

# Az inga egyensúlyi helyzeteinek stabilizálása és destabilizálása

Doktori értekezés

CSIZMADIA LÁSZLÓ

TÉMAVEZETŐ:

DR. HATVANI LÁSZLÓ

PROFESSOR EMERITUS

MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR

BOLYAI INTÉZET

SZEGED

2018

# Tartalomjegyzék

<b>1. Előszó</b>	<b>1</b>
<b>2. Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>3. A hintázásról</b>	<b>8</b>
3.1. Arnold nyomán . . . . .	9
3.1.1. A Floquet-elv . . . . .	9
3.1.2. A Floquet-elv használata . . . . .	10
3.2. Elemi úton . . . . .	12
3.2.1. Technikai háttér . . . . .	13
3.2.2. Periodikus, origóhoz közeledő és origótól távolodó pályák	15
3.2.3. Stabilitási térkép . . . . .	31
<b>4. Felső egyensúlyi helyzet stabilizálása</b>	<b>35</b>
4.1. Levi és Weckesser módszere . . . . .	36
4.2. A Levi-Weckesser módszer kiterjesztése . . . . .	38
4.2.1. Aszimmetrikusan rezgetett inga felső egyensúlyi helyzeté- nek stabilizálhatósága . . . . .	38
4.2.2. Eredmények . . . . .	46
<b>5. A fordított inga periodikus mozgásai</b>	<b>54</b>
5.1. A vizsgált modell . . . . .	54
5.2. Periodikus pályák konstruálása . . . . .	58
5.3. Stabilitás és számítógépes szimulációk . . . . .	67
<b>6. Összefoglalás</b>	<b>75</b>

<b>7. Summary</b>	<b>79</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>83</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>84</b>

# 1. fejezet

## Előszó

Az inga szó hallatán többségünk egy rúdon függő nehezékre asszociál, amelyik az alsó „holtpontja”, szabatosabban mondva, az alsó egyensúlyi helyzete közelében kis lengéseket végez. Ennek az eszköznek a gyerekek által nagy örömmel használt módozata a hinta, melybe ülve előbb-utóbb mindegyikük ráérez arra, hogy saját testhelyzetének mozdításával egyre nagyobb és nagyobb lengéseket képes végezni. Ha a surlódástól eltekintünk és a később pontosításra kerülő lineáris közelítésre fókuszálunk, akkor a hinta mozgását egy

$$\ddot{x} + f(t)x = 0 \tag{1.1}$$

alakú differenciálegyenlet írja le, ahol  $x = x(t)$  a hinta szögkitérése a függőleges iránytól mérve pozitív irányítás szerint, az óramutató járásával ellentétes irányt választva pozitív forgásiránynak,  $f(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  pedig a hintázó föl-le guggoló mozgását magába foglaló rész. Amennyiben ez az  $f$  függvény periodikus, akkor az (1.1) egyenletet Hill-egyenletnek hívjuk, G. W. Hill [21] cikke nyomán. Gyakori, hogy az (1.1)-beli  $f$  függvényt speciálisan választják: ha  $f(t) = \cos(t)$ , akkor Mathieu-egyenletnek [30], ha pedig  $f(t)$  egy periodikus lépcsősfüggvény, akkor Meissner-egyenletnek [31] nevezzük az (1.1) egyenletet.

A Hill-egyenletekkel kapcsolatos egyik fő eredmény az úgynevezett oszcillációs tétel [29, 32], mely az adott differenciálegyenlet periodikus megoldásainak eloszlásáról szól. A [10] dolgozatunkban a klasszikus oszcillációs tétel egy speciális esetét tudtuk megadni azáltal, hogy megkonstruáltuk az ott tárgyalt differenciálegyenlet periodikus megoldásait. Az (1.1) típusú egyenlet vizsgálata

igen aktív volt korábban is és ma is, ezzel kapcsolatos cikkeket találunk B. Van der Poltól [37] C. Simón [6] át egészen M. Leviig [5].

Ugyancsak a könnyed kikapcsolódás eszközeként, elsősorban artista trükként ismert [3], hogy az ingát „fejére állítva” egyensúlyban lehet tartani a felső egyensúlyi helyzetében is. Erre több lehetőség kínálkozik: gondoljunk csak az orrán söprűt egyensúlyozó artistára, esetleg az egyre elterjedtebb közlekedési eszközre, a segway-re [2, 36]. Azt, hogy az inga felső egyensúlyi helyzetét a függőleges pontja alkalmasan választott frekvenciájú és amplitúdójú függőleges irányú rezgtetésével is stabilizálni lehet, elsőként A. Stephenson írta le 1908-ban [34, 35]. A felső egyensúlyi helyzet körüli mozgásokat leíró egyenletet teljes részleteibe menően 1951-ben megjelent cikkeiben P. L. Kapica vizsgálta [23, 24], és azóta gyakran Kapica-ingaként hivatkoznak erre a jelenségre. A Nobel-díjas Kapica egy olyan matematikai-fizikai iskola tagja volt, melyhez hozzátartozott például L. D. Landau és V. I. Arnold is. Nem meglepő tehát, hogy ők is foglalkoztak az inga egyensúlyi helyzeteinek stabilitási tulajdonságaival [1, 25]. A már említett J. Moser tanítvány, M. Levi a hintázás problémája mellett szintén több dolgozatában tanulmányozta a felső egyensúlyi helyzet stabilizálhatóságát [26, 27, 28]. A [28]-ban Levi és szerzőtársa által elért eredményt az ott közölt módszer további pontosításával sikerült élesítenünk, illetve általánosítanunk a 2014-ben kiadott [9] publikációnkban. Témavezetőm, Hatvani László 1998-ban megjelent [16] cikkében olyan technikát mutat, melyet haszonnal lehet forgatni az inga egyensúlyi helyzeteinek vizsgálatán túl, a már említett periodikus megoldások föltérképezése során is, így a [11] dolgozatunkban sikerült a [10] cikkbeli oszcillációs tétel „fordított” ingára vonatkozó analogonját megadni.

Disszertációm az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságáról, illetve alsó egyensúlyi helyzetének destabilizálhatóságáról szól, megadva az alkalmasan választott és később részletezésre kerülő paramétertartományokban a stabil és instabil zónákat az azokat elválasztó periodikus megoldásokból álló görbék leírása segítségével. A disszertáció fő eredménye, hogy eleminek mondható vizsgálati eszköz használatával sikerült egy korábban megjelent eredményt élesíteni és általánosítani, illetve elkészíteni az úgynevezett stabilitási térképet a Floquet-elvre épülő, bonyolult számítások használata nélkül. Ez azt is jelenti, hogy a módszer alkalmas mélyebb matematikai ismeretekre támaszkodó elmélet

---

használatának áthidalására, segítve annak fokozatos megismerését, elsajátítását.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (benyújtva).

## 2. fejezet

# Bevezetés

Jól ismert [1, 8], hogy a matematikai inga egy merev, elhanyagolható tömegű,  $l$  hosszúságú rúdból és a hozzá rögzített  $m$  tömegű tömegpontból áll. Lényeges eleme ennek az egyszerű rendszernek az az úgynevezett holonom kényszer, amit az inga rúdjának nyújthatatlansága jelent: gondolatban helyezzük el az inga függeszési pontját a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer origójába, és a tömegpont koordinátái legyenek  $x_1, x_2$ . A kényszer matematikai alakja így:  $x_1^2 + x_2^2 = l^2$ . Ez pontosan azt jelenti, hogy a rúd végére rögzített tömegpont egy  $l$  sugarú körpályán képes mozgást végezni. Ebből viszont könnyű látni, hogy a rendszer egy szabadsági fokú, hiszen a tömegpont helyzetét minden időpillanatban meg tudjuk mondani, ha megmondjuk, hogy egy jól választott iránnyal - legyen ez a függőleges, fölfelé mutató - mekkora szöget ( $\psi$ ) zár be az inga rúdja. A körülfordulási irányt akkor tekintjük pozitívnak, ha az ellentétes az óra járásának irányával. Ha az ingára a gravitáción kívül - a gravitációs gyorsulást  $g$  jelöli - nem hat semmilyen más erő, tehát nincs súrlódás sem, akkor a rendszer Lagrange-függvénye, melyet a kinetikus és potenciális energiák különbségeként kapunk:

$$L = T - V = \frac{ml^2}{2}\dot{\psi}^2 + mgl \cos \psi, \quad \dot{\psi} := \frac{d\psi}{dt}.$$

Ennek segítségével fölírhatjuk az Euler-Lagrange-egyenletet, azaz a mozgás-egyenletet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = ml^2 \ddot{\psi} + mgl \sin \psi = 0.$$

Ebből pedig átalakítással nyerjük, hogy

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \sin \psi = 0 \quad (-\infty < \psi < \infty). \quad (2.1)$$

Amint az a (2.1) egyenletből látható, a rendszernek két egyensúlyi helyzete van:  $\psi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , illetve  $\psi \equiv \pi \pmod{2\pi}$ , amit rendre alsó, illetve felső egyensúlyi helyzetnek hívunk. Az A. M. Ljapunov által bevezetett stabilitási fogalmakkal [32] élve azt mondhatjuk, hogy az alsó egyensúlyi helyzet stabil, míg a felső instabil. A nemlineáris egyenletek első közelítésben történő stabilitásvizsgálata, melyet először Ljapunov írt le [31], azt jelenti, hogy az eredeti rendszert - szokás perturbált rendszernek nevezni - egy alkalmas, lineáris - perturbátlan - rendszerrel közelítjük. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy az egyensúlyi helyzetek kis környezetében - jelölje ezeket rendre  $U_0$  és  $U_\pi$  - a (2.1) egyenletet linearizáljuk. Ha  $\psi \in U_0$ , akkor  $\sin \psi \approx \psi$ , ha pedig  $\psi \in U_\pi$ , akkor  $\sin \psi \approx -\psi + \pi = -(\psi - \pi)$ . Átmenetileg legyen  $\theta := \psi - \pi$ , vagyis amikor  $\psi = \pi$ , akkor  $\theta = 0$ . Fölírhatjuk most már az alsó, illetve felső egyensúlyi helyzet körüli „kis” mozgásokat leíró lineáris másodrendű differenciálegyenleteinket:

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \psi = 0, \quad \ddot{\theta} - \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (2.2)$$

A továbbiakban nem fog félreértést okozni, ha a  $\theta$  helyett akkor is  $\psi$  jelöli az egyenletben szereplő ismeretlent, amikor a felső egyensúlyi helyzet körüli mozgásokról beszélünk. Formálisan tehát a (2.2) egyenleteket egyetlen formulával is meg tudjuk adni:

$$\ddot{\psi} \pm \frac{g}{l} \psi = 0, \quad (2.3)$$

ahol a lineáris tag előjelének értelme a fentiek alapján világos.

A hinta, illetve a Kapica-inga esetében a (2.3) egyenletben a  $\psi$  együtthatója nem állandó, hanem egy periodikus függvény. Mi azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor ez az együttható egy periodikus lépcsősfüggvény, és egy periódus két lépcsőből áll. A [16] publikációban bevezetett és a [17] publikációban kifejtett módszerrel az ilyen egyenleteket a következőképpen tudjuk vizsgálni. Amint azt később látni fogjuk az általunk vizsgált mozgásegyenleteket formailag az

$$\ddot{x} \pm a^2(t)x = 0, \quad a(t) := a_k, \text{ ha } t_{k-1} \leq t < t_k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (2.4)$$

alakúra tudjuk hozni, ahol  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{t_k\}_{k=0}^\infty$  pozitív számok olyan sorozatai, melyekre  $t_k < t_{k+1}$  minden  $k \in \mathbb{N}$  esetén,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ , és  $t_0 := 0$ . A (2.4)



egyenletben az előjel szerepe a (2.3) egyenlet alapján érthető: amikor a hintázást vizsgáljuk, tehát az alsó egyensúlyi helyzet körüli mozgásokat tárgyaljuk, akkor  $+$ , amikor pedig a fordított ingát vizsgáljuk, tehát a felső egyensúlyi helyzet körüli mozgásokat tekintjük, akkor az előjel  $-$ . Az  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a (2.4) egy megoldása, ha folytonosan differenciálható az  $[0, \infty)$  intervallumon, és az  $x|_{[t_{k-1}, t_k)}$  megszorítása kétszer differenciálható, továbbá kielégíti az egyenletet minden  $k \in \mathbb{N}$  esetén. Tekintsük először azt az esetet, amikor a (2.4) egyenlet alakja:  $\ddot{x} + a^2(t)x = 0$ . Bevezetve az új  $y := \dot{x}/a_k$  állapothatározót a (2.4) egyenlet a

$$\dot{x} = a_k y, \quad \dot{y} = -a_k x \quad (t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k \in \mathbb{N}). \quad (2.5)$$

2-dimenziós rendszerbe megy át. A (2.4) egyenlet  $x = x(t)$  megoldása deriváltjának,  $\dot{x}$ -nak folytonosságát garantálandó előírjuk a következő feltételeket:  $x(t_k) = x(t_k - 0)$ ,  $\dot{x}(t_k) = \dot{x}(t_k - 0)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), ahol  $f(t - 0)$  az  $f$  függvény bal oldali határértéke a  $t$  helyen. Ez a (2.5) rendszerre vetítve a következőket jelenti:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_k y, & \dot{y} = -a_k x & (t_{k-1} \leq t < t_k), \\ x(t_k) = x(t_k - 0), & y(t_k) = \frac{a_k}{a_{k+1}} y(t_k - 0) & (k \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (2.6)$$

Azt kaptuk tehát, hogy a (2.4) egyenlet ekvivalens egy olyan dinamikus rendszerrel, melynek során a  $t = t_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) csatlakozási pontokban egy impulzív effektus történik. A (2.6) rendszer viselkedését a fázistéren, azaz az  $(x, y)$  síkon is le tudjuk írni. Legyen  $x_0, y_0$  egy adott pont a fázistéren. Ekkor a (2.6) hatására a (2.5)  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$  kezdetiérték-feltételnek eleget tevő megoldásnak megfelelően a fázispont egy trajektórián mozog, amíg  $t_0 \leq t < t_1$ , majd  $t = t_1$ -ben megtörténik az első impulzív hatás, ami egy  $y$ -tengellyel párhuzamos,  $a_1/a_2$  mértékű kontrakció vagy dilatáció, s így elérkezik az  $(x_1, y_1)$  ponttal reprezentált állapotba. Ezután újra a dinamika folytonos komponense hat a fázispontra, vagyis az egy fázisgörbén mozog a  $t_1 \leq t < t_2$  intervallumon, a  $t = t_2$ -ben újra egy „ugrás”, azaz egy  $a_2/a_3$  mértékű kontrakció vagy dilatáció történik, és bekerül az  $(x_2, y_2)$  állapotba. Innen a folyamat az eddigieknek megfelelően ismétlődik az idők végezetéig. Az említett trajektória, fázisgörbe alakja a (2.5) egyenletrendszerből kapható. Vegyük észre ugyanis, hogy a

$$H_e(x, y) := x^2 + y^2 \quad (2.7)$$

menyiség a (2.5) rendszer egy első integrálja. Ez azt jelenti, hogy a fázisgörbék origó középpontú, egymással koncentrikus körívek. Azt mondjuk, hogy a (2.6) rendszer folytonos része „elliptikus (közönséges) forgatás”. Hasonlóképpen járunk el, amikor a (2.4) egyenlet alakja:  $\ddot{x} - a^2(t)x = 0$ . Az  $y = \dot{x}/a_k$  bevezetése azt eredményezi, hogy a (2.4) egyenlet a

$$\dot{x} = a_k y, \quad \dot{y} = a_k x \quad (t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k \in \mathbb{N}).$$

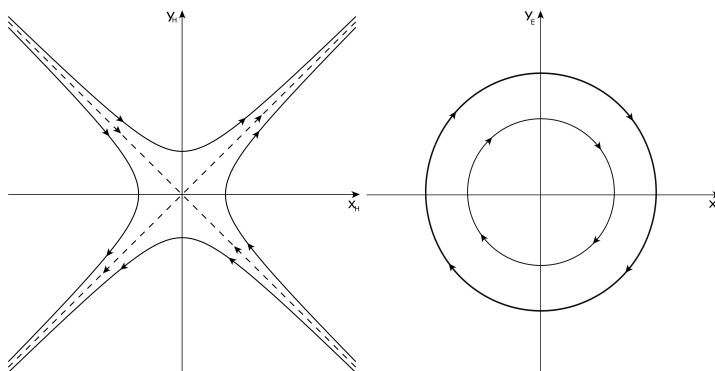
rendszerbe transzformálódik. Ennek a rendszernek a

$$H_h(x, y) := x^2 - y^2 \quad (2.8)$$

egy első integrálja. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben a fázisgörbék hiperbolák. A megfelelő impulzív dinamikus rendszer alakja tehát

$$\begin{cases} \dot{x} = a_k y, & \dot{y} = a_k x & (t_{k-1} \leq t < t_k), \\ x(t_k) = x(t_k - 0), & y(t_k) = \frac{a_k}{a_{k+1}} y(t_k - 0) & (k \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (2.9)$$

A fentiek alapján azt mondjuk, hogy (2.9) rendszer folytonos komponense „hiperbolikus forgatás”, lásd a 2.1 ábrát. Tehát ebben az esetben a fázispont hiperbolákon mozog és a  $t = t_k, (k \in \mathbb{N})$  csatlakozási pontokban  $y$ -tengely irányú kontrakció/dilatáció hat rá.



2.1. ábra. Hiperbolikus és elliptikus forgás

### 3. fejezet

## A hintázásról

A hinta egy olyan inga, melynek hossza az időben változik: a hintázó hol guggoló, hol kinyújtott testhelyzetet vesz föl, azaz testének tömegközéppontját hol följebb, hol lejjebb helyezve igyekszik a hinta alsó egyensúlyi helyzetét destabilizálni. Ennek megfelelően a hintázás matematikai modellje a Bevezetésben ismertetett (2.3) egyenlet módosításával kapható. Arnold [1] művében leírtak szerint, tegyük föl, hogy a hintázó hatására a hinta hossza periodikusan változik, azaz tekintsük az

$$\ddot{x} + a^2(t)x = 0,$$
$$a(t) := \begin{cases} a_1 := \sqrt{\frac{g}{l - \varepsilon}}, & \text{ha } 2kT \leq t < (2k + 1)T, \\ a_2 := \sqrt{\frac{g}{l + \varepsilon}}, & \text{ha } (2k + 1)T \leq t < (2k + 2)T, \quad (k = 0, 1, \dots) \end{cases} \quad (3.1)$$

egyenletet, ahol a (2.3)-tól eltérően  $\psi$  helyett  $x$  jelöli az inga rúdjának a függőlegessel bezárt szögét, továbbá  $\varepsilon > 0$  az a paraméter, melynek segítségével a hintázás intenzitását jellemezzük,  $T > 0$  a hinta hosszváltozásának fél periódusa. A hintázás problémáját a következőképpen lehet megfogalmazni: határozzuk meg a  $(T, \varepsilon)$  paramétersík instabil tartományát, vagyis azon részét, ahonnan választott paraméterértékekkel a (3.1) egyenlet  $x = 0$  megoldása instabil.

### 3.1. Arnold nyomán

#### 3.1.1. A Floquet-elv

Egy periodikus együtthatós differenciálegyenlet-rendszer megoldásának stabilitásvizsgálata rendszerint azt a módszert követi, melyet először Floquet írt le [8], és egy olyan koordináta-transzformációt jelent, mellyel a változó együtthatós rendszer konstans együtthatójává tehető. Ennek a konstans együtthatómátrixnak könnyedén számíthatóak a sajátértékei, melyekre szükség van az analízis során. Tekintsük tehát az

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

egyenletrendszert, ahol a  $t \mapsto A(t)$   $2T$ -periodikus mátrixfüggvény,  $t \in \mathbb{R}$ . A (3.2) rendszer alaprendszerének kanonikus előállítását adja meg a Floquet-tétel.

**3.1. Tétel.** *Legyen  $\Phi(t)$  a (3.2) egy alapmátrixa. Ekkor létezik olyan  $2T$ -periodikus  $t \mapsto P(t)$  komplex mátrixfüggvény és létezik egy olyan  $B$  konstans mátrix, hogy bármely  $t \in \mathbb{R}$  esetén*

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}.$$

**3.2. Megjegyzés.** *Előbbi tétel a valós esetre vonatkoztatva azt mondja, hogy van olyan valós  $R$  konstans mátrix és olyan  $4T$ -periodikus  $t \mapsto Q(t)$  valós mátrixfüggvény, hogy minden  $t \in \mathbb{R}$  esetén  $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$ .*

Ha a  $\Phi(t)$  alaprendszert úgy választjuk, hogy  $\Phi(0) = E$ , ahol  $E$  az egységmátrix, akkor az  $M = \Phi(T) = e^{TB}$  mátrixot monodrómiának, monodrómia-mátrixnak nevezzük. A monodrómia-mátrix sajátértékei a rendszer úgynevezett karakterisztikus tényezői. A  $\mu$  komplex számot karakterisztikus kitevőnek (Floquet-kitevőnek) hívjuk, ha  $\lambda$  karakterisztikus tényező és  $e^{\mu T} = \lambda$ . Jól ismert [32], hogy egy konstans együtthatós lineáris rendszer megoldásainak stabilitása azon múlik, hogy az együtthatómátrix sajátértékei hogyan helyezkednek el a komplex síkon.

A következőkben követjük Arnold [1] jegyzetében található gondolatot, mely a (3.2) rendszer úgynevezett erős stabilitását adja meg.

A (3.2) lineáris rendszer stabil, ha minden megoldása korlátos, azaz van olyan  $c > 0$  szám, hogy  $|\Phi(t)| < c$  bármely  $t \in (0, \infty)$  esetén, ahol  $|\cdot|$  a mátrix normáját jelenti.

**3.3. Definíció.** A (3.2) egyenlet erősen stabil, ha van olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy az  $\dot{x} = B(t)x$ ,  $B(t+T) \equiv B(t)$  rendszer stabil föltéve, hogy  $|B(t) - A(t)| < \varepsilon$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

**3.4. Definíció.** Egy  $M$  mátrix, melyre  $\det M = 1$  stabil, ha minden  $k \in \mathbb{Z}$  esetén van olyan  $c > 0$  szám, hogy  $|M^k| < c$ . Az  $M$  mátrix erősen stabil, ha minden hozzá közeli  $N$  mátrix, melyre  $\det N = 1$ , stabil.

Az  $M$  és  $N$  mátrixok távolsága a különbségük normája. Bizonyítás nélkül említjük a következő tételt.

**3.5. Tétel.** A (3.2) egyenlet akkor és csakis akkor stabil, illetve erősen stabil, ha a rendszer monodrómia mátrixa stabil, illetve erősen stabil.

Tekintsük most az

$$\ddot{x} + a(t)x = 0, \quad a(t+T) = a(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

Hill-egyenletet. A Liouville-tétel [1] alapján  $\det M = \det \Phi(T) = 1$ , ezért a monodrómia sajátértékeinek szorzata 1-gyel egyenlő. Ezek után, fölírva a (3.3) egyenlet karakterisztikus egyenletét kapjuk, hogy

$$\lambda^2 - \text{Tr } \Phi(T)\lambda + \det \Phi(T) = \lambda^2 - \text{Tr } \Phi(T)\lambda + 1 = 0. \quad (3.4)$$

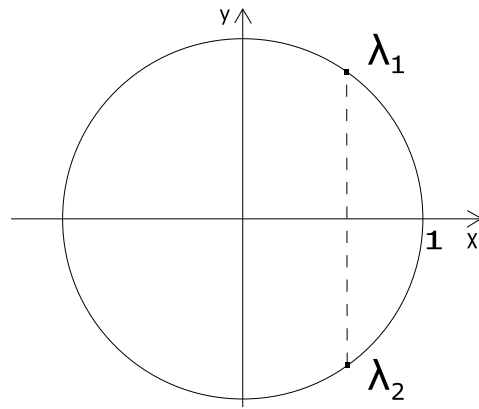
Főntebb már említettük, hogy például a [32] kötetben megtalálható az a tétel, mely a (3.2) rendszerek stabilitásáról szól. Ezzel a tétellel összevetve a (3.4) egyenlet gyökeit adódik a következő állítás.

**3.6. Tétel.** Legyen  $\Phi(t)$  a (3.3) egyenlet azon alaplátrixa, melyre teljesül, hogy  $\Phi(0) = E$ , ahol  $E$  a  $2 \times 2$ -es egységmátrix. Ha  $|\text{Tr } \Phi(T)| < 2$ , akkor a (3.3) egyenlet  $x = 0$  megoldása stabil. Továbbá, ha  $|\text{Tr } \Phi(T)| > 2$ , akkor a (3.3) egyenlet  $x = 0$  megoldása instabil.

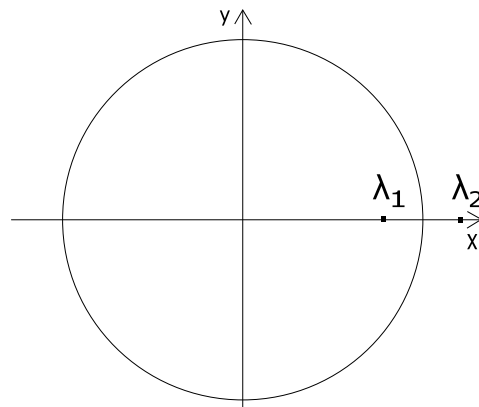
A 3.1 és a 3.2 ábrák a tételben megfogalmazott eseteknek megfelelően mutatják be a sajátértékek elhelyezkedését az origó körüli egységkörön.

### 3.1.2. A Floquet-elv használata

Alkalmazzuk az előző alfejezetben kimondottakat a (3.1) egyenletre. Rögzített  $\varepsilon$  mellett az  $a(t)$  lépcsősfüggvény, így a (3.1) szakaszonként konstans együtthatós, emiatt a megoldását explicite meg tudjuk adni. Ezeket a megoldásokat



3.1. ábra. Erősen stabil monodrómia sajátértékei



3.2. ábra. Instabil monodrómia sajátértékei

úgy keressük, hogy az alaprendszer kielégítse az  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ , illetve az  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$  föltételeket annak érdekében, hogy  $\Phi(0) = E$  teljesüljön. Ekkor a  $2kT \leq t < (2k+1)T$  intervallumokon

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} t & \sqrt{\frac{l-\varepsilon}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} t \\ -\sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} \sin \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} t & \cos \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} t \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

illetve a  $(2k+1)T \leq t < (2k+2)T$  intervallumokon

$$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} t & \sqrt{\frac{l+\varepsilon}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} t \\ -\sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} \sin \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} t & \cos \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} t \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

ahol  $k \in \mathbb{N}$ . A 3.6 tétel alkalmazásához föl kell írni a rendszer monodrómia mátrixát, mely a (3.5) és (3.6) mátrixok  $t = T$  helyen vett értékeinek szorzata adja [1]. Könnyű látni, hogy a monodrómia  $\varepsilon$  paramétertől való függése miatt a nyomára kirótt feltétel további vizsgálata egyáltalán nem egyszerű, sorfejtéseken alapuló becslésekre vezet. A részleteket illetően ismét az [1] jegyzetre utalunk. Célunk az, hogy pontos térképet adjunk meg elkerülve a monodrómia mátrix fölírását, illetve annak nyoma vizsgálatát. Azt viszont nagyon lényeges megjegyezni, hogy a 3.6 tételből következik, hogy az instabilitási tartomány határát a  $|\text{Tr } \Phi(T)| = 2$  egyenlet írja le. Ez jelen esetben azt jelenti, hogy a karakterisztikus tényezők - lévén valós számok, amelyek szorzata 1 - vagy mindketten 1-gyel, vagy mindketten  $-1$ -gyel egyenlőek. Ebből az következik, hogy az instabilitási tartomány határa a  $(T, \varepsilon)$  sík azon pontjaiból áll, amely pontokhoz tartozó megoldások  $2T$ - vagy  $4T$ -periodikusak, tekintve, hogy a (3.1) rendszer együtthatalmifüggvénye  $2T$ -periodikus. Ez utóbbi gondolaton alapul az az eljárás, melyet a [10] dolgozatunkban közöltünk, és a következő alfejezetben mutatunk be.

### 3.2. Elemi úton

Ahogy az előző fejezet végén megjegyeztük, már egy igen egyszerű mechanikai modell vizsgálatánál előfordulhat, hogy az egyébként igen termékeny Floquet-elmélet nehéz számításokba torkollik, ahogyan ezt a [8] műben is megjegyzi a szerző. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a (3.1) egyenlettel modellezett hintázás problémáját elemi geometriai megfontolások segítségével is meg lehet oldani. Nevezetesen, megalkotjuk a  $(T, \varepsilon)$  sík instabilitási zónájának határát jelentő  $T = f(\varepsilon)$ ,  $T = g(\varepsilon)$  görbéket, melyekről tudjuk, hogy pontjaik megfelelnek a (3.1) egyenlet  $2T$ - vagy  $4T$ -periodikus megoldásainak. Azt is megmutatjuk, hogy  $f(\varepsilon)$ ,  $g(\varepsilon)$  a  $((k/2)(\pi\sqrt{l/g}), 0)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) pontok valamelyikéhez konvergálnak, amint  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ennek a ténynek van egy fontos gyakorlati jelentése. Ha

minél kisebb energiabefektetéssel akarunk destabilizálni, illetve kis gyermeket akarunk megtanítani hintázni ( $\varepsilon > 0$  kicsi), akkor a  $T = (k/2)(\pi\sqrt{l/g})$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ) kritikus félperiódusok valamelyikét kell választani.

### 3.2.1. Technikai háttér

A destabilizálási probléma megoldásának első lépéseként próbáljunk olyan feltételeket megadni, melyek garantálják, hogy a (3.1) rendszer  $t \mapsto (x(t; x_0, \dot{x}_0), \dot{x}(t; x_0, \dot{x}_0))$  trajektóriája elindulva a fázissík egy  $P(x_0, \dot{x}_0)$  pontjából  $2T$  idő alatt visszatérjen a sík azon  $L$  egyenesére, mely összeköti a  $(0, 0)$  koordinátájú origót a  $P$  ponttal, vagyis  $(x(2T; x_0, \dot{x}_0), \dot{x}(2T; x_0, \dot{x}_0)) \in L$ . Egy ilyen trajektória az origóhoz közeledik, illetve távolodik az origótól attól függően, hogy  $(x(2T; x_0, \dot{x}_0), \dot{x}(2T; x_0, \dot{x}_0))$  pont közelebb, illetve távolabb van az origótól, mint az  $(x_0, \dot{x}_0)$  pont. Ha a két pont ugyanolyan távol van az origótól, akkor a megoldás vagy  $2T$ -, vagy  $4T$ -periodikus.

A Bevezetésben leírt módszerrel a (3.1) egyenlet a (2.6) alakú rendszerbe transzformálható. Szintén a Bevezetésben említetteknek megfelelően a (2.6) dinamikájának lépései a fázissíkon a következőképpen írhatóak le. A fázispont az  $(x_0, y_0)$  pontból indulva egy origó középpontú kör mentén mozogva egy  $(x_1, y_1)$  pontba kerül, majd egy  $a_1/a_2 > 1$  mértékű dilatáció történik az  $y$ -tengellyel párhuzamosan, így kerül egy  $(x_2, y_2)$  pontba. Ezután ismét egy origó középpontú köríven mozog  $((x_3, y_3))$ , majd „ugrik” egy  $a_2/a_1$  mértékű kontrakcióval, így kerülve az  $(x_4, y_4)$  pontba. Ezek a lépések egymás utáni végtelen ismétlése írja le a fázispont mozgását a fázissíkon, lásd a 3.3 ábrát.

A (2.6) impulzív rendszert az  $(x, y)$  sík egy diszkrét dinamikus rendszereként is interpretálhatjuk. Vezessük be ugyanis az  $(r, \varphi)$  polárkoordinátákat a

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (r > 0, -\infty < \varphi < \infty) \quad (3.7)$$

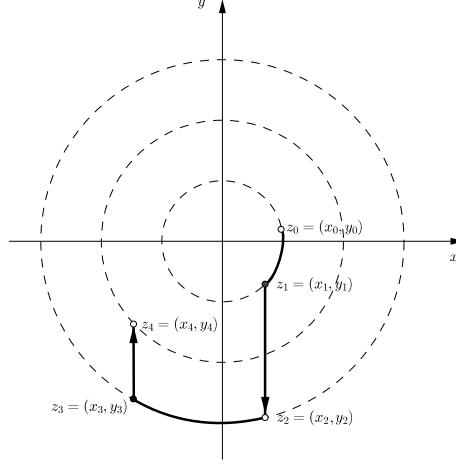
formulákkal. Tudjuk, hogy  $r'(t) \equiv 0$  (2.6) bármely megoldása mentén minden  $[t_{k-1}, t_k)$  intervallumban. Mivel

$$x'(t) = -r(t)\varphi'(t) \sin \varphi(t) = a_k y(t) = a_k r(t) \sin \varphi(t) \quad (t_{k-1} \leq t < t_k),$$

ezért kapjuk, hogy

$$\varphi'(t) = -a_k \quad (t_{k-1} \leq t < t_k). \quad (3.8)$$





3.3. ábra. A (3.1) rendszernek megfelelő (2.6) dinamika lépései

Vagyis a (2.6) folytonos komponense egy  $a_k$  szögsebességgel történő, origó körüli egyenletes forgatás negatív irányban. Jelölje az  $R(\theta)$ , illetve a  $C(\kappa)$  rendre a forgatást, illetve az impulzív effektust megadó mátrixot, tehát

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (-\infty < \theta < \infty),$$

$$C(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \quad (\kappa = \frac{a_k}{a_{k+1}}, \quad 0 < \kappa < \infty).$$

Ekkor a (2.6) rendszerrel ekvivalens diszkrét dinamikus rendszer:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = C\left(\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right) R(a_{k+1}(t_{k+1} - t_k)) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.9)$$

Tekintsük ezt a (3.9) rendszert polárkoordinátákban. Jelölje  $(r_R, \varphi_R)$ , illetve  $(r_C, \varphi_C) = (\rho(r, \varphi; \kappa), \phi(\varphi; \kappa))$  az  $(r, \varphi)$  pont képét rendre az  $R(\theta)$  forgatás, illetve a  $C(\kappa)$  kontrakció-dilatáció során. Azt könnyű látni, hogy  $r_R(r, \varphi) = r$ ,  $\varphi_R(r, \varphi) = \varphi - \theta$ . Ezen felül pedig

$$\rho(r, \varphi; \kappa) = \sqrt{x^2 + \kappa^2 y^2} = r \sqrt{1 + (\kappa^2 - 1) \sin^2 \varphi} = f(\varphi; \kappa) r,$$

$$f(\varphi, \kappa) := \sqrt{1 + (\kappa^2 - 1) \sin^2 \varphi}, \quad (\kappa > 0, -\infty < \varphi < \infty).$$

Szintén könnyű észrevenni, hogy  $\tan \phi(\varphi; \kappa) = \kappa y/x = \kappa \tan \varphi$  ( $x \neq 0$ ), azaz

$$\phi(\varphi; \kappa) := \begin{cases} \arctan(\kappa \tan \varphi) + \left[ \frac{\varphi + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right] \cdot \pi, & \text{ha } \varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ \varphi, & \text{ha } \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

ahol  $[x]$  jelöli az  $x \in \mathbb{R}$  szám egészrészét. Ezek alapján a (2.6) polárkoordinátákban a következő alakú:

$$\begin{cases} r_{k+1} = f\left(\varphi_k - a_{k+1}(t_{k+1} - t_k); \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right) r_k, \\ \varphi_{k+1} = \phi\left(\varphi_k - a_{k+1}(t_{k+1} - t_k); \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right), \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.10)$$

Az  $f$  és  $\phi$  függvények tulajdonságait a következő lemma foglalja össze. A lemma bizonyítását megtaláljuk a [17] cikkben.

**3.7. Lemma.** 1. Bármely  $\kappa > 0$  esetén az  $f(\cdot; \kappa) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  függvény páros és  $\pi$ -periodikus, továbbá

$$f\left(\phi(\varphi; \kappa); \frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{f(\varphi; \kappa)} \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

(lásd a 3.4 ábrát).

2. Bármely  $\kappa > 0$  esetén a  $\phi(\cdot; \kappa)$  és a  $\phi(\cdot + \pi/2; \kappa) - \pi/2$  függvény páratlan,  $\phi(\cdot + k\pi; \kappa) = \phi(\cdot; \kappa) + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), valamint

$$\phi\left(\phi(\varphi; \kappa); \frac{1}{\kappa}\right) = \varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

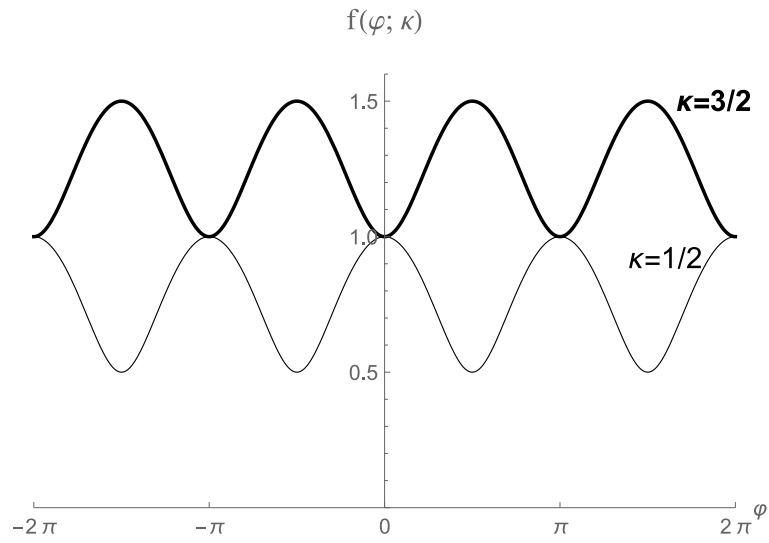
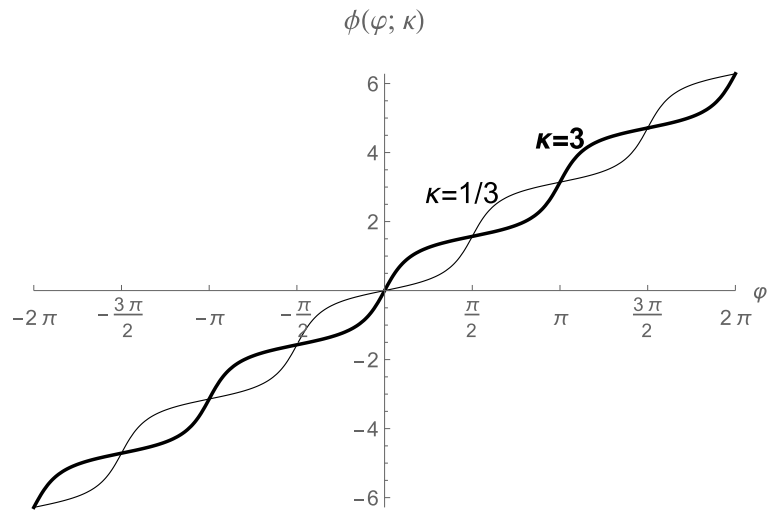
3. Ha  $0 < \kappa < 1$ , akkor minden  $k \in \mathbb{Z}$  esetén

$$\begin{aligned} \phi(\varphi; \kappa) < \varphi & \quad \text{if } 2k\frac{\pi}{2} < \varphi < (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ \phi(\varphi; \kappa) > \varphi & \quad \text{if } (2k+1)\frac{\pi}{2} < \varphi < 2(k+1)\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Ha  $\kappa > 1$ , akkor a  $\phi(\varphi; \kappa)$  és  $\varphi$  közötti relációk ellentétes irányban érvényesek (lásd a 3.5 ábrát).

### 3.2.2. Periodikus, origóhoz közeledő és origótól távolodó pályák

Annak érdekében, hogy tetszőleges  $2T$  gerjesztési periódus esetén ugyanaz ( $2L$ ) legyen az egyenlet periódusa, vezessük be a  $\tau = (L/T)t$  új független

3.4. ábra. Az  $f$  függvény grafikonja3.5. ábra. A  $\phi$  függvény grafikonja

változót. Az új és a régi függő változó kapcsolatát ekkor a  $z(\tau) := x((T/L)\tau)$  összefüggés írja le, és a mozgásegyenlet az

$$\ddot{z} + A^2(\tau)z = 0, \quad (3.11)$$

alakot ölti, ahol

$$A(\tau) = \frac{T}{L} a \left( \frac{T}{L} \tau \right) = \begin{cases} \frac{T}{L} \sqrt{\frac{g}{l - \varepsilon}}, & \text{ha } 2kL \leq \tau < (2k+1)L, \\ \frac{T}{L} \sqrt{\frac{g}{l + \varepsilon}}, & \text{ha } (2k+1)L \leq \tau < (2k+2)L, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nem fog félreértésekre vezetni, ha visszatérünk a megszokott jelöléseinkre:  $t$  a  $\tau$  helyett és  $x, \dot{x}$  a  $z, \dot{z}$  helyett. Bevezetve a  $\lambda := T/L$  paramétert, a (3.11) egyenlet a következő alakban írható:

$$\ddot{x} + \lambda^2 Q(t)x = 0, \quad (3.12)$$

$$Q(t) = \begin{cases} a_1^2 = a_1^2(\varepsilon) := \frac{g}{l - \varepsilon}, & \text{ha } 2kL \leq t < (2k+1)L, \\ a_2^2 = a_2^2(\varepsilon) := \frac{g}{l + \varepsilon}, & \text{ha } (2k+1)L \leq t < (2k+2)L \quad (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Legyen

$$\begin{aligned} t_k &:= kL, & a_{2k+1} &:= \lambda a_1, \quad a_{2k+2} := \lambda a_2 \quad (k \in \mathbb{N}), \\ D &:= \frac{a_1}{a_2}, & d &:= \frac{a_2}{a_1}. \end{aligned}$$

Ezzel a választással a (3.12) egyenletet (2.4) alakúra hoztuk. A (3.9) dinamikus rendszernek megfelelő rendszer az  $x, y := \dot{x}_k/a_k$  változókkal:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{2\ell+1} \\ y_{2\ell+1} \end{pmatrix} = C(D)R(\lambda a_1 L) \begin{pmatrix} x_{2\ell} \\ y_{2\ell} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_{2\ell+2} \\ y_{2\ell+2} \end{pmatrix} = C(d)R(\lambda a_2 L) \begin{pmatrix} x_{2\ell+1} \\ y_{2\ell+1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\ell \in \mathbb{N}). \quad (3.13)$$

Tekintsük rendszerünket a (3.7) által definiált polárkoordinátákban. A  $t_0 = 0$  időpillanatban indítsunk el egy trajektóriát az  $(r_0, \varphi_0)$  pontból. Ekkor a dinamika főntebb leírt lépéseit a következő módon tudjuk megadni:

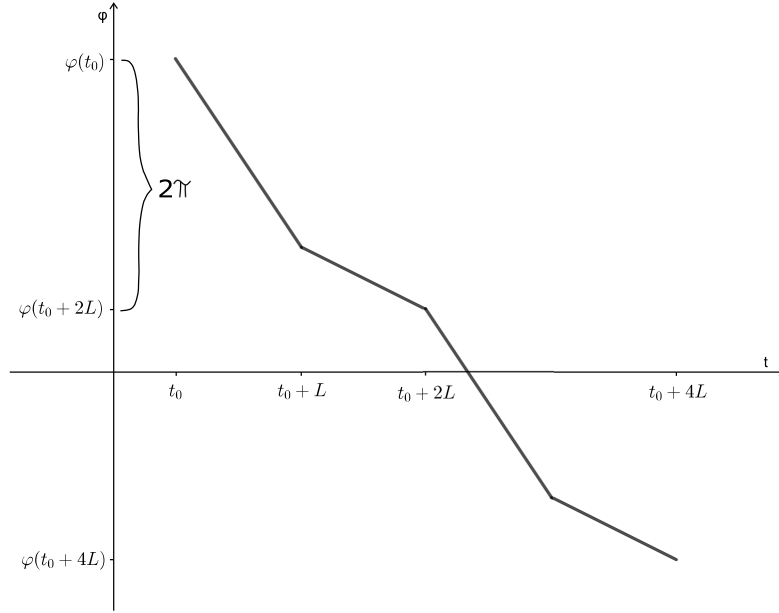
$$\begin{aligned} r_0 &:= r(0), & \varphi_0 &\equiv \varphi(0) \pmod{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi_0 < \pi; \\ r_1 &:= r(L-0)(=r_0), & \varphi_1 &:= \varphi(L-0); \\ r_2 &:= r(L) = f(\varphi_1; D)r_1, & \varphi_2 &:= \varphi(L) = \phi(\varphi_1; D); \\ r_3 &:= r(2L-0)(=r_2), & \varphi_3 &:= \varphi(2L-0); \\ r_4 &:= r(2L) = f(\varphi_3; d)r_3, & \varphi_4 &:= \varphi(2L) = \phi(\varphi_3; d). \end{aligned}$$

Az indexelés eltérő a (3.10)-hez és a (3.13)-höz képest, lásd a 3.3 ábrát. A  $Q$  függvény periodicitása miatt elegendő az első öt pontot megadni, a többi magától értetődik.

Ahogy korábban utaltunk rá, olyan megoldásoknak megfelelő fázisgörbékét írunk le, melyek egy adott pontból indulva visszatérnek az adott pontot az origóval összekötő egyenesre. Ennek felel meg az alább definiált, úgynevezett szögperiodikus megoldás, ami azt fejezi ki, hogy az  $(r, \varphi)$  megoldás koordinátái közül a  $\varphi$  szögváltozó periodikus moduló  $2\pi$ , (lásd a 3.6 ábrát), illetve moduló  $4\pi$ , azaz  $\varphi(t) \equiv \varphi(t + 2L) \pmod{2\pi}$ , illetve  $\varphi(t) \equiv \varphi(t + 2L) \pmod{4\pi}$ , a rádiusz pedig tetszőleges lehet.

**3.8. Definíció.** A (3.13) rendszer egy megoldásáról azt mondjuk, hogy  $2\pi$  modulusú szögperiodikus, illetve  $4\pi$  modulusú szögperiodikus, ha

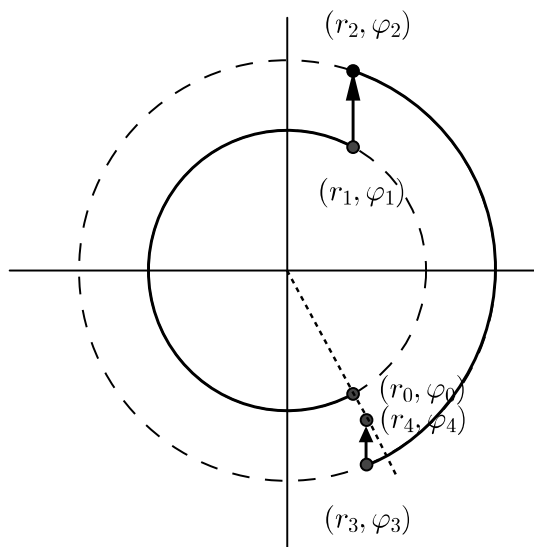
$$\varphi(2L) \equiv \varphi_0 \pmod{2\pi}, \text{ illetve } \varphi(2L) \equiv \varphi_0 - \pi \pmod{2\pi}.$$



3.6. ábra.  $\varphi(t)$   $2\pi$  modulusú szögperiodikus esetben

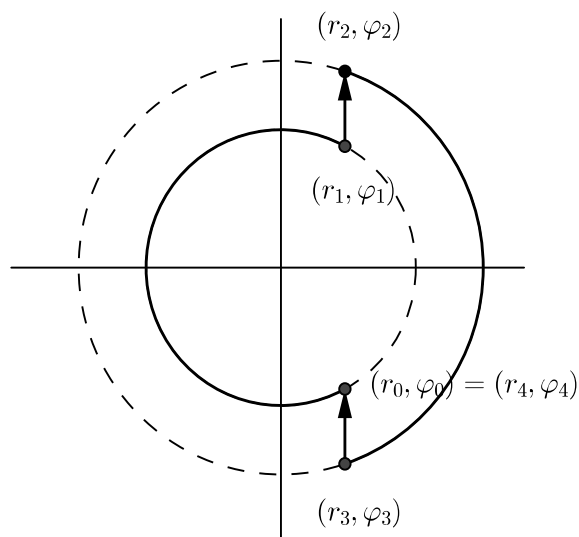
**3.9. Definíció.** A (3.13) egy  $2\pi$  modulusú, vagy  $4\pi$  modulusú szögperiodikus megoldását (origóhoz) közeledőnek, illetve (az origótól) távolodónak (lásd a 3.7 ábrát) mondunk, ha

$$r_4 < r_0, \text{ illetve } r_4 > r_0.$$



3.7. ábra. A (3.13) dinamika első négy lépése origótól távolodó,  $2\pi$  modulusú szögperiodikus megoldás esetén

Ezek alapján a (3.13) rendszer egy megoldása  $2L$ -periodikus, illetve  $4L$ -periodikus pontosan akkor, ha szögperiodikus  $2\pi$ , illetve  $4\pi$  modulussal és  $r_4 = r_0$ , lásd a 3.8 ábrát.



3.8. ábra. A (3.13) dinamika első négy lépése  $2L$ -periodikus megoldás esetén

A következőkben megvizsgáljuk, hogy a (3.13) egyenletnek milyen szükséges és elegendő föltételek mellett létezik szögperiodikus, illetve periodikus megoldása, illetve milyen feltételekkel tudjuk garantálni az origótól távolodó megoldás létét. Mindezek alapját képezi a következő lemma.

**3.10. Lemma. 1.** *A (3.13) egy szögperiodikus megoldása az origóhoz közeledő, illetve az origótól távolodó akkor és csakis akkor, ha*

$$f(\varphi_1; D) < f(\varphi_0; D), \text{ illetve } f(\varphi_1; D) > f(\varphi_0; D).$$

**2.** *A (3.13)  $2\pi$ , illetve  $4\pi$  modulusú szögperiodikus megoldása periodikus  $2L$ , illetve  $4L$  periódussal akkor és csakis akkor, ha*

$$f(\varphi_1; D) = f(\varphi_0; D).$$

**Bizonyítás.** Tekintsük a (3.13) egy  $2\pi$  modulusú szögperiodikus megoldását. Ekkor  $\varphi_4 = \varphi_0 - 2(p+1)\pi$  valamely  $p \in \mathbb{N}$  esetén. A 3.7 lemma állításait használva azt írhatjuk, hogy

$$\varphi_3 = \phi^{-1}(\varphi_4; d) = \phi(\varphi_0 - 2(p+1)\pi; D) = \phi(\varphi_0; D) - 2(p+1)\pi \quad (3.14)$$

és

$$r_4 = f(\varphi_3; d)r_3 = f(\phi(\varphi_0; D); d)r_3 = \frac{1}{f(\varphi_0; D)}r_3 = \frac{f(\varphi_1; D)}{f(\varphi_0; D)}r_0.$$

A lemma mindhárom,  $2\pi$  modulusú szögperiodikus megoldásra vonatkozó állítását ezekből könnyen le tudjuk olvasni.

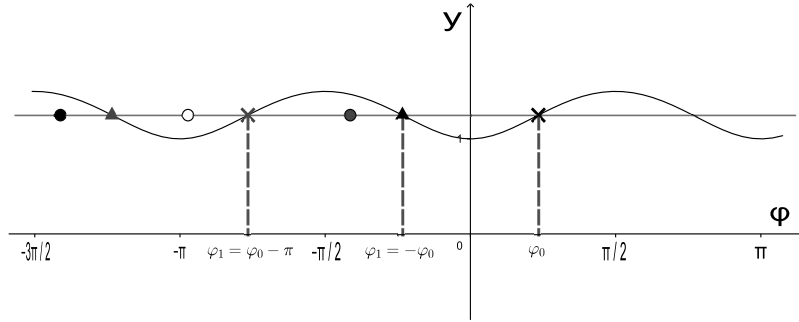
A  $4\pi$  modulusú esetben  $\varphi_4 = \varphi_0 - (2p+1)\pi$  ( $p \in \mathbb{N}$ ), ugyanakkor könnyű látni, hogy ez a bizonyítást nem befolyásolja. ■

A 3.10 lemma azt mondja ki tehát, hogy a  $\varphi_0$  és a  $\varphi_1$  egyértelműen meghatározza a szög-periodikus trajektória mentén mozgó fázispontnak az origótól vett távolságát, amely távolság vagy nullába tart vagy a végtelenbe divergál vagy periodikusan változik, ha  $t \rightarrow \infty$ . A  $(\varphi_0, \varphi_1)$  sík pontjait osztályozzuk ennek a három tulajdonságnak megfelelően. Tekintsük e célból a  $(\varphi_0, \varphi_1)$  sík  $0 \leq \varphi_0 < \pi, \varphi_1 < \varphi_0$  feltételeknek eleget tevő részhalmazát, ahol az első föltétel abból adódik, hogy a fázispont köríveket fut be, így a szimmetria miatt elegendő a felső félkört vizsgálni, a második reláció pedig a dinamikából kapható, hiszen tudjuk, hogy a szög csökken az origó körüli forgatás során. Kihhasználva az  $f$

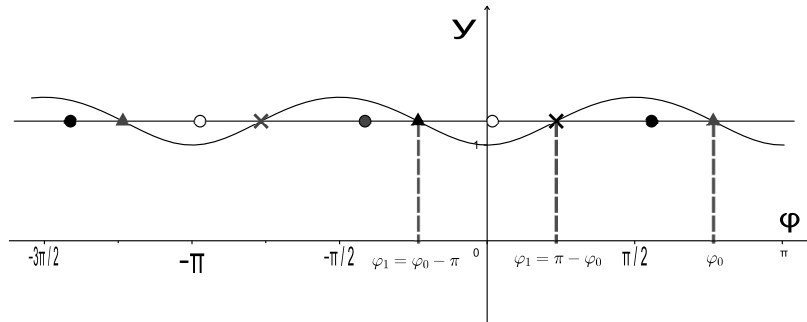
függvény tulajdonságait, melyeket a 3.7 lemmában soroltunk föl, könnyű látni, hogy az  $f(\varphi_1; D) = f(\varphi_0; D)$  egyenlőséget mindazon pontok teljesítik, melyek rajta vannak azokon az egyeneseken, melyek egyenlete:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - j\pi, \quad \varphi_1 = (\pi - \varphi_0) - j\pi \quad (j \in \mathbb{N}),$$

lásd a 3.9 és 3.10 ábrákat.



3.9. ábra. Az  $f(\varphi_1; D) = f(\varphi_0; D)$  megoldásai  $0 < \varphi_0 \leq \pi/2$  esetén



3.10. ábra. Az  $f(\varphi_1; D) = f(\varphi_0; D)$  megoldásai  $\pi/2 < \varphi_0 \leq \pi$  esetén

Az  $f(\varphi_1; D) > f(\varphi_0; D)$  egyenlőtlenség megoldáshalmazát megadó intervallumok, melyek a 3.9 és a 3.10 ábrákról leolvashatóak, és azokon tele fekete pontokkal vannak megjelölve, a következő két típus valamelyikéből állnak:

(a)  $0 \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$  :

$$\varphi_0 - (j+1)\pi < \varphi_1 < -\varphi_0 - j\pi \quad (j \in \mathbb{N}),$$

(b)  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 < \pi$  :

$$-\varphi_0 - (j-1)\pi < \varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_0 - j\pi \quad (j \in \mathbb{N})$$



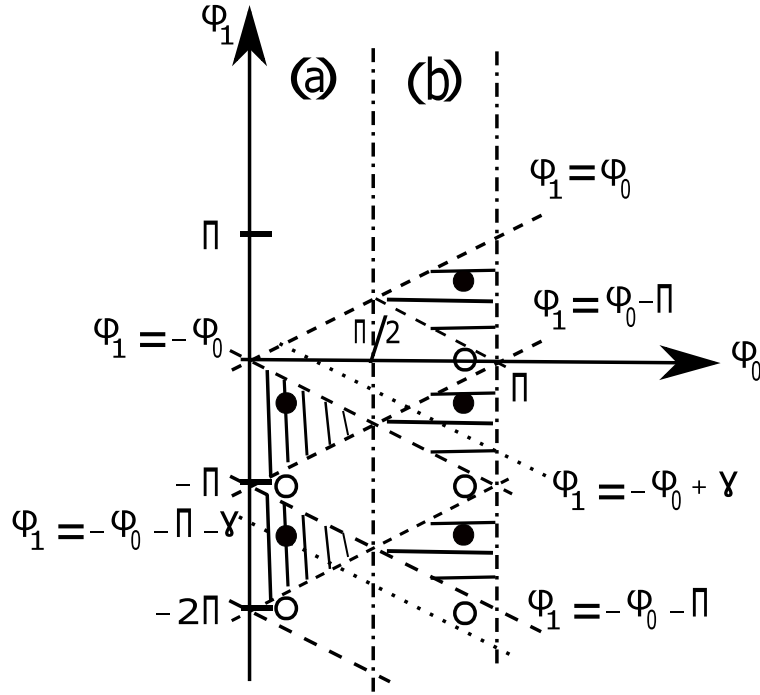
(lásd a 3.11 ábra satírozott részét). Az  $f(\varphi_1; D) < f(\varphi_0; D)$  egyenlőtlenség megoldáshalmazát megadó intervallumokat, melyeket a 3.9 és a 3.10 ábrákról szintén leolvashatunk, és üres karikával jelöltünk, a következők határozzák meg (a 3.11 ábra nem satírozott része):

(a)  $0 \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$  :

$$-\varphi_0 - j\pi < \varphi_1 < \varphi_0 - j\pi \quad (j \in \mathbb{N}),$$

(b)  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 < \pi$  :

$$\varphi_0 - (j+1)\pi < \varphi_1 < -\varphi_0 - (j-1)\pi \quad (j \in \mathbb{N}).$$



3.11. ábra. A 3.10 lemmában foglalt egyenlőtlenségek megoldáshalmazai

A (3.8) egyenlet figyelembe vételével írhatjuk, hogy

$$\varphi_1 - \varphi_0 = -a_1 \lambda L, \quad \varphi_3 - \varphi_2 = -a_2 \lambda L. \quad (3.15)$$

A (3.15) első egyenlőségét a 3.10 lemmával összevetve a következőket állíthatjuk. Adott  $a_1$  és  $\lambda$  mellett a  $2L$ - vagy a  $4L$ -periodikus megoldást egyértelműen meghatározza a  $\varphi_0$  értéke, nevezetesen a megoldás  $2L$ -periodikus vagy  $4L$ -periodikus, ha vagy

( $\alpha$ )  $a_1 \lambda \frac{L}{\pi}$  egész és  $\varphi_0$  tetszőleges,

vagy

( $\beta$ )  $a_1 \lambda \frac{L}{\pi}$  nem egész, és vagy

$$(a) \varphi_0 = \{a_1 \lambda \frac{L}{\pi}\} \frac{\pi}{2}$$

vagy

$$(b) \varphi_0 = (\{a_1 \lambda \frac{L}{\pi}\} + 1) \frac{\pi}{2},$$

(3.16)

ahol  $\{\xi\}$  a  $\xi \in \mathbb{R}$  törtrészt jelöli. Ugyancsak a (3.15) és a 3.10 lemma segítségével bizonyítható a következő lemma [10].

**3.11. Lemma. 1.** *A (3.13) egy megoldása szögperiodikus  $2\pi$  modulussal pontosan akkor, ha van olyan  $p \in \mathbb{N}$  szám, melyre*

$$\phi(\varphi_0; D) - \phi(\varphi_0 - a_1 \lambda L; D) - 2(p+1)\pi = -a_2 \lambda L. \quad (3.17)$$

**2.** *A (3.13) egy megoldása szögperiodikus  $4\pi$  modulussal pontosan akkor, ha van olyan  $p \in \mathbb{N}$  szám, melyre*

$$\phi(\varphi_0; D) - \phi(\varphi_0 - a_1 \lambda L; D) - (2p+1)\pi = -a_2 \lambda L. \quad (3.18)$$

**Bizonyítás.** *Szükségesség.* 1. A dinamika és a (3.14) ismeretében írhatjuk, hogy

$$\varphi_2 = \phi(\varphi_1; D), \quad \varphi_3 = \phi(\varphi_0; D) - 2(p+1)\pi. \quad (3.19)$$

Figyelembe véve (3.15) egyenlőséget kapjuk a (3.17) kifejezést.

2. Ahogyan a 3.10 lemma bizonyítása során említettük, a  $4\pi$  modulusú esetben

$$\varphi_2 = \phi(\varphi_1; D), \quad \varphi_3 = \phi(\varphi_0; D) - (2p+1)\pi$$

egyenlőségek teljesülnek a (3.19) helyett. Ekkor a (3.15) fölhasználásával a (3.18) formulához jutunk.

*Elegendőség.* 1. Tegyük föl, hogy (3.17) teljesül. Ekkor a (3.15) második egyenlőségét figyelembe véve kapjuk

$$\varphi_3 = \varphi_2 - a_2 \lambda L = \phi(\varphi_0 - a_1 \lambda L; D) - a_2 \lambda L = \phi(\varphi_0; D) - 2(p+1)\pi.$$

Következésképpen

$$\varphi_4 = \phi(\varphi_3; d) = \phi(\phi(\varphi_0; D); d) - 2(p+1)\pi = \varphi_0 - 2(p+1)\pi \equiv \varphi_0 \pmod{2\pi},$$

vagyis a megoldás szögperiodikus  $2\pi$  modulussal.

2. Ha a (3.18) teljesül, akkor az előbbihez hasonló számolás adja, hogy

$$\varphi_3 = \phi(\varphi_0; D) - (2p+1)\pi,$$

$$\varphi_4 = \varphi_0 - (2p+1)\pi \equiv \varphi_0 - \pi \pmod{2\pi},$$

tehát a megoldás  $4\pi$  modulusú szögperiodikus. ■

Ha a  $\varphi_0$ -ra vonatkozó (3.16) kifejezést beíránk a (3.17) vagy (3.18) összefüggésekbe, akkor azonnal adódna szükséges és elegendő föltétel a (3.13) egyenlet periodikus megoldásának létére. Ennél többet oldunk meg: az origóhoz közeledő, illetve attól távolodó megoldások létezésére keresünk olyan föltételeket, amelyek speciális eseteként előállnak a periodikus megoldások meglétét garantáló föltételek. Mivel a hintázás problémája áll témánk fókuszában, ezért elsősorban az origótól távolodó megoldásokra vonatkozó gondolatokat fejtjük ki részletesen.

Tekintsük e célból a 3.11 ábra satírozott részének pontjait. Rögzítsünk egy  $\gamma \in (0, \pi)$  számot és tekintsük a távolodó megoldások közül azokat, melyek  $(\varphi_0, \varphi_1)$  pontjai az alábbi szakaszra esnek

$$(a) \quad \varphi_1 = -\varphi_0 - \gamma - j\pi \quad \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}; j \in \mathbb{N}\right). \quad (3.20)$$

Rögzítsük  $a_1$  és  $\lambda > 0$  értékét (azaz  $T > 0$  és  $\varepsilon > 0$  értékeit) a (3.13) rendszerben úgy, hogy  $a_1\lambda L/\pi \notin \mathbb{Z}$ . A (3.15) első egyenlőségéből látszik, hogy ekkor a (3.20) szakasz csak a  $j = [a_1\lambda L/\pi]$  választással adhat origótól távolodó megoldást. Ekkor a pont abszcisszájára azt kapjuk, hogy

$$\varphi_0 = \left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\}\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}. \quad (3.21)$$

Először  $2\pi$  modulusú origótól távolodó megoldásokat keresünk, ezért a (3.21) kifejezést helyettesítsük be a (3.17)-ba. Ekkor

$$\begin{aligned} & \phi\left(\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\}\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}; D\right) - \phi\left(-\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\}\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}; D\right) + \left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right]\pi = \\ & 2(p+1)\pi - a_2\lambda L. \end{aligned}$$

Az  $[a_1\lambda L/\pi]$  paritásától függően két esetet tudunk megkülönböztetni.

(1)  $[a_1 \lambda L / \pi] = 2m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ). Ekkor

$$\begin{aligned} & \phi\left(\left\{a_1 \lambda \frac{L}{\pi}\right\} \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}; D\right) - \phi\left(-\left\{a_1 \lambda \frac{L}{\pi}\right\} \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}; D\right) + \left[a_1 \lambda \frac{L}{\pi}\right] \pi \\ &= \phi\left(\left\{a_1 \lambda \frac{L}{\pi}\right\} \frac{\pi}{2} + 2m \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}; D\right) + \phi\left(\left\{a_1 \lambda \frac{L}{\pi}\right\} \frac{\pi}{2} + 2m \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}; D\right) = \\ &= \phi\left(a_1 \lambda \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}; D\right) + \phi\left(a_1 \lambda \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}; D\right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

(2)  $[a_1 \lambda L / \pi] = 2m - 1$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ). Ebben az esetben a (3.22)-hez hasonló számolás végeredményeként a következő kifejezést kapjuk:

$$\phi\left(\left(a_1 \lambda \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) + \phi\left(\left(a_1 \lambda \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) - \pi.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha van egy a (3.20) szakaszhoz tartozó  $2\pi$  modulusú távolodó megoldás, akkor - bevezetve a  $\mu := a_1 \lambda L / 2$  jelölést - teljesül a

$$\frac{-\phi\left(\mu - \frac{\gamma}{2}; D\right) - \phi\left(\mu + \frac{\gamma}{2}; D\right)}{2} + (p+1)\pi = \frac{a_2}{a_1} \mu \quad (3.23)$$

feltétel, amikor  $[a_1 \lambda L / \pi]$  páros, és a

$$\frac{\left(-\phi\left(\left(\mu - \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\phi\left(\left(\mu + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \quad (3.24)$$

$$(p+1)\pi = \frac{a_2}{a_1} \mu \quad \text{feltétel, amikor } [a_1 \lambda L / \pi] \text{ páratlan.}$$

Ugyanezen számolásokat a

$$(b) \quad \varphi_1 = -\varphi_0 + \gamma - (j-1)\pi \quad \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} < \varphi_0 < \pi; j \in \mathbb{N}\right) \quad (3.25)$$

szakaszra vonatkozóan elvégezve, a

$$\varphi_0 = \left(\left\{a_1 \lambda \frac{L}{\pi}\right\} + 1\right) \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2},$$

kiinduló állapot választásával azt kapjuk, hogy ha van egy  $2\pi$  modulusú, a (3.25) szakaszhoz tartozó szögperiodikus megoldás, akkor a

$$\frac{\left(-\phi\left(\left(\mu - \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\phi\left(\left(\mu + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \quad (3.26)$$

$$(p+1)\pi = \frac{a_2}{a_1} \mu \quad \text{teljesül, ha } [a_1 \lambda L / \pi] \text{ páros, és a}$$

$$\frac{-\phi\left(\mu - \frac{\gamma}{2}; D\right) - \phi\left(\mu + \frac{\gamma}{2}; D\right)}{2} + (p+1)\pi = \frac{a_2}{a_1} \mu \quad (3.27)$$

teljesül, ha  $[a_1 \lambda L / \pi]$  páratlan.

Amennyiben periodikus megoldást keresünk, akkor a (3.23)-(3.24) és (3.26)-(3.27) formulákban a  $\gamma = 0$  választással kell élnünk. Ezzel együtt, a periodikus megoldások föltérképezése során tekintetbe kell venni a

$$(c) \quad \varphi_1 = \varphi_0 - (j+1)\pi \quad (0 \leq \varphi_0 < \pi; j \in \mathbb{N}).$$

szakasz pontjait is. A (3.15) első egyenlőségéből adódik, hogy  $a_1 \lambda L / \pi = j+1$ , azaz  $a_1 \lambda L / \pi \geq 1$  egész szám, és  $\varphi_0$  tetszőleges, vagyis 3.11 lemmabeli (3.17) feltétel a következő alakot ölti:

$$-\mu + (p+1)\pi = \frac{a_2}{a_1}\mu,$$

amely egybeesik a (3.23)-(3.24), illetve a (3.26)-(3.27) föltételekkel a  $\gamma = 0$  választással.

Megfogalmazhatjuk tehát, hogy milyen föltételek mellett van  $2L$ -periodikus megoldás.

**3.12. Lemma.** *Legyen adott  $a_1, a_2, \lambda$ . A (3.13) rendszernek pontosan akkor van  $2L$ -periodikus megoldása, ha vagy*

$$-\phi\left(a_1 \lambda \frac{L}{2}; \frac{a_1}{a_2}\right) + (p+1)\pi = a_2 \lambda \frac{L}{2} \quad (3.28)$$

*vagy*

$$-\phi\left(a_1 \lambda \frac{L}{2} + \frac{\pi}{2}; \frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{\pi}{2} + (p+1)\pi = a_2 \lambda \frac{L}{2} \quad (3.29)$$

*valamely  $p \in \mathbb{N}$  számra.*

**Bizonyítás.** *Szükségesség.* A lemma kimondása előtt leírtakból világosan látszódik.

*Elegendőség.* Tegyük föl, hogy (3.28) teljesül. Ha  $a_1 \lambda L / \pi \notin \mathbb{Z}$  és  $[a_1 \lambda L / \pi]$  páros, akkor legyen

$$\varphi_0 = \left\{ a_1 \lambda \frac{L}{\pi} \right\} \frac{\pi}{2}.$$

Azt kell megvizsgálnunk, hogy a  $2\pi$  modulusú szögperiodikus megoldást garantáló (3.17) kifejezés és a  $f(\varphi_1; D) = f(\varphi_0; D)$  föltétel teljesül-e. A (3.28)

formulából kiindulva a következőt írhatjuk

$$\begin{aligned} \phi(\varphi_0; D) - \phi(\varphi_0 - a_1\lambda L; D) &= \phi\left(\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\}\frac{\pi}{2}; D\right) - \\ \phi\left(\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\}\frac{\pi}{2} - 2a_1\lambda\frac{L}{\pi}\frac{\pi}{2}; D\right) &= \left(\phi\left(a_1\lambda\frac{L}{2}; D\right) - \left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right]\frac{\pi}{2}\right) - \\ \left(-\phi\left(a_1\lambda\frac{L}{2}; D\right) - \left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right]\frac{\pi}{2}\right) &= 2(p+1)\pi - a_2\lambda L, \end{aligned}$$

azaz a 3.11 lemmabeli (3.17) teljesül, ami azt jelenti, hogy a megoldás szögperiodikus  $2\pi$  modulussal. Másfelől, a (3.15) első egyenletéből

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_0 - a_1\lambda L &= \left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\}\frac{\pi}{2} - 2a_1\lambda\frac{L}{\pi}\frac{\pi}{2} = -\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\}\frac{\pi}{2} - \left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right]\pi = \\ &= -\varphi_0 - \left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right]\pi, \end{aligned}$$

tehát teljesül, hogy  $f(\varphi_1; D) = f(\varphi_0; D)$ , azaz a megoldás  $2L$ -periodikus.

Ha  $a_1\lambda L/\pi \notin \mathbb{Z}$  és  $\left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right]$  páratlan, akkor legyen

$$\varphi_0 = \left(\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\} + 1\right)\frac{\pi}{2}.$$

Az előző számoláshoz hasonlóan adódik, hogy

$$\begin{aligned} \phi(\varphi_0; D) - \phi(\varphi_0 - a_1\lambda L; D) &= \phi\left(\left(\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\} + 1\right)\frac{\pi}{2}; D\right) - \\ \phi\left(\left(\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\} + 1\right)\frac{\pi}{2} - 2a_1\lambda\frac{L}{\pi}\frac{\pi}{2}; D\right) &= \phi\left(a_1\lambda\frac{L}{\pi}\frac{\pi}{2}; D\right) - \\ \left(\left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right] - 1\right)\frac{\pi}{2} + \phi\left(a_1\lambda\frac{L}{\pi}\frac{\pi}{2}; D\right) &+ \left(\left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right] - 1\right)\frac{\pi}{2} \\ &= 2(p+1)\pi - a_2\lambda L, \end{aligned}$$

vagyis a megoldás szögperiodikus  $2\pi$  modulussal. Továbbá,

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_0 - a_1\lambda L &= \left(\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\} + 1\right)\frac{\pi}{2} - 2a_1\lambda\frac{L}{\pi}\frac{\pi}{2} = -\left\{a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right\}\frac{\pi}{2} - \\ \left(2\left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right] - 1\right)\frac{\pi}{2} &= -\varphi_0 - \left(\left[a_1\lambda\frac{L}{\pi}\right] - 1\right)\pi, \end{aligned}$$

tehát a 3.11 és a 3.10 lemmák alapján a megoldás  $2L$ -periodikus.

Végül, ha  $a_1\lambda L/\pi \in \mathbb{Z}$ , akkor  $\varphi_0$  tetszőleges, és ekkor

$$\phi(\varphi_0; D) - \phi(\varphi_0 - a_1\lambda L; D) = a_1\lambda L = 2(p+1)\pi - a_2\lambda L,$$

így a megoldás  $2\pi$  modulusú szögperiodikus. Mivel

$$f(\varphi_1; D) = f(\varphi_0 - a_1\lambda L; D) = f(\varphi_0; D),$$

ezért a megoldás  $2L$ -periodikus.

A (3.29) föltétel bizonyítása hasonló. ■

**3.13. Lemma.** *Legyen adott  $a_1, a_2, \lambda$ . A (3.13) rendszernek pontosan akkor van  $4L$ -periodikus megoldása, ha vagy*

$$-\phi\left(a_1\lambda\frac{L}{2}; D\right) + \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi = a_2\lambda\frac{L}{2} \quad (3.30)$$

*vagy*

$$-\phi\left(a_1\lambda\frac{L}{2} + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2} + \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi = a_2\lambda\frac{L}{2} \quad (3.31)$$

*valamely  $p \in \mathbb{N}$  számra.*

**Bizonyítás.** A  $4\pi$  modulusú esetben  $\varphi_4 = \varphi_0 - (2p+1)\pi$  föltevással élünk, amiből azt kapjuk, hogy  $\varphi_3 = \phi(\varphi_0; D) - (2p+1)\pi$ . Tehát a (3.17) és (3.18) föltételekben  $-(2p+1)$  szerepel a  $-2(p+1)$  helyett. Ezzel a változtatással a 3.12 lemma a 3.13 lemmabeli föltételeket adja. ■

Ezek alapján megfogalmazzuk az eredeti, (3.1) egyenlet periodikus megoldása létezését garantáló tételünket.

**3.14. Tétel.** *Bármely  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $\{T_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ , illetve  $\{\tilde{T}_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$  sorozat, hogy a (3.1) egyenletnek a  $T = T_k(\varepsilon)$  választással  $2T_k(\varepsilon)$ -periodikus, illetve a  $T = \tilde{T}_k(\varepsilon)$  választással  $4\tilde{T}_k(\varepsilon)$ -periodikus megoldása van. Továbbá,*

$$0 < \tilde{T}_1 \leq \tilde{T}_2 < T_1 \leq T_2 < \tilde{T}_3 \leq \tilde{T}_4 < \dots; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty, \quad (3.32)$$

*és*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+1}(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+2) \left( \frac{1}{2} \left( 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+1) \left( \frac{1}{2} \left( 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right) \end{aligned}$$

*teljesül minden  $p \in \mathbb{N}$  esetén.*

**Bizonyítás.** A (3.1) egyenletnek pontosan akkor van  $2T$ -, illetve  $4T$ -periodikus megoldása, amikor a (3.13) rendszernek  $2L$ -, illetve  $4L$ -periodikus megoldása.

Emiatt használhatjuk az előbb kimondott 3.12 és 3.13 lemmákat. Bevezetünk két kifejezést az áttekinthetőbb tárgyalás kedvéért.

$$\begin{aligned} F_p(\mu) &:= -\phi(\mu; D) + (p+1)\pi, \\ G_p(\mu) &:= \left(-\phi\left(\mu + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2}\right) + (p+1)\pi \quad (p \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

ahol  $\mu := a_1 \lambda L/2$ . Bármely  $p$  esetén az  $F_p$  és a  $G_p$  függvények szigorúan monoton csökkenők, így az  $F_p(\mu) = (a_2/a_1)\mu$ , és  $G_p(\mu) = (a_2/a_1)\mu$  egyenleteknek pontosan egy megoldása van minden  $((p+1)\pi/2, (p+1)\pi)$  intervallumban (lásd a 3.12 ábrát); ezeket  $\mu_{2p+1} \leq \mu_{2p+2}$  jelöli. Hasonlóan, az  $F_p(\mu) - \pi/2 = (a_2/a_1)\mu$ , és  $G_p(\mu) - \pi/2 = (a_2/a_1)\mu$  egyenletek egyértelmű megoldásait jelölje  $\tilde{\mu}_{2p+1} \leq \tilde{\mu}_{2p+2}$ . Ekkor teljesül, hogy

$$0 < \tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2 < \mu_1 \leq \mu_2 < \tilde{\mu}_3 \leq \tilde{\mu}_4 < \mu_3 \leq \mu_4 < \dots \quad (3.33)$$

Az  $\varepsilon \rightarrow 0$  határátmenetet a (3.28)-(3.29) és a (3.30)-(3.31) kifejezésekben elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \mu_{2p+1}(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \mu_{2p+2}(\varepsilon) = (p+1) \left(\frac{\pi}{2}\right), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \tilde{\mu}_{2p+1}(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \tilde{\mu}_{2p+2}(\varepsilon) = \left(p + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

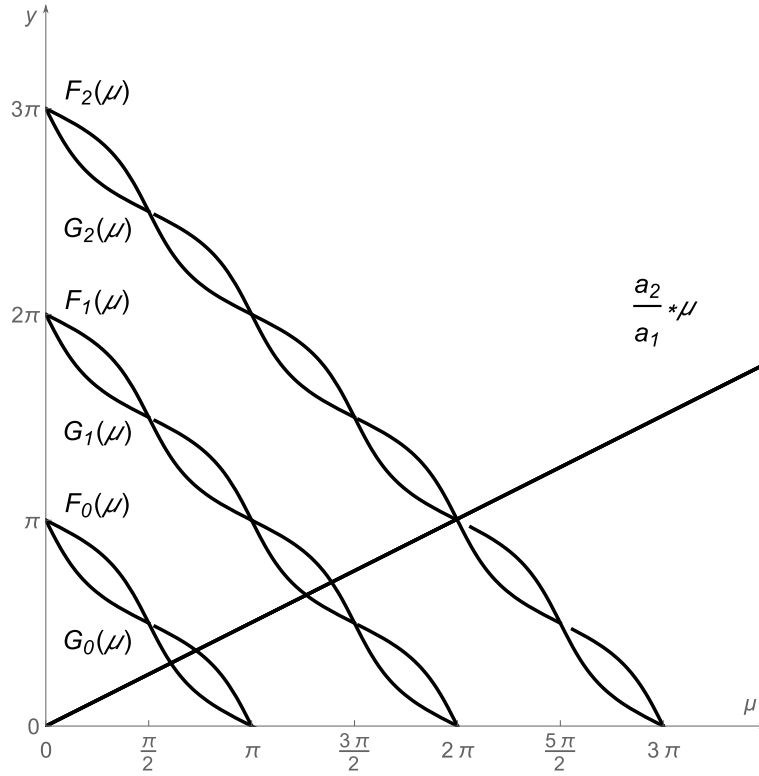
A

$$T_k(\varepsilon) := 2\sqrt{\frac{l-\varepsilon}{g}}\mu_k(\varepsilon), \quad \tilde{T}_k(\varepsilon) := 2\sqrt{\frac{l-\varepsilon}{g}}\tilde{\mu}_k(\varepsilon)$$

választással a bizonyítás teljes. ■

A 3.14 tétel a klasszikus oszcillációs tétel [29] (3.13) rendszerre vonatkozó speciális esete. Azt mindenképp érdemes meggondolni, hogy miután mi megkonstruáltuk a periodikus megoldásokat, ezért az oszcillációs tételben megfogalmazott állításokat közvetlenül ezekből nyertük. A 3.12-3.13 lemmákból a (3.1) egyenlet periodikus megoldásainak egy másik nevezetes problémájára [22] is választ tudunk adni, tudniillik, amikor  $\lambda$  kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, és így az alaprendszert alkotó megoldásai mindketten periodikusak, s így minden megoldás periodikus. A (3.1) egyenletnek pontosan akkor van két, lineáris független  $2L$ -periodikus, illetve  $4L$ -periodikus megoldása, ha mind a (3.28), mind a (3.29), illetve mind a (3.30), mind a (3.31) teljesül ugyanarra a  $p$ -re és  $\lambda$ -ra.





3.12. ábra. Az  $F_p$  és a  $G_p$  függvények grafikonjai ( $l = 2$ ,  $\epsilon = 1.2$ )

**3.15. Következmény.** Legyen adott  $T$  és  $\epsilon$ . Ha  $a_2/a_1 = \sqrt{(l-\epsilon)/(l+\epsilon)}$  racionális, azaz

$$\sqrt{\frac{l-\epsilon}{l+\epsilon}} = \frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1),$$

akkor minden  $\epsilon > 0$  esetén megszámlálható sok  $T$  létezik úgy, hogy (3.1) egyenlet minden megoldása vagy  $2T$ -periodikus vagy  $4T$ -periodikus. Még pontosabban, ha

$$\sqrt{\frac{g}{l-\epsilon}} \frac{T}{\pi} = jn \quad \text{és} \quad j(m+n) \text{ páros,}$$

illetve

$$\sqrt{\frac{g}{l-\epsilon}} \frac{T}{\pi} = jn \quad \text{és} \quad j(m+n) \text{ páratlan}$$

valamely  $j \in \mathbb{N}$  számra, akkor a (3.1) egyenlet összes megoldása  $2T$ -periodikus, illetve  $4T$ -periodikus.

A (3.20)-(3.27) számolásokból és a 3.12 lemma bizonyításában látottakból azonnal adódik az origótól távolodó megoldások létezésére vonatkozó állítás.

**3.16. Lemma.** *Legyen adva  $a_1$ ,  $a_2$  és  $\lambda$ . Ekkor a (3.13) rendszernek akkor és csak akkor van  $2\pi$  modulusú szögperiodikus, origótól távolodó megoldása, ha van olyan  $\gamma \in (0, \pi)$ , hogy*

$$\frac{-\phi\left(\mu - \frac{\gamma}{2}; D\right) - \phi\left(\mu + \frac{\gamma}{2}; D\right)}{2} + (p+1)\pi = \frac{a_2}{a_1}\mu,$$

*vagy*

$$\frac{\left(-\phi\left(\left(\mu - \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\phi\left(\left(\mu + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2}\right)}{2} + (p+1)\pi = \frac{a_2}{a_1}\mu$$

*valamely  $p \in \mathbb{N}$  számra.*

**3.17. Lemma.** *Legyen adva  $a_1$ ,  $a_2$  és  $\lambda$ . Ekkor a (3.13) rendszernek akkor és csak akkor van  $4\pi$  modulusú szögperiodikus, origótól távolodó megoldása, ha van olyan  $\gamma \in (0, \pi)$ , hogy*

$$\frac{-\phi\left(\mu - \frac{\gamma}{2}; D\right) - \phi\left(\mu + \frac{\gamma}{2}; D\right)}{2} + \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{a_2}{a_1}\mu,$$

*vagy*

$$\frac{\left(-\phi\left(\left(\mu - \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\phi\left(\left(\mu + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\pi}{2}; D\right) + \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{a_2}{a_1}\mu$$

*valamely  $p \in \mathbb{N}$  számra.*

Az origóhoz közeledő megoldások létezésére vonatkozó föltételeket a föntiekben részletesen kidolgozottak ismétlésével kaphatjuk azzal, hogy a 3.11 ábra nem satírozott részének pontjait kell tekintetbe vennünk. A számolások eredményeként a 3.16 – 3.17 lemmákban kimondottakkal megegyező föltételeket kapunk. Ez azt jelenti, hogy a (3.13) típusú egyenletek közül ugyanazoknak vannak közeledő és távolodó megoldásai.

### 3.2.3. Stabilitási térkép

Megmutatjuk, hogy az instabilitási tartomány megszámlálható sok komponensből áll (szokás ezeket Arnold-nyelveknek híni), majd meg is adjuk ezeket a

komponenseket. Bevezetjük a következőket:

$$H := \cup_{p=0}^{\infty} (\mu_{2p+1}, \mu_{2p+2}), \quad \tilde{H} := \cup_{p=0}^{\infty} (\tilde{\mu}_{2p+1}, \tilde{\mu}_{2p+2})$$

(a  $\mu_j$ ,  $\tilde{\mu}_j$  tekintetében lásd a (3.33)-at).

**3.18. Lemma.** *Minden  $\mu \in H$ , illetve  $\mu \in \tilde{H}$  esetén a (3.13) rendszernek van  $2\pi$ , illetve  $4\pi$  modulusú szögperiodikus origótól távolodó megoldása.*

**Bizonyítás.** A  $2\pi$  modulusú esetet írjuk le részletesen. Tekintsük egy tetszőleges, rögzített nemüres nyílt  $(\mu_{2p+1}, \mu_{2p+2})$  intervallumot. Tegyük föl, hogy

$$2m\frac{\pi}{2} < \mu_{2p+1} < \mu_{2p+2} < (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$F_p(\mu_{2p+1}) = \frac{a_2}{a_1} \mu_{2p+1}, \quad G_p(\mu_{2p+2}) = \frac{a_2}{a_1} \mu_{2p+2}.$$

Ha  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \pi$ , akkor legyenek

$$F_p^\gamma(\mu) := \frac{F_p\left(\mu - \frac{\gamma}{2}\right) + F_p\left(\mu + \frac{\gamma}{2}\right)}{2}, \quad G_p^\gamma(\mu) := \frac{G_p\left(\mu - \frac{\gamma}{2}\right) + G_p\left(\mu + \frac{\gamma}{2}\right)}{2}.$$

Ezek a függvények kielégítik az

$$F_p(\mu) < F_p^{\gamma_1}(\mu) < F_p^{\gamma_2}(\mu) < G_p(\mu), \quad F_p(\mu) < G_p^{\gamma_2}(\mu) < G_p^{\gamma_1}(\mu) < G_p(\mu) \quad (3.34)$$

egyenlőtlenségeket a  $(\mu_{2p+1}, \mu_{2p+2})$  intervallumon. Valóban, az  $F_p$  függvény konvex, míg a  $G_p$  függvény konkáv a  $(2m\pi/2, (2m+1)\pi/2)$  intervallumban, tehát (3.34) kis  $\gamma > 0$  esetén teljesül. Nagyobb  $\gamma$  esetén, amikor vagy  $\mu - \gamma/2$  vagy  $\mu + \gamma/2$ , esetleg mindkettő ezen intervallumon kívülre esik, akkor (3.34) a  $\phi$  függvény tulajdonságai miatt biztosan teljesül. Másrésztől,

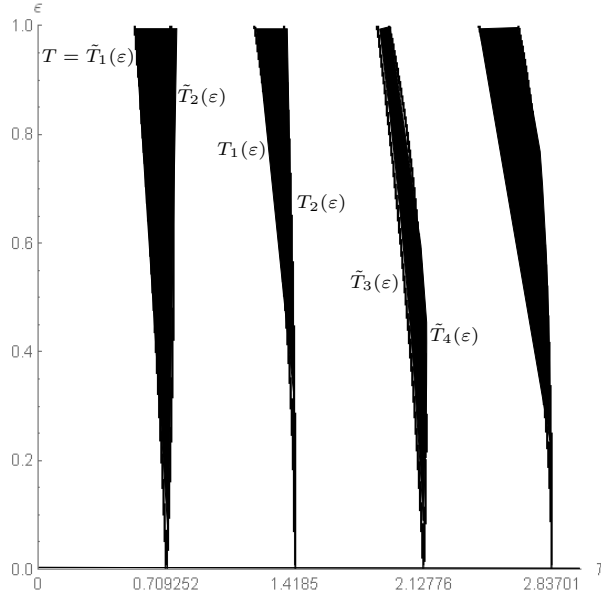
$$F_p^0(\mu) \equiv F_p(\mu), \quad G_p^0 \equiv G_p(\mu),$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \pi-0} F_p^\gamma = G_p(\mu), \quad \lim_{\gamma \rightarrow \pi-0} G_p^\gamma(\mu) = F_p(\mu),$$

s így a (3.34) bizonyítása teljes.

A (3.34)-ből következik, hogy bármely  $\gamma \in (0, \pi)$  esetén az

$$F_p^\gamma(\mu) = \frac{a_2}{a_1} \mu, \quad G_p^\gamma(\mu) = \frac{a_2}{a_1} \mu$$

3.13. ábra. Arnold-nyelvek (a kép színezett zónái;  $l = 2$ )

egyenleteknek van megoldása a  $(\mu_{2p+1}, \mu_{2p+2})$  intervallumban, mialatt  $\gamma$  0-tól  $\pi$ -ig változik. A 3.16 lemma alapján, minden (3.13) rendszernek van  $2\pi$  modulusú szögperiodikus, origótól távolodó megoldása, ha  $a_1 \lambda \pi / 2 = \mu \in (\mu_{2p+1}, \mu_{2p+2})$ .

A  $\tilde{H}$  eset bizonyítása ugyanígy történik. ■

**3.19. Tétel.** A (3.1) egyenletre vonatkozó  $(T, \varepsilon)$  paramétersík instabil tartományának belseje

$$\cup_{0 < \varepsilon < l} (\cup_{p=0}^{\infty} (\{(T, \varepsilon) : T_{2p+1}(\varepsilon) < T < T_{2p+2}(\varepsilon)\} \cup \{(T, \varepsilon) : \tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) < T < \tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon)\})), \quad (3.35)$$

ahol a  $T_k, \tilde{T}_k$  kifejezéseket a (3.32)-ben értelmeztük.

**Bizonyítás.** Az előző alfejezet végén, illetve ezen alfejezet elején elmondottak alapján, továbbá a 3.14 tétel alapján mondhatjuk, hogy az instabil részhalmazok határaihoz tartoznak a  $T_k$  és a  $\tilde{T}_k$  függvények grafikonjai. Másrészt, a 3.18 lemma alapján a (3.35) halmaz az instabilitási tartományhoz tartozik. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

Sikerült tehát a hintázás problémáját megoldani úgy, hogy módszerünk mellett, hogy mellőzi a nehezen kezelhető Floquet-elméletet még konstruktív is. Az

egy további kérdés, hogy a vizsgált modell írja-e le legjobban a hintázást. Erre vonatkozóan lásd a [18] dolgozatot.

## 4. fejezet

# Fölső egyensúlyi helyzet stabilizálása

Amint az Előszóban már említettük, az inga fölső egyensúlyi helyzete stabilizálható olyan módon, hogy az inga fölfüggesztési pontját alkalmas frekvenciájú és amplitúdójú függőleges irányú rezgésbe hozzuk. Ezt a jelenséget számos dolgozat, például [4, 5, 7, 13, 23, 24, 26, 27, 33, 34, 35], tárgyalja különböző aspektusokból, mely publikációk eredményeit több földolgozásban, például [1, 8, 14, 32], is megtaláljuk. M. Levi és W. Weckesser a [28] cikkükben egy egyszerű geometriai háttérű magyarázatot adnak arra, hogy miként is lehetséges a stabilizálás nagy frekvencia esetén. Dolgozatukban olyan nagy frekvenciájú rezgést vizsgálnak, melynek során a gyorsulás lényegesen nagyobb a gravitációs gyorsulás értékénél, s emiatt ez utóbbit elhagyják. Ebben a fejezetben, miután bemutatjuk az általuk elért eredményt, rámutatunk arra, hogy a gravitáció hatásának figyelembe vételekor az általuk adott módszer nem működik, emiatt azt módosítani kell. Tovább általánosítva az elgondolást, megvizsgáljuk, hogy a fölle rezgetés aszimmetriája hogyan jelentkezik a stabilizálhatóság tekintetében.

### 4.1. Levi és Weckesser módszere

A [28] cikket követve, tegyük föl, hogy az inga fölfüggesztési pontjára olyan erő hat, melynek hatására létrejövő gyorsulás

$$a(t) := \begin{cases} A, & \text{ha } kT \leq t < (2k+1)\frac{T}{2}, \\ -A, & \text{ha } (2k+1)\frac{T}{2} \leq t < (k+1)T, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (4.1)$$

Tehát az  $a(t)$  függvény egy  $T$ -periodikus lépcsősfüggvény, melyet abban az értelemben mondunk szimmetrikusnak, hogy a fél-periódusok egyenlő hosszúak, és a fölvevett függvényértékek egymás ellentettjei. A Bevezetésben fölírt (2.3) mozgásegyenletet ennek hatására a következőképp módosul:

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + a(t))\psi = 0. \quad (4.2)$$

A továbbiakban a szerzők fölteszik, hogy  $A \gg g$ , s emiatt a (4.2) egyenletben a gravitációs gyorsulást nem veszik figyelembe - úgynevezett gravitációmentes eset. Ahogyan a Bevezetésben említettük, a (4.2) egyenlet a (2.6) alakú rendszerre transzformálható. Bevezetve az  $\omega = \sqrt{A/l}$  mennyiséget a (4.2) a következő, (2.3) egyenlethez hasonló formában írható:

$$\ddot{\psi} \pm \omega^2 \psi = 0, \quad (4.3)$$

ahol az előjel az  $a(t)$  függvénynek megfelelően változik. A Bevezetésben látott módon a (4.3) egyenletet vele ekvivalens rendszerbe lehet transzformálni. Ebből a célból vezessük be a két új változót:

$$x = \psi, \quad y = \frac{\dot{\psi}}{\omega}. \quad (4.4)$$

Ezek segítségével a (4.3) az alábbi alakot ölti:

$$\dot{x} = \omega y, \quad \dot{y} = \mp \omega x. \quad (4.5)$$

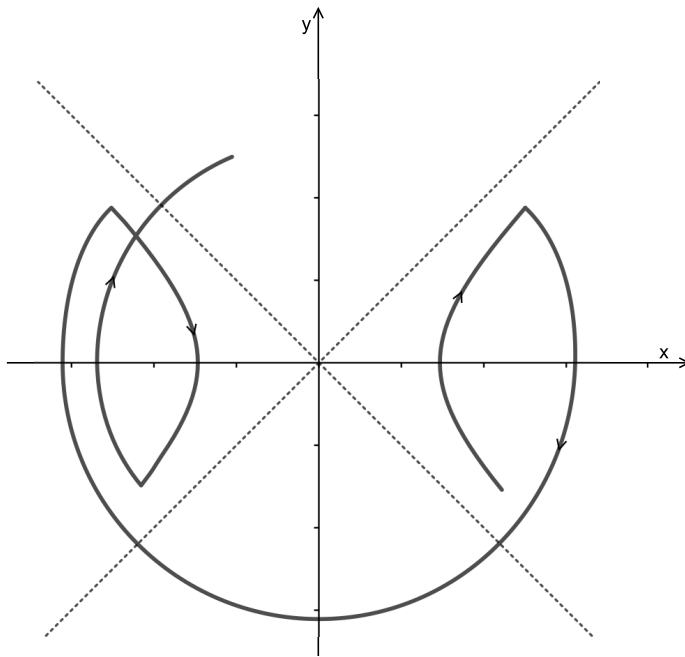
A (4.5) tehát valójában két rendszerből áll. A  $kT \leq t < (2k+1)\frac{T}{2}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) intervallumokon

$$\dot{x} = \omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad (4.6)$$

míg a  $(2k+1)\frac{T}{2} \leq t < (k+1)T$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) intervallumokon

$$\dot{x} = \omega y, \quad \dot{y} = -\omega x. \quad (4.7)$$

Ahogy a Bevezetésben bemutattuk, a (4.6) rendszer egy első integrálja a (2.8):  $H_h(x, y) = x^2 - y^2$ , a (4.7) rendszeré pedig a (2.7):  $H_e(x, y) = x^2 + y^2$ . A Bevezetésben leírtakhoz képesti különbség a fázispont mozgásában az, hogy mind a (4.6), mind a (4.7) rendszerben ugyanaz az együttható, azaz ebben a modellben nincs impulzív hatás: a fázispont nem szenved sem dilatációt, sem kontrakciót. Az első félperiódusban hiperbolán mozog, majd egy origó középpontú körön halad tovább. Ezt követően újra egy hiperbolán megy, aztán újra egy origó középpontú köríven történő mozgást végez, s így tovább, lásd a 4.1 ábrát.



4.1. ábra. A fázispont mozgása gravitációmentes esetben

Az a geometriai észrevétel, amire a szerzők eredményüket alapozzák az előző fejezetben említett Floquet-elve támaszkodik. Ahogy ott láttuk, ennek használatához szükség van a rendszer monodrómia mátrixára. Ennek részletezésétől terjedelmi okok miatt most eltekintünk, az érdeklődő olvasó az [1]-ben megtalálja. Az  $M$  monodrómia  $\det M = 1$  tulajdonsága a (4.5) rendszerre vonatkozóan is teljesül. Ez a tulajdonság geometriailag azt jelenti, hogy az  $M$  által reprezentált transzformáció területtartó. Egy ilyen mátrix erős stabilitása ekvivalens azzal, hogy van olyan sajátértéke, mely nem valós szám. Ennek geometriai interpretációja, hogy egy erősen stabil mátrix minden  $\mathbb{R}^2$ -beli vektort



$\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  szöggel forgat. Levi és szerzőtársa a monodrómiának mint két forgatásnak a hatását vizsgálta, becslést adva a hatásukra bekövetkező elfordulások szögeire, mely szögek összegére vonatkozóan az említett  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  feltételt figyelembe véve az alábbi következtetést vonták le.

**4.1. Tétel (M. Levi, W. Weckesser; [28]).** *Tekintsük a fordított inga (4.2) mozgásegyenletét a gravitációmentes ( $g = 0$ ) esetben. Ekkor ha*

$$\omega T < \pi \quad \left( \omega := \sqrt{\frac{A}{l}} \right), \quad (4.8)$$

*akkor a (4.2) erősen stabil.*

Meglehetősen természetes gondolatnak tartjuk a módszer kiterjesztését arra az esetre, amikor a gravitáció hatását is figyelembe vesszük. A következő fejezetben megmutatjuk, hogy erre van is lehetőség, továbbá, hogy így a 4.1 tétel eredménye is javítható. A következő alfejezet a [9] dolgozaton alapul.

## 4.2. A Levi-Weckesser módszer kiterjesztése

Az előző fejezetben bemutatott modell szerint az inga fölfüggesztési pontját egy szimmetrikus hatás érte: a létrejövő gyorsulás (4.1) egyenletben megadott alakú. Elhagyva ezt a szimmetriát és figyelembe véve a gravitáció hatását érdekes és a 4.1 tételben található eredménynél pontosabb becslést tudunk adni.

### 4.2.1. Aszimmetrikusan rezgetett inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatósága

Tegyük föl tehát, hogy az  $l$  hosszúságú inga fölfüggesztési pontját olyan függőleges irányú hatás éri, mely során létrejövő gyorsulás

$$a(t) := \begin{cases} A_h, \text{ ha} & kT \leq t < kT + T_h, \\ -A_e, \text{ ha} & kT + T_h \leq t < (kT + T_h) + T_e, \\ (k = 0, 1, \dots) & ; \end{cases} \quad (4.9)$$

ahol  $A_h, A_e, T_h, T_e$  pozitív konstansok ( $T_h + T_e = T$ ), tehát a felfüggesztési pont mozgása  $T$ -periodikus. A  $h$  és  $e$  indexek arra, az előzményekből már sejthető tényre utalnak, hogy két különböző fázisból áll össze a mozgás: egy elliptikus

és egy hiperbolikus részből. Ennek részleteiről az alábbiakban lesz szó. A (4.9) kifejezésben definiált gyorsulás hatására az inga fölfüggesztési pontja olyan mozgást végez, hogy a  $p = p(t)$  függőleges irányú kitérés eleget tesz a következő két föltételnek:

$$p(0) = 0, \text{ valamint } p(t + T) \equiv p(t).$$

Induljunk el a  $0 \leq t < T_h$  intervallumon. Ekkor  $p''(t) = A_h$  és  $p(0) = 0, p'(0) = p'_0$ . Kétszeri integrálással kapjuk, hogy ekkor  $p(t) = \frac{1}{2}A_h t^2 + p'_0 t$ . Ez azt is jelenti, hogy  $p(T_h) = \frac{1}{2}A_h T_h^2 + p'_0 T_h, p'(T_h) = A_h T_h + p'_0$ .

A  $T_h \leq t < T_h + T_e = T$  intervallumon  $p''(t) = -A_e$ . Ekkor  $p'(t) = p'(T_h) - A_e(t - T_h)$ , és így  $p(t) = p(T_h) + p'(T_h)(t - T_h) - \frac{1}{2}A_e(t - T_h)^2$ . A föltételekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p(T) &= p(T_h) + p'(T_h)T_e - \frac{1}{2}A_e T_e^2 = 0 \\ p'(T) &= p'(T_h) - A_e T_e = p'_0. \end{aligned}$$

Fölhasználva a  $p(T_h)$ -ra és a  $p'(T_h)$ -ra vonatkozó összefüggéseket, a második egyenletből adódik, hogy  $A_h T_h = A_e T_e$ . Ezt beírva az első egyenletbe, és kiküszöbölve  $A_e$ -t kapjuk, hogy  $p'_0 = -\frac{1}{2}A_h T_h$ . Most már meg tudjuk adni az inga fölfüggesztési pontjának kitérését az idő függvényében:

$$p(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}A_h t(t - T_h), & \text{ha } 0 \leq t < T_h, \\ -\frac{1}{2}A_e(t - T_h)^2 + \frac{1}{2}A_e T_e(t - T_h), & \text{ha } T_h \leq t < T_h + T_e = T. \end{cases} \quad (4.10)$$

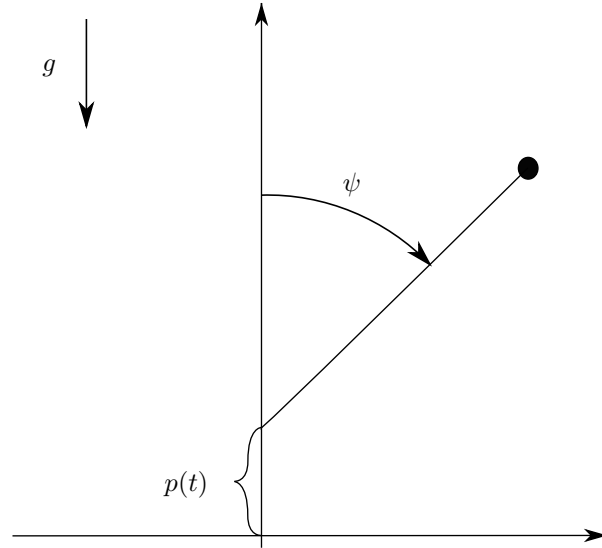
A fölfüggesztési pont egy periódus,  $T_h + T_e = T$ , alatti kitéréseinek maximális értékeit, azaz amplitúdóit az elemi kalkulusból ismert módon, a (4.10) deriváltja segítségével tudjuk megadni:

$$D_h = \frac{1}{8}A_h T_h^2, \quad D_e = \frac{1}{8}A_e T_e^2. \quad (4.11)$$

Az imént fölrít hat paraméter között az alábbi összefüggéseket írhatjuk föl:

$$\frac{A_h}{A_e} = \frac{T_e}{T_h}, \quad \frac{D_h}{D_e} = \frac{T_h}{T_e}. \quad (4.12)$$

Hogy a mozgásegyenlet valóban (4.2) alakú, a rendszer Lagrange-függvényének segítségével megmutatható. Ennek fölréséhez mindenek előtt állapodjunk meg abban, hogy az  $(x, y)$  sík koordináta-tengelyei a szokásos irányításúak, továbbá,



4.2. ábra. Kapica-inga

hogy a gravitáció iránya lefelé mutat, azaz negatív értékű. Ahogyan a Bevezetésben láttuk, az inga függőleges iránytól való kitérését mérő szög ( $\psi$ ) az óramutató járásával egyező irányba nő, lásd a 4.2 ábrát.

Ekkor, az inga lengő végének koordinátáira:

$$x = l \sin \psi$$

$$y = l \cos \psi + p(t).$$

Így a sebességének megfelelő koordinátái:

$$\dot{x} = l\dot{\psi} \cos \psi$$

$$\dot{y} = -l\dot{\psi} \sin \psi + \dot{p}(t).$$

A kinetikai energiára és a potenciálra ezek után a következőt kapjuk:

$$T = \frac{1}{2}m \left( l^2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \psi + l^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi + \dot{p}^2 - 2l\dot{\psi}\dot{p} \sin \psi \right)$$

$$V = mg (l \cos \psi + p(t)).$$

Az  $m$  a végpont tömegét jelenti. A keresett Lagrange-függvény így:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m \left( l^2 \dot{\psi}^2 + \dot{p}^2 - 2l\dot{\psi}\dot{p} \sin \psi \right) - mg (l \cos \psi + p(t)).$$

Kiszámítva a  $\partial L / \partial \dot{\psi}$ ,  $\partial L / \partial \psi$  és a  $\frac{d}{dt} \partial L / \partial \dot{\psi}$  deriváltakat, az Euler-Lagrange-egyenlet a következő alakú:

$$l^2 \ddot{\psi} - (g + \ddot{p}) l \sin \psi = 0.$$

Kihasználva azt, hogy  $\ddot{p}(t) = a(t)$ , és a lineáris közelítést alkalmazva kapjuk, hogy

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + a(t))\psi = 0. \quad (4.13)$$

Fölírtuk tehát az inga felső egyensúlyi helyzete körüli kis lengések egyenletét. Az  $a(t)$  függvény értékeinek megfelelően a (4.13) alapegyenletet az alábbi módon írhatjuk:

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + A_h)\psi = 0, \text{ ha } kT \leq t < kT + T_h, \quad (4.14)$$

illetve

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g - A_e)\psi = 0, \text{ ha } kT + T_h \leq t < (kT + T_h) + T_e. \quad (4.15)$$

Mivel  $A_h > 0$ , ezért a (4.14) egyenlettel adott mozgás (pontosabban szólva a  $\psi = 0$  egyensúlyi helyzet) mindenképpen instabil, hiszen azt fejezi ki, hogy az erő - ami Newton 2. axiómájának megfelelően arányos a  $\ddot{\psi}$  gyorsulással - iránya a kitérés irányába ( $\psi$ ) mutat, és annak értékét növeli. Vegyük észre, hogy a (4.15) egyenlet ugyanezt jelenti, ha az  $A_e$  értéke nem nagyobb, mint a  $g$  értéke. Ez utóbbi esetben természetesen egyértelműen ki lehet jelenteni, hogy hiába rezgetjük az inga fölfüggesztési pontját föl-le, a  $\psi = 0$  egyensúlyi helyzet instabil.

A feladat éppen abban áll, hogy keressünk olyan  $A_e$  értéket, és így a fentebb bemutatott összefüggések alapján, olyan  $T_e$ , illetve  $T_h$  értékeket, hogy a (4.15) egyenletben a  $g - A_e$  együtttható legyen negatív, sőt, a  $T_h + T_e = T$  idő alatt ez a stabilizáló hatás érvényesüljön. Mindezekből következik, hogy az  $A_e > g$  egy szükséges föltételt jelent.

Ezek után, a két különböző fázisnak megfelelően két különböző sajátfrekvenciát vezetünk be

$$\omega_h := \sqrt{\frac{A_h + g}{l}}, \quad \omega_e := \sqrt{\frac{A_e - g}{l}}, \quad (4.16)$$

s így a (4.13) egyenlet a

$$\ddot{\psi} - \omega_h^2 \psi = 0 \quad (kT \leq t < kT + T_h) \quad (4.17)$$

és

$$\ddot{\psi} + \omega_e^2 \psi = 0 \quad (kT + T_h \leq t < (kT + T_h) + T_e), \quad (4.18)$$

esetekre bontható. Tekintsük a (4.17) hiperbolikus esetet. A (4.4)-ben bevezetett  $x_h = \psi$ ,  $y_h = \dot{\psi}/\omega_h$  új változókkal a (4.17) az alábbi rendszerrel lesz ekvivalens:

$$\dot{x}_h = \omega_h y_h, \quad \dot{y}_h = \omega_h x_h. \quad (4.19)$$

Polárkoordinátákat  $(r_h, \varphi_h)$  és az

$$x_h = r_h \cos \varphi_h, \quad y_h = r_h \sin \varphi_h \quad (r_h > 0, -\infty < \varphi_h < \infty),$$

transzformációs szabályokat fölhasználva a (4.17) egyenletet a következő rendszerbe írhatjuk át

$$\dot{r}_h = r_h \omega_h \sin 2\varphi_h, \quad \dot{\varphi}_h = \omega_h \cos 2\varphi_h. \quad (4.20)$$

A  $H_h(x, y) := x_h^2 - y_h^2$  a (4.19) egy első integrálja, amint arról meggyőződhetünk, ha kiszámítjuk ennek az úgynevezett rendszer szerinti deriváltját:  $\dot{H}_h = 2x_h \dot{x}_h - 2y_h \dot{y}_h = 2x_h \omega_h y_h - 2y_h \omega_h x_h = 0$ . Tehát, a trajektóriák, amint azt már tudjuk, hiperbola-ívek.

A (4.18) rendszert az előzőhöz hasonló módon tudjuk kezelni. Ebben a fázisban az új változók

$$x_e = \psi, \quad y_e = \frac{\dot{\psi}}{\omega_e}.$$

Ezekkel a következő rendszert kapjuk:

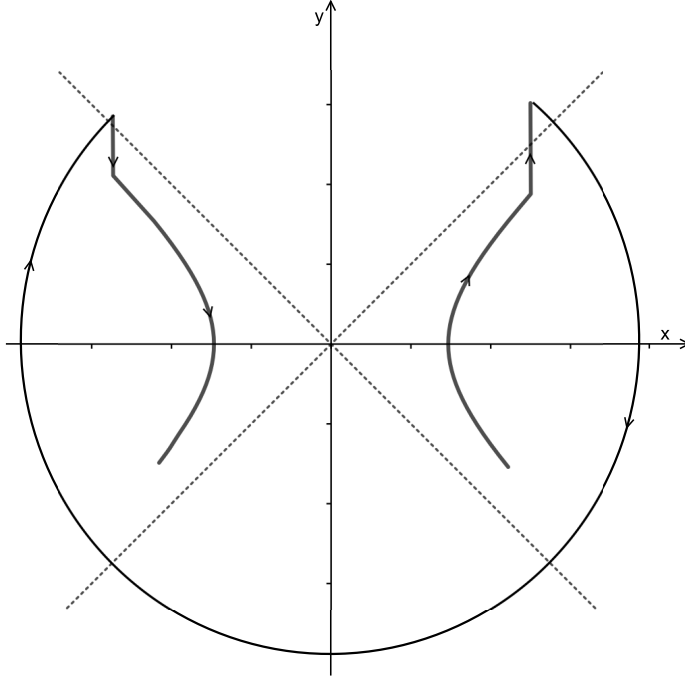
$$\dot{x}_e = \omega_e y_e, \quad \dot{y}_e = -\omega_e x_e, \quad (4.21)$$

mely polárkoordinátákkal fölírva:

$$\dot{r}_e = 0, \quad \dot{\varphi}_e = -\omega_e. \quad (4.22)$$

A  $H_e(x, y) := x_e^2 + y_e^2$  a (4.21) egy első integrálja, tehát a fázisgörbék origó középpontú körívek. Vegyük észre, hogy a Levi-Weckesser módszer ismertetése során leírtakhoz képest most merőben más helyzettel állunk szemben. A különbség, hogy a hiperbolikus és elliptikus fázis között a Bevezetésben említett impulzív effektus történik. A  $[0, T]$  intervallumon a  $t = T_h$  és a  $t = T$  pillanatokban rendre egy  $\omega_h/\omega_e$ , illetve egy  $\omega_e/\omega_h$  mértékű „ugrás” történik az  $y$ -tengellyel párhuzamosan, lásd a 4.3 ábrát.

Követve a [28] cikkben található eljárást, becsléseket adunk a hiperbolikus és elliptikus forgatások szögeire, illetve az impulzív hatásra bekövetkező szögváltozásra. Tekintsük a (4.20) második egyenletét, mely szeparábilis, így integrálható.

4.3. ábra. A fordított inga fázistere  $\omega_h > \omega_e$  esetén

Ha  $\cos 2\varphi_h(0) = 0$ , akkor

$$\cos 2\varphi_h(t) \equiv 0 \quad (t \in [0, T_h)),$$

vagyis az  $(r_h(0), \varphi_h(0))$  fázispont nem fordul el. Ha  $\cos 2\varphi_h(0) \neq 0$ , akkor

$$\int_0^{T_h} \frac{\dot{\varphi}_h(t)}{\cos 2\varphi_h(t)} dt = \int_{\varphi_h(0)}^{\varphi_h(T_h-0)} \frac{d\tau}{\cos 2\tau} = \omega_h T_h. \quad (4.23)$$

Legyen

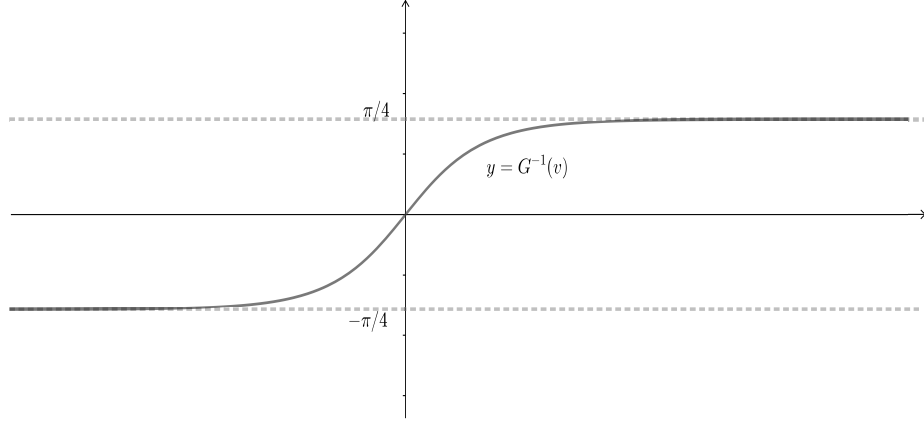
$$G(\varphi) := \int_0^\varphi \frac{d\tau}{\cos 2\tau}.$$

Ha  $-\pi/4 < \varphi < \pi/4$ , akkor  $G(\varphi) = \ln \sqrt{\frac{1+\tan \varphi}{1-\tan \varphi}}$ . A  $G$  függvény invertálható, inverzét jelölje  $G^{-1}$ , melynek grafikonja a 4.4 ábrán látható. A  $G$  és a  $G^{-1}$  függvények segítségével a (4.23) egyenletből kapjuk, hogy

$$\varphi_h(T_h - 0) = G^{-1}[\omega_h T_h + G(\varphi_h(0))],$$

vagyis

$$\varphi_h(T_h - 0) = \arctan \frac{e^{2\omega_h T_h} \frac{1 + \tan \varphi_h(0)}{1 - \tan \varphi_h(0)} - 1}{e^{2\omega_h T_h} \frac{1 + \tan \varphi_h(0)}{1 - \tan \varphi_h(0)} + 1}.$$

4.4. ábra. A  $G^{-1}$  függvény grafikonja

A  $|\varphi_h(T_h - 0) - \varphi_h(0)|$  becslése során kihasználjuk, hogy  $G^{-1}$  páratlan, és konkáv a  $[0, \infty]$  félegyenesen. Föltesszük továbbá, hogy  $|\varphi_h(0)| < \pi/4$ . A  $G^{-1}$  függvény grafikonjáról könnyen látható, hogy a megbecsülni kívánt szögérték akkor lesz maximális, ha a  $T_h$  hosszú intervallum szimmetrikusan illeszkedik az origóra. Az is észrevehető, hogy a  $\varphi_h(0) = 0$  választás mellett várható a legnagyobb mértékű forgatás. Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$\max_{-\pi/4 \leq \varphi_h(0) \leq \pi/4} |\varphi_h(T_h - 0) - \varphi_h(0)| = 2 \arctan \frac{e^{\omega_h T_h} - 1}{e^{\omega_h T_h} + 1}, \quad (4.24)$$

azaz meg tudtuk adni a kívánt felső becslést a hiperbolikus forgatás során bekövetkező elfordulás szögére.

A (4.22) második egyenlete által megadott elliptikus forgatás hatására bekövetkező elfordulás szögét pontosan meg tudjuk adni:

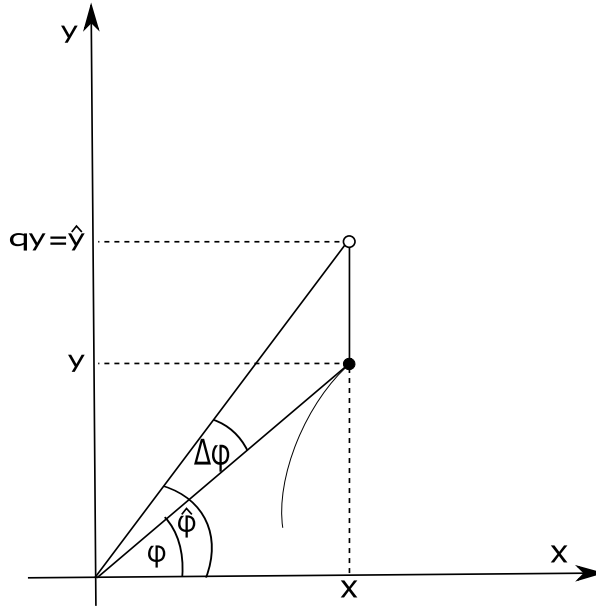
$$\varphi_e(T_h + T_e - 0) - \varphi_e(T_h) = -\omega_e T_e.$$

Az impulzív effektus hatására bekövetkező szögváltozás mértékére, azaz a

$$\varphi_e(T_h) - \varphi_h(T_h - 0), \quad \varphi_h(T_h + T_e) - \varphi_e(T_h + T_e - 0)$$

forgások mértékére adott becslés van még hátra. A hiperbolikus és elliptikus fázisok végén jelentkező „ugrások” az  $(x, y)$  ponton egy  $y$ -tengely irányú lineáris transzformációt jelentenek:

$$(x, y) \mapsto (x, qy) =: (x, \hat{y}) \quad (0 < q = \text{const.}, q \neq 1),$$



4.5. ábra. Egy ugrás során bekövetkező szögváltozás

lásd a 4.5 ábrát.

Ha  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ , akkor  $\hat{\varphi} \in (-\pi/2, \pi/2)$ , ahol  $\hat{\varphi}$  az  $(x, \hat{y})$  pont polárszögét jelöli, és

$$\begin{aligned} f_q(\varphi) &:= \Delta\varphi = \hat{\varphi} - \varphi = \arctan(q \frac{y}{x}) - \arctan \frac{y}{x} \\ &= \arctan(q \tan \varphi) - \varphi ; \end{aligned}$$

$$f'_q(\varphi) = q \frac{1 + \tan^2 \varphi}{1 + q^2 \tan^2 \varphi} - 1.$$

Elemi analízisből tudjuk, hogy a szélsőérték szükséges föltétele, hogy  $f'_q(\varphi) = 0$  teljesüljön. Ezt kiszámítva kapjuk, hogy

$$\max_{-\pi/2 < \varphi < \pi/2} |f_q(\varphi)| = |\arctan \sqrt{q} - \arctan \frac{1}{\sqrt{q}}|.$$

Ugyanez a becslés érvényes akkor is, amikor  $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ , és így

$$\max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |\Delta\varphi| \leq |\arctan \sqrt{q} - \arctan \frac{1}{\sqrt{q}}|.$$

Az

$$\arctan x - \arctan \frac{1}{x} = 2 \arctan x - \frac{\pi}{2} \quad (x > 0);$$

összefüggés fölhasználásával kapjuk, hogy

$$\max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |\Delta\varphi| \leq 2 |\arctan \sqrt{q} - \frac{\pi}{4}|. \quad (4.25)$$



**Megjegyzés.** Az impulzív effektus, egyszerűen szólva ugrás, az eltérő fázisok ((4.19) és (4.21)) közötti átmenet leírására szolgáló matematikai eszköz. Ezen ugrások mértékét a következőképp tudjuk kifejezni:

$$q - 1 = \frac{\omega_h}{\omega_e} - 1 = \frac{(A_h - A_e) + 2g}{\sqrt{(A_e - g)(A_h + g)} + (A_e - g)},$$

vagyis ez a szimmetrikus és gravitációmentes esettől való eltérést méri (épp a Levi és Weckesser által tárgyalt eset). Amennyiben a rezgetés szimmetrikus ( $A_h = A_e = A$ ), akkor

$$q - 1 = \frac{g}{A} + o\left(\frac{g}{A}\right) \quad (A \rightarrow \infty)$$

aszimptotikusan a  $g$  és  $A$  gyorsulások arányával egyenlő.

#### 4.2.2. Eredmények

Alkalmazva az általunk kiszámított becsléseket, olyan inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságára kapunk elegendő föltételt, melynek fölfüggesztési pontját függőleges irányban aszimmetrikus módon rezgetetjük és a gravitáció hatását is fegyelembé vesszük.

**4.2. Tétel.** Jelölje  $\text{Rem}(\varphi; \pi)$  a  $\varphi \in \mathbb{R}$  valós szám osztási maradékát moduló  $\pi$  ( $0 \leq \text{Rem}(\varphi; \pi) < \pi$ ).

*Ha*

$$2 \arctan \frac{e^{\omega_h T_h} - 1}{e^{\omega_h T_h} + 1} + 4 \left| \arctan \sqrt{\frac{\omega_h}{\omega_e}} - \frac{\pi}{4} \right| < \min\{\text{Rem}(\omega_e T_e; \pi); \pi - \text{Rem}(\omega_e T_e; \pi)\}, \quad (4.26)$$

*akkor a (4.13) egyenlet erősen stabil.*

**Bizonyítás.** Jelölje  $R_h(\omega_h, T_h)$ , illetve  $R_e(\omega_e, T_e)$  rendre a (4.19), illetve (4.21) által meghatározott

$$(x_h(0), y_h(0)) \mapsto (x_h(T_h - 0), y_h(T_h - 0)),$$

illetve

$$(x_e(T_h), y_e(T_h)) \mapsto (x_e(T_h + T_e - 0), y_e(T_h + T_e - 0))$$

forgatások mátrixait, továbbá vezessük be a következő jelölést

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda > 0, \lambda \neq 1).$$

Így a rendszer  $M$  monodrómia mátrixát a következő szorzattal adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} M &= C^{-1} \left( \frac{1}{\omega_e} \right) R_e(\omega_e, T_e) C \left( \frac{1}{\omega_e} \right) C^{-1} \left( \frac{1}{\omega_h} \right) \\ &\quad \times R_h(\omega_h, T_h) C \left( \frac{1}{\omega_h} \right) \\ &= C^{-1} \left( \frac{1}{\omega_h} \right) C \left( \frac{\omega_e}{\omega_h} \right) R_e(\omega_e, T_e) C \left( \frac{\omega_h}{\omega_e} \right) \\ &\quad \times R_h(\omega_h, T_h) C \left( \frac{1}{\omega_h} \right) = C^{-1} \left( \frac{1}{\omega_h} \right) \tilde{M} C \left( \frac{1}{\omega_h} \right). \end{aligned}$$

Mivel az  $(M^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  pontosan akkor korlátos, ha  $(\tilde{M}^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  korlátos, ezért elegendő megmutatni, hogy  $\tilde{M}$  mátrixnak nincs valós sajátértéke, azaz  $\tilde{M}$  minden nemnulla  $\mathbb{R}^2$ -beli vektort (mod  $\pi$ ) nemnulla szöggel forgat. Az  $R_e(\omega_e, T_e)$  minden vektort pontosan  $-\omega_e T_e$  szöggel forgat (lásd (4.22)), továbbá az  $R_h(\omega_h, T_h)$ ,  $C(\frac{\omega_h}{\omega_e})$ , valamint  $C(\frac{\omega_e}{\omega_h})$  hatására bekövetkező szögelfordulásra (4.24) és (4.25) kifejezésekkel adott becslések alapján mondhatjuk, hogy a (4.26) feltétel garantálja, hogy  $\tilde{M}$  minden  $\mathbb{R}^2$ -beli vektort 0-tól különböző szöggel forgat (mod  $\pi$ ). ■

Annak érdekében, hogy összehasonlítsuk a 4.1 tételben adott (4.8) feltételt a (4.26) föltétellel, alkalmazzuk a 4.2 tételt a gravitációmentes és szimmetrikus esetre. Ekkor a következőt kapjuk.

**4.3. Következmény.** *Tegyük föl, hogy a (4.13) egyenletben  $g = 0$ , valamint  $A_h = A_e = A$ . Ha*

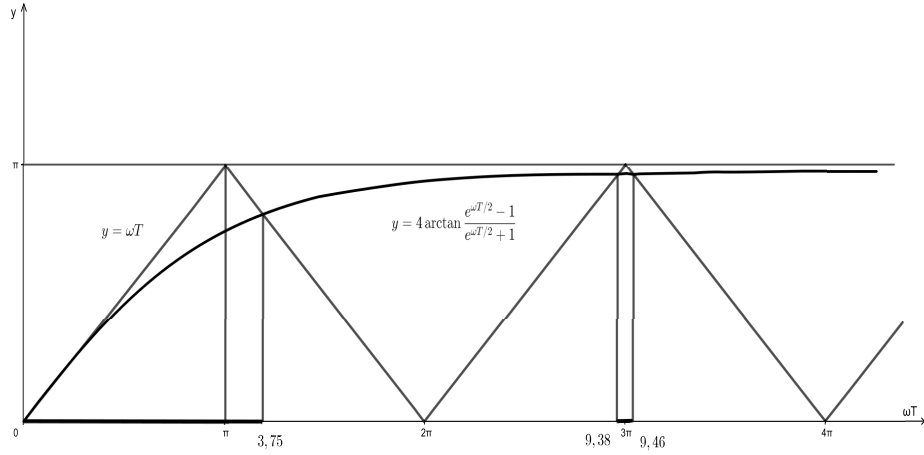
$$\begin{aligned} 4 \arctan \frac{e^{\omega T/2} - 1}{e^{\omega T/2} + 1} &< \\ &< \min\{\text{Rem}(\omega T; 2\pi); 2\pi - \text{Rem}(\omega T; 2\pi)\}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

*akkor (4.13) erősen stabil.*

Kétségtelen, hogy a (4.27) kifejezés komplikáltabb, mint a Levi-Weckesser szerzőpáros által a 4.1 tételben megadott (4.8) föltétel. Ugyanakkor a 4.3 következmény lényegesen javítja 4.1 tételt. Valóban, először is

$$4 \arctan \frac{e^{\omega T/2} - 1}{e^{\omega T/2} + 1} < \omega T \quad (0 < \omega T < \pi),$$

vagyis az első olyan intervallum, amibe stabil megoldásoknak megfelelő pontok vannak az  $\omega T$ -tengelyen, kielégítve a (4.27) feltételt, a  $(0, 3,75 \dots)$  (lásd a 4.6



4.6. ábra. Stabil intervallumok

ábrát) a  $(0, \pi)$  helyett, amit a (4.8) alapján eddig tudtunk. Másfelől pedig, a 4.3 következmény a 4.1 tételt abban az értelemben is javítja, ha úgy tetszik kiterjeszti, hogy további stabil intervallumokat találhatunk az  $\omega T$ -tengelyen a  $2\pi$  után is (lásd a vastagított intervallumot a 4.6 ábrán). Azt mondhatjuk tehát, hogy tetszőlegesen nagy  $\omega T = T\sqrt{A/l}$  esetén lehetséges a stabilizálás. Erre a (4.8) feltételből nem lehet következtetni.

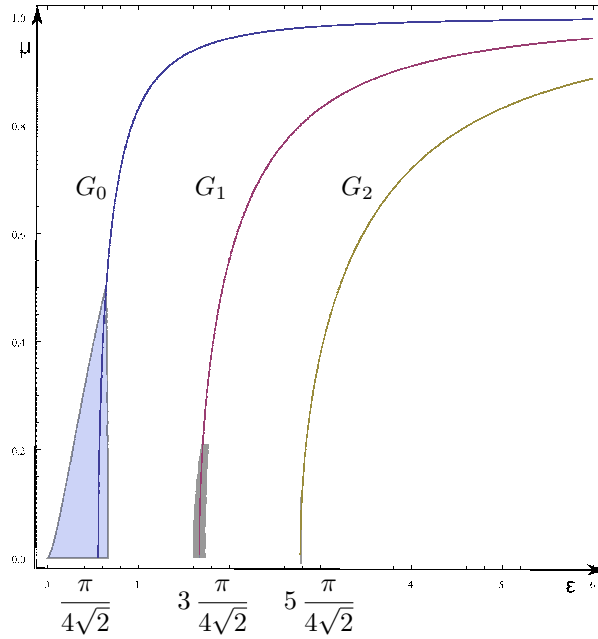
A szimmetrikus esetet ( $A_h = A_e = A, T_h = T_e = T/2$ ) Arnold is vizsgálta [1], bevezetve az

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{D}{l}}, \quad \mu := \sqrt{\frac{g}{A}}, \quad (4.28)$$

paramétereket, ahol a  $D$  a fölfüggesztési pont legnagyobb kitérése (amplitúdója) a rezgés során. A 4.2 tétel formulájában szereplő  $\omega_h T_h, \omega_e T_e$  paraméterek az  $\varepsilon$  és  $\mu$  segítségével a következőképpen írhatóak át.

$$\begin{aligned} \omega_h T &= \sqrt{\frac{A+g}{l}} T = \sqrt{\frac{A(1+g/A)}{l}} T = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}, \\ \omega_e T &= 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2}, \text{ valamint} \\ \frac{\omega_h}{\omega_e} &= \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Arnold azzal a föltevással élt, hogy ezek a paraméterek kicsik ( $\varepsilon \ll 1, \mu \ll 1$ ); és a monodrómia nyomának sorfejtése során ezt kihasználva jutott arra, hogy  $\mu < \varepsilon/3$  elegendő feltétele az erős stabilitásnak. Alkalmazzuk a 4.2 tételünket ebben a szimmetrikus, a gravitáció hatását is figyelembe vevő esetben, az  $\varepsilon$  és  $\mu$

4.7. ábra. Az (4.30) egyenlőtlenség  $S$  megoldáshalmaza

paraméterek segítségével átírva a (4.26) föltételt. Vegyük észre, hogy ebben az esetben nem tettünk föl semmilyen nagyságrendi korlátot a paraméterek értékeire. Ez azt jelenti, hogy az  $\varepsilon - \mu$  sík *globális* stabilitási térképét fogjuk megkapni.

**4.4. Következmény.** Tegyük föl, hogy  $A_h = A_e = A$ ,  $T_h = T_e = T/2$ . Ha

$$2 \arctan \frac{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} - 1}{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} + 1} + 4 \left| \arctan \sqrt[4]{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} - \frac{\pi}{4} \right| < \min\{\text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2}; \pi); \pi - \text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2}; \pi)\}, \quad (4.30)$$

akkor a (4.13) erősen stabil.

Az  $\varepsilon - \mu$  síkon a stabilitási tartománynak végtelen sok komponense van, melyeket a  $2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2} = k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) egyenletű görbék választanak el egymástól. Mivel a (4.30) bal oldalának első tagja tart a  $\pi/2$ -be, amint  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , és a második tagja tart  $\pi$ -be, midőn  $\mu \rightarrow 1-0$ , ezért a stabilitási tartománynak a  $\mu = 1$  egyenes közelében nincsen pontja, továbbá a komponensek egyre kevésbé kifejezettek, elvékonyodnak, amikor  $k \rightarrow \infty$  (lásd a 4.7 ábrát).

Az (4.30) jobb oldala a

$$G_k : \quad 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (4.31)$$

görbék mentén éri el a maximális,  $\pi/2$  értéket, vagyis a (4.30) egyenlőtlenség  $S \subset \mathbb{R}_+^2$  megoldáshalmazának  $k$ -adik komponense a  $G_k$  görbe környezetében található, másképpen kifejezve, a  $k$ -adik komponens gerincét a  $G_k$  görbe alkotja. Jelölje ugyanis  $S_{\mu=0}$  az  $S$  és az  $\varepsilon$ -tengely metszetét. Ekkor a  $S_{\mu=0}$  pontjai eleget tesznek a

$$2 \arctan \frac{e^{2\sqrt{2}\varepsilon} - 1}{e^{2\sqrt{2}\varepsilon} + 1} < \min\{\text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon; \pi); \pi - \text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon; \pi)\},$$

egyenlőtlenségnek, mely biztosan teljesül, ha  $\varepsilon = (2k+1)\pi/4\sqrt{2}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Mivel  $S$  nyílt, ezért bármely  $k \in \mathbb{N}$  esetén van  $G_k$  körüli komponense az  $\varepsilon$ -tengely közelében. Másrészt, mivel az  $x \mapsto (x-1)/(x+1)$  ( $x \geq 0$ ) függvény növekvő, ezért akármilyen  $k \in \mathbb{N}$  esetén az  $S_{\mu=0}$  halmazba kell esnie a  $G_k$  végpontjának. Továbbá látható, hogy az  $S$  tartalmaz pontot az  $\varepsilon$ -tengelyről, azaz pontot az  $S_{\mu=0}$  halmazból. Ezzel bizonyítást nyert, hogy  $S$  a  $G_k$  görbék mentén található komponensekből áll.

Minél nagyobb az  $\varepsilon$ , annál nehezebb garantálni a (4.13) stabilitását. Mivel  $D = \varepsilon^2 l$ , azért azt mondhatjuk, hogy a fölfüggesztési pont rezgetésének egyre nagyobb amplitúdója egyre nehezebbé teszi a fordított inga stabilizálását. Mindazonáltal elméletileg lehetséges megvalósítani. Az úgynevezett kritikus amplitúdók

$$D^{(k)} = \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{32} l \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (4.32)$$

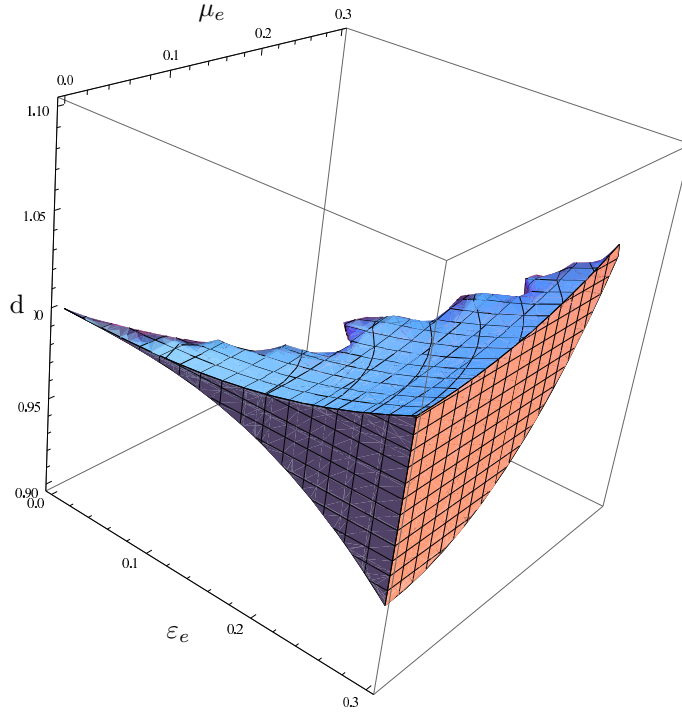
a végtelenbe divergálnak, amint  $k \rightarrow \infty$ , s így a nekik megfelelő  $A^{(k)}$  gyorsulásokkal az inga felső egyensúlyi helyzete stabilizálható. Természetesen  $A^{(k)} \rightarrow \infty$ , ha  $k \rightarrow \infty$ .

Tekintsük most az általános (aszimmetrikus) esetet, használva az Arnold nyomán bevezetett

$$\varepsilon_h := \sqrt{\frac{D_h}{l}}, \quad \mu_h := \sqrt{\frac{g}{A_h}}; \quad \varepsilon_e := \sqrt{\frac{D_e}{l}}, \quad \mu_e := \sqrt{\frac{g}{A_e}}.$$

paramétereket. Ezek egymástól nem függetlenek, ahogy a (4.12) összefüggések mutatják is. Legyen

$$d := \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_e} = \frac{\mu_h}{\mu_e} = \sqrt{\frac{A_e}{A_h}} = \sqrt{\frac{T_h}{T_e}} = \sqrt{\frac{D_h}{D_e}},$$



4.8. ábra. A stabilitási tartomány egy része az aszimmetrikus esetben

az a paraméter, amelyik méri a hiperbolikus és elliptikus fázis arányát a fölfüggesztési pont rezgése során. Az  $\varepsilon_h, \mu_h$  mennyiségeket kifejezve,  $\varepsilon_e, \mu_e, d$  független paraméterek segítségével (a szimmetrikus esetet a  $d = 1$  fejezi ki) a 4.2 tétel a következő alakot ölti:

#### 4.5. Következmény. $Ha$

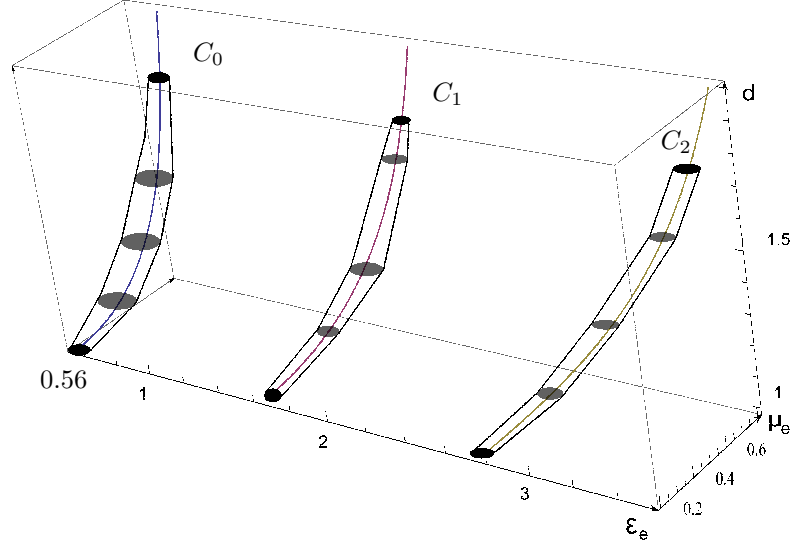
$$2 \arctan \frac{\exp \left[ 2\sqrt{2}d\varepsilon_e \sqrt{1 + d^2\mu_e^2} \right] - 1}{\exp \left[ 2\sqrt{2}d\varepsilon_e \sqrt{1 + d^2\mu_e^2} \right] + 1} + 4 \left| \arctan \frac{\sqrt{\frac{1 + d^2\mu_e^2}{1 - \mu_e^2}}}{d} - \frac{\pi}{4} \right| < \quad (4.33)$$

$$< \min\{\text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon_e \sqrt{1 - \mu_e^2}; \pi); \pi - \text{Rem}(2\sqrt{2}\varepsilon_e \sqrt{1 - \mu_e^2}; \pi)\},$$

akkor a (4.13) egyenlet erősen stabil.

A 4.5 következmény által megadott stabilitási tartomány egy részét láthatjuk a 4.8 ábrán. Ennek a testnek a  $d = 1$  síkkal vett metszete megfelel a 4.7 ábrán látható stabilitási tartomány első komponensének.

A (4.33) feltétel lényegesen nagyobb esélyt ad a stabilizálásra, mint a (4.30).

4.9. ábra. Stabilitási tartomány az  $\varepsilon_e$ - $\mu_e$ - $d$ -térben

Stabilitás szempontjából egy jó eset, amikor (4.33) bal oldalának második tagja zérus, míg a jobb oldala eléri a maximális,  $\pi/2$  értéket, azaz, ha

$$\begin{aligned} 1 + d^2 \mu_e^2 &= d^2 (1 - \mu_e^2), \\ 2\sqrt{2}\varepsilon_e \sqrt{1 - \mu_e^2} &= (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ezek a kifejezések az  $\varepsilon_e - \mu_e - d$ -tér görbéit definiálják:

$$\begin{aligned} C_k : d &\mapsto \left( \frac{(2k+1)\pi}{4} \frac{d}{\sqrt{d^2+1}}, \frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{2d}}, d \right) \quad (d \geq 1) \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

A (4.13) egyenlet ezen görbék mentén erősen stabil, hiszen a (4.33) kifejezés bal oldalának első tagja mindig kisebb, mint  $\pi/2$ . Más szavakkal kifejezve, az  $\varepsilon_e - \mu_e - d$ -térbeli stabilitási tartomány komponensei ezen  $C_k$  görbék mentén találhatóak, lásd a 4.9 ábrát.

A szimmetrikus eset tárgyalásánál említettük, hogy a fordított inga stabilizálható a fölfüggesztési pont tetszőlegesen nagy amplitúdójú rezgetésével, lásd a (4.32)-ben megadott kritikus értékeket. Ezzel együtt a megfelelő  $A^{(k)}$  gyorsulások a végtelenbe divergálnak, amikor  $k \rightarrow \infty$ , amit meglehetősen nehéz realizálni. Most, az aszimmetrikus esetben még nagyobb az esély a stabilizálásra, hiszen a gyorsulást egy előre adott értéken lehet rögzíteni. Tehát bármely  $\bar{\mu}_e$

( $0 \leq \bar{\mu}_e < \sqrt{2}/2$ ) esetén található olyan  $\bar{d} \geq 1$  és  $\bar{\varepsilon}_e^{(k)}$  ( $\bar{\varepsilon}_e^{(k)} \rightarrow \infty$ , ha  $k \rightarrow \infty$ ) úgy, hogy a (4.13) egyenlet az  $\bar{\varepsilon}_e^{(k)}$ ,  $\bar{\mu}_e$ ,  $\bar{d}$  paraméterekkel erősen stabil. A megfelelő paraméterértékek a (4.34) egyenletekből megkaphatóak:

$$\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\bar{\mu}_e^2}}, \quad \bar{\varepsilon}_e^{(k)} = \frac{(2k+1)\pi}{4\sqrt{2}\sqrt{1 - \bar{\mu}_e^2}} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Sikerült tehát a [28] cikkben megismert geometriai módszert kiterjeszteni olyan esetre, amiben az eredeti nem működik, és így az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilis állapotait leíró globális stabilitási térképet tudtunk adni. Tárgyalásunk általános jellegének köszönhetően azt is megkaptuk, hogy ha nem szimmetrikus rezgetésnek vetjük alá az inga fölfüggesztési pontját, akkor nagyobb az esélye annak, hogy a felső egyensúlyi helyzet stabilissá válik.



## 5. fejezet

# A fordított inga periodikus mozgásai

Az előző fejezetben az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatóságával kapcsolatos vizsgálataink során eljutottunk a globális stabilitási térkép elkészítéséig. Fontos megjegyezni, hogy mindezt becsléseken alapuló számolások segítségével kaptuk, így a kapott stabilitási térkép is egy közelítés. A hintázás modelljének tanulmányozásakor szintén elemi geometriai megfontolásokat végezve teljesen pontos stabilitási térképet tudtunk készíteni még hozzá úgy, hogy kihasználtuk a Floquet-elv egy fontos elemét: a  $2T$ -periodikus együtthatós egyenlet  $2T$ -, illetve  $4T$ -periodikus megoldásait föltárva eljutottunk a stabil, instabil zónák határoló görbéihez. Ebben a fejezetben célunk, hogy a fordított ingára vonatkozóan elkészítsük a pontos stabilitási térképet úgy, hogy megkeressük a periodikus megoldásokat. Meggondolásaink követik a [11] dolgozatot.

### 5.1. A vizsgált modell

Ebben a részben azt az esetet tárgyaljuk, amikor az inga fölfüggesztési pontjára egy függőleges irányú szimmetrikus erő gyakorol hatást, továbbá a gravitáció hatását is figyelembe vesszük. Erről a modellről olvashatunk Arnold [1] művében is, ahol a szerző a monodrómia mátrix nyomának sorfejtésével ad becslést a stabil, instabil zónákra. Ennél pontosabbat fogunk mondani, amit az 5.10

ábra meglehetősen érzéketesen mutat be. Tekintsük tehát a (4.1) egyenlettel adott lépcsősfüggvényt mint az inga fölfüggesztési pontjára kifejetett rezgetés hatására létrejövő gyorsulást. A (4.1)-ben adotthoz képest annyi technikai változtatást teszünk, hogy az említett gyorsulás  $2T$ -periodikus, azaz

$$a(t) := \begin{cases} A, & \text{ha } 2kT \leq t < (2k+1)T, \\ -A, & \text{ha } (2k+1)T \leq t < (2k+2)T, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (5.1)$$

ahol  $A, T$  pozitív konstansok. A mozgásegyenlet a (4.13)-ban már látott

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + a(t))\psi = 0. \quad (5.2)$$

Ezt az egyenletet az  $a(t)$  két különböző értékének megfelelően a (4.16)-hez hasonló sajátfrekvenciák bevezetésével tudjuk kezelni. Legyen most

$$\omega_h := \sqrt{\frac{A+g}{l}}, \quad \omega_e := \sqrt{\frac{A-g}{l}},$$

tehát  $A > g$ . Innen a (4.17)–(4.22) kifejezéseket megismételhetjük az értelmezési tartományok értelemszerű módosításával. Ez azt jelenti, hogy a már jól ismert dinamikával találjuk szemben magunkat: hiperbola menti mozgás, dilatació  $\omega_h/\omega_e > 1$  mértékkel az  $y$ -tengellyel párhuzamosan, origó körüli körön történő mozgás, majd egy  $\omega_e/\omega_h < 1$  mértékű kontrakció egymás utáni ismétlése jellemzi a fázispont mozgását. Bennünket azok a mozgások érdekelnek, melyek során a fázispont visszatér a kiinduló állapotba méghozzá vagy egy periódus ( $2T$ ) vagy két periódus ( $4T$ ) alatt, hiszen az ilyen mozgásoknak megfelelő pontok alkotják a stabil, instabil zónák határait képező görbéket. Mindenek előtt a szükséges technikai eszközöket tekintsük át.

Ahogy már láttuk, a (4.20)-beli második egyenlet szeparábilis, így írhatjuk, hogy

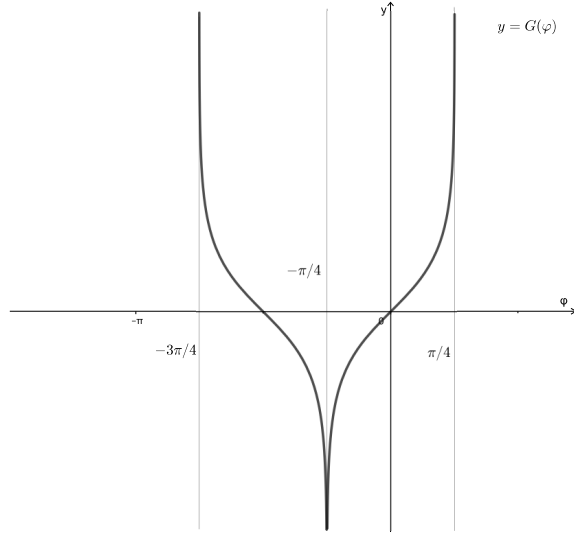
$$\int_0^t \frac{\dot{\varphi}_h(s) \, ds}{\cos 2\varphi_h(s)} = \omega_h t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

vagyis

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_h(t)} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \omega_h t, \quad \varphi_0 := \varphi_h(0) \neq -\frac{\pi}{4}. \quad (5.3)$$

Legyen  $G(\varphi) := \int d\varphi / \cos 2\varphi$ . Ekkor

$$G(\varphi) = -\frac{1}{2} \ln \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} - \varphi \right) \right|,$$

5.1. ábra. A  $G$  függvény grafikonja

azaz

$$G(\varphi) := \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} - \varphi \right), & \text{ha } -\pi/4 < \varphi < \pi/4, \\ -\frac{1}{2} \ln \tan \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), & \text{ha } -3\pi/4 < \varphi < -\pi/4. \end{cases}$$

Az (5.3) alapján azt kapjuk, hogy

$$\varphi_h(t) = G^{-1}(\omega_h t + G(\varphi_0)).$$

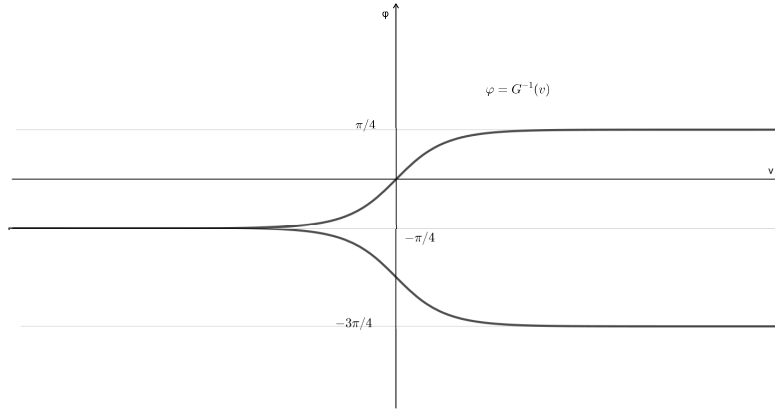
Speciálisan,

$$\varphi_h(T-0) = G^{-1}(\omega_h T + G(\varphi_0)),$$

ahol  $\varphi_h(T-0)$  a  $\varphi$   $T$ -beli bal oldali limeszét jelöli. Most már meg tudjuk adni a (4.20) második egyenletének megoldását:

$$\varphi_h(t; \varphi_0) := \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \arctan \left( e^{-2\omega_h t} \tan \left( \frac{\pi}{4} - \varphi_0 \right) \right), & \text{ha } -\pi/4 < \varphi_0 < \pi/4, \\ \frac{\pi}{4} + \arctan \left( e^{-2\omega_h t} \tan \left( \varphi_0 - \frac{\pi}{4} \right) \right), & \text{ha } -3\pi/4 < \varphi_0 < -\pi/4. \end{cases} \quad (5.4)$$

Meggondolásainkat a  $(-3\pi/4, \pi/4)$  intervallumra mondtuk ki, aminek az oka, hogy a mozgásegyenlet lineáris, így ha  $t \mapsto (x(t), y(t))$  egy megoldás, akkor a  $t \mapsto (-x(t), -y(t))$  szintén egy megoldás, vagyis elég az egyik  $\pi$  hosszú intervallummal foglalkoznunk.

5.2. ábra. A  $G^{-1}$  függvény grafikonja

Ahogy azt tudjuk, az (5.2) mozgásegyenletben az együtthatófüggvény szakaszonként folytonos. Ennek megfelelően egy  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény az (5.2) egy megoldása, ha folytonosan differenciálható az  $\mathbb{R}$  halmazon, kétszer differenciálható az

$$S := \mathbb{R} \setminus \{kT\}_{k \in \mathbb{N}},$$

halmazon, és kielégíti a mozgásegyenletet az  $S$ -en. Bármely  $\psi$  megoldás az  $x_h : [2kT, (2k+1)T) \rightarrow \mathbb{R}$  és az  $x_e : [(2k+1)T, (2k+2)T) \rightarrow \mathbb{R}$  megoldásokból áll, rendre a (4.19) és (4.21) egyenleteknek megfelelően, ( $k \in \mathbb{N}$ ). A  $\dot{\psi}$  folytonosságát garantálandó az  $\mathbb{R}$ -en, megköveteljük az alábbi feltételeket:

$$\begin{aligned} x_e((2k+1)T) &= \lim_{t \rightarrow (2k+1)T-0} x_h(t), \\ x_h((2k+2)T) &= \lim_{t \rightarrow (2k+2)T-0} x_e(t); \\ \omega_e y_e((2k+1)T) &= \lim_{t \rightarrow (2k+1)T-0} \omega_h y_h(t), \\ \omega_h y_h((2k+2)T) &= \lim_{t \rightarrow (2k+2)T-0} \omega_e y_e(t). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Az (5.5) geometriai jelentése az elliptikus és hiperbolikus fázisok között föllépő „ugrás”. Ahogyan a hintázás problémájának földolgozásakor, úgy most is használni fogjuk az ott bevezetett  $f$  és  $\phi$  függvényeket. Emlékeztetőül: ha rendre  $(r_R, \varphi_R)$ , illetve  $(r_C, \varphi_C) = (\rho(r, \varphi; \kappa), \phi(\varphi; \kappa))$  jelöli az  $(r, \varphi)$  pont képét az origó körüli,  $\alpha$  szögű forgatás, illetve a  $\kappa$  mértékű kontrakció-dilatáció során, akkor

egyrészt  $r_R(r, \varphi) = r$ ,  $\varphi_R(r, \varphi) = \varphi - \alpha$ , másrészt

$$\begin{aligned}\rho(r, \varphi; \kappa) &= \sqrt{x^2 + \kappa^2 y^2} = r \sqrt{1 + (\kappa^2 - 1) \sin^2 \varphi} = f(\varphi; \kappa) r, \\ f(\varphi, \kappa) &:= \sqrt{1 + (\kappa^2 - 1) \sin^2 \varphi}, \quad (\kappa > 0, -\infty < \varphi < \infty).\end{aligned}$$

Továbbá, mivel  $\tan \phi(\varphi; \kappa) = \kappa y/x = \kappa \tan \varphi$  ( $x \neq 0$ , vagyis  $\varphi \not\equiv \pi/2 \pmod{\pi}$ ), így tehát

$$\phi(\varphi; \kappa) := \begin{cases} \arctan(\kappa \tan \varphi) + \left[ \frac{\varphi + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right] \cdot \pi, & \text{ha } \varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ \varphi, & \text{ha } \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

ahol  $[x]$  jelöli az  $x \in \mathbb{R}$  szám egészrészét. Szintén emlékeztetőül említjük, hogy a számolásaink során gyakran használjuk az  $f$  és  $\phi$  függvények tulajdonságait (részletesen lásd 3.7 lemmát). Az ott felsorolt tulajdonságok közül megemlítjük, hogy  $f$  páros függvény, a  $\phi$  pedig páratlan, továbbá  $\phi(\cdot + k\pi; \kappa) = \phi(\cdot; \kappa) + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );  $\phi(\phi(\varphi; \kappa); 1/\kappa) = \varphi$  ( $\varphi \in \mathbb{R}$ ).

## 5.2. Periodikus pályák konstruálása

Induljon a  $t \mapsto (r(t), \varphi(t))$  trajektória az  $r_0, \varphi_0$  pontból a  $t_0 = 0$  időpillanatban. A trajektória első öt nevezetes pontját a következőképpen adhatjuk meg, bevezetve a  $D := \omega_h/\omega_e > 1$  jelölést:

$$\begin{aligned}r_0 &:= r(0), & \varphi_0 &:= \varphi(0) \pmod{2\pi}, \quad -2\pi < \varphi_0 \leq 0; \\ r_1 &:= r(T-0), & \varphi_1 &:= \varphi(T-0); \\ r_2 &:= r(T) = f(\varphi_1; D) r_1, & \varphi_2 &:= \varphi(T) = \phi(\varphi_1; D); \\ r_3 &:= r(2T-0) (= r_2), & \varphi_3 &:= \varphi(2T-0); \\ r_4 &:= r(2T) = f(\varphi_3; 1/D) r_3, & \varphi_4 &:= \varphi(2T) = \phi(\varphi_3; 1/D).\end{aligned} \tag{5.6}$$

A rendszer viselkedését a  $[2kT, (2k+1)T)$  intervallumon leíró  $\ddot{\psi} - \omega_h^2 \psi = 0$ , és a  $[(2k+1)T, (2k+2)T)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) intervallumon megadó  $\ddot{\psi} + \omega_e^2 \psi = 0$  egyenletek linearitása miatt minden megoldás ellentettje is megoldás, ahogyan erre már korábban utaltunk. Ebből kifolyólag elegendő a  $-\pi/2 \leq \varphi_0 < \pi/2$  esetet vizsgálnunk.

**5.1. Lemma.** Legyen  $\varphi_0 \in [-\pi/2, \pi/2)$ . Ekkor a  $t \mapsto (r(t), \varphi(t))$  egy, az (5.2) egyenlet  $2T$ -periodikus megoldásának megfelelő trajektória akkor és csakis akkor, ha vagy

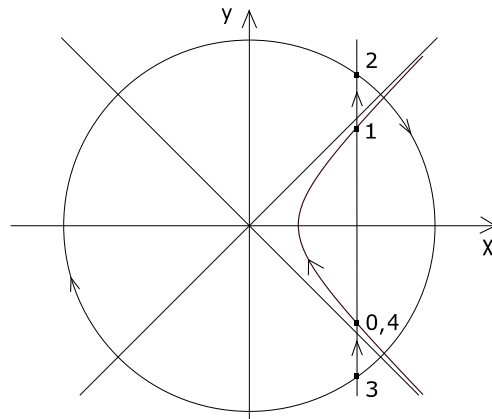
(a)  $-\pi/4 < \varphi_0 < 0$  és van olyan  $k$  nemnegatív egész szám úgy, hogy

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\varphi_0 \\ \varphi_3 = -\varphi_2 - 2k\pi, \end{cases} \quad (5.7)$$

vagy

(b)  $-\pi/2 < \varphi_0 < -\pi/4$  és van olyan  $k$  nemnegatív egész szám úgy, hogy

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\varphi_0 - \pi \\ \varphi_3 = -\varphi_2 - \pi - 2(k+1)\pi. \end{cases} \quad (5.8)$$



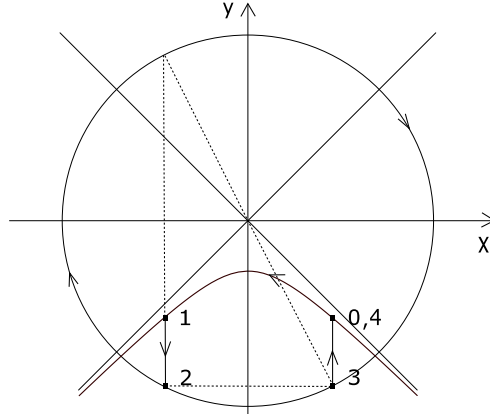
5.3. ábra. Egy  $2T$ -periodikus pálya, (a).

**Bizonyítás.** *Szükségesség.* Legyen  $\psi$  az (5.2) egyenlet egy  $2T$ -periodikus megoldása úgy, hogy  $-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2$ . A (4.20) egyenletekből adódik, hogy minden hiperbola kielégít egy

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \tan 2\varphi \quad \left( -\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}, \quad m \in \{-1, 0, 1\} \right) \quad (5.9)$$

differenciálegyenletet. Az (5.9) szeparábilis, integrálva azt kapjuk, hogy

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{\frac{|\cos 2\varphi_0|}{|\cos 2\varphi|}} \quad \left( -\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} < \varphi_0, \varphi < \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}, \quad m \in \{-1, 0, 1\} \right).$$

5.4. ábra. Egy  $2T$ -periodikus pálya, (b).

Használva az (5.6) jelöléseit és az  $f$  függvény tulajdonságait, azt írhatjuk, hogy

$$r_3 = f(\varphi_0; D)r_0, \quad r_2 = f(\varphi_1; D)r_1.$$

Mivel a megoldás  $2T$ -periodikus, és  $r_3 = r_2$ , ezért

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{f(\varphi_0; D)}{f(\varphi_1; D)} = \sqrt{\frac{1 + (D^2 - 1) \sin^2 \varphi_0}{1 + (D^2 - 1) \sin^2 \varphi_1}}. \quad (5.10)$$

Másrészt

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt{\frac{|\cos 2\varphi_0|}{|\cos 2\varphi_1|}}.$$

Az előzőek összevetéséből adódik, hogy

$$\sqrt{\frac{|\cos 2\varphi_0|}{|\cos 2\varphi_1|}} = \sqrt{\frac{1 + (D^2 - 1) \sin^2 \varphi_0}{1 + (D^2 - 1) \sin^2 \varphi_1}},$$

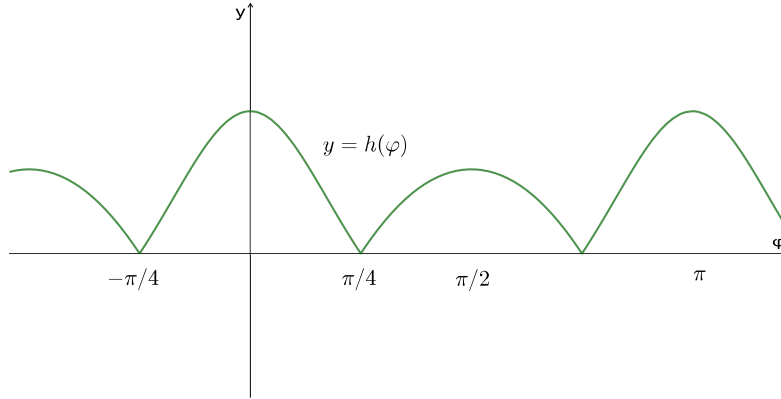
melynek segítségével definiáljuk az alábbi  $h$  függvényt, lásd a 5.5 ábrát:

$$h(\varphi) := \frac{|\cos 2\varphi|}{1 + (D^2 - 1) \sin^2 \varphi}.$$

A  $h$  függvény használatával (5.10) összefüggést úgy fejezhetjük ki, hogy  $h(\varphi_0) = h(\varphi_1)$ .

Megmutatható, hogy  $h$  szigorúan monoton növekvő a  $[\pi/4 + m\pi/2, \pi/2 + m\pi/2]$ , míg szigorúan monoton csökkenő az  $[m\pi/2, \pi/4 + m\pi/2]$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) intervallumon.

Ha  $\varphi_0 \in [0, \pi/4]$  vagy  $\varphi_0 \in [\pi/4, \pi/2]$ , akkor  $\varphi_1$  ugyanabba az intervallumba esik, mint  $\varphi_0$ . Mivel  $h$  szigorúan monoton ezeken az intervallumokon, ezért

5.5. ábra. A  $h$  függvény grafikonja

$h(\varphi_0) = h(\varphi_1)$  nem teljesülhet. Ez azt jelenti, hogy  $2T$ -periodikus megoldás nem indulhat ilyen  $\varphi_0$  állapotból.

A  $h$  függvény páros és periodikus, periódusa  $\pi$ , vagyis, ha  $\varphi_0 \in (-\pi/4, 0)$ , akkor pontosan egy olyan  $\varphi_1 \in (0, \pi/4)$  létezik, melyre  $h(\varphi_0) = h(\varphi_1)$ , tehát teljesül (5.7) első egyenlete. Ha  $\varphi_0 \in (-\pi/2, -\pi/4)$ , akkor pontosan egy olyan  $\varphi_1 \in (-3\pi/4, -\pi/2)$  létezik, hogy  $h(\varphi_0) = h(\varphi_1)$ , így tehát (5.8) első egyenlete teljesül.

Az (a) esetben a  $\varphi_1 = -\varphi_0$  miatt az  $1 \rightarrow 2$  dilatáció és a  $3 \rightarrow 4 = 3 \rightarrow 0$  kontrakció ugyanazon függőleges egyenes mentén zajlik (lásd a 5.3 ábrát). Ebből következik, hogy  $\frac{\varphi_2 + (\varphi_3 + 2k\pi)}{2} = 0$ , amiből átrendezéssel kapjuk (5.7) második egyenletét.

Hasonlóképpen, a (b) esetben  $\frac{\varphi_2 + (\varphi_3 + 2(k+1)\pi)}{2} = -\pi/2$  (lásd a 5.4 ábrát). Ezt alkalmasan átrendezve kapjuk a (5.8) második egyenletét.

*Elegendőség.* Az (a) eset. Tegyük föl, hogy a fázispont úgy mozog a fázissíkon, hogy (5.7) teljesül. Fölhasználva az (5.6) jelöléseit, valamint az  $f$  és a  $\phi$  függvények tulajdonságait azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= \phi(-\varphi_2 - 2k\pi; 1/D) = \phi(-\varphi_2; 1/D) - 2k\pi = \phi(-\phi(\varphi_1; D); 1/D) - 2k\pi \\ &= \phi(-\phi(-\varphi_0; D); 1/D) - 2k\pi = \varphi_0 - 2k\pi.\end{aligned}$$

Másfelől

$$\begin{aligned}r_4 &= f(\varphi_3; 1/D)r_3 = f(-\varphi_2 - 2k\pi; 1/D)r_2 = f(-\phi(\varphi_1; D); 1/D)f(\varphi_1; D)r_1 \\ &= f(\phi(-\varphi_0; D); 1/D)f(-\varphi_0; D)r_0 = f(-\phi(-\varphi_0; D); 1/D)f(\varphi_0; D)r_0 = r_0.\end{aligned}$$



A (b) eset hasonló számolásokkal mutatható meg. ■

**5.2. Lemma.** *Legyen  $\varphi_0 \in [-\pi/2, \pi/2)$ . A  $t \mapsto (r(t), \varphi(t))$  akkor és csakis akkor az (5.2) egyenlet egy  $4T$ -periodikus, de nem  $2T$ -periodikus megoldásának megfelelő trajektória, ha vagy*

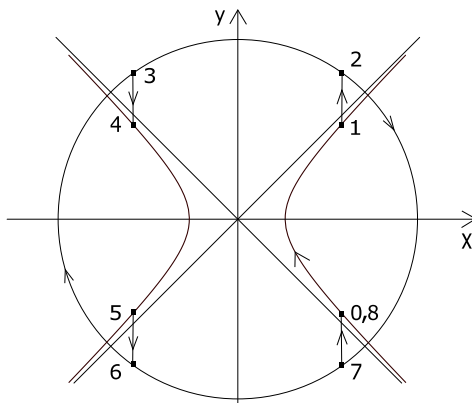
(a)  $-\pi/4 < \varphi_0 < 0$  és van olyan  $k$  nemnegatív egész szám, hogy

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\varphi_0 \\ \varphi_3 = -\varphi_2 - \pi - 2k\pi, \end{cases} \quad (5.11)$$

vagy

(b)  $-\pi/2 < \varphi_0 < -\pi/4$  és van olyan  $k$  nemnegatív egész szám, hogy

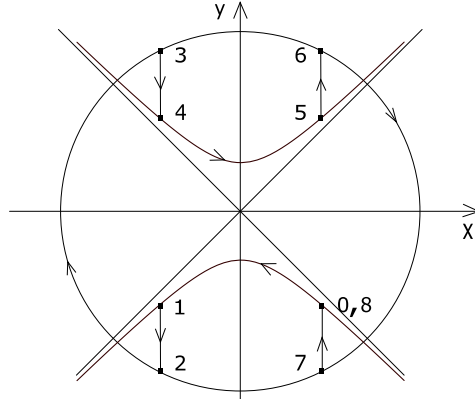
$$\begin{cases} \varphi_1 = -\varphi_0 - \pi \\ \varphi_3 = -\varphi_2 - 2\pi - 2k\pi. \end{cases} \quad (5.12)$$



5.6. ábra. Egy  $4T$ -periodikus pálya, (a).

#### Bizonyítás.

Az (5.2) alapegyenlet lineáris, ezért egy  $t \mapsto (r(t), \varphi(t))$  megoldás  $4T$ -, de nem  $2T$ -periodikus pontosan akkor, ha  $r(2T) = r(0)$ ,  $\varphi(2T) \equiv \varphi(0) - \pi \pmod{2\pi}$ . Ebből következik, hogy az állítás szükségességét ugyanúgy lehet bizonyítani, mint az 5.1 lemma esetében.

5.7. ábra. Egy  $4T$ -periodikus pálya, (b).

*Elegendőség. Az (a) eset.* Ha (5.11) teljesül, akkor az (5.6) jelöléseit használva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= \phi(-\varphi_2 - \pi - 2k\pi; 1/D) = \phi(-\varphi_2; 1/D) - (2k+1)\pi = \phi(-\phi(\varphi_1; D); 1/D) \\ &\quad - (2k+1)\pi = \phi(-\phi(-\varphi_0; D); 1/D) - (2k+1)\pi = \varphi_0 - (2k+1)\pi.\end{aligned}$$

Tehát  $\varphi_4 \equiv \varphi_0 - \pi \pmod{2\pi}$ , amit bizonyítani akartunk. Továbbá

$$\begin{aligned}r_4 &= f(\varphi_3; 1/D)r_3 = f(-\varphi_2 - \pi - 2k\pi; 1/D)r_2 = f(-\phi(\varphi_1; D); 1/D)f(\varphi_1; D)r_1 \\ &= f(\phi(\varphi_0; D); 1/D)f(-\varphi_0; D)r_0 = f(\phi(\varphi_0; D); 1/D)f(\varphi_0; D)r_0 = r_0.\end{aligned}$$

A (b) eset, akár az 5.1 lemma esetén, hasonló számolások segítségével bizonyítható. ■

A következőben megadunk két tételt, melyek szükséges és elegendő feltételeket jelentenek az (5.2) egyenlet  $2T$ -, valamint  $4T$ -periodikus megoldásának létezésére.

**5.3. Tétel.** *Az (5.2) egyenletnek akkor és csakis akkor van  $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan  $A$  és  $T$  pozitív konstansok az (5.1) kifejezésben, és van olyan nemnegatív egész  $k$ , hogy vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T, \quad (5.13)$$

*vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + (2k+1)\pi = \omega_e T. \quad (5.14)$$

**5.4. Tétel.** Az (5.2) egyenletnek akkor és csak akkor van  $4T$ -periodikus, de nem  $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan  $A$  és  $T$  pozitív konstansok az (5.1) kifejezésben, és van olyan nemnegatív egész  $k$ , hogy vagy

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + (2k + 1)\pi = \omega_e T, \quad (5.15)$$

vagy

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T. \quad (5.16)$$

**Bizonyítás.** [Az 5.3 tétel bizonyítása. Szükségesség.] Tegyük föl, hogy  $\psi$  az (5.2) egyenlet egy  $2T$ -periodikus megoldása, továbbá, hogy az 5.1 lemma (a) esete érvényes. Bebizonyítjuk, hogy ebben az esetben (5.13) teljesül. Elliptikus forgásnál  $\dot{\varphi} = -\omega_e$ , ezért

$$\varphi_3 - \varphi_2 = -\omega_e T. \quad (5.17)$$

A  $\varphi_0$  segítségével kifejezzük az (5.17) formulából  $\varphi_2$ -t és  $\varphi_3$ -t. Ezt megtehetjük, ha fölhasználjuk, hogy

$$\varphi_2 = \phi(\varphi_1; D) = \phi(-\varphi_0; D), \quad \varphi_3 = \phi(\varphi_0; D) - 2k\pi.$$

Ezek közül az első nyilvánvaló. A második esetében pedig vegyük figyelembe, hogy  $-\pi/4 < \varphi_0 < 0$  és  $\varphi_1 = -\varphi_0$  maga után vonja, hogy

$$0 < \varphi_2 = \phi(\varphi_1; D) < \frac{\pi}{2}.$$

Ezért (5.7) második egyenlete azt adja, hogy

$$-2k\pi - \frac{\pi}{2} < \varphi_3 = -\varphi_2 - 2k\pi < -2k\pi.$$

Másfelől, a periodicitás miatt  $\varphi_0 \equiv \varphi_4 = \phi(\varphi_3; 1/D) \pmod{2\pi}$ , így  $\varphi_3 = \phi(\varphi_4; D) \equiv \phi(\varphi_0; D) \pmod{2\pi}$ . Ezek alapján tehát  $\varphi_3 = \phi(\varphi_0; D) - 2k\pi$ .

Most már az (5.17) átírható a következőképpen.

$$2\phi(\varphi_0; D) - 2k\pi = -\omega_e T,$$

vagyis

$$2 \arctan(D \tan \varphi_0) - 2k\pi = -\omega_e T. \quad (5.18)$$

Másrészt, (5.4) szerint  $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \arctan(e^{-2\omega_h T} \tan(\frac{\pi}{4} - \varphi_0))$ , ezért

$$e^{-2\omega_h T} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_1\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_0\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \varphi_0\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_0\right)} = \left(\frac{1 + \tan \varphi_0}{1 - \tan \varphi_0}\right)^2,$$

amiből

$$\tan \varphi_0 = \frac{1 - e^{\omega_h T}}{1 + e^{\omega_h T}}. \quad (5.19)$$

Az (5.19) (5.18)-ba történő behelyettesítésével megkapjuk az (5.13)-at.

Most tegyük föl, hogy az 5.1 lemma (b) esete teljesül. Az előzőhöz hasonlóan adódik, hogy

$$2 \arctan(D \tan(-\varphi_0)) - \pi + (k+1)2\pi = \omega_e T, \quad (5.20)$$

és

$$\tan \varphi_0 = \frac{1 + e^{\omega_h T}}{1 - e^{\omega_h T}}, \quad (5.21)$$

ami (5.14)-et eredményezi.

*Elegendőség.* Tegyük föl, hogy (5.13) teljesül. Megmutatjuk, hogy az olyan megoldás, melyre

$$\varphi_0 := \arctan \frac{1 - e^{\omega_h T}}{1 + e^{\omega_h T}} \quad (5.22)$$

$2T$ -periodikus. Ezt úgy tesszük, hogy belátjuk (5.7) teljesülését. Az (5.22) alapján nyilvánvaló, hogy

$$e^{\omega_h T} = \frac{1 - \tan \varphi_0}{1 + \tan \varphi_0}.$$

A  $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \arctan(e^{-2\omega_h T} \tan(\frac{\pi}{4} - \varphi_0))$  alapján ez azt jelenti, hogy

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_1\right) = \frac{1 + \tan \varphi_0}{1 - \tan \varphi_0},$$

és ezáltal  $\varphi_1 = -\varphi_0$ . Megmutatjuk, hogy az (5.7) második egyenlete is teljesül.

A  $\varphi_3 - \varphi_2 = -\omega_e T$  és (5.13) együttesen adják, hogy

$$2 \arctan\left(D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1}\right) + 2k\pi = -(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Ugyanakkor az (5.19) alapján azt írhatjuk, hogy  $\varphi_2 = \phi(\varphi_1; D) = -\phi(\varphi_0; D) = -\arctan(D \tan \varphi_0) = -\arctan\left(D \frac{1 - e^{\omega_h T}}{1 + e^{\omega_h T}}\right)$ , ezért  $2\varphi_2 + 2k\pi = -\varphi_3 + \varphi_2$ , azaz,  $\varphi_3 = -\varphi_2 - 2k\pi$ . Bizonyítottuk tehát, hogy (5.7) teljesül. Az 5.1 lemma garantálja, hogy a megoldás  $2T$ -periodikus.

Induljunk most ki (5.14)-ből, és legyen

$$\varphi_0 := -\arctan \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right). \quad (5.23)$$

Az előző okoskodást lépésről-lépésre megismételve azt kapjuk, hogy az (5.8) teljesül, és a megoldás ezzel a  $\varphi_0$ -al  $2T$ -periodikus. ■

**Bizonyítás.** [Az 5.4 tétel bizonyítása. Szükségesség.] Tegyük föl, hogy van egy olyan  $4T$ -periodikus megoldásunk, amelyik nem  $2T$ -periodikus, továbbá, hogy (5.11) teljesül. Megkapjuk az (5.15) formulát, ha kifejezzük  $\varphi_2$ -t és  $\varphi_3$ -t a  $\varphi_0$  segítségével a  $\varphi_3 - \varphi_2 = -\omega_e T$  egyenletben.

Mivel  $-\pi/4 < \varphi_0 < 0$  és  $\varphi_2 = \phi(\varphi_1; D) = \phi(-\varphi_0; D)$ , ezért azt kapjuk, hogy  $0 < \varphi_2 < \pi/2$ . Az (5.11)-tal együtt ez azt jelenti, hogy

$$\frac{-3\pi}{2} - 2k\pi < \varphi_3 = -\varphi_2 - \pi - 2k\pi < -\pi - 2k\pi.$$

Miután a megoldás  $4T$ -periodikus, ezért  $\varphi_3 = \phi(\varphi_4; D) \equiv \phi(\varphi_0 - \pi; D) \pmod{2\pi}$ , tehát

$$\varphi_3 = \phi(\varphi_0 - \pi; D) - 2k\pi = \phi(\varphi_0; D) - \pi - 2k\pi.$$

A  $\varphi_3 - \varphi_2 = -\omega_e T$  a következőképp írható most már:

$$\omega_e T = -\left(\phi(\varphi_0; D) - \pi - 2k\pi\right) - \phi(-\varphi_0; D) = 2 \arctan(D \tan(-\varphi_0)) + (2k+1)\pi.$$

Az (5.19) figyelembevételével megkaptuk az (5.15) kifejezést.

Ha (5.12)-ből indulunk ki, akkor (5.19) helyett az (5.21) fölhasználásával az előzőhöz hasonló számolás után megkapjuk az (5.16) formulát.

*Elegendőség.* Hasonlóan az 5.3 tétel bizonyításában látottakhoz, megmutatható, hogy ha (5.15) teljesül, és  $\varphi_0$  az (5.22) által van definiálva, akkor (5.11) igaz, és a megoldás  $4T$ -periodikus az 5.2 lemma alapján. Ugyanígy, ha (5.16) teljesül, és  $\varphi_0$  az (5.23) alapján definiált, akkor (5.12) igaz, és a megoldás ebben az esetben is  $4T$ -periodikus. ■

Az 5.3 és 5.4 tételek megfelelő alapot jelentenek arra, hogy egy oszcillációs tételt mondjunk ki az (5.2) egyenletre, amely a 3.14 tétel analogonja.

Vezessük be a következőket:

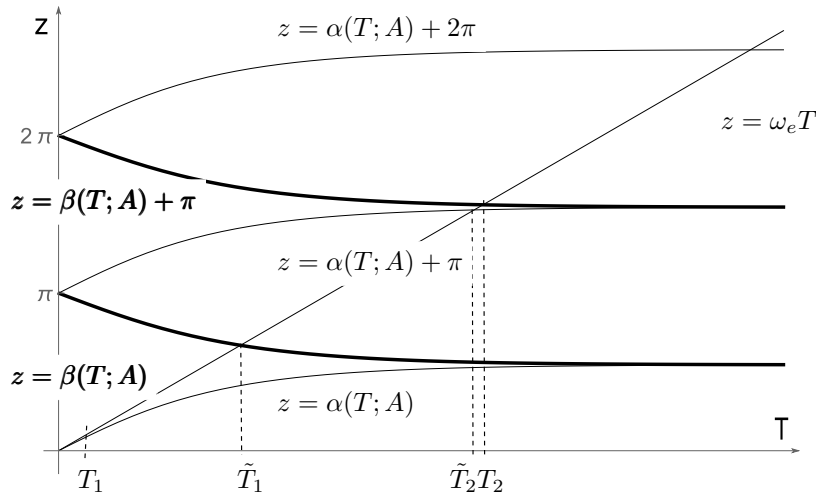
$$\alpha(T; A) := 2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right), \quad \beta(T; A) := 2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right).$$

$\alpha$  (alulról nézve) konkáv, míg  $\beta$  konvex, következésképpen (5.13)-(5.16) minden egyenletének pontosan egy megoldása van minden rögzített  $k \in \mathbb{N}$  és  $A > g$  (vagyis  $\omega_h$  és  $\omega_e$ ) esetén (lásd az 5.8 ábrát).

**5.5. Következmény.** Bármely  $A > g$  esetén vannak olyan  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  és  $\{\tilde{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$  sorozatok, hogy

$$0 < T_1 < \tilde{T}_1 < \tilde{T}_2 < T_2 < T_3 < \cdots \tilde{T}_n < \tilde{T}_{n+1} < T_{n+1} < T_{n+2} \cdots ,$$

és az (5.2) egyenletnek a  $T = T_n$  választással  $2T$ -periodikus megoldásai, illetve  $T = \tilde{T}_n$  választással  $4T$ -periodikus megoldásai vannak.



5.8. ábra. Az (5.13)-(5.16) feltételek

### 5.3. Stabilitás és számítógépes szimulációk

A kapott eredményeket fölhasználjuk arra is, hogy a vizsgált - szimmetrikus - modell stabilitási térképét elkészítsük. Amint arról a 3.1 és 3.2 fejezetekben már volt szó a  $(T, A)$  paramétersík azon részhalmazait, amelyek pontjai megfelelnek az erősen stabil egyenleteknek, stabil zónáknak hívjuk. Annak érdekében, hogy a korábbi - becsléseken alapuló - eredményeinket összevethessük a jelen fejezetben megkapottakkal,  $T$  és  $A$  helyett tekintsük a (4.28) kifejezésben bevezetett  $\varepsilon$  és  $\mu$  paramétereket. Fölhívjuk a figyelmet, hogy az  $\varepsilon$  definíciójában szerepel az amplitúdó, amit ott  $D$  jelölt. Ebben a fejezetben viszont  $D$  már szerepel ( $D = \omega_h/\omega_e$ ). Ezt elkerülhetjük, ha fölhasználjuk a (4.11) kifejezéseket, értelemszerűen módosítva a szimmetrikus esetnek megfelelően. Tehát

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{8l}} T \sqrt{A} \quad (\varepsilon > 0), \quad \mu = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{A}} \quad (0 < \mu < 1).$$

Így az 5.3 és 5.4 tételek formuláiban szereplő  $\omega_h T, \omega_e T$ , és  $D$  paramétereket az  $\varepsilon$  és  $\mu$  segítségével átírva, melyet a (4.29) kifejezésben már megtettünk, átfoglal-mazhatjuk az 5.3 tételt.

**5.6. Következmény.** *Az (5.2) egyenletnek akkor és csakis akkor van  $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan  $\varepsilon$  és  $\mu$  pozitív konstansok, továbbá van olyan nem-negatív egész  $k$ , hogy vagy*

$$2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} \frac{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} - 1}{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} + 1} \right) + 2k\pi = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2},$$

*vagy*

$$2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} \frac{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} + 1}{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} - 1} \right) + (2k+1)\pi = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2}.$$

Hasonlóképpen, az 5.4 tétel is megadható  $\varepsilon$  és  $\mu$  segítségével.

**5.7. Következmény.** *Az (5.2) egyenletnek akkor és csakis akkor van  $4T$ -periodikus, de nem  $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan  $\varepsilon$  és  $\mu$  pozitív konstansok, továbbá van olyan nemnegatív egész  $k$ , hogy vagy*

$$2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} \frac{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} - 1}{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} + 1} \right) + (2k+1)\pi = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2},$$

*vagy*

$$2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} \frac{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} + 1}{e^{2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}} - 1} \right) + 2k\pi = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2}.$$

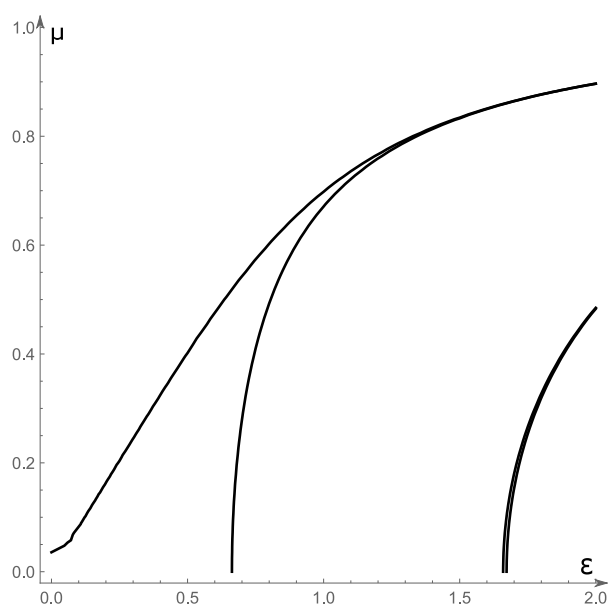
Az 5.6 és 5.7 fölhasználásával az  $(\varepsilon, \mu)$  paramétersíkon tudjuk ábrázolni az Arnold-nyelveket. Így például az első két nyelvet az 5.9 ábrán láthatjuk.

Azt is láttuk, hogy a stabilitási tartomány  $m$ -edik komponensének ( $m \in \mathbb{N}$ ) gerincét a (4.31) formulával megadott  $G_m$  görbe alkotja. Ezen görbék megfelelőjét most a

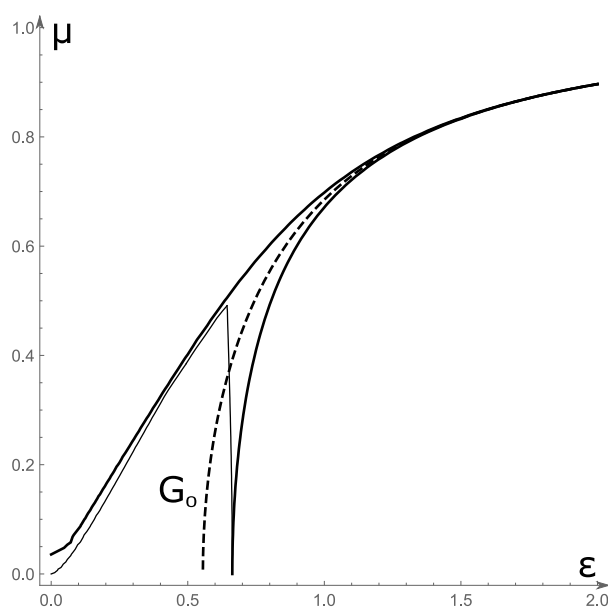
$$G_m : 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} = m\pi, \quad m \in \mathbb{N}$$

egyenlettel adott görbék alkotják.

Az 5.10 ábrán  $m = 0$  esetén láthatjuk a korábbi, becslésen alapuló számítá-sokból kapott stabilitási zónát az ebben a fejezetben számítottal.



5.9. ábra. Az első két stabil zóna

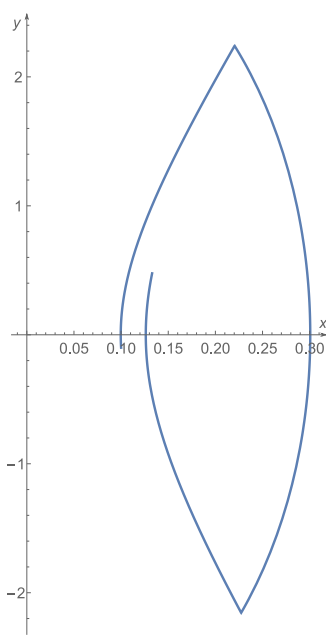


5.10. ábra. A korábban becsléssel kapott és a pontos stabil zóna

A kiszámított periodikus pályák, és a segítségükkel elkészített stabilitási térkép alapján számítógépes szimulációkat készíthetünk. A számítógéppel az



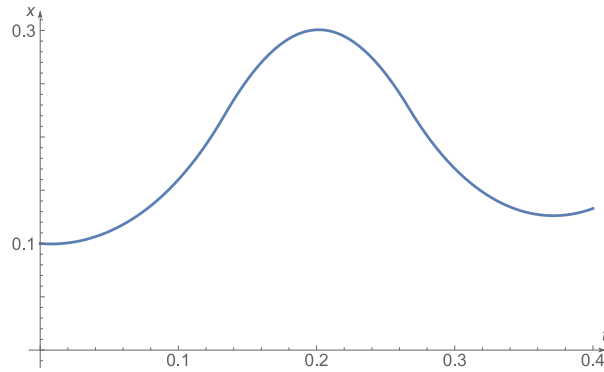
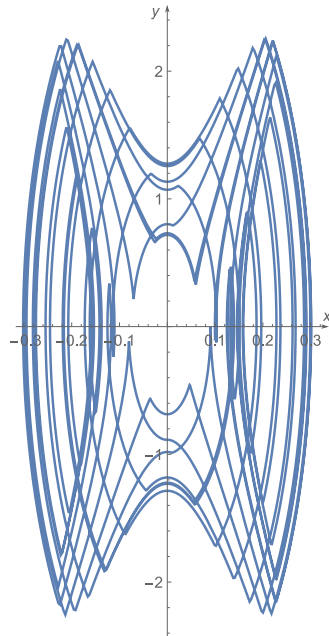
$\dot{x} = y, \dot{y} = \frac{g+a(t)}{l}x$  differenciálegyenlet-rendszert oldatjuk meg, vagyis az állapothatározók a szögelfordulás és annak idő szerinti deriváltja. Így egyfelől vizualizálhatjuk mindazt, amit kiszámoltunk, másfelől bizonyos mértékig visszaigazolást nyerhetünk számolásunk helyességéről. A Wolfram Research Mathematica 10.4 szoftverét használjuk a számítógépes kísérletezés során. A 5.9 ábrát tekintve és a  $\mu = 0,2 \Rightarrow A = 245,25$  értéket, valamint az  $\varepsilon = 0,5 \Rightarrow T = 2/15$  értéket választva nézzük meg mit ad a számítógépes szimuláció, ha a mozgásegyenletet a  $[0, 6/15]$  intervallumon oldatjuk meg, illetve ábrázoljuk a fázissíkon a trajektóriát, valamint a  $t \mapsto x(t)$  függvény grafikonját, tehát az inga rudjának függőlegessel bezárt szögét az idő függvényében. Kezdeti értékeként az  $x_0 = 0,1, y_0 = -0,1$  választva az  $l = 2$  hosszúságú inga esetén az 5.11, 5.12 ábrákat kapjuk.



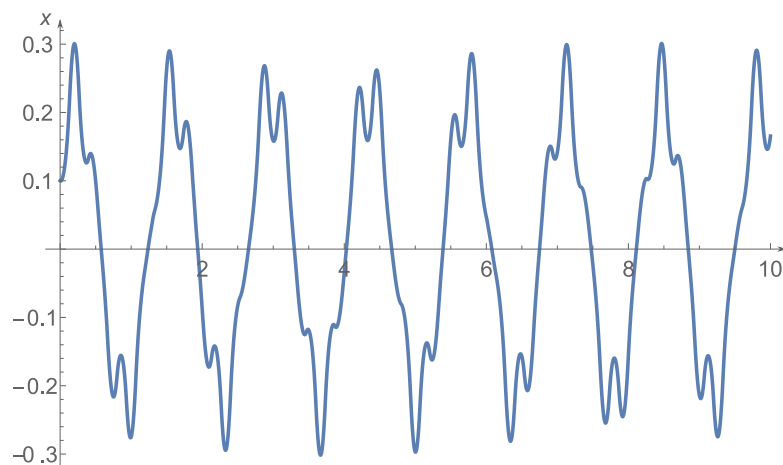
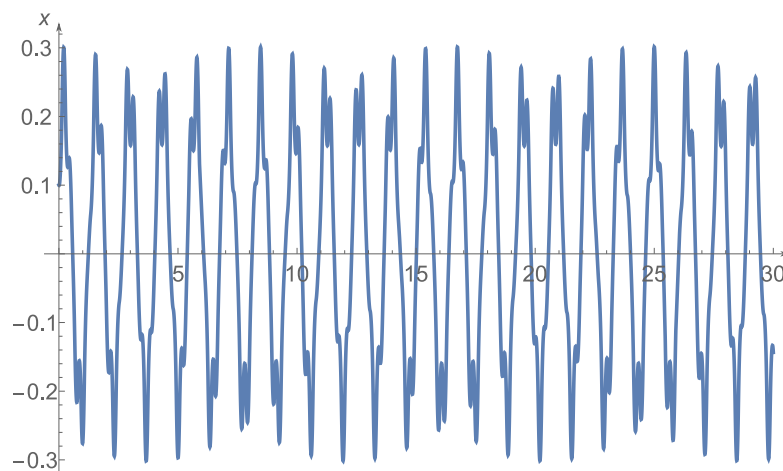
5.11. ábra. A trajektória, ha  $t \in [0, 6/15]$

Ugyanazokkal a paraméterekkel, de a  $[0, 1]$  intervallumon megoldva az egyenletet, az 5.13 és az 5.14 ábrák alapján is egyre jobban érezhető, hogy a megoldás stabil.

Egy viszonylag hosszú szakaszon ( $[0, 30]$ ) is nézzük meg a szögkitérést: 5.15 ábra.

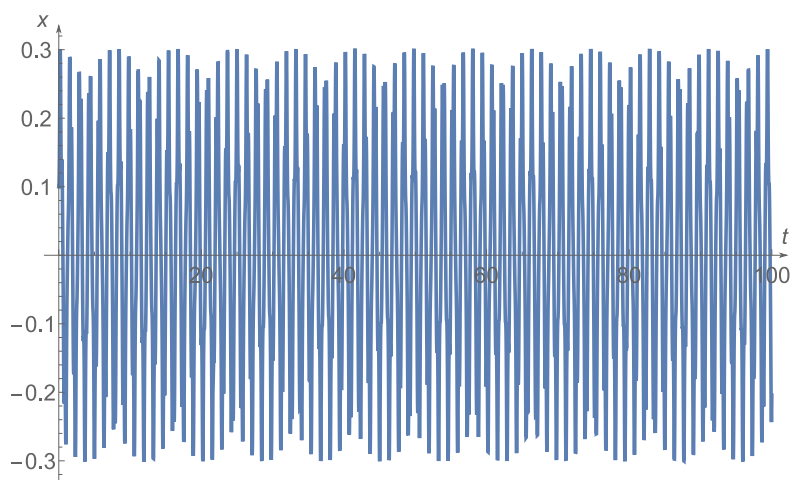
5.12. ábra. Az  $x = x(t)$  szögkitérés, ha  $t \in [0, 6/15]$ 5.13. ábra. A trajektória, ha  $t \in [0, 1]$ 

Az 5.15 ábráról is látszódik, hogy a megoldásgörbe a lebegésre emlékeztető hatást jelez. Ez a Floquet-elvvel olvasható gondolatok alapján nem is meglepő: egy  $2T$ -periodikus együtthatójú rendszer stabil megoldásairól van szó, vagyis a monodrómia mátrix sajátértékei tisztán képzetesek, így tehát a 3.1 tételben az általános megoldásra adott  $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$  formula alapján az alaprendszert  $r(t) \cos \beta t - s(t) \sin \beta t$ ,  $r(t) \cos \beta t + s(t) \sin \beta t$  alakú függvények alkotják, ahol  $r$  és

5.14. ábra. Az  $x = x(t)$  szögkitérés, ha  $t \in [0, 1]$ 5.15. ábra. Az  $x = x(t)$  szögkitérés, ha  $t \in [0, 30]$ 

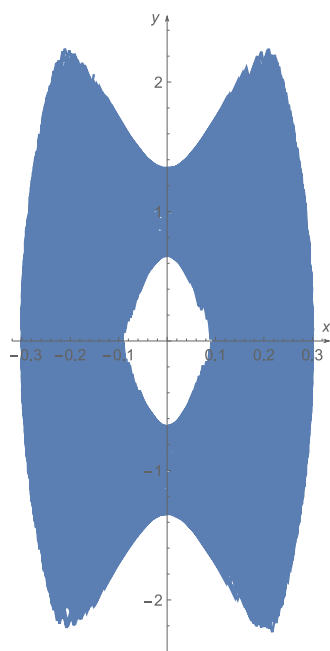
s  $2T$ -periodikus függvények. Ez azt mutatja, hogy az ábrázolt  $x = x(t)$  megoldás vagy periodikus (amikor  $2T$  és a  $B$  sajátértékének megfelelő periódusidő  $(2\pi/\beta)$  hányadosa racionális) vagy kvázi-periodikus (amikor az említett periódusidők hányadosa irracionális). Minderről részletesen a [8]-ban olvashatunk.

Az 5.15 ábrát látva egyre biztosabbak lehetünk abban, hogy stabilis az egyensúlyi helyzet:  $t = 30$ -ig lefuttatva a számolást, a kitérés az időnek korlátos függvénye. Ha ugyanígy járunk el, de még tovább engedjük a számolást, például  $t = 100$ -ig, akkor az 5.16 ábrán látható grafikont kapjuk. Eléggyé meggyőző. A



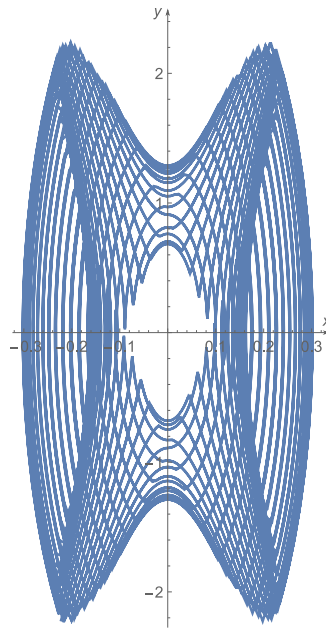
5.16. ábra. Az  $x = x(t)$  szögkitérés, ha  $t \in [0, 100]$

fázissíkon a trajektória is szépen árulkodik:  $t = 300$ -ig számolva, és a fázispont képét ábrázolva az 5.17 grafikont kapjuk. Azt látjuk, hogy egy, az origó körüli korlátos síkrészen mozog a fázispont, ilyen módon jelezve az origó stabilitását.

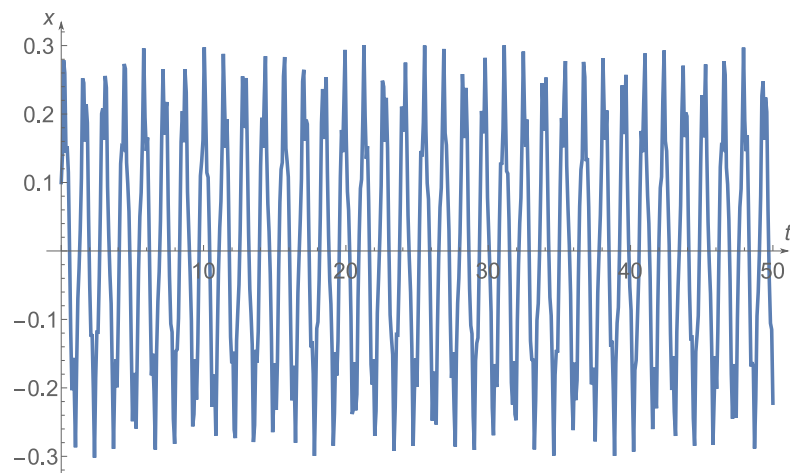


5.17. ábra. A fáziskép, ha  $t \in [0, 300]$

A számítógépes kísérletezés alkalmat ad arra is, hogy az inga eredeti, nemlineáris egyenletét vizsgáljuk. Változatlan paraméterértékek mellett 0-tól 50-ig megoldatva az egyenletet, az 5.18 és az 5.19 ábrát kapjuk. Látszódik, hogy lineárizált jól közelíti a nemlineáris kifejezést.



5.18. ábra. Fázisporté nemlineáris esetben, ha  $t \in [0, 50]$



5.19. ábra. Az  $x = x(t)$  szögkitérés nemlineáris esetben, ha  $t \in [0, 50]$

## 6. fejezet

# Összefoglalás

A disszertációban a gerjesztett inga egyensúlyi helyzetei körüli mozgásokat vizsgálunk, mely gerjesztés lépcsősfüggvény-együtthatóként jelenik meg a lineáris mozgásegyenletekben. Arra keressük a választ, hogy gerjesztésben meglévő paraméterek mely értékeire várhatjuk az inga alsó egyensúlyi helyzetének instabilitását, illetve a felső egyensúlyi helyzetének stabilitását. Vizsgálati módszerünket eleminek mondjuk abban az értelemben, hogy kikerüli a periodikus együtthatós differenciálegyenletek klasszikus elméletére, az úgynevezett Floquet-elvre épülő nehezen kezelhető számításokat, helyette jellemzően egyszerű geometriai megfontolások vezetnek eredményre. Az értekezés az alábbi publikációkon alapul:

- L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (benyújtva).

Elsőként a hintázás problémájára adunk egy választ. A hinta egy olyan inga, melynek hossza az időben változik. Az [1] műben leírtak szerint, tegyük föl, hogy

a hintázó hatására a hinta hossza periodikusan változik, azaz tekintsük az

$$\ddot{x} + a^2(t)x = 0,$$

$$a(t) := \begin{cases} a_1 := \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}}, & \text{ha } 2kT \leq t < (2k+1)T, \\ a_2 := \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}}, & \text{ha } (2k+1)T \leq t < (2k+2)T, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots)$$
(6.1)

egyenletet, ahol  $x$  jelöli az inga rúdjának a függőlegessel bezárt szögét, továbbá  $\varepsilon > 0$  az a paraméter, melynek segítségével a hintázás intenzitását jellemezzük,  $T > 0$ ,  $g$  a gravitációs gyorsulás,  $l$  pedig az inga hossza. A feladat: határozzuk meg a  $(T, \varepsilon)$  paramétersík instabil tartományát, vagyis azon részét, ahonnan választott paraméterértékekkel a (6.1) egyenlet  $x = 0$  megoldása instabil.

Bevezetve az origóhoz közeledő, illetve origótól távolodó szögperiodikus megoldás fogalmát konstruktív módon tudjuk megadni a hintázó periódusideje ( $2T$ ) és a hintázás intenzitása ( $\varepsilon$ ) függvényében azt a szükséges és elegendő föltételt, mely garantálja a mozgásegyenlet gerjesztési periódussal megegyező periódusú, illetve a gerjesztési periódus duplájával megegyező periódusú megoldásainak létezését. Ez utóbbiak pedig kijelölik a  $(T, \varepsilon)$  sík instabil tartományát. Meggondolásaink eredményeképpen a következőt írhatjuk.

**6.1. Tétel.** *A (6.1) egyenletre vonatkozó  $(T, \varepsilon)$  paramétersík instabil tartományának belseje*

$$\cup_{0 < \varepsilon < l} (\cup_{p=0}^{\infty} (\{(T, \varepsilon) : T_{2p+1}(\varepsilon) < T < T_{2p+2}(\varepsilon)\} \cup \{(T, \varepsilon) : \tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) < T < \tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon)\})),$$

ahol  $\{T_k(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$ , illetve  $\{\tilde{T}_k(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$  olyan sorozat, hogy a (6.1) egyenletnek a  $T = T_k(\varepsilon)$  választással  $2T_k(\varepsilon)$ -periodikus, illetve a  $T = \tilde{T}_k(\varepsilon)$  választással  $4\tilde{T}_k(\varepsilon)$ -periodikus megoldása van.

Ezt követően áttérünk az inga felső egyensúlyi helyzetének stabilizálhatósága kérdésére. Azt a speciális esetet tekintjük, amikor az inga fölfüggesztési pontjára egy függőleges irányú, periodikusan változó erő fejt ki hatást. Amennyiben  $\psi$  jelöli a függőleges iránnyal bezárt szöget, úgy a felső egyensúlyi helyzet körüli mozgásokat leíró egyenlet a

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + a(t))\psi = 0. \quad (6.2)$$

alakú, ahol

$$a(t) := \begin{cases} A_h, & \text{ha} & kT \leq t < kT + T_h, \\ -A_e, & \text{ha} & kT + T_h \leq t < (kT + T_h) + T_e, \\ (k = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

az inga fölfüggesztési pontjára ható erőből származó gyorsulás. Az  $A_h, A_e, T_h, T_e$  pozitív konstansok ( $T_h + T_e = T$ ), tehát a felfüggesztési pont mozgása  $T$ -periodikus.

Egy korábban megjelent dolgozatban [28] található ötletes, becslésen alapuló módszert terjesztünk ki arra az esetre, melyben az eredeti nem használható. Így a gerjesztés periódusideje és gyorsulása függvényében egy pontosabb feltételt tudunk adni a stabilizálhatóságra.

**6.2. Tétel.** *Jelölje  $\text{Rem}(\varphi; \pi)$  a  $\varphi \in \mathbb{R}$  valós szám osztási maradékát moduló  $\pi$  ( $0 \leq \text{Rem}(\varphi; \pi) < \pi$ ).*

*Ha*

$$2 \arctan \frac{e^{\omega_h T_h} - 1}{e^{\omega_h T_h} + 1} + 4 \left| \arctan \sqrt{\frac{\omega_h}{\omega_e}} - \frac{\pi}{4} \right| < \min\{\text{Rem}(\omega_e T_e; \pi); \pi - \text{Rem}(\omega_e T_e; \pi)\},$$

*akkor a (6.2) egyenlet erősen stabil, ahol*

$$\omega_h := \sqrt{\frac{A_h + g}{l}}, \quad \omega_e := \sqrt{\frac{A_e - g}{l}}.$$

Az erős stabilitás röviden szólva azt jelenti, hogy a rendszer annak minden kis perturbáltjával együtt stabil. A [28] cikkben a szerzők módszere csak az  $A_h = A_e$  és a  $g = 0$  feltételek teljesülése esetén használható. Érthető az igény ezen feltételek (főként a második!) elhagyására, amely a 6.2 tételben valósult meg.

Miután a felső egyensúlyi helyzet stabilitását garantáló feltételünk is egy becslés, ezért a gerjesztő lépcsősfüggvény periódusával megegyező, illetve annak kétszeresével megegyező periódusú periodikus megoldások konstruálásával a teljesen pontos stabilitási tartományokat írjuk le a dolgozat utolsó részében.

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor a mozgásegyenlet

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + a(t))\psi = 0 \tag{6.3}$$



alakú, és amelyben

$$a(t) := \begin{cases} A, & \text{ha} & 2kT \leq t < (2k+1)T, \\ -A, & \text{ha} & (2k+1)T \leq t < (2k+2)T, \\ (k = 0, 1, \dots), \end{cases} \quad (6.4)$$

tehát az inga fölfüggesztési pontjára ható erőből származó gyorsulás  $2T$ -periodikus és szimmetrikus. Eljárásunk konklúziójaként a következőket állítjuk.

**6.3. Tétel.** *A (6.3) egyenletnek akkor és csak akkor van  $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan  $A$  és  $T$  pozitív konstansok az (6.4) kifejezésben, és van olyan nemnegatív egész  $k$ , hogy vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T,$$

*vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + (2k+1)\pi = \omega_e T.$$

**6.4. Tétel.** *A (6.3) egyenletnek akkor és csak akkor van  $4T$ -periodikus, de nem  $2T$ -periodikus megoldása, ha vannak olyan  $A$  és  $T$  pozitív konstansok az (6.4) kifejezésben, és van olyan nemnegatív egész  $k$ , hogy vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + (2k+1)\pi = \omega_e T,$$

*vagy*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T.$$

A fejezet a stabilitási tartományok megadásával, illetve a differenciálegyenlet megoldásainak számítógépes szimulációi bemutatásával zárul.

## 7. fejezet

# Summary

In the thesis we investigate the motions of an excited pendulum about their equilibria. The excitation means a step-function coefficient in the equation of motion, namely in a second order linear equation which describes the motions around the upper and the lower equilibrium states. We are looking for the values of the parameters in the excitation for which the the upper equilibrium is stable, and the lower one is unstable. Our method is elementary in the sense that instead of difficult calculations of the Floquet Theory - the classical theory of the differential equation with periodic coefficient - simply geometric ideas are applied. The dissertation is based on the following papers of the author:

- L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.
- L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (submitted).

First, we consider the problem of swinging. The swing is a pendulum whose length changes in time. As in [1], we suppose that the length of the pendulum

changes periodically, so the equation of motion is

$$\ddot{x} + a^2(t)x = 0,$$

$$a(t) := \begin{cases} a_1 := \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}}, & \text{if } 2kT \leq t < (2k+1)T, \\ a_2 := \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}}, & \text{if } (2k+1)T \leq t < (2k+2)T, \quad (k = 0, 1, \dots), \end{cases}$$

where  $x$  denotes the angle between the rod of the pendulum and the direction downward measured counter-clockwise;  $g$  and  $l$  are the gravity acceleration and the length of the rod, respectively,  $\varepsilon > 0$  is a parameter measuring the intensity of swinging. The problem of swinging is to find the instability domain on the parametric plane  $(T, \varepsilon)$  to the excited equation (problem of *parametric resonance*), where the solution  $x = 0$  of the corresponding equations of motion is unstable.

Introducing the concepts of solutions going away from the origin and approaching to the origin, we give necessary and sufficient conditions in terms of  $T$  and  $\varepsilon$  for the existence of solutions of these types, which yield conditions for the existence of  $2T$ -periodic and  $4T$ -periodic solutions as special cases. The domain of instability, i.e., the Arnold tongues of parametric resonance are deduced from these results. As a conclusion, we can write the next statement.

**Theorem** *The inside of the instability domain on the parametric plane  $(T, \varepsilon)$  is*

$$\cup_{0 < \varepsilon < l} (\cup_{p=0}^{\infty} (\{(T, \varepsilon) : T_{2p+1}(\varepsilon) < T < T_{2p+2}(\varepsilon)\} \cup \{(T, \varepsilon) : \tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) < T < \tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon)\})),$$

where  $\{T_k(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$ , and  $\{\tilde{T}_k(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$  sequences such that if  $T = T_k(\varepsilon)$  then the equation of motion has  $2T_k(\varepsilon)$ -periodic, and if  $T = \tilde{T}_k(\varepsilon)$  the equation of motion has  $4\tilde{T}_k(\varepsilon)$ -periodic solution.

In the next chapter we study the stability of the upper equilibrium of the pendulum. We consider the suspension point of the pendulum which is vibrating vertically with  $T$ -periodic acceleration and thus the equation of motion of the pendulum is

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + a(t))\psi = 0,$$

where

$$a(t) := \begin{cases} A_h, & \text{if } kT \leq t < kT + T_h, \\ -A_e, & \text{if } kT + T_h \leq t < (kT + T_h) + T_e, \\ (k = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

is  $T$ -periodic acceleration;  $A_h, A_e, T_h, T_e$  are positive constants ( $T_h + T_e = T$ );  $\psi$  denotes the angle between the rod of the pendulum and the direction upward measured clockwise.

M. Levi and W. Weckesser [28] gave a simple geometrical explanation for the stability effect provided that the frequency is so high that the gravity can be neglected, and the two half-periods of the periodic excitation of the parameter are symmetric. They obtained also a lower estimate for the frequency in this gravity-free case. In its original form, the Levi-Weckesser method does not work in the case when there acts gravitation, so it is a very natural challenge to find an extension of the method to this more natural case. We extend the Levi-Weckesser method to the arbitrary inverted pendulum not assuming even symmetry between the upward and downward phases in the vibration of the suspension point. Meanwhile we can improve the method and give a sharper estimate for the frequency in the gravity-free case, too. The main result of the chapter is **Theorem.** *Let  $\text{Rem}(\varphi; \pi)$  denote the remainder of the real number  $\varphi \in \mathbb{R}$  modulo  $\pi$  ( $0 \leq \text{Rem}(\varphi; \pi) < \pi$ ).*

*If*

$$2 \arctan \frac{e^{\omega_h T_h} - 1}{e^{\omega_h T_h} + 1} + 4 \left| \arctan \sqrt{\frac{\omega_h}{\omega_e}} - \frac{\pi}{4} \right| < \min\{\text{Rem}(\omega_e T_e; \pi); \pi - \text{Rem}(\omega_e T_e; \pi)\},$$

*then the equation of motion is strongly stable where,*

$$\omega_h := \sqrt{\frac{A_h + g}{l}}, \quad \omega_e := \sqrt{\frac{A_e - g}{l}}.$$

The equation is called *strongly stable* if it is stable together with all of its sufficiently small perturbations.

The previous result about the stability of the upper equilibrium is an estimation. In Chapter 5 we give the exact stability zones with the help of periodic solutions whose periods equal either the period of excitation or the double of it.

We consider the equation of motion

$$\ddot{\psi} - \frac{1}{l}(g + a(t))\psi = 0,$$

where

$$a(t) := \begin{cases} A, & \text{if } 2kT \leq t < (2k+1)T, \\ -A, & \text{if } (2k+1)T \leq t < (2k+2)T, \\ (k = 0, 1, \dots), \end{cases}$$

so the acceleration of the suspension point of the pendulum is periodic with period  $2T$ . As conclusions we can state the following theorems.

**Theorem** *There is a solution of the equation of motion of period  $2T$  if and only if there are positive constants  $A$  and  $T$  and a non-negative integer  $k$  such that either*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T,$$

or

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + (2k+1)\pi = \omega_e T.$$

**Theorem** *There is such a  $4T$ -periodic solution of the equation of motion which is not  $2T$ -periodic if and only if there are positive constants  $A$  and  $T$  and a non-negative integer  $k$  such that either*

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} - 1}{e^{\omega_h T} + 1} \right) + (2k+1)\pi = \omega_e T,$$

or

$$2 \arctan \left( D \frac{e^{\omega_h T} + 1}{e^{\omega_h T} - 1} \right) + 2k\pi = \omega_e T.$$

Concluding the chapter we describe the stability zones and present some computer simulations which demonstrate our previous calculations.

# Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Hatvani László professzor úrnak, aki értékes tanácsaival és javaslataival a disszertáció elkészítésén túl, gyakran egész pályafutásomra vonatkozóan nyújtott segítséget. Megtisztelő, hogy tanítványának mondhatom magam.

Köszönetemet fejezem ki Dr. Vajda Róbert adjunktus úrnak, kedves kollégának, aki a Mathematica program használata során előforduló kellemetlenségek esetében sokszor segített megnyugtató választ találni.

Köszönöm a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete által nyújtott erkölcsi és infrastrukturális támogatást, mely hozzásegített eddigi eredményeim eléréséhez.

# Irodalomjegyzék

- [1] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [2] D. J. Acheson, T. Mullin, Upside-down pendulums, *Nature*, **366**(2004), 215–216.
- [3] J. Barrow, *100 alapvető dolog a matematikáról és a művészetről, amiről nem tudtuk, hogy nem tudjuk*, Akkord Kiadó Kft, 2015.
- [4] J. A. Blackburn, H. J. T. Smith and N. Gronbeck-Jensen, Stability and Hopf bifurcation in an inverted pendulum, *Amer. J. Physics*, **60**(1992), 903–908.
- [5] H. Broer, M. Levi, Geometrical aspects of stability theory for Hill’s equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **131**(1995), 225–240.
- [6] H. Broer, C. Simo, Resonance Tongues in Hill’s Equations; A Geometric Approach, *J. Differential Equations*, **166**(2000), 290–327.
- [7] E. Butikov, An improved criterion for Kapitza’s pendulum, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**(2011), 1–16.
- [8] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [9] L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity, *Meccanica*, **49**(2014), 1091–1100.
- [10] L. Csizmadia, L. Hatvani, On a linear model of swinging with a periodic step function coefficient, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81**(2015), 483–502.

- 
- [11] L. Csizmadia, L. Hatvani, On the existence of periodic motions of the excited inverted pendulum by elementary methods (benyújtva).
- [12] S. Csörgő, L. Hatvani, Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients, *J. Differential Equations*, **248**(2010), no. 1, 21–49.
- [13] A. M. Formal'skii, On the stabilization of an inverted pendulum with a fixed or moving suspension point, *Dokl. Akad. Nauk*, **406**(2006), no. 2, 175–179.
- [14] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [15] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 2nd edn., 1982.
- [16] L. Hatvani, On the existence of a small solution to linear second order differential equations with step function coefficients, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, **4**(1998), 321–330.
- [17] L. Hatvani, An elementary method for the study of Meissner's equation and its application to proving the Oscillation Theorem, *Acta Sci. Math.*, **79**(2013), no. 1–2, 87–105.
- [18] L. Hatvani, On the parametrically excited pendulum equation with a square wave coefficient, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **77**(2015), 172–182.
- [19] L. Hatvani, On small solutions of second order linear differential equations with non-monotonous random coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **68**(2002), 705–725.
- [20] L. Hatvani, L. Stachó, On small solutions of second order differential equations with random coefficients, *Arch. Math. (Brno)*, Equadiff 9 (Brno, 1997), **34**(1998), 119–126.
- [21] G. W. Hill, On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, *Acta Mathematica*, **12**(1886), Vol. 8, 1–36.



- [22] H. Hochstadt, A special Hill's equation with discontinuous coefficients, *Amer. Math. Monthly*, **70**(1963), 18–26.
- [23] P. L. Kapitsa, Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates, *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.*, **21**(1951) (Russian)
- [24] P. L. Kapitsa, Pendulum with a vibrating suspension, *Uspekhi Fiz. Nauk*, **44**(1951) (Russian)
- [25] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Course of Theoretical Physics, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1976.
- [26] M. Levi, Stability of the inverted pendulum - a topological explanation, *SIAM Rev.*, **30**(1988), 639–644.
- [27] M. Levi, Geometry of Kapitsa' potentials, *Nonlinearity*, **11**(1998), 1365–1368.
- [28] M. Levi, W. Weckesser, Stabilization of the inverted, linearized pendulum by high frequency vibrations, *SIAM Rev.*, **37**(1995), 219–223.
- [29] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's equation*, Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [30] J. Meixner, F.W. Schäfer, *Mathieu'sche Funktionen und Sphäroidfunktionen*, Springer, 1954.
- [31] E. Meissner, Über Schüttel-schwingungen in Systemen mit Periodisch Veränderlicher Elastizität, *Schweizer Bauzeitung*, **72**(1918), no. 10, 95–98.
- [32] D. R. Merkin, *Introduction to the Theory of Stability*, Springer-Verlag, 1997.
- [33] A. A. Seyranian and A. P. Seyranian, The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point, *J. Appl. Math. Mech.*, **70**(2006), 754–761.
- [34] A. Stephenson, On an induced stability, *Phil. Mag.*, Vol. 15. **6**(1908), 233–236.

- 
- [35] A. Stephenson, On a new type of dynamical stability, *Manchester Memoirs*, **52**(1908), 1–10.
- [36] G. Stépán, Mikrokaosz, *Természet Világa*, **135**(2004), 60–64.
- [37] B. Van der Pol, M.J. O. Strutt, On the stability of the solutions of Mathieu's equation, *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.*, 7th Series **5**(1928), 18–38.