egy B-loop minden izotópja B'-loop.

(iii) Minden B'-loop izotóp egy B-loophoz.

2.3.6. Tétel. *Legyen $(L,\cdot)$ egy páratlan rendű Bol-loop. Ekkor az L halmazon az*

$$x\circ y=x^{\frac{1}{2}}\cdot yx^{\frac{1}{2}}$$

művelettel értelmezhetjük az $(L,\circ)$ B-loopot, amelyet társított B-loopnak *nevezünk. Továbbá:*

(i) Az L-hez társított B-loop izotópiainvariáns.

(ii) A két loopművelet akkor és csak akkor egyezik meg, ha $(L,\cdot)$ kommutatív Moufang-loop.

(iii) A két loop $(L,\cdot)$ és $(L,\circ)$ akkor és csak akkor izomorf, ha $(L,\cdot)$ B-loop.

(iv) A két loop $(L,\cdot)$ és $(L,\circ)$ akkor és csak akkor izotóp, ha $(L,\cdot)$ B'-loop.

Az eddigiekből az derült ki, hogy az $(L,\cdot)$ loophoz társított $(L,\circ)$ B-loop az eredeti loop Abel-csoport tulajdonságól való „távolságát" méri. A következő állítás mutatja, hogy a dolog ennyire nem egyszerű, hiszen nem-asszociatív vagy nem-kommutatív L esetén is lehet $(L,\circ)$ Abel-csoport.

2.3.7. Állítás. *Legyen $(L,\cdot)$ egy páratlan rendű Bol-loop $G(L)$ baloldali eltoláscsoporttal. Az $(L,\circ)$ társított B-loop akkor és csak akkor Abel-csoport, ha $G(L)$ nilpotens és nilpotenciaosztálya legfeljebb 2.*

A 2.3.7 állítás más módszerrel, bővebben tárgyalva van a [Gla64, Theorem 4]-ben és az azt követő Corollary-ban. Az általunk megfogalmazott eredményt bizonyítják [NS98, Theorem 3.8]-ben megint csak egy teljesen más összefüggésben, analitikus B-loopokra, az érintő algebra fogalmának felhasználásával.

A következő állítás azt az esetet írja le, amikor a társított loop művelete kommutatív. Az állítás [Bru58, VII. Theorem 5.3. és Lemma 5.3.]-al állítható párhuzamba, de annál erősebb, hisz gyengébb feltételből (Moufang-loop helyett Bol-loop) indul ki. Némileg más formában pedig szerepel [NS98, Theorem 3.8.]-ben is.

2.3.8. Állítás. *Legyen $(L,\cdot)$ egy páratlan rendű Bol-loop. Ekkor a hozzá társított $(L,\circ)$ loop akkor és csak akkor kommutatív Moufang loop, ha minden $x,y\in L$ esetén teljesül*

$$(x\cdot yx)^2 = x^2\cdot y^2x^2.$$

Struktúraelmélet B-loopokra

Minden B-loop előfordul mint egy páratlan rendű Bol-loophoz társított loop. A következőben bemutatjuk B-loopoknak egy másik, tisztán csoportelméleti konstrukcióját. A 2.4 alfejezet minden eredménye G. GLAUBERMAN [Gla64, Gla68, Gla66] munkáiból következik, a jelen bemutatásban az újdonság a megközelítésben van, ami leginkább a 2.4.5 tételben mutatkozik meg.

A továbbiakban G mindig egy véges csoportot fog jelölni, J pedig G-nek egy involutív automorfizmusát. Központi fontosságú fogalom a *Glauberman-automorfizmus.* Glauberman igen mély csoportelméleti Z^*-tétele szerint minden Glauberman-automorfizmussal rendelkező véges csoport páratlan rendű.

A disszertációban definált *core*, illetve a *zárt normálosztó* fogalmának felhasználásával az alábbi struktúratételt bizonyítjuk B-loopokra (vö. [Gla64, Lemma 5(v)]).

2.4.5. Tétel. *Legyen $(L,\cdot)$ B-loop, $G=G(L)$, és jelöljük J-vel a loopbeli $x\mapsto x^{-1}$ inverzképzés műveletét és általa generált Glauberman-automorfizmust egyidejűleg. Ekkor létezik egy megfeleltetés a G J-invariáns normálosztói és az L normális részloopjai között az alábbiak szerint:*

(i) *Az* $N \triangleleft G$ *J-invariáns normálosztó esetén* $\kappa(N) = N(1) \triangleleft L$ *normális részloop.*

(ii) *Legyen* $K \triangleleft L$ *normális részloop és definiáljuk a* $H = \{g \in G; g(K) = K\}$ *részcsoportot. Ekkor* $\nu(K) = \mathrm{core}_G(H)$ *zárt normálosztó.*

(iii) *Teljesül* $\kappa(\nu(K)) = K$ *és* $\nu(\kappa(N)) = \bar{N}$.

(iv) *A* $K \triangleleft L$ *normális részloop esetén* $G(L/K) \cong G(L)/\nu(K)$.

A fenti tétel és a Z^*-tétel kombinálásával látható be Glauberman egy másik tétele, miszerint minden véges B-loop feloldható.

3. Moufang-loopok és 3-hálózatok

A Moufang-loopok elnevezése RUTH MOUFANG német matematikusra utal, aki elsőként vizsgálta ezt a struktúrát kvázicsoport néven az 1934-ben megjelent [Mou34] cikkében. Később sokan foglalkoztak ezzel a témakörrel, hisz a Moufang-loopok az asszociativitáshoz legközelebb álló fontos looposztálynak tekinthetők.

S. DORO [Dor78] cikkében leírta a kapcsolatot a Moufang-loopok és a trialitással rendelkező csoportok között. Ez a kapcsolat meglehetősen bonyolult, különösen ha a loop nukleusza nem triviális. A 3.2 alfejezetben ezt a kapcsolatot egy egyszerűbb geometriai megközelítésből tárgyaljuk, természetesen a Bol-tükrözések felhasználásával. Fő eredményünk, hogy a trialitással rendelkező csoportok közvetlenül megfeleltethetők a Moufang-looppal koordinátázott 3-hálózatoknak (ld. [Nag99]).

A kétoldali Bol-loopokat *Moufang-loopnak* nevezzük. Egy Moufang-loop által koordinátázott 3-hálózatot *Moufang-hálózatnak* nevezünk. Az elmélet legfontosabb fogalma a *trialitással rendelkező csoport.*

3.2.4. Tétel. *Legyen* M *az* $\mathcal{N}$ *Moufang-hálózat összes Bol-tükrözése által generált kollineációcsoport, és legyen* $M_0 \leq M$ *az iránytartó kollineációkból álló részcsoport. Rögzítsünk egy tetszőleges* P $\mathcal{N}$*-beli pontot, és legyen* S *a* P*-re illeszkedő egyenesek tükrözései által generált csoport. Ekkor* $M = M_0 S$ *és az* (M_0, S) *pár csoport trialitással.*

Ennek a megfordítása is igaz. A tétel kimondásához az alábbi jelölést rögzítjük. A (G, S) trialitással rendelkező csoport esetén jelölje σ és ρ pedig az S megfelelő generátorait ($\sigma^2 = \rho^3 = 1$), és legyen $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma\rho$ és $\sigma_3 = \rho\sigma$ az S három involúciója. Jelöljük továbbá C_i-vel a σ_i^G konjugáltosztályt.

3.2.5. Tétel. *Legyen* (G, S) *egy csoport trialitással. Ekkor az alábbi konstrukció egy* $\mathcal{N}(G, S)$ *Moufang-féle (duális) 3-hálózatot határoz meg. A három egyenesosztályt feleltessük meg a három* C_1, C_2 *és* C_3 *konjugáltosztálynak. Három, páronként nem párhuzamos* σ_1^g, σ_2^h, σ_3^f $(g, h, f \in G)$ *egyenes akkor és csak akkor illeszkedjék egy pontra, ha*

$$\langle \sigma_1^g, \sigma_2^h, \sigma_3^f \rangle \cong S_3.$$

Továbbá, ha $G_1 = [G, S]S$, akkor az $M(\mathcal{N})$ $\mathcal{N}$-beli tükrözések által generált csoportra teljesül

$$M(\mathcal{N}) \cong G_1/Z(G_1).$$

[Dor78] szerint a véges egyszerű Moufang-loopok osztályozása ekvivalens a trialitással rendelkező véges egyszerű csoportok osztályozásával. Ez utóbbit M.W. LIEBECK végezte el, a véges egyszerű csoportok sztályozását felhasználva. Az osztályozás során az első alapvető lépés annak megmutatása, hogy S külső automorfizmusokból áll. Ennek a tulajdonságnak a bizonyítása a mi geometriai megközelítésünkben egyszerűbb, mint a Doro-féle, loopokra épülő tárgyalásban.

3.2.6. Állítás. *Legyen (G, S) egy véges csoport trialitással és tegyük fel, hogy $\rho \in$ InnAut(G). Ekkor minden $[g, \sigma]$ elem rendje 3, és $[G, S]$ 3-csoport. Továbbá, az $\mathcal{N}(G, S)$ 3-hálózat által meghatározott loop centrálisan nilpotens.*

4. Speciális looposztályok

Ebben a fejezetben Bol-loopok speciális csztályaival fogialkozunk. Ezen osztályok egyik része azonosságokkal definiálható, másik részük pedig konkrét konstrukciókhoz kapcsolódik.

Bal konjugált zárt és Burn-féle loopok

A 4.1 alfejezetben a *bal konjugált zárt* és a *Burn-loopok* osztályát definiáljuk. Ilyenek vizsgálatával először a [NS94] cikkben foglalkoztak, az utóbbi elnevezés is innen származik. Az alábbi három állítás saját eredményünk, kivéve a 4.1.2 állítás (iii) pontját, mely az [NS94] cikkben már szerepel.

Az első állítás a Bol-loopok bal nukleuszának tulajdonságaival foglalkozik.

4.1.2. Állítás.

(i) *Egy bal inverz tulajdonságú loopban a bal oldali és a középső nukleusz megegyezik.*

(ii) *Egy (bal) Bol-loopban a bal oldali (=középső) nukleusz normális részloop.*

(iii) *Az $(L, \cdot)$ Bol-loop akkor és csak akkor Burn-féle, ha minden elem négyzete benne van a bal oldali nukleuszban.*

A következő állítás a Φ leképezés magját írja le általános Bol-féle 3-hálózatok esetén. Mivel $\ker\Phi$ elemei triviálisan hatnak a vízszintes egyenesek halmazán, ezért őket azonosíthatjuk a függőleges egyeneseken vett hatásukkal.

4.1.5. Állítás. *Tekintsünk egy L Bol-loop által koordinátázott 3-hálózatot.*

(i) *Ha L-ben a $J : x \to x^{-1}$ inverzképzés művelete jobb pszeudo-automorfizmus, akkor* $\ker\Phi = \{id\}$.

(ii) *Általában, a fenti azonosítással* $\ker\Phi = \cup_k H_k$, *ahol*

$$H_k = \langle [\lambda_{x_1}, \ldots, \lambda_{x_k}]; x_1, \ldots, x_k \in L, n \leq k, \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_k} \in S(L) \rangle.$$

Teljesül továbbá $\ker\Phi \lhd G(L)$.

4.1.6. Tétel. *Legyen L egy véges Burn-loop és használjuk a fejezet eddigi jelöléseit.*

(i) $\ker\Phi = H_s$, *ahol* $s = \max\{|L : N_\lambda| - 1, 2\}$.

(ii) *Ha $s \leq 7$, akkor $s \in \{2, 3\}$ és*

$$\ker\Phi = [S(N_\lambda), G(L)] = \langle [\lambda_n, \lambda_x] | n \in N_\lambda, x \in L \rangle.$$

Speciálisan, $\ker\Phi = L'$, *ha L csoport.*

Burn-konstrukciók és csoportinvariánsaik

A 4.2 alfejezetben részletesen leírjuk a [Bur78, Bur81]-ben megadott B_{4n} ($n \geq 2$) és C_{4n} ($n \geq 2$ páros) loop-konstrukciókat. Ezek a loopok az előző alfejezetben vizsgált looposztályba tartoznak, az ottani eredményeink felhasználásával explicit kiszámoljuk a loopokhoz, illetve az általuk meghatározott 3-hálózatokhoz tartozó automorfizmus- és kollineációcsoportokat.

4.2.3. Tétel. *Legyen $(L, \cdot)$ a B_{4n} vagy C_{4n} ($n \geq 2$) loopok valamelyike. Ekkor*

$$\ker\Phi \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_n & L = B_{4n} \text{ és } n \text{ páratlan,} \\ \mathbf{Z}_{\frac{n}{2}} & \text{különben.} \end{cases}$$

Továbbá $N_0 = \ker\Phi \rtimes \bar{G}$, ahol Φ izomorfizmust indukál a $\bar{G} \leq N_0$ részcsoport és $G(L)$ között. Jelöljük $\bar{G}$ megfelelő generátorait $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ és $\bar{\gamma}$-val, és δ-val a ciklikus $\ker\Phi$ generátorát. Ekkor $\bar{\alpha}$ és $\bar{\gamma}$ triviálisan hat $\ker\Phi$-n, és $\bar{\beta}\delta\bar{\beta} = \delta^{-1}$.

A következő tétel a loopok automorfizmus-csoportját írja le. Ez a tétel abban az értelemben kilóg a sorból, hogy az eddig tárgyalt csoportokkal ellentétben a loop automorfizmuscsoportja nem izotópia-invariáns.

4.2.6. Tétel. *Legyen $(L, \cdot)$ a B_{4n} vagy C_{4n} ($n \geq 2$) loopok valamelyike. Ekkor*

$$\mathrm{Aut}(L) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_n^* \times S_3 & \text{ha } L = B_{4n},\ n \text{ páratlan} \\ \mathbf{Z}_n^* \times D_8 & \text{ha } L = B_{4n},\ n \text{ páros} \\ \mathbf{Z}_{2n}^* \times \mathbf{Z}_2 & \text{ha } L = C_{4n},\ n > 2,\ n \text{ páros} \\ D_8 & \text{ha } L = C_8 \end{cases}$$

Továbbá ezen loopok mindegyikére igaz, hogy az összes bal oldali pszeudo-automorfizmusuk automorfizmus.

Az utolsó tételünk a B_{4n} ($n \geq 2$) és a C_{4n} ($n \geq 2$ páros) loopok által koordinátázott 3-hálózat teljes Γ kollineáció-csoportját írja le.

Vezessük be a $\Lambda_0 = \langle \alpha, \gamma \rangle$ jelölést. Definiáljuk a Γ alábbi részcsoportjait.

$$\begin{array}{ll} T = \{(\lambda_m, id) : m \in N_\lambda\}, & \Lambda = \Phi^{-1}(\Lambda_0), \\ A = \{(\sigma, \sigma) : \sigma \in \mathrm{Aut}(L)\}, & M = T\Lambda. \end{array}$$

4.2.8. Tétel. *Legyen Γ az L loop által koordinátázott 3-hálózat teljes kollineáció-csoportja, ahol $L = B_{4n}$ vagy C_{4n} ($n \geq 2$). Ekkor Γ felírható mint $M \rtimes \mathrm{Aut}(L)$, ahol M egy, az origó Γ-pályáján regulárisan ható Ábel-féle kollineáció-csoport, és $\mathrm{Aut}(L)$ hatása a konjugálás szerinti.*

Megjegyzés. Ez az eredmény egy érdekes analógiát mutat a csoport 3-hálózatok esetével, mikor is $\Gamma \cong (G \times G) \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ (ld. [BS83, Theorem 10.1].)

Involutórikus Bol-loopok

A 4.1.2 állítás (ii) és (iii) részeiből adódik, hogy egy L Burn-loop esetén az L/N_λ faktorloop minden elemének a rendje 2. Az ilyen loopokat *involutórikus loopoknak* is nevezik (ld. [KS88]). Fordítva, egy involutórikus Bol-loop konjugált zárt, vagyis Burn-loop, hiszen a $\lambda_x\lambda_y\lambda_x \in S(L)$ és a $\lambda_x^{-1}\lambda_y\lambda_x \in S(L)$ azonosságok ekvivalensek. Involutórikus Bol-loop esetén nyilván $J = id$, s így a 4.1.2 állítás (i) részéből következik, hogy ilyen loopok esetén $\ker \Phi = \{id\}$.

Ebben az alfejezetben E. Kolb és A. Kreuzer [KK95] nevéhez fűződő involutórikus Bol-loop konstrukciót vizsgáljuk meg.

Legyen $R = \mathbf{F}_4[[u]]$ a formális Laurent-sorok gyűrűje. R lokális gyűrű, minden ideálja (u^k) alakú, legyen $R_{(k)} = R/(u^k)$. Jelölje $\bar{x}$ az $\mathbf{F}_4$-beli konjugálás R-re illetve $R_{(k)}$-ra való kiterjesztését (együtthatónként), és definiáljuk az alábbi műveletet.

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1+u\bar{x}y}$$

A $0 \in R$ láthatóan egységelem, az $\mathbf{F}_4$ kettes karakterisztikája miatt pedig $x \oplus x = 0$. Azt is kiszámoljuk, hogy R Bol-loop, tehát involutórikus Bol-loop. Továbbá, mivel az összes számolás igaz az $R_{(k)}$ faktorgyűrűben, ezért minden $k > 0$ esetén $(R_{(k)}, \oplus)$ véges involutórikus Bol-loop.

Jelölje $U = G_0$ illetve $U_{(k)} = G_{(k),0}$ az egységelem megfelelő loopbeli stabilizátorát. Megmutatjuk, hogy $U \cong E_1$, ahol

$$\begin{array}{rcl} R_1 & = & \{x \in R; x = 1 + u(\ldots)\}, \\ E_1 & = & \{x \in R_1; x\bar{x} = 1\}. \end{array}$$

A számolásból az is adódik, hogy $|U_{(k)}| = 2^{k-1}$ Abel-csoport és $|G_{(k)}| = 2^{3k-1}$.

Teljesül továbbá $Z(R) = \emptyset$ és $Z(R_{(k)}) = \{\alpha u^{k-1}; \alpha \in \mathbb{F}_4\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, amiből adódik, hogy $R_{(k)} = R_{(k+1)}/Z(R_{(k+1)})$. Ezek felhasználásával bizonyítjuk a következő tételt.

4.3.1. Tétel. *Az $(R_{(k)}, \oplus)$ involutórikus Bol-loopot két elem generálja.*

Az alfejezetet involutórikus Bol-loopokhoz kapcsolódó nyitott kérdésekkel fejezzük be.
1. probléma. *Igaz-e, hogy minden véges involutórikus Bol-loop feloldható?*

A 4.4 alfejezetben látni fogjuk, hogy a kérdés ekvivalens azzal, hogy minden véges involutórikus Bol-loop rendje kettőhatvány, illetve azzal, hogy a $G(L)$ bal oldali eltoláscsoport 2-csoport. S. HEISS [Hei96] munkájában megmutatta, hogy $G(L)$ feloldhatóságából következik, hogy 2-csoport, valamint, hogy $G(L)$ nem lehet véges egyszerű csoport. P. CAMERON és KORCHMÁROS GÁBOR [CK93] cikkbeli eredményéből következik, hogy ha $G(L)$ 2-tranzitívan hat L-en, akkor L elemi Abel-csoport kell legyen.
2. probléma. *Igaz-e, hogy minden L involutórikus Bol-loop esetén a $G(L)_1$ stabilizátor részcsoport Abel-féle?*

Az ismert példák esetén a válasz igen.

Bol-féle univerzális 2-loopok

A 4.4 alfejezetben tárgyalt Bol-féle univerzális 2-loop tulajdonságot az előző alfejezetben vizsgált loopok motiválják. Az alfejezetben a [Nag98] cikkben publikált eredményeinket ismertetjük, kivéve a publikálatlan 4.4.5 tételt.

A [Nag98] cikkben Bol-féle *2-loopokat* és *univerzális 2-loopokat* vizsgáltunk. A fő eredmény a következő.

4.4.3. Tétel. *Minden véges univerzális Bol-féle 2-loop feloldható.*

Mint [Nag98]-ban geometriai úton beláttuk, Moufang-loopok esetében a 2-loop-tulajdonság univerzális. Továbbá a Moufang-loopok esetében a bal és a jobb oldali eltoláscsoportok izomorfak és normalizálják egymást. Ebből következik, hogy egy L Moufang-féle 2-loop esetén $M(L)$ 2-csoport. Ezzel, felhasználva [Bru58, VI. Lemma 2.2.]-t, új bizonyítást adtunk Glaubermann és Wright egy tételére.

4.4.4. Következmény. (Glauberman, Wright, [GW68]) *Minden véges Moufang-féle 2-loop nilpotens.*

A dolgozatot egy, az előző alfejezetben említett 1. problémához kapcsolódó tétellel fejezzük be. Ha az 1. kérdésre adandó válasz *nem*, akkor a legkisebb létező ellenpélda egyszerű loop. Sőt, a következő tételből az is következik, hogy a legkisebb ellenpéldát két eleme generálja.

Ez a tétel teremt kapcsolatot a 4.3.1 tétel és a 4.3 alfejezetben megfogalmazott kérdések között.

4.4.5. Tétel. *Ha az L Bol-loop bármely két eleme 2-hatványrendű részloopot generál, akkor L univerzális 2-loop.*

A jelenlegi ismeretek szerint minden véges, 2 elem által generált, involutórikus Bol-loop valamely $R_{(k)}$ loop homomorf képe. Adódik tehát a harmadik nyitott kérdésünk.

3. probléma. *Igaz-e, hogy minden véges, 2 elem által generált, involutórikus Bol-loop előáll, mint valamely $(R_{(k)}, \oplus)$ loop homomorf képe?*

Utószó

A disszertációban az alábbi dolgozataim kerültek feldolgozásra:

[Nag94] G.P. Nagy. Collineation groups of the smallest Bol 3-nets. *Note di Matematica*, 14(1):115–128, 1994.

[Nag98a] G.P. Nagy. Group invariants of certain Burn loop classes. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 5:403–415, 1998.

[Nag98b] G.P. Nagy. Solvability of universal Bol 2-loops. *Commun. Algebra*, 26(2):549–555, 1998.

[Nag99] G.P. Nagy. On Moufang 3-nets and groups with triality. Elküldve az *Acta Sci. Math. Szeged* folyóiratnak, 1999.

A disszertációban fel nem használt dolgozatok:

[BN92] Balogh József és Nagy Gábor. A p-adikus számok egy érdekes alkalmazása. *Polygon*, II. kötet 2. szám, 1992.

[NSz97] G.P. Nagy and T. Szőnyi. Caps in finite projective spaces of odd order. *J. Geom.*, 59:103–113, 1997.

[Nag99b] G.P. Nagy. A Campbell-Hausdorff formula for geodesic loops. Kézirat, 1999.

[Nag99c] G.P. Nagy. Linear representations of finite commutative Moufang loops. Kézirat, 1999.

Hivatkozások

[Alb43] A.A. Albert. Quasigroups I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 54:507–519, 1943.

[Alb44] A.A. Albert. Quasigroups II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55:401–419, 1944.

[Bae39] R. Baer. Nets and groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 46:110–141, 1939.

[Bel76] V.D. Belousov. *Foundations of the Theory of Quasigroups and Loops*. Nauka, Moskow, 1976. In Russian.

[Bla38] W. Blaschke. *Geometrie der Gewebe*. Springer-Verlag, Berlin, 1938.

[Bru58] R.H. Bruck. *A Survey of Binary Systems*. Springer, Berlin, 1958.

[BS83] A. Barlotti and K. Strambach. The geometry of binary systems. *Adv. in Math*, 49:1–105, 1983.

[Bur78] R.P. Burn. Finite Bol loops I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 84(3):53–66, 1978.

[Bur81] R.P. Burn. Finite Bol loops II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 89(3):445–455, 1981.

[Che90] O. Chein. Examples and methods of construction. In O. Chein et al., editors, *Quasigroups and Loops: Theory and Applications*, Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1990.

[CK93] P.J. Cameron and G. Korchmáros. One-factorizations of complete graphs with a doubly transitive automorphism group. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 25(1):1–6, 1993.

[Dor78] S. Doro. Simple Moufang loops. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 83:377–392, 1978.

[Gla64] G. Glauberman. On loops of odd order I. *J. Alg.*, 1:374–396, 1964.

[Gla66] G. Glauberman. Central elements in core-free groups. *J. Alg.*, 4:403–420, 1966.

[Gla68] G. Glauberman. On loops of odd order II. *J. Alg.*, 8:393–414, 1968.

[GW68] G. Glauberman and C.R.B. Wright. Nilpotence of finite Moufang 2-loops. *J. Alg.*, 8:415–417, 1968.

[Hei96] S. Heiss. Invariant 1-factorization of complete graphs. Unpublished manuscript, 1996.

[KK95] E. Kolb and A. Kreuzer. Geometry of kinematic k-loops. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 65:189–197, 1995.

[KS88] G. Korchmáros and D. Saeli. Commutative loops of exponent two and involutorial 3-nets with identity. *Geom. Dedicata*, 28(3):259–276, 1988.

[Mou34] R. Moufang. Zur Struktur von Alternativkörper. *Math. Ann.*, 110:416–430, 1934.

[Nag98] G.P. Nagy. Solvability of universal Bol 2-loops. *Commun. Algebra*, 26(2):549–555, 1998.

[Nag99] G.P. Nagy. On Moufang 3-nets and groups with triality. Elküldve az *Acta Sci. Math. Szeged* folyóiratnak, 1999.

[NS94] P.T. Nagy and K. Strambach. Loops as invariant sections in groups, and their geometry. *Canad. J. Math.*, 46(5):1027–1056, 1994.

[NS98] P.T. Nagy and K. Strambach. Loops, their cores and symmetric spaces. *Israel J. Math.*, 105:285–322, 1998.

[NS99] P.T. Nagy and K. Strambach. Sharply transitive sections in Lie groups: A Lie theory of smooth loops. Manuscript, 1999.

[Pfl90] H.O. Pflugfelder. *Quasigroups and loops: introduction*. Number 7 in Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1990.

[Rob66] D.A. Robinson. Bol loops. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 123:341–354, 1966.