

Az inga egyensúlyi helyzeteinek stabilizálása és destabilizálása

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

CSIZMADIA LÁSZLÓ

TÉMAVEZETŐ:

DR. HATVANI LÁSZLÓ
PROFESSOR EMERITUS

MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET

SZEGED
2018

1. Bevezetés

Disszertációm az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságáról, illetve alsó egyensúlyi helyzetének destabilizálhatóságáról szól, megadva az alkalmasan választott paramétertartományokban a stabil és instabil zónákat az azokat elválasztó periodikus megoldásokból álló görbék leírása segítségével. A disszertáció fő eredménye, hogy eleminek mondható vizsgálati eszköz használatával sikerült egy korábban megjelent eredményt élesíteni és általánosítani, illetve elkészíteni az úgynevezett stabilitási térképet a Floquet-elvre épülő, bonyolult számítások használata nélkül. Ez azt is jelenti, hogy a módszer alkalmas mélyebb matematikai ismeretekre támaszkodó elmélet használatának áthidalására, segítve annak fokozatos megismerését, elsajátítását.

Rövid előszó és bevezetés után a hintázás problémáját vizsgáljuk. Bevezetjük a jelenséget leíró periodikus lépcsősfüggvény együtthatós, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet origóhoz közeledő, és origótól távolodó megoldása fogalmát. Szükséges és elegendő föltételeket adunk ezek létezésére, és segítségükkel megfogalmazzuk a mozgásegyenlet periodikus megoldásainak létét garantáló tételt.

Ezt követően az inga felső egyensúlyi helyzete körüli mozgásokra koncentrálnunk. Egy korábban megjelent publikáció ([28]) módszerét kiterjesztve az abban található, az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságáról szóló eredményt élesítjük és egyben alkalmazzuk az általános esetre.

Végül ugyancsak a felső egyensúlyi helyzet stabilizálhatóságával foglalkozunk olyan módon, hogy a $2T$ -periodikus, lépcsősfüggvény együtthatós egyenlet $2T$ -, illetve $4T$ -periodikus megoldásait állítjuk elő. A fázissíkon ezen periodikus megoldásoknak megfelelő görbék segítségével a korábbi, becsléssel kapott, stabilitási zónákra vonatkozó eredményeinket pontosítjuk, s így az egzakt stabilitási térképet tudjuk elkészíteni.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (benyújtva).

A tézisfüzetben található jelölések és számozások (a formulák azonosítótól eltekintve) megegyeznek a disszertációban használtakkal.

Előzmények

A matematikai inga egy merev, elhanyagolható tömegű, $l = \text{const.}$ hosszúságú rúdból és a hozzá rögzített m tömegű tömegpontból áll [1, 8]. Az egyik állapothatározó az inga rúdjának függőleges iránnyal bezárt szöge (ψ), mely pozitív irányú, ha az óramutató járásával ellentétes, a másik ennek idő szerinti deriváltja. Ha az ingára a gravitáción kívül más erő nincs hatással, akkor mozgását a

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \sin \psi = 0 \quad (-\infty < \psi < \infty) \quad (1)$$

differenciálegyenlet írja le.

Amint az (1) egyenletből látható, a rendszernek két egyensúlyi helyzete van: $\psi \equiv 0 \pmod{2\pi}$, illetve $\psi \equiv \pi \pmod{2\pi}$, amit rendre alsó, illetve felső egyensúlyi helyzetnek hívunk. Az A. M. Ljapunov által bevezetett stabilitási fogalmakkal [32] élve azt mondhatjuk, hogy az alsó egyensúlyi helyzet stabil, míg a felső instabil. A nemlineáris egyenletek első közelítésben történő stabilitásvizsgálata, melyet először Ljapunov írt le [31], azt jelenti, hogy az eredeti rendszert - szokás perturbált rendszernek nevezni - egy alkalmas, lineáris - perturbálatlan - rendszerrel közelítjük. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy az egyensúlyi helyzetek kis környezetében - jelölje ezeket rendre U_0 és U_π - az (1) egyenletet linearizáljuk. Ha $\psi \in U_0$, akkor $\sin \psi \approx \psi$, ha pedig $\psi \in U_\pi$, akkor $\sin \psi \approx -\psi + \pi = -(\psi - \pi)$. Legyen $\theta := \psi - \pi$, vagyis amikor $\psi = \pi$, akkor $\theta = 0$. Fölírhatjuk most már az alsó, illetve felső egyensúlyi helyzet körüli „kis” mozgásokat leíró lineáris másodrendű differenciálegyenleteinket:

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \psi = 0, \quad \ddot{\theta} - \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (2)$$

Az általunk vizsgált mozgásegyenleteket formailag az

$$\ddot{x} \pm a^2(t)x = 0, \quad a(t) := a_k, \text{ ha } t_{k-1} \leq t < t_k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (3)$$

alakúra tudjuk hozni, ahol $\{a_k\}_{k=1}^\infty$, $\{t_k\}_{k=0}^\infty$ pozitív számok olyan sorozatai, melyekre $t_k < t_{k+1}$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, és $t_0 := 0$.

Amikor a felső egyensúlyi helyzetet stabilizálni, az alsót pedig destabilizálni akarjuk, akkor a (2) egyenletekben a lineáris tag együtthatója nem állandó, hanem egy periodikus függvény. Mi azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor ez az együttható egy periodikus lépcsősfüggvény, és egy periódus két lépcsőből áll. A [16]-ban bevezetett és a [17]-ben kifejtett módszerrel a (2) egyenletek átírhatóak egy-egy megfelelő, úgynevezett impulzív dinamikus rendszerbe. Nevezetesen, az alsó egyensúlyi helyzet körüli mozgásokat leíró egyenlet az

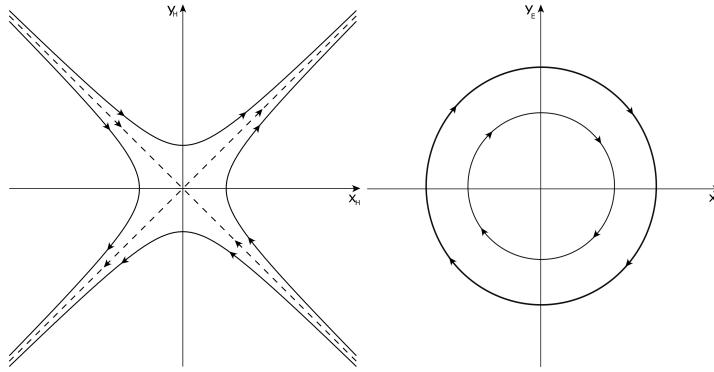
$$\begin{cases} \dot{x} = a_k y, & \dot{y} = -a_k x & (t_{k-1} \leq t < t_k), \\ x(t_k) = x(t_k - 0), & y(t_k) = \frac{a_k}{a_{k+1}} y(t_k - 0) & (k \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (4)$$

rendszerbe, míg a felső egyensúlyi helyzet körüli mozgásokra vonatkozó egyenlet az

$$\begin{cases} \dot{x} = a_k y, & \dot{y} = a_k x & (t_{k-1} \leq t < t_k), \\ x(t_k) = x(t_k - 0), & y(t_k) = \frac{a_k}{a_{k+1}} y(t_k - 0) & (k \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (5)$$

rendszerbe transzformálható, ahol $f(t-0)$ az f függvény bal oldali határértéke a t helyen. Az impulzív jelző arra utal, hogy a fázissíkon a (4), illetve (5) dinamikák folytonos komponensei között egy függőleges irányú kontrakció/dilatáció történik.

Nem nehéz megmutatni, hogy a (4) rendszer folytonos komponense origó körüli „elliptikus (közönséges) forgatás”, s így a trajektóriák origó körüli körívek, míg a (5) rendszer folytonos komponense „hiperbolikus forgatás”, lásd az 1 ábrát. Tehát ebben az esetben a fázispont hiperbolákon mozog.



1. ábra. Hiperbolikus és elliptikus forgás

2. A hintázásról

A hinta egy olyan inga, melynek hossza az időben változik: a hintázó hol guggoló, hol kinyújtott testhelyzetet vesz föl, azaz testének tömegközéppontját hol följebb, hol lejjebb helyezve igyekszik a hinta alsó egyensúlyi helyzetét destabilizálni. Arnold [1] művében leírtak szerint, tegyük föl, hogy a hintázó hatására a hinta hossza periodikusan változik, azaz tekintsük az

$$\ddot{x} + a^2(t)x = 0,$$

$$a(t) := \begin{cases} a_1 := \sqrt{\frac{g}{l - \varepsilon}}, & \text{ha } 2kT \leq t < (2k + 1)T, \\ a_2 := \sqrt{\frac{g}{l + \varepsilon}}, & \text{ha } (2k + 1)T \leq t < (2k + 2)T, \quad (k = 0, 1, \dots) \end{cases} \quad (6)$$

egyenletet, ahol x jelöli az inga rúdjának a függőlegessel bezárt szögét, továbbá $\varepsilon > 0$ az a paraméter, melynek segítségével a hintázás intenzitását jellemezzük, $T > 0$ az inga hosszváltozásának fél periódusa. A hintázás problémáját a következőképpen lehet megfogalmazni: határozzuk meg a (T, ε) paramétersík instabil tartományát, vagyis azon részét, ahonnan választott paraméterértékekkel a (6) egyenlet $x = 0$ megoldása instabil.

Periodikus együtthatós differenciálegyenletek vizsgálatához nagy segítséget nyújt a Floquet-elv, amelynek itt egy következményét fogalmazzuk meg. Legyen $\Phi(t)$ a (6) egyenlet azon alapmátrixa, melyre teljesül, hogy $\Phi(0) = E$, ahol E a 2×2 -es egységmátrix. Ha $|\text{Tr } \Phi(T)| < 2$, akkor a (6) egyenlet $x = 0$ megoldása stabil. Továbbá, ha $|\text{Tr } \Phi(T)| > 2$, akkor a (6) egyenlet $x = 0$ megoldása instabil. Ennek alkalmazása, ahogyan azt az [1] műben is láthatjuk, gyakran sorfejtéseken alapuló becslések használatára vezet, sokszor nehézkessé válik. Mivel célunk a pontos instabilitási tartomány leírása, ezért más, ráadásul könnyebben számolható utat mutatunk. Azt viszont nagyon lényeges megjegyezni, amint az a Floquet-elvből következik, hogy az instabilitási tartomány határát a $|\text{Tr } \Phi(T)| = 2$ egyenlet írja le. Elemi módszerekkel megmutatjuk, hogy a (T, ε) sík instabilitási zónájának határát azon $T = f(\varepsilon)$, $T = g(\varepsilon)$ görbék alkotják, melyek pontjai megfelelnek a (6) egyenlet $2T$ - vagy $4T$ -periodikus megoldásainak. Azt is megmutatjuk, hogy $f(\varepsilon)$, $g(\varepsilon)$ a $((k/2)(\pi\sqrt{l/g}), 0)$ ($k \in \mathbb{N}$) pontok valamelyikéhez konvergálnak, amint $\varepsilon \rightarrow 0$. Ennek a ténynek van egy fontos gyakorlati jelentése. Ha minél kisebb energiabefektetéssel akarunk destabilizálni, illetve kis gyermeket akarunk megtanítani hintázni ($\varepsilon > 0$ kicsi), akkor a $T = (k/2)(\pi\sqrt{l/g})$, ($k \in \mathbb{N}$) kritikus félperiódusok valamelyikét kell választani.

A destabilizálási probléma megoldásának első lépéseként próbáljunk olyan feltételeket megadni, melyek garantálják, hogy a (6) rendszer $t \mapsto (x(t; x_0, \dot{x}_0), \dot{x}(t; x_0, \dot{x}_0))$ trajektóriája elindulva a fázissík egy $P(x_0, \dot{x}_0)$ pontjából $2T$ idő alatt visszatérjen a sík azon L egyenesére, mely összeköti a $(0, 0)$ koordinátájú origót a P ponttal, vagyis $(x(2T; x_0, \dot{x}_0), \dot{x}(2T; x_0, \dot{x}_0)) \in L$. Egy ilyen trajektória az origóhoz közeledik, illetve távolodik az origótól attól függően, hogy $(x(2T; x_0, \dot{x}_0), \dot{x}(2T; x_0, \dot{x}_0))$ pont közelebb, illetve távolabb van az origótól, mint az (x_0, \dot{x}_0) pont. Ha a két pont ugyanolyan távol van az origótól, akkor a megoldás vagy $2T$ -, vagy $4T$ -periodikus. Annak érdekében, hogy tetszőleges $2T$ gerjesztési periódus esetén ugyanaz legyen az egyenlet periódusa ($2L$), egy függetlenváltozó-transzformációt hajtunk végre ($\tau = (L/T)t$). Ez azt jelenti, hogy a fázispont mozgását L függvényében tekintjük. A (4) impulzív rendszert az (x, y) sík egy diszkrét dinamikus rendszereként is interpretáljuk. Vezessük be ugyanis az (r, φ) polárkoordinátákat a

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (r > 0, -\infty < \varphi < \infty)$$

formulákkal. Ekkor a (4) rendszerrel ekvivalens diszkrét dinamikus rendszer:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{pmatrix} R(a_{k+1}(t_{k+1} - t_k)) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (7)$$

ahol $R(\theta)$ a forgatás, míg $C(\kappa)$ a kontrakció-dilatáció hatását leíró mátrix. A fázispont kezdeti állapotát (r_0, φ_0) jelöli.

1. Definió. *A hintázás modelljéül szolgáló (7) egyenletrendszer egy megoldásáról azt mondjuk, hogy 2π modulusú szögperiodikus, illetve 4π modulusú szögperiodikus, ha*

$$\varphi(2L) \equiv \varphi_0 \pmod{2\pi}, \text{ illetve } \varphi(2L) \equiv \varphi_0 - \pi \pmod{2\pi}.$$

2. Definió. *A hintázás modelljéül szolgáló (7) egyenletrendszer egy 2π modulusú, vagy 4π modulusú szögperiodikus megoldását (origóhoz) közeledőnek, illetve (az origótól) távolodónak mondunk, ha*

$$r(2L) < r_0, \text{ illetve } r(2L) > r_0.$$

Miután a szögperiodikus origóhoz közeledő, illetve attól távolodó megoldásokat karakterizáltuk, segítségükkel megfogalmazzuk a mozgásegyenlet $2T$ -, illetve $4T$ -periodikus megoldásainak létezésére vonatkozó szükséges és elegendő föltételt.

3. Tétel. *Bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\{T_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$, illetve $\{\tilde{T}_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ sorozat, hogy a (6) egyenletnek a $T = T_k(\varepsilon)$ választással $2T_k(\varepsilon)$ -periodikus, illetve a $T = \tilde{T}_k(\varepsilon)$ választással $4\tilde{T}_k(\varepsilon)$ -periodikus megoldása van. Továbbá,*

$$0 < \tilde{T}_1 \leq \tilde{T}_2 < T_1 \leq T_2 < \tilde{T}_3 \leq \tilde{T}_4 < \dots; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty, \quad (8)$$

és

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+1}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+2) \left(\frac{1}{2} \left(2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+1) \left(\frac{1}{2} \left(2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right)$$

teljesül minden $p \in \mathbb{N}$ esetén.

Ennek birtokában bizonyítható az a tétel, mely leírja a keresett instabilitási tartományt.

4. Tétel. *A (6) egyenletre vonatkozó (T, ε) paramétersík instabil tartományának belseje*

$$\cup_{0 < \varepsilon < l} (\cup_{p=0}^\infty (\{(T, \varepsilon) : T_{2p+1}(\varepsilon) < T < T_{2p+2}(\varepsilon)\} \cup \{(T, \varepsilon) : \tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) < T < \tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon)\})),$$

ahol a T_k, \tilde{T}_k kifejezéseket a (8)-ben értelmeltük.

3. A f6ls6 egyens6lyi helyzet stabiliz6l6sa

Azt, hogy az inga f6ls6 egyens6lyi helyzet6t lehets6ges a f6l-f6ggeszt6si pontja alkalmasan v6lasztott frekvenci6j6 6s amplit6d6j6 f6gg6leges ir6ny6 rezeget6t6s6vel is stabiliz6lni, els6k6nt A. Stephenson 6rta le 1908-ban [34, 35]. A f6ls6 egyens6lyi helyzet k6r6li mozg6sokat le6r6 egyenletet teljes r6szleteibe men6en 1951-ben megjelent cikkeiben P. L. Kapica vizsg6lta [23, 24], 6s az6ta gyakran Kapica-ingak6nt hivatkoznak erre a jelens6gre. M. Levi 6s W. Weckesser a [28] cikk6kben egy egyszer6 geometriai h6tter6 magyar6zatot adnak arra, hogy mik6nt is lehets6ges a stabiliz6l6s nagy frekvencia eset6n. Dolgozatukban olyan nagy frekvenci6j6 rezeget6t6s6t vizsg6lnak, melynek sor6n a gyorsul6s l6nyegesen nagyobb a gravit6ci6s gyorsul6s 6rt6k6n6l, s emiatt ez ut6bbit elhagyj6k. R6mutatunk arra, hogy a gravit6ci6 hatás6nak figyelembe v6telekor az 6ltaluk adott m6dszer nem m6k6dik, emiatt azt m6dos6tani kell. Tov6bb 6ltal6nos6tva az elgondol6st, megvizsg6ljuk, hogy a f6l-le rezeget6s aszimmetri6ja milyen hat6ssal van a stabiliz6lhat6s6gra.

A [28] cikket k6vetve, tegy6k f6l, hogy az inga f6l-f6ggeszt6si pontj6ra olyan er6 hat, melynek hatás6ra l6trej6v6 gyorsul6s

$$a(t) := \begin{cases} A, & \text{ha } kT \leq t < (2k+1)\frac{T}{2}, \\ -A, & \text{ha } (2k+1)\frac{T}{2} \leq t < (k+1)T, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (9)$$

Teh6t az $a(t)$ f6ggv6ny egy T -periodikus l6pcs6sf6ggv6ny, melyet abban az 6rtelemben mondunk szimmetrikusnak, hogy a f6l-peri6dusok egyenl6 hossz6iak, 6s a f6lvett f6ggv6ny6rt6kek egym6s ellentettjei. A mozg6segyenletet ennek hatás6ra a k6vetkez6k6pp m6dosul:

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + a(t))\psi = 0. \quad (10)$$

A tov6bbiakban a szerz6k f6lteszik, hogy $A \gg g$, s emiatt a (10) egyenletben a gravit6ci6s gyorsul6st nem veszik figyelembe - 6gynevezett gravit6ci6mentes eset. Bevezetve az $\omega = \sqrt{A/l}$ mennyis6get a (10) a k6vetkez6, (3)-hoz hasonló form6ban 6rhat6:

$$\ddot{\psi} \pm \omega^2\psi = 0,$$

ahol az el6jel az $a(t)$ f6ggv6nynek megfelel6en v6ltozik.

5. T6tel (M. Levi, W. Weckesser; [28]). *Tekints6k a ford6tott inga (10) mozg6segyenlet6t a gravit6ci6mentes ($g = 0$) esetben. Ekkor ha*

$$\omega T < \pi \quad \left(\omega := \sqrt{\frac{A}{l}} \right), \quad (11)$$

akkor a (10) er6sen stabil.

Az erős stabilitás röviden szólva azt jelenti, hogy a rendszer annak minden kis perturbáltjával együtt stabil. A pontos definíció a disszertációban olvasható. A (9) formulában adott függvény két értékének megfelel két különböző fázis, ahogyan azt a (3) után kifejtettük. A két különböző fázis geometriailag két különböző jellegű forgatást jelent. A szerzők alapötlete, hogy ezen forgatásokat megadó mátrixok hatására a sík vektorain létrejövő forgatás mértékét becsülték. Megtartva ezt a becsléses módszert megvizsgáljuk, hogy a gravitáció hatását is figyelembe véve mire jutunk. Föltesszük továbbá, hogy a fölfüggesztési pontot egy aszimmetrikus hatás éri, s így annak gyorsulása:

$$a(t) := \begin{cases} A_h, \text{ ha} & kT \leq t < kT + T_h, \\ -A_e, \text{ ha} & kT + T_h \leq t < (kT + T_h) + T_e, \\ (k = 0, 1, \dots) & ; \end{cases}$$

ahol A_h, A_e, T_h, T_e pozitív konstansok ($T_h + T_e = T$), tehát a felfüggesztési pont mozgása T -periodikus. A h és e indexek arra utalnak, hogy két különböző fázisból áll össze a mozgás: egy elliptikus és egy hiperbolikus részből. A mozgás-egyenlet formailag továbbra is (10) alakú. Meggondolásaink eredményeképpen a következőt állíthatjuk.

6. Tétel. Jelölje $\text{Rem}(\varphi; \pi)$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ valós szám osztási maradékát moduló π ($0 \leq \text{Rem}(\varphi; \pi) < \pi$).

Ha

$$2 \arctan \frac{e^{\omega_h T_h} - 1}{e^{\omega_h T_h} + 1} + 4 \left| \arctan \sqrt{\frac{\omega_h}{\omega_e} - \frac{\pi}{4}} \right| < \min\{\text{Rem}(\omega_e T_e; \pi); \pi - \text{Rem}(\omega_e T_e; \pi)\}, \quad (12)$$

akkor a (10) egyenlet erősen stabil,

ahol

$$\omega_h := \sqrt{\frac{A_h + g}{l}}, \quad \omega_e := \sqrt{\frac{A_e - g}{l}}.$$

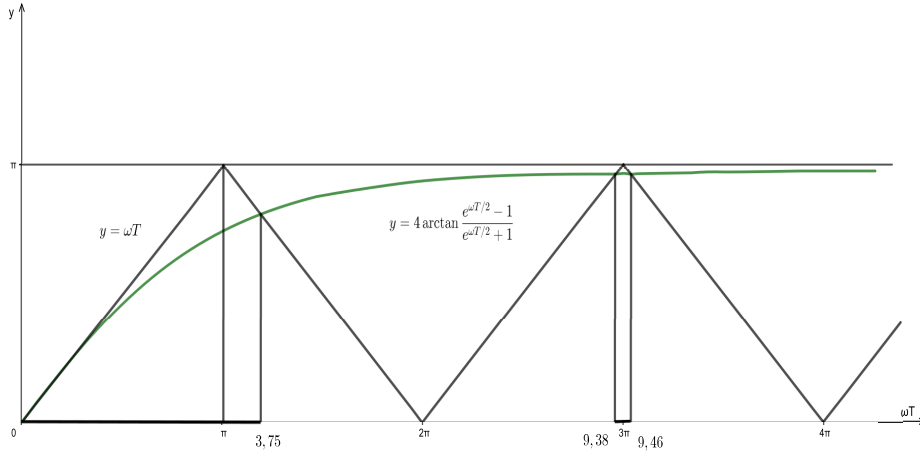
A gravitációmentes esethez képest most merőben más helyzettel állunk szemben: az eltérő ω_h és ω_e miatt a hiperbolikus és elliptikus fázis között az Előzményekben említett impulzív effektus történik a fázistéren. Így ennek forgató hatását is figyelembe kell venni a tétel fölírásakor. Alkalmazzuk a 6. tételt a gravitációmentes és szimmetrikus esetre. Ekkor a következőt kapjuk.

7. Következmény. Tegyük föl, hogy a (10) egyenletben $g = 0$, valamint $A_h = A_e = A$. Ha

$$4 \arctan \frac{e^{\omega T/2} - 1}{e^{\omega T/2} + 1} < \min\{\text{Rem}(\omega T; 2\pi); 2\pi - \text{Rem}(\omega T; 2\pi)\}, \quad (13)$$

akkor (10) erősen stabil.

A 7. következmény lényegesen javítja a 5. tételt: az első olyan intervallum, ami-
 be stabil megoldásoknak megfelelő pontok vannak az ωT -tengelyen, kielégítve a
 (13) feltételt, a $(0, 3,75 \dots)$ (lásd a 2. ábrát) a $(0, \pi)$ helyett, amit a (11) alapján
 eddig tudtunk. Másfelől pedig, a 7. következmény a 5. tételt abban az értelem-
 ben is javítja, ha úgy tetszik kiterjeszti, hogy további stabil intervallumokat
 találhatunk az ωT -tengelyen a 2π után is (lásd a vastagított intervallumot a 2.
 ábrán). Azt mondhatjuk tehát, hogy tetszőlegesen nagy $\omega T = T\sqrt{A/l}$ esetén
 lehetséges a stabilizálás. Erre a (11) feltételből nem lehet következtetni.



2. ábra. Stabil intervallumok

A szimmetrikus esetet ($A_h = A_e = A, T_h = T_e = T/2$) Arnold is vizsgálta
 [1], bevezetve az

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{D}{l}}, \quad \mu := \sqrt{\frac{g}{A}},$$

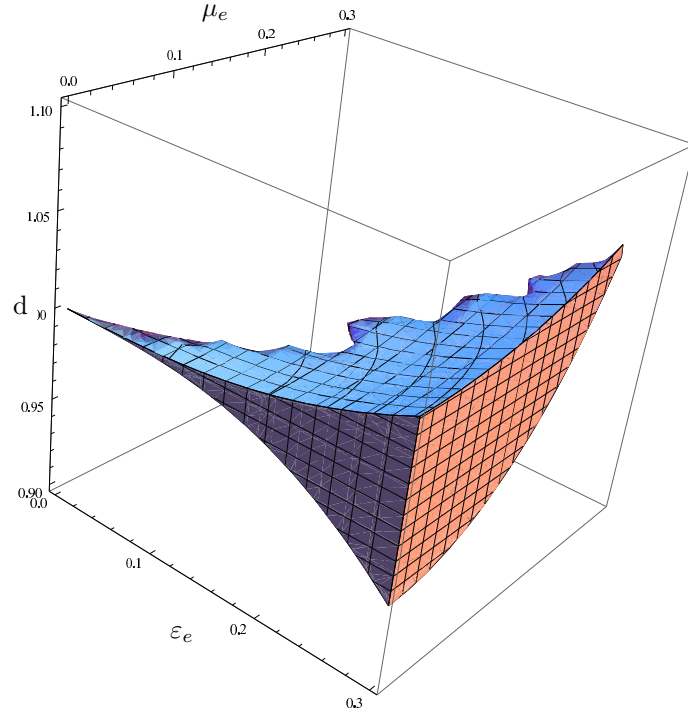
paramétereket, ahol a D a fölfüggesztési pont legnagyobb kitérése (amplitúdója)
 a rezgetés során. Arnold azzal a föltevással élt, hogy ezek a paraméterek kicsik
 ($\varepsilon \ll 1, \mu \ll 1$); és a Floquet-elvre vonatkozó közvetlen számolásokkal jutott
 arra a közelítésre, hogy $\mu < \varepsilon/3$ elegendő feltétele az erős stabilitásnak. Alkal-
 mazva a 6. tételünket ebben a szimmetrikus, a gravitáció hatását is figyelembe
 vevő esetben, az ε és μ paraméterek segítségével átírva a (12) föltételt, valamint
 semmilyen nagyságrendi korlátot föl nem tételezve a paraméterek értékeire, az
 $\varepsilon - \mu$ sík *globális* stabilitási térképét kapjuk.

Az általános (aszimmetrikus) esetet tekintve, használva az Arnold nyomán
 bevezetett

$$\varepsilon_h := \sqrt{\frac{D_h}{l}}, \quad \mu_h := \sqrt{\frac{g}{A_h}}; \quad \varepsilon_e := \sqrt{\frac{D_e}{l}}, \quad \mu_e := \sqrt{\frac{g}{A_e}}.$$

paramétereket, valamint a

$$d := \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_e} = \frac{\mu_h}{\mu_e} = \sqrt{\frac{A_e}{A_h}} = \sqrt{\frac{T_h}{T_e}} = \sqrt{\frac{D_h}{D_e}},$$



3. ábra. A stabilitási tartomány egy része az aszimmetrikus esetben

paramétert, amelyik méri a hiperbolikus és elliptikus fázis arányát a fölfüggesztési pont rezgetése során, a 6. tétel a következő alakot ölti:

8. Következmény. *Ha*

$$2 \arctan \frac{\exp \left[2\sqrt{2}d\varepsilon_e \sqrt{1 + d^2\mu_e^2} \right] - 1}{\exp \left[2\sqrt{2}d\varepsilon_e \sqrt{1 + d^2\mu_e^2} \right] + 1} + 4 \left| \arctan \frac{\sqrt{\frac{1 + d^2\mu_e^2}{1 - \mu_e^2}}}{d} - \frac{\pi}{4} \right| <$$

$$< \min\{\text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon_e \sqrt{1 - \mu_e^2}; \pi); \pi - \text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon_e \sqrt{1 - \mu_e^2}; \pi)\},$$

akkor a (10) egyenlet erősen stabil.

A 8. következmény által megadott stabilitási tartomány egy részét láthatjuk a 3. ábrán.

Nem nehéz belátni, hogy az aszimmetrikusan rezgetett eset kedvezőbb a stabilitás szempontjából, hiszen a gyorsulást egy előre adott értéken lehet rögzíteni. Tehát bármely $\bar{\mu}_e$ ($0 \leq \bar{\mu}_e < \sqrt{2}/2$) esetén található olyan $\bar{d} \geq 1$ és $\bar{\varepsilon}_e^{(k)}$ ($\bar{\varepsilon}_e^{(k)} \rightarrow \infty$, ha $k \rightarrow \infty$) úgy, hogy a (10) egyenlet az $\bar{\varepsilon}_e^{(k)}$, $\bar{\mu}_e$, \bar{d} paraméterekkel erősen stabil.

4. A fordított inga periodikus mozgásai

Az előző fejezetben az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságával kapcsolatos vizsgálataink során, becsléseken alapuló számolások segítségével eljutottunk a globális stabilitási térkép egy jó közelítéséhez. Ebben a fejezetben célunk, hogy a fordított ingára vonatkozóan elkészítsük a pontos stabilitási térképet úgy, hogy megkeressük a $2T$ -periodikus együtthatós egyenlet $2T$ -, illetve $4T$ -periodikus megoldásait, melyekről tudjuk, hogy az ezeknek megfelelő görbék alkotják a paramétersík instabil zónájának határát.

Ebben a részben azt az esetet tárgyaljuk, amikor az inga fölfüggesztési pontjára egy függőleges irányú szimmetrikus erő gyakorol hatást, továbbá a gravitáció hatását is figyelembe vesszük. Tekintsük tehát a (9) egyenlettel adott lépcsősfüggvényt mint az inga fölfüggesztési pontjára kifejezett rezgetés hatására létrejövő gyorsulást. A (9)-ben adothoz képest annyi technikai változtatást teszünk, hogy az említett gyorsulás $2T$ -periodikus. A (10) mozgásegyenletet a hintázás problémájánál látottakhoz hasonlóan, a fázistérben ható diszkrét impulzív rendszerbe transzformálással, és így a fázistér trajektóriái segítségével vizsgáljuk.

Meggondolásaink nyomán kiderült, hogy $2T$ -, illetve $4T$ -periodikus megoldásnak megfelelő trajektóriát nem indíthatunk az (x, y) fázissík tetszőleges pontjából, hanem csakis az $y = -x$ egyenes, tehát a stabil altér közeléből. Ezeket a megfelelő trajektóriákat föltárva jutunk a fejezet fő eredményéhez: a keresett periodikus megoldások létezésére vonatkozó szükséges és elegendő föltételt megadó tételekhez.

9. Tétel. *A (10) egyenletnek akkor és csakis akkor van $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan A és T pozitív konstansok az (9) kifejezésben, és van olyan nemnegatív egész k , hogy vagy*

$$2 \arctan \left(D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T,$$

vagy

$$2 \arctan \left(D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + (2k + 1)\pi = \omega_e T.$$

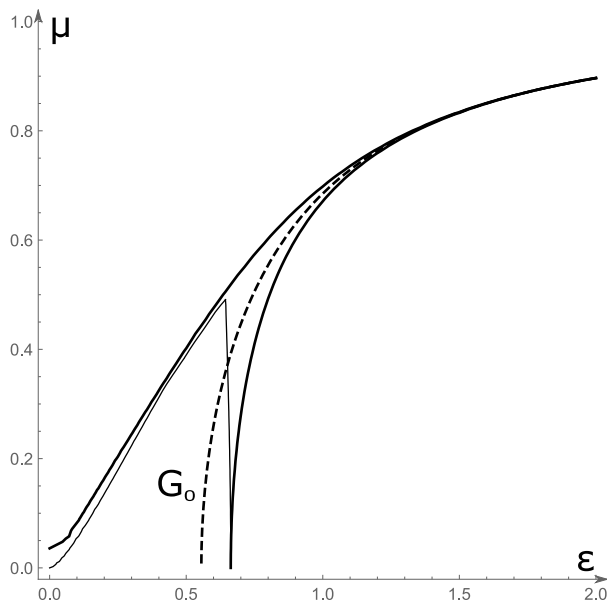
10. Tétel. *A (10) egyenletnek akkor és csakis akkor van $4T$ -periodikus, de nem $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan A és T pozitív konstansok az (9) kifejezésben, és van olyan nemnegatív egész k , hogy vagy*

$$2 \arctan \left(D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + (2k + 1)\pi = \omega_e T,$$

vagy

$$2 \arctan \left(D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T.$$

Így már a pontos stabilitási térképet tudjuk elkészíteni, valamint arra is mód van, hogy összehasonlítsuk a becsléssel kapott eredményünkkel a teljesen pontosat. Ez utóbbit láthatjuk a 4. ábrán. A G_0 jelű görbe környezetében található a stabil zóna, szokás azt mondani, hogy ez a görbe alkotja az adott Arnold-nyelv gerincét.



4. ábra. A korábban becsléssel kapott és a pontos stabil zóna

Hivatkozások

- [1] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [2] D. J. Acheson, T. Mullin, Upside-down pendulums, *Nature*, **366**(2004), 215–216.
- [3] J. Barrow, *100 alapvető dolog a matematikáról és a művészetről, amiről nem tudtuk, hogy nem tudjuk*, Akkord Kiadó Kft, 2015.
- [4] J. A. Blackburn, H. J. T. Smith and N. Gronbeck-Jensen, Stability and Hopf bifurcation in an inverted pendulum, *Amer. J. Physics*, **60**(1992), 903–908.
- [5] H. Broer, M. Levi, Geometrical aspects of stability theory for Hill's equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **131**(1995), 225–240.

- [6] H. Broer, C. Simo, Resonance Tongues in Hill's Equations; A Geometric Approach, *J. Differential Equations*, **166**(2000), 290–327.
- [7] E. Butikov, An improved criterion for Kapitza's pendulum, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**(2011), 1–16.
- [8] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [9] L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- [10] L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.
- [11] L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (benyújtva).
- [12] S. Csörgő, L. Hatvani, Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients, *J. Differential Equations*, **248**(2010), no. 1, 21–49.
- [13] A. M. Formal'skii, On the stabilization of an inverted pendulum with a fixed or moving suspension point, *Dokl. Akad. Nauk*, **406**(2006), no. 2, 175–179.
- [14] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [15] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 2nd edn., 1982.
- [16] L. Hatvani, On the existence of a small solution to linear second order differential equations with step function coefficients, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, **4**(1998), 321–330.
- [17] L. Hatvani, An elementary method for the study of Meissner's equation and its application to proving the Oscillation Theorem, *Acta Sci. Math.*, **79**(2013), no. 1–2, 87–105.
- [18] L. Hatvani, On the parametrically excited pendulum equation with a square wave coefficient, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **77**(2015), 172–182.
- [19] L. Hatvani, On small solutions of second order linear differential equations with non-monotonous random coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **68**(2002), 705–725.

- [20] L. Hatvani, L. Stachó, On small solutions of second order differential equations with random coefficients, *Arch. Math. (Brno)*, Equadiff 9 (Brno, 1997), **34**(1998), 119–126.
- [21] G. W. Hill, On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, *Acta Mathematica*, **12**(1886), Vol. 8, 1–36.
- [22] H. Hochstadt, A special Hill's equation with discontinuous coefficients, *Amer. Math. Monthly*, **70**(1963), 18–26.
- [23] P. L. Kapitsa, Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates, *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.*, **21**(1951) (Russian)
- [24] P. L. Kapitsa, Pendulum with a vibrating suspension, *Uspekhi Fiz. Nauk*, **44**(1951) (Russian)
- [25] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Course of Theoretical Physics, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1976.
- [26] M. Levi, Stability of the inverted pendulum - a topological explanation, *SIAM Rev.*, **30**(1988), 639–644.
- [27] M. Levi, Geometry of Kapitsa' potentials, *Nonlinearity*, **11**(1998), 1365–1368.
- [28] M. Levi, W. Weckesser, Stabilization of the inverted, linearized pendulum by high frequency vibrations, *SIAM Rev.*, **37**(1995), 219–223.
- [29] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's equation*, Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [30] J. Meixner, F.W. Schäfer, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*, Springer, 1954.
- [31] E. Meissner, Über Schüttel-schwingungen in Systemen mit Periodisch Veränderlicher Elastizität, *Schweizer Bauzeitung*, **72**(1918), no. 10, 95–98.
- [32] D. R. Merkin, *Introduction to the Theory of Stability*, Springer-Verlag, 1997.
- [33] A. A. Seyranian and A. P. Seyranian, The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point, *J. Appl. Math. Mech.*, **70**(2006), 754–761.
- [34] A. Stephenson, On an induced stability, *Phil. Mag.*, Vol. 15. **6**(1908), 233–236.

- [35] A. Stephenson, On a new type of dynamical stability, *Manchester Memoirs*, **52**(1908), 1–10.
- [36] G. Stépán, Mikrokaosz, *Természet Világa*, **135**(2004), 60–64.
- [37] B. Van der Pol, M.J. O. Strutt, On the stability of the solutions of Mathieu's equation, *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.*, 7th Series **5**(1928), 18–38.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Csizmadia László Ph. D. fokozatra pályázó Az inga egyensúlyi helyzeteinek stabilizálása és destabilizálása című disszertációját, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be.

A következő cikkekből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

- L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (benyújtva).

Csizmadia László hozzájárulása ezekhez a cikkekhez 50-50%.

Kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2018. január 29.

Dr. Hatvani László
Szegedi Tudományegyetem
professzor emeritus