Feladat megoldási módszerek összehasonlító vizsgálata a pedagógus illetve a diák rendelkezésére álló ismeretek birtokában.

Doktori értekezés

Fülöp Zsolt

Témavezető:

Dr. Szalay István

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

2017
Szeged

1. A témaválasztás indoklása

Kutatási tevékenységem középpontjába a problémamegoldási képesség kettős szemlélettel való megközelítését helyeztem. Gyakorló pedagógusként nagy szükségét éreztem annak, hogy az elemi matematikai problémákat kettős látásmódban szemléljem: elemi matematikai ismeretekkel (amelyek a diák rendelkezésére állnak), illetve olyan felsőbb matematikai eszközökkel, amelyekkel a diák nem rendelkezik, mivel ezek a főiskolai vagy egyetemi képzés része (ezek az ismeretek viszont a tanár rendelkezésere állnak). Ilyen értelemben egy problémát megközelíthetünk "diák-eszköztárral", illetve "tanár-eszköztárral", ugyanakkor beszélhetünk az adott probléma "diák-megoldásáról", illetve "tanár-megoldásáról" is. Nagyon sok esetben egy matematikai problémára a "tanár-megoldás" gyors választ ad, viszont olyan matematikai eszköztárat feltételez, amely nem áll a diák rendelkezésére, ugyanakkor diákjaink számára nem is magyarázhatjuk el. Ebben az esetben a tanár kidolgozza a "diák-megoldást" is, amely az esetek többségében több kreativitást igényel és szebb a "tanár-megoldásnál". A „diák-megoldást” a diák is megtalálhatja vagy önállóan, vagy pedig a tanár irányításával. A matematika tanításában a tanár előnyét a többlet-tudása képezi, amelyet változatos formában képes kamatoztatni az oktatási folyamat során.
A tanári többlettudás nemcsak a problémák megoldásában játszik fontos szerepet, hanem az új (vagy a diák számára újszerűnek tűnő) feladatok megalkotásában is. A tanár tankönyvből vagy feladatgyűjteményből válogat feladatokat oktató munkájához. Ez viszont sok esetben akadályokba ütközik, ugyanis nem mindig talál az adott témakörhöz olyan feladatokat, amelyek összhangban vannak az adott tanulók tudásszintjével és szervesen illeszkednek az oktatott témakörbe. Bármennyire sokrétű és differenciált egy feladatgyűjtemény, akkor sem elégítheti ki teljes mértékben az igényeket, ugyanis az osztályközösségek összetétele, tudásszintje egyedi sajátosságokat mutat. Esetenként egy tanóra keretén belül, az előkészített feladatok feldogozása során derül ki, hogy a pedagógusnak újabb problémákat kell "rögtönöznie". Ez történhet például amikor a tanulói kérdések, ötletek analóg problémák felvetését teszik szükségessé. Ezért jelenik meg az egyetemi-főiskolai oktatási gyakorlatban a problémamegoldás tanítása mellett a problémaalkotási képesség fejlesztése.
Az új problémák megalkotásának egyik módja, hogy egy viszonylag egyszerű alapfeladatból kiindulva a tanár egy általános feladatot alkot (amely például paramétereket is tartalmazhat), amelyet "tanári módszerrel" old meg. A paramétereknek konkrét értékeket adva megalkothatja az általános feladat különböző speciális esetei. Ezeket már tanórán kitűzheti és "diák-módszerrel" oldják meg.
Munkánk során többféle módszert ismertettünk a következő területeken: szöveges feladatok és szélsőérték-feladatok megoldása, önálló problémaalkotás a matematikai indukció, oszthatóság és számelmélet területén. Több esetben egyfajta átte-

kintést adtunk egy-egy sajátos probléma megoldásának a történeti hátteréről és továbbfejlesztési lehetőségeiről.

2. Kutatási célok

A kutatás a tanulók problémamegoldási képességeit és a tanári problémaalkotás lehetőségeit vizsgálja különböző témakörökben.
A kutatás céljai a következők:

- A problémamegoldás elméleti hátterének meghatározása és bemutatása tanár- illetve diák-szemlélettel.
- A tanulók problémamegoldási képességeinek felmérése, a fejlesztési lehetőségek vizsgálata a szöveges feladatok és a szélsőérték-problémák megoldásának területén.
- Az aritmetikáról az algebrára történő áttérés vizsgálata az általános iskolás tanulók körében, a megoldási módszerek és különböző típus-hibák elemzése.
- A tanári problémaalkotás eszközeinek vizsgálata a tanári többlet-tudás alkalmazásával.
- A matematikai és a nyelvi eszközök összevetése a kijelentések tagadásának vizsgálatában.

3. A kutatás folyamata

A kutatásom az alábbi fő irányokban folyt és folyik:

- Az aritmetika és algebra tanításának iskolai gyakorlata és a megfelelő matematikai elmélet közötti kapcsolat vizsgálata az általános iskolás tanulók körében.
- A szélsőérték-problémák megoldási módszereinek vizsgálata a középiskolás tanulók körében.
- A tanári problémaalkotás lehetőségeinek elemzése tanári eszközök segítségével.
- Elemezni a matematikai logika kapcsolódását a magyar nyelv szabályrendszeréhez, ennek az iskolai gyakorlatban tapasztalható vetületei.

A fentiekben felsorolt kutatási eredményeimről a dolgozat különböző fejezeteiben számoltam be, ezeket a következőkben foglalnám össze.

3.1. Szöveges feladatok megoldása az általános iskolában

Elemeztük a tanulók problémamegoldó képességeit a szöveges feladatok megoldásával kapcsolatban az általános iskolai oktatásban. Olyan feladatokat is tárgyaltunk, amelyek általánosított algebrai modellje egy két- vagy több ismeretlenes egyenletrendszer. Viszont az ilyen típusú egyenletrendszerek nem hozzáférhetők az általános iskolás tanulók számára. Ezért a tanárok minden esetben ki kell dolgozzák azokat a problémamegoldási stratégiákat, amelyek elemi aritmetikai, illetve algebrai eszközökön alapulnak, mint például:

- buborék-ábra készítése;
- szakaszos ábrázolás;
- aritmetikai számítások;
- mérleg készítése;
- hamis feltételezések módszere;
- egyismeretlenes egyenletek felírása.

Az algebra tanításában és tanulásában végzett kutatások bizonyos komoly problémákat és akadályokat tártak fel, főként az aritmetikáról algebrára történő áttérés kezdeti fázisaiban(lásd [3]). Egy fontos kihívás a nemzetközi kutatásokban és a kerettantervek megtervezésében azoknak a módszereknek az átgondolása, hogy az aritmetikáról algebrára való áttérés minél zökkenőmentesebb legyen (lásd [6], [13], [18], [19], [88], [97]). Saját kutatási tevékenységem során is igyekeztem feltárni és a fentiekkel összehasonlítani azokat az akadályokat, amelyek az algebrai módszerek általános iskolai tanítása során merülnek fel (lásd [20], [28]). Különösen a "korai algebra" (early algebra) irányzat képviselői elemezték hogyan kell az aritmetika tanítását olyan módon megoldani, hogy az felkészítse a tanulókat az algebra megértésére, és kiemelje azokat a gondolkodási folyamatokat, amelyek az algebra alapjául szolgálnak. A fő célkitűzés nem az algebrai szimbólumok korai bevezetése, hanem az aritmetika oktatás súlypontjának áthelyezése kell legyen. Már nem megfelelő egy olyan aritmetikai tananyag, amely kizárólag a számoláson alapul, hanem be kell vezetni különböző általánosítási eljárásokat, matematikai struktúrákat, illetve el kell mélyíteni azokat a műveleti tulajdonságokat, amelyek elősegítik az algebra tanítását.

Elemeztük az aritmetikai gondolkodásról az algebrai gondolkodásra történő áttérést a Kálvin Téri Református Általános Iskola (Veresegyház) 6. osztályos tanulóinak körében (2015-2016-os tanév). Megjegyzem, hogy ennek az általános iskolának a matematika szakos tanára vagyok és a teljes programot a saját 6. osztályos tanulóimmal hajtottam végre. Ebből a célból egy három fázisból álló programot valósítottunk meg, amely a következőket tartalmazta.

1. *Aritmetikai számítások*: Kezdetben számos szöveges feladatot oldottunk meg aritmetikai módszerekkel, mint például buborék-ábra készítése, szakaszos ábrázo-

lás, mérleg készítése, visszafelé következtetés. Minden feladat esetében többféle megoldási módszert mutattunk be, valamint kiegészítettem a tanulók megoldási ötleteit olyan esetekben, amikor saját magukra hagyatkozva nem találták a helyes megoldást. Ennek a fázisnak a végén a tanulók egy hat feladatból álló feladatlapot oldottak meg, ezzel mértük fel az aritmetikai módszereken alapuló problémamegoldó képességeket (*1. Felmérés*).
2. *Algebrai módszerek*: A program következő szakaszában a tanulókkal fokozatosan megismertettem az algebrai módszereket. Kezdetben egyenleteket oldottunk meg a lebontogatás módszerével, illetve mérleg-elvvel. Mindezek után, a problémamegoldási tevékenységünk során a legfontosabb stratégiánk a szöveges feladatok egyismeretlenes egyenletekkel történő megoldása volt. Legvégül, ahhoz hogy körülhatároljuk a különböző megoldási módszereket és felmérjük, hogy mely módszerek bizonyulnak a leghatékonyabbaknak (valamint megismerjük a tanulók viszonyulását az aritmetikai, illetve algebrai módszerekhez), a tanulók írásban egy hat feladatból álló feladatlapot oldottak meg 45 perc alatt (*2. Felmérés*). Megjegyzésem, hogy az *1. Felmérés*-ben és a *2. Felmérés*-ben szereplő szöveges feladatok algebrai modellje nagyon hasonló volt, teljesen más szövegkörnyezettel.
3. *A hamis feltételezések módszere*: Tapasztalatunk szerint (lásd [28]) az általános iskolás tanulók a szöveges feladatok megoldásakor sok esetben előtérbe helyezik a próbálgatási módszereket. Ezeket a nemzetközi szakirodalom *estimation/guess and check* és *trial-and-error* néven említi. Ezért felértékelődik a hamis feltételezések módszerének alkalmazása, mivel ez egy olyan eszköz, amelyet a tanulók bizonyos szöveges feladatok megoldásakor alkalmazhatnak. Ennek a módszernek a használata főként abban az esetben nyújt segítséget, amikor a tanulók (jobb híján) próbálgatással akarnak egy feladatot megoldani, ugyanis ez a deduktív módszer nem igényel különösebb ismereteket az aritmetikai, illetve algebrai módszerekre vonatkozóan.
2 tanóra keretében a hamis feltételezések módszerével oldottunk meg feladatokat. A következőkben a tanulók egy (hat feladatból álló) feladatlapot oldottak meg (*3. Felmérés*). Ezek a feladatok nem voltak egyszerűek, egyesek közepes nehézségűnek számítottak. Hangsúlyoztuk, hogy minden eddig tanult módszert elfogadunk, tehát mindenki kiválaszthatta a véleménye szerint legmegfelelőbb eszközt a probléma megoldására. A legtöbb tanuló a hamis feltételezések módszerével adott jó választ. Ez ékes bizonyítéka annak, hogy a különböző gyakorlati feladatok megoldásában a tanulók inkább intuitív, nem-algebrai módszereket választanak. Tehát nagyobb arányban numerikus eljárásokat alkalmaznak, és számolásokat végeznek, ahelyett, hogy aritmetikai vagy algebrai módszerekkel elemezzék az adott problémában szereplő mennyiségek közötti összefüggéseket.

3.2. A szélsőérték-feladatok megoldása a középiskolai oktatásban

Céljaink között szerepelt azoknak a szélsőérték-problémáknak a vizsgálata, amelyek elemi úton is megoldhatók, mellőzve ezáltal a tanár-eszköznek tekinthető differenciálszámítás módszerét. A középiskolai oktatásban a szélsőérték-feladatok (a maximum és minimum feladatok, vagy a legnagyobb, illetve legkisebb értékekkel foglalkozó problémák) bizonyos tekintetben érdekesebbek más matematikai problémáknál. A szélsőérték-problémák fontossága elhanyagoltnak tekintett a kerettantervekben, annak ellenére, hogy a versenyfeladatok egyik fő irányvonalát képezik. Ebből kifolyólag ezek a feladatok hasznos eszközei a tehetséges tanulók kiválasztásának és fejlesztésének.

A differenciálszámítás egy általános módszert ad a szélsőérték-feladatok megoldására. A jelenlegi tantervek nem tartalmazzák a differenciál- és integrálszámítás elemeit (ebben az esetben természetesen nem a speciális matematika osztályokra gondolunk). Viszont ez nem jelenti azt, hogy a középiskolai oktatás során nem foglalkozhatunk szélsőérték-problémákkal, ugyanis az ilyen típusú feladatok jelentős része megoldható elemi módszerekkel is. Ezen túlmenően, olyan feladatokat is megoldhatunk elemi úton, amelyek esetében egy többváltozós függvény parciális deriváltjainak a vizsgálata szükséges (ezt viszont a középiskolai tantervek nem tartalmazzák).

A szélsőérték-feladatok elemi úton történő megoldása a differenciálszámításon alapuló, esetenként kissé sablonszerű, módszerek olyan (a matematika különböző területeiről vett) elemi eszközökkel történő helyettesítését jelenti, mint például a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek, a másodfokú- vagy a trigonometrikus függvények értékkészlete, a vektorok skaláris szorzata, stb.

Az elemi eszközökkel történő megoldások esetében nem beszélhetünk egy általánosan érvényes szabályról, minden feladat egy különálló problémát jelent. Ugyanakkor, ha egy érdekes és komplikált feladatot megoldunk, a tanulók értékes ötlethez vagy modellhez jutnak, amit hasonló feladatok megoldásához alkalmazhatnak. Ők továbbfejleszthetik ezt a módszert, miközben analóg problémákat közelítenek meg, vagy megvizsgálják azokat a feltételeket, amelyek lehetővé teszik ennek a módszernek az alkalmazását adott feladatok esetében. Egy megoldási eszköznek az ilyen jellegű továbbfejlesztése során végül olyan ismeretek birtokába jutnak, amelyek egy jól felépített és hasznosítható tudásanyagot jelentenek. Bemutattunk bizonyos problémamegoldási modelleket, amelyeket a tanulók hasznosíthatnak hasonló feladatok megoldásában. Ezek az eszközök hasznosak lehetnek a közoktatásban dolgozó tanárok számára is, amikor ezt a témakört tanítják a középiskolai oktatás során. Továbbá különböző ötleteket mutattunk be arra vonatkozóan, hogy a tanári többlettudás milyen módon alkalmazható új feladat-családok megalkotására, vagyis érintettük a tanári önálló problémaalkotás területét is.

A továbbiakban egy középiskolás tanulók körében végzett felmérést mutattunk be és megfogalmaztuk következtetéseinket a problémamegoldási képességek fejlesztésére vonatkozóan. A felmérést a Boronkay György Műszaki Középiskolában (Vác) és a Gödöllői Református Líceumban végeztük el, ebben 10. és 11. osztályos tanulók vettek részt.
A felmérés során a következő kérdésekre kerestük a választ:
• A tanulók milyen mértékben képesek megoldani a szélsőérték-problémákat elemi módszerekkel (vagyis a differenciál-számítás mellőzésével)?
• Milyen módszereket alkalmaznak a szélsőérték-problémák megoldása során?
• Melyek a legnagyobb nehézségek és ismereti hiányosságok a szélsőérték-problémák megoldásában?
• A tanulók mennyire képesek a matematika különböző területeiről vett ismereteket szintetizálni a problémamegoldási folyamat során?

3.3. Problémaalkotás a tanári többlettudás alkalmazásával

Példákat mutatunk arra, hogy a tanárok (saját többlet tudásuk felhasználásával) miként alkothatnak új feladat-családokat olyan területeken, mint a teljes indukció, oszthatóság és számelmélet.

3.4. A matematika és a nyelv viszonya

Ebben a fejezetben kitértünk a matematika és a nyelv viszonyára. A kijelentések megfogalmazása és a velük végzett műveletek sokrétűbbek és színesebbek a nyelvben, ilyen téren a matematika szűkebb, de pontosabb. Megfogalmaztunk néhány kijelentést (matematikában ítélet) és kerestük ezeknek a tagadását. Sokféle tagadási változatot vetettünk fel, de ezek közül matematikailag csak egy elfogadható (ezt matematikailag tökéletes tagadásnak neveztük). A fő célkitűzésünk az volt, hogy elemezzünk három kijelentést és a tagadásaikat olyan matematikai eszközökkel, mint a konjunkció, diszjunkció és implikáció. Ugyanakkor megvizsgáltuk ezeknek az állításoknak a tagadását a magyar nyelv eszközeivel is. A teljesség igénye nélkül elemeztük, hogy a nyelvi eszközök milyen mértékben igazodnak a matematikai logika elemeihez a tökéletes tagadás problémája kapcsán. Ezenfelül, céljaink között szerepelt annak a felmérése, hogy a tanulók hogyan gondolkodnak a kijelentések tagadásával kapcsolatban. A felmérés során a következő kérdésekre kerestük a választ:

1. A tanulók milyen kompetenciával rendelkeznek a különböző állítások tagadásának a megfogalmazása terén?

2. A nyelvi ismeretekre hagyatkozva a tanulók milyen arányban választják a matematikailag tökéletes tagadást, illetve mennyire részesítik előnyben a nyelvi szempontból elfogadható tagadásokat?

3. Milyen mértékben érvényesül a matematikai logika elemeinek ismerete a 12. osztályosok körében?

A felmérésben 817 tanuló (7-12. osztályosok) vett részt négy iskolából: Boronkay György Műszaki Középiskola (Vác), Gödöllői Református Líceum, Veresegyházi Kálvin Téri Református Iskola, Fabriczius József Általános Iskola (Veresegyház). A feladatlapon a következő három állítás szerepelt és a tanulóknak kellett kiválasztaniuk az állítások tagadását 6-6 válaszlehetőség közül.

1. Ha Béla korán kel, aranyat lel.

2. Hull a hó és Micimackó fázik.

3. Ha hull a hó, nem megyek moziba.

Megjegyzésünk, hogy minden kijelentés esetében a felsorolt válaszlehetőségek közül csak egy jelentette a matematikailag tökéletes tagadást. A felmérés során célunk volt felmérni, hogy a tanulók hogyan képesek megoldani a feladatokat kizárólag köznyelvi és nyelvtani eszközökkel, ugyanis a matematikai logika elemeit csak a 12. osztályban tanulják.

4. A kutatás eredményei

4.1. Az aritmetikáról az algebrára való áttérés az általános iskolai oktatásban

Az algebrai módszerek bevezetésének nehézségeiről a 6. osztályos tanulók körében végrehajtott *2. Felmérés*-ből meríthetjük a legtöbb információt. Ebben a fázisban a tanulók már megismerték úgy az aritmetikai, mint az algebrai módszereket. A felmérésben a következő feladatok szerepeltek.
1. Feladat: *Peti a 960 forintos csokit 20 forintos és 100 forintos érmékkel fizeti ki. Hány érme van mindegyikből külön-külön, ha összesen 20 érmét használt?*
2. Feladat: *Egy téglalap kerülete 136 cm. A hosszúsága 12 cm-rel több, mint a szélessége. Mekkorák a téglalap oldalai?*
3. Feladat: *Kukutyinban háromszor annyian laknak, mint Nekeresden. Kukutyin lakosainak száma 264-gyel több, mint a nekeresdi lakosok száma. Hányan laknak Nekeresden?*
4. Feladat:*Bea három nap alatt elköltött 5450 forintot. Első nap háromszor annyit, mint a másodikon, a harmadikon pedig 40 forinttal többet, mint a másodikon. Mennyit költött el az első napon?*

5. Feladat: *Egy településen a lakosok száma megkétszereződött, majd elköltözött 456 lakos, így a település lakosainak a száma 1230 lett. Mennyi lakos volt eredetileg a településen?*
6. Feladat: *Egy farmon libák, kacsák és pulykák vannak. A szárnyasok egy negyede pulyka és egy harmada liba. A kacsák száma 65. Mennyi szárnyas van a farmon?*

Tapasztalatainkat legkönnyebben a következő táblázatok segítségével foglalhatjuk össze.

1. Táblázat - A választott módszerek szerinti megoszlás (módszer/fő)

Alkalmazott módszer	1. Fel.	2. Fel.	3. Fel.	4. Fel.	5. Fel.	6. Fel.
Algebrai módszer, egyenlet	5	26	21	40	21	20
Ábrakészítés (szakaszos ábrázolás)	0	10	17	6	0	3
Visszafelé következtetés (buboréká.)	0	0	0	0	17	0
Hamis feltételezések módszere	22	0	0	0	0	0
Próbálgatás	17	0	0	1	0	0
Aritmetikai műveletek	1	11	9	2	12	19
Nem foglalkozott vele	5	3	3	1	0	8

2. Táblázat - A választott módszerek eredményessége (% -ban)

Alkalmazott módszer	1. Fel.	2. Fel.	3. Fel.	4. Fel.	5. Fel.	6. Fel.
Algebrai módszer, egyenlet	20%	31%	38%	58%	62%	30%
Ábrakészítés	-	50%	82%	83%	-	33%
Visszafelé következtetés (buboréká.)	-	-	-	-	88%	-
Hamis feltételezések módszere	100%	-	-	-	-	-
Próbálgatás	76%	-	-	0%	-	-
Aritmetikai műveletek	0%	55%	11%	50%	58%	47%

Következtetéseinket az oktatási folyamat során szerzett tapasztalatok és a felmérések során alkalmazott feladatlapok tanulói megoldásainak elemzése alapján fogalmaztuk meg:
• Összességében tekintve egyértelművé vált, hogy azok a tanulók, akik aritmetikai módszereket választottak jóval sikeresebbek voltak mint az algebra eszközeit választó társaik.
• Körvonalazni tudtuk azokat a típus-feladatokat, amelyek esetében a legtöbb tanuló helyesen írta fel az algebrai egyenletet és jól oldotta meg a feladatot.
• Azonosítottuk azokat a kiemelkedő típus-hibákat és fő nehézségeket amelyeket az aritmetikáról algebrára történő áttérés okoz, mint például a műveletek sorrendjének felcserélése, a zárójelek kihagyása, az ismeretlen, illetve az egyenlőségjel jelentésének helytelen értelmezése, stb.

• Tapasztaltuk, hogy a tanulók amikor nehézségekbe ütköznek az egyenletek felírása vagy különböző aritmetikai módszerek alkalmazása során legtöbb esetben a próbálgatás módszeréhez folyamodnak.

2 tanóra keretében kizárólag a hamis feltételezések módszerével oldottunk meg szöveges feladatokat. Utána következett a *3. Felmérés*, ahol a tanulók a tanult módszerek bármelyikét alkalmazhatták. Ennek a felmérésnek a feladatai közül kettőt emelnénk ki.

I: *Egy autóbusz az első napon négyszer akkora távolságot tett meg, mint a másodikon. Mekkora utat tett meg a két napon külön-külön, ha az első napon 135 km-rel többet tett meg, mint a másodikon?*

3. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	0	1
Hamis feltételezések módszere	16	6
Ábrakészítés (szakaszos ábrázolás)	8	1
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	1	6
Próbálgatással	6	0

16 tanuló a hamis feltételezések módszerével adott jó választ. Mivel a feladatban két feltétel van megfogalmazva, ezért a diákmunkákat két kategóriába sorolhatjuk, ezt két tanuló különböző módszerein keresztül szemléltetném.

4. Táblázat (Első tanuló)

	1. napon	2. napon	különbség	hiba
első feltételezés	80	20	60	75
második feltételezés	84	21	63	72
megoldás	180	45	135	0

Ez a tanuló "az első napon négyszer akkora távolságot tett meg, mint a másodikon" feltételből indult ki a feltételezések adatainak megválasztásánál és "az első napon 135 km-rel többet tett meg, mint a másodikon" feltételtől való eltérést tekintette hibának. Észrevette, hogy második napon megtett kilométerek számát eggyel növelve a hiba 3-mal csökken és így adta meg a helyes választ. Ezzel a gondolatmenettel (értelemszerűen más számadatokkal a feltételezéseknél) oldotta meg a feladatot 10 tanuló.

5. Táblázat (Második tanuló)

	1. napon	2. napon	négyszerese	hiba
első feltételezés	136	1	4	132
második feltételezés	137	2	8	129
megoldás	180	45	180	0

Ebben az esetben "az első napon 135 km-rel többet tett meg, mint a másodikon" feltétel szolgáltatta az adatokat a feltételezéshez. A hiba kiszámításához a tanuló vette a 2. napon megtett út négyszeresét és ezt összehasonlította az 1. napon megtett úttal, majd az eltérést tekintette hibának. Ezzel a módszerrel adott helyes választ 4 tanuló.

II: *Két könyvespolcon könyvek vannak, a másodikon háromszor annyi, mint az elsőn. Ha a másodikról elveszünk 13 könyvet, az elsőre pedig felteszünk még 10 könyvet, akkor a másodikon kétszer annyi könyv lesz, mint az elsőn. Hány könyv van a két könyvespolcon külön-külön?*

6. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	0	1
Hamis feltételezések módszere	14	6
Próbálgatás	13	4
Ábrakészítés (szakaszos ábrázolás)	0	1
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	0	1

A hamis feltételezések módszerével 14 tanuló adott helyes választ. Legtöbben öt oszlopban dolgoztak, amint a következőkben az egyik tanuló munkáján láthatjuk.

7. Táblázat

	1. polc	2. polc	1. polc +10	2. polc −13	hiba
első feltételezés	10	30	20	17	23
második feltételezés	11	33	21	20	22
megoldás	33	99	43	86	0

A 3. Felmérés-ben a legtöbb tanuló a hamis feltételezések módszerével adott jó választ. Ez annak tulajdonítható, hogy a különböző szöveges feladatok megoldásakor a 6. osztályos tanulók inkább intuitív, nem-algebrai módszereket választanak. Tehát nagyobb arányban numerikus eljárásokat alkalmaznak, és számolásokat végeznek, ahelyett, hogy aritmetikai vagy algebrai módszerekkel elemezzék az adott problémában szereplő mennyiségek közötti összefüggéseket.
A felmérést megelőző gyakorló órákon is nagy volt a módszer elfogadottsága, azok

a tanulók is aktívan bekapcsolódtak a feladatok megoldásába, akiknek azelőtt az aritmetikai és algebrai módszerek nehézségeket okoztak. Tehát az affektív aspektusok fejlesztésének tekintetében a módszer nagyon hatékonynak bizonyult.
Tapasztalatunk, hogy a hamis feltételezések módszerét tanítani lehet (és kell) az általános iskolai oktatás során. Ez nem helyettesítheti, hanem hatékonyan kiegészítheti az aritmetikai és algebrai módszereket. Egy olyan alternatívát kínál a feladatok megoldására, amelyet főként azoknál a feladatoknál lehet alkalmazni, amelyek aritmetikai vagy algebrai úton való megközelítése viszonylag bonyolult egy adott évfolyam számára. Egy évfolyamon belül lehetőséget nyújt a differenciálásra is: azok a tanulók, akiknek az algebrai módszerek elsajátítása nehézkesen történik dolgozhatnak a hamis feltételezések módszerével, miközben társaik már az algebra eszközeit alkalmazzák. Az oktatás során szerzett tapasztalatom az, hogy magasabb évfolyamokon az algebrai módszerek ismeretének megszilárdulásával fokozatosan háttérbe szorul a hamis feltételezések módszere, ugyanis a tanulók számára egyre könnyebbé válik az egyenletek felírása, ezzel párhuzamosan a feltételezésekbe bocsátkozás és összefüggések megfogalmazása már körülményesnek tűnik. Ilyen módon nem kell attól tartani, hogy a hamis feltételezések módszere teljesen kiszorítaná a szöveges feladatok algebrai úton való megközelítését.
Összefoglalva, az algebra bevezetésében jelentős szerepe van annak, hogy a tanulók szakítsanak az aritmetikai gondolkodásmóddal és elsajátítsák a változókkal való műveleteket(ezt Filloy és Rojano "didactic cut"-nak nevezik [19]). Erre leginkább akkor van szükség, amikor rátérünk az $A\cdot x+B=C$ típusú egyenletekről az $A\cdot x+B=C\cdot x+D$ típusúakra, illetve az ezekkel felírható szöveges feladatokra. Aritmetikai szemszögből vizsgálva, egy egyenlet bal oldala nem más mint bizonyos (ismert vagy ismeretlen) számokon végzett műveletek összessége, míg a jobb oldala ezeknek a műveleteknek az eredményét jelenti. Ilyen szemszögből megközelítve, az $A\cdot x+B=C$ típusú egyenletek könnyen megoldhatók az aritmetikai gondolatmenetet követve, a műveleteket visszafelé következtetéssel végezve a C számból kiindulva. Ezeket az egyenleteket nevezhetjük "aritmetikai" egyenleteknek. Az $A\cdot x+B=C\cdot x+D$ típusú egyenletek esetében viszont nem alkalmazhatjuk az aritmetikai gondolatmenetet, ezek megoldása az aritmetika tárgykörén kívül eső, ismeretleneken végrehajtott műveleteket igényel. Ezeket "nem-aritmetikai" egyenleteknek nevezzük és megoldásuk jóval nagyobb körültekintést igényel (gondolunk itt elsősorban a mérleg-elv alkalmazása kapcsán előforduló hibákra), valamint az ezekkel megoldható szöveges feladatok felírása is nagyobb nehézséget okoz.
Az aritmetikáról algebrára történő sikeres áttérés egyik legfontosabb eleme az egyenlőség-jel használatának helyes megértése. Az algebrai gondolkodásra való átérés egyik fő ismérve, hogy a tanuló tisztában van azzal, hogy az egyenlőségjel egy ekvivalenciát jelent és az egyenlőség bal- illetve jobb oldala felcserélhető [42], [58]. Sok esetben a tanulók úgy értelmezik, hogy az egyenlőségjel jobb oldalán

mindig a bal oldalon feltüntetett művelet eredménye kell álljon [84], [69].
Tapasztalatainkat összefoglalva, a 6. osztályos tanulók esetében az algebrai módszerek alkalmazása a szöveges feladatok megoldásában még nagy nehézségekbe ütközik. Behatároltuk azokat a feladat-típusokat, amelyeket a tanulók már viszonylag könnyen oldottak meg algebrai egyenletek felírásával (ezek többségében az $A \cdot x + B = C$ típusú "aritmetikai egyenletekre" visszavezethető szöveges feladatok). Egyébként még inkább az aritmetikai módszerek és a numerikus számítások (itt elsősorban a próbálgatásokra és a hamis feltételezések módszerére gondolok) dominálnak.

4.2. A szélsőérték-feladatok összevetése a tanár és a diák rendelkezésére álló ismeretek birtokában

A 10. és 11. osztályos tanulók körében végzett felmérés eredményeit a következőkben foglalnánk össze. Minden tanuló egy 4 feladatból álló feladatlapot kapott, amelyekből hármat kellett megoldjon (arra a kérdésre is választ kerestünk, hogy melyek a hozzáférhetőbb feladat-típusok).
1. Feladat (10. osztály): *Egy derékszögű háromszög átfogója* $c = 10$. *Határozzuk meg a háromszög területének a maximumát!*
1. Feladat (11. osztály): *Egy egyenlő szárú háromszög szárainak hossza 4 cm. Határozzuk meg a háromszög területének a maximumát!*

7. Táblázat - Az 1. Feladatra adott válaszok megoszlása

	10. osztály	11. osztály
Jó válasz	34	10
Rossz válasz	9	20
Nem foglalkozott vele	3	3

2. Feladat (10. osztály): *Határozzuk meg az* $f : [3\ ;\ 7] \to R\ ;\ f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ *függvény legkisebb, illetve legnagyobb értékét!*
2. Feladat (11. osztály): *Határozzuk meg az* $f : [-3\ ;\ 2] \to R\ ;\ f(x) = \sqrt{x+3} + 2 \cdot \sqrt{2-x}$ *függvény legnagyobb értékét!*

8. Táblázat - A 2. Feladatra adott válaszok megoszlása

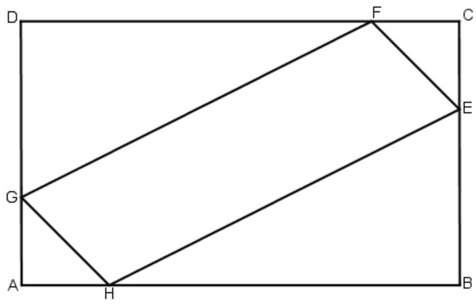
	10. osztály	11. osztály
Jó válasz	8	6
Rossz válasz	11	17
Nem foglalkozott vele	27	10

3. Feladat(10. és 11. osztály): *Határozzuk meg az* $a \cdot b$ *szorzat maximumát, ha* $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ *és* $a + 2 \cdot b = 4$!

9. Táblázat - A 3. Feladatra adott válaszok megoszlása

	10. osztály	11. osztály
Jó válasz	20	12
Rossz válasz	20	17
Nem foglalkozott vele	6	4

4. Feladat (10. és 11. osztály): *Legyen egy $ABCD$ téglalap, melynek oldalai 6 cm és 10 cm. A téglalap oldalain felvesszük az E , F , G , illetve H pontokat az ábrán látható módon, úgy, hogy $AH = AG = CE = CF = x$. Határozzuk meg, hogy az x mely értékére lesz az $EFGH$ paralelogramma területe maximális és számítsuk ki a terület maximumának értékét!*



10. Táblázat - A 4. Feladatra adott válaszok megoszlása

	10. osztály	11. osztály
Jó válasz	6	1
Rossz válasz	32	16
Nem foglalkozott vele	8	16

A felmérés során kapott tanulói válaszokból kiindulva úgy tapasztaljuk, hogy a szélsőérték-feladatok eléggé nehézkesnek bizonyulnak a középiskolás tanulók számára, ezt tükrözi a nagy mennyiségű rossz válasz is. Ugyanakkor azt is megfigyeltük, hogy a 10. osztályos tanulók válaszai némileg jobbak voltak a 11. osztályos tanulókénál. A hatékonyságon túlmenően, a 10. osztályosok megfelelőbb módszereket alkalmaztak egy-egy probléma megoldására mint a 11. osztályosok. Véleményem szerint ez annak tulajdonítható, hogy a 11. osztályos tantervek nem írnak elő szélsőérték-feladatok megoldását célzó tevékenységeket, így ezek a tanulók az ilyen jellegű feladatokkal közel egy éve nem találkoztak. Több tanuló úgy gondolta, hogy a szélsőérték létezése minden esetben két változó egyenlőségét vonja maga után, ezért mindenképpen egyenlővé tettek két változót a feladat adatai közül és ezzel adtak rossz választ. Ezek a hibák legfőképpen a nevezetes

közepek közötti egyenlőtlenségek helytelen értelmezéséből fakadnak. Több tanuló úgy adott helyes választ, hogy egy függvény vagy kifejezés értékét kiszámította a változó néhány lehetséges értéke esetén. Ez ékes bizonyítéka annak, hogy az említett tanulók nem rendelkeztek semmiféle ötlettel az illető feladat megoldására vonatkozóan, ezért választották ezt a matematikailag nem teljes megoldást. A tanulók sok esetben nem képesek szintetizálni a függvényekre, algebrai kifejezésekre és geometriai fogalmakra vonatkozó ismereteiket. Estenként az is nehézséget okoz, hogy az adott probléma megoldásánál visszacsatoljanak egyszerűbb, előzőleg már megoldott problémára.
Véleményünk szerint egy jelentős fejlődésre van szükség a szélsőérték-problémák megoldása terén a normál középiskolai oktatásban. Szükséges kiszélesíteni a tanított módszerek tárházát, illetve változatosabbá tenni a bemutatott problémákat olyan feladat-családok megalkotásával, amelyek nem kizárólag a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségen alapulnak. És, nem utolsósorban, a szélsőérték-problémáknak helyük van a középiskolai oktatás minden évfolyamán, nemcsak a 10. osztályos tantervekben.

4.3. Problémaalkotás a tanári többlettudás alkalmazásával

A tanári többlettudás alkalmas az új feladat-családok megalkotására. Néhány probléma esetében bemutattuk, hogy az általánosítás eszközeivel, valamint a tanár-eszköztár néhány elemének felhasználásával (maradékosztályok, Fermat-féle kongruencia tétel, Euler-Fermat tétel, Lagrange-tétel, integrál-számítás, Moivre-képletek) hogyan alkothatunk új feladatokat.
Gyakorló pedagógusként az a véleményem, hogy szükséges a tanárok problémaalkotási képességeinek a fejlesztése, ehhez jelenthet segítséget az itt felvetett ötletek alkalmazása.

4.4. A matematika és a nyelv viszonya

Elemzés tárgyává tesszük a felmérésben szereplő 2. kijelentésre adott tanulói válaszokat. Az alábbiakban a megfelelő válaszlehetőségeket is bemutatjuk.
2. kijelentés: *Hull a hó és Micimackó fázik.*
A lehetséges válaszlehetőségek.
A. *Nem hull a hó és Micimackó nem fázik.*
B. *Nem hull a hó és Micimackó fázik.*
C. *Nem hull a hó vagy Micimackó nem fázik.*
D. *Hull a hó és Micimackó nem fázik.*
E. *Nem hull a hó vagy Micimackó fázik.*
F. *Hull a hó vagy Micimackó nem fázik.*

11. Táblázat - A 2. kijelentés esetében adott válaszok megoszlása

	7. évf.	8. évf.	9. évf.	10. évf.	11. évf.	12. évf.	Összesen
A.	106	88	126	82	84	57	543
B.	6	7	5	9	3	6	36
C.	3	3	8	9	8	34	65
D.	18	34	35	18	28	19	152
E.	1	5	7	0	0	3	16
F.	2	0	2	0	0	1	5
Összesen	136	137	183	118	123	120	817

Az eredmények azt mutatják, hogy csak a tanulók egy kis része volt képes megtalálni a helyes választ, vagyis a matematikailag tökéletes tagadást. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a nyelvi eszközök nem elegendőek ennek a kérdésnek a megválaszolására, itt szükség van a matematikai logika eszköztárára is. Megfogalmaztuk azon véleményünket, hogy a matematikai logika elemeit alacsonyabb évfolyamokon is tanítani kell, nemcsak a 12. osztályos tananyagban kell szerepelnie.

5. Továbblépés

Az aritmetikáról az algebrára való áttérés tanulmányozását folytatni érdemes. Az áttérést befolyásoló tényezőknek és a lehetséges hibaforrásoknak a feltárása zökkenőmentesebbé teheti az algebrai ismeretek elsajátítását az általános iskolai oktatásban.
A szélsőérték-feladatok elemi úton való tárgyalása a középiskolás tantervek összeállításánál feltétlenül nagyobb hangsúlyt és terjedelmet igényel.
Szükség van az önálló tanári problémaalkotás fejlesztésére. Ebből a célból a matematika minden fejezetét fel lehet dolgozni a tanár-, illetve diák-eszközök kettősségének vizsgálatával. Ki kell emelni a tanári többlettudásnak azokat a vetületeit, amelyek az önálló problémaalkotásnak hatékony eszközei lehetnek.
A kijelentések logikájának tanítását szélesebb alapokra lehetne helyezni. Ezt összehangoltan a matematika és magyar nyelvtan órákon a tanári munkaközösségek bevonásával lehetne eredményesen megoldani.

A szerzőnek az értekezés tárgyköréhez tartozó publikációi

[20] Fülöp Zs., A szöveges feladatok megoldásának nehézségeiről a nyolcadik osztályos diákok körében, Sokszínű pedagógiai kultúra, International Research Institute, 2014, p. 195-201.

[21] Fülöp Zs., A tanár előnye a matematikai indukció tanítása során, A matematika tanítása, 2013/3, Mozaik Kiadó, Szeged, 2013, p. 10-16.

[22] Fülöp Zs., Az Euler-Mascheroni konstans tizedes jegyeinek meghatározása geometriai eszközök segítségével, POLYGON folyóirat, XXI. kötet 1-2. szám, Szeged, 2013, p. 75-82.

[23] Fülöp Zs., Heuristic arguments and rigorous proofs in secondary school education, Teaching Mathematics and Computer Science 12, 2/2014, p. 167-184.

[24] Fülöp Zs., Mathematics in Language, Practice and Theory in Systems of Education, 9. évf. 2. sz., 2014,

[25] Fülöp Zs., Maximum and minimum problems in secondary school education, Teaching Mathematics and Computer Science 13, 1/2015, p. 81-98.

[26] Fülöp Zs., Regula falsi in lower secondary school education, Teaching Mathematics and Computer Science,14/2(3), 2016, p. 169-194.

[27] Fülöp Zs., The role of the geometrical visualisations in problems related to algebra, Questions and Perspectives in Education, International Research Institute, Komarno 2013, p. 331-341.

[28] Fülöp Zs., Transition from arithmetic to algebra in primary school education, Teaching Mathematics and Computer Science, 13/2, 2015, p. 225-248.

Hivatkozások

[1] N. Amado, S. Carreira, S. Nobre, J.P. Ponte, Representations in solving a word problem: the informal developement of formal methods, http://www.researchgate.net/publication/261176504

[2] Ambrus András: A konkrét és vizuális reprezentációk szükségessége az iskolai matematikaoktatásban, http://rmpsz.ro/uploaded/tiny/files/magiszter/2003/osz/9.pdf

[3] Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995.

[4] Balog J., Haader L., Keszler B., Kugler N., Laczkó K., Lengyel K., Magyar Grammatika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[5] A. Bell, K. Stacey, M. MacGregor, Algebraic manipulation: actions, rules and rationales, Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Brisbane, 1993.

[6] L. Booth, Children's difficulties in beginning algebra, The ideas of algebra, K-12 (pp. 20-32),1988.

[7] L. Booth, A question of structure- a reaction to: Early learning of Algebra: A structural perspective, Research issues in the learning and teaching of algebra, Virginia, 1989.

[8] C. Brown, T. Carpenter, V. Kouba, M. Lindquist, E. Silver, J. Swafford, Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment: Algebra, geometry, mathematics methods and attitudes, Mathematics Teacher, 81,337-347,1988.

[9] Cosnita C., Turtoiu F., Probleme de algebra, Editura Tehnica, Bucuresti, 1989

[10] M. Csordás, L. Konfár, J. Kothencz, Á. Kozmáné Jakab, K. Pintér, I. Vincze, Sokszínű matematika 6, Mozaik, Szeged, 2008.

[11] M. A. Clements, Analyzing children errors on written mathematical tasks, Educational studies in mathematics, 1980.

[12] K. F. Collis, Cognitive developement of mathematics learning, Psychology of Mathematics Education Workshop Shell Mathematics Unit Centre for Science Education, Chelsea Colege, University of london, 1974.

[13] T. J. Cooper, G. Boulton-Lewis, B. Atweh, L. Willss, S. Mutch. The transition from aritmetic to algebra: Initial understandings of equals, operations and variable, International Group for the Psychology of Mathematics Education, 21, 1997.

[14] T. J. Cooper, A. M. Williams, A. R. Baturo, Equals, expressions, equations, and the meaning of variable: A teaching experiment, Proceedings of the twenty-second conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Adelaide, 1999.

[15] R. Davis, The interplay of algebra, geometry and logic. Journal of Mathematical Behavior, 7, 9-28, 1988.

[16] G. Detori, R. Garuti, E. Lemut, From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet, Perspectives on school algebra, Dordrecht, 2001.

[17] G. Egodawatte, Is Algebra Really Difficult for All Students?, Acta Didactica Napocensia, Volume 2, Number 4, Cluj Napoca, 2009.

[18] E. Filloy, T. Rojano, From an arithmetical to an algebraic thought, Proceedings of the 6th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Wisconsin, Madison, 1984.

[19] E. Filloy, T. Rojano, Solving equations, the transition from arithmetic to algebra, For the Learning of Mathematics, 9 (2), 1989.

[20] Fülöp Zs., A szöveges feladatok megoldásának nehézségeiről a nyolcadik osztályos diákok körében, Sokszínű pedagógiai kultúra, International Research Institute, 2014.

[21] Fülöp Zs., A tanár előnye a matematikai indukció tanítása során, A matematika tanítása, 2013/3, Mozaik Kiadó, Szeged, 2013.

[22] Fülöp Zs., Az Euler-Mascheroni konstans tizedes jegyeinek meghatározása geometriai eszközök segítségével, POLYGON folyóirat, XXI. kötet 1-2. szám, Szeged, 2013.

[23] Fülöp Zs., Heuristic arguments and rigorous proofs in secondary school education, Teaching Mathematics and Computer Science 12, 2/2014.

[24] Fülöp Zs., Mathematics in Language, Practice and Theory in Systems of Education, 9. évf. 2. sz., 2014.

[25] Fülöp Zs., Maximum and minimum problems in secondary school education, Teaching Mathematics and Computer Science 13, 1/2015.

[26] Fülöp Zs., Regula falsi in lower secondary school education, Teaching Mathematics and Computer Science (megjelenés alatt)

[27] Fülöp Zs., The role of the geometrical visualisations in problems related to algebra, Questions and Perspectives in Education, International Research Institute, Komarno 2013.

[28] Fülöp Zs., Transition from arithmetic to algebra in primary school education, Teaching Mathematics and Computer Science, 13/2, 2015.

[29] Gerőcs László - Orosz Gyula – Paróczay József – Szászné Simon Judit, Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I., Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.

[30] E. Hatton, An Intire System of Arithmetic or Arithmetic in all its Parts, University of Michigan, 1721.

[31] N.Herscovics, C. Kieran, Constructing meaning for the concept of equation, The Mathematics Teacher, 73(8), 572-580, 1980.

[32] N.Herscovics, L. Linchevski, A cognitive gap between arithmetic and algebra, Educational Studies in Mathematics, 1994.

[33] Hódi E., Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, Typotex Kiadó, Budapest, 1994.

[34] T. Jakab, J. Kosztolányi, K. Pintér, I. Vincze, Sokszínű matematika 7, Mozaik, Szeged, 2007.

[35] T. Jakab, J. Kothencz, Á. Kozmáné Jakab, K. Pintér, I. Vincze, Sokszínű matematika 8, Mozaik, Szeged, 2009.

[36] Jászó A., A magyar nyelv könyve, Trezor Kiadó, Budapest, 1997.

[37] D. I. Johanning, Supporting the developement of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies, Journal of Mathematical Behavior, 23, 2004.

[38] Kacsó F., Matematika M1, Analízis, 11. osztály, Kolozsvár, Ábel Kiadó, 2007.

[39] Shen Kangshen, John N. Crossley and Anthony W.-C. Lun, 1999, The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary, Oxford: Oxford University Press, p. 358.

[40] S. Kántor, Maróthi György élete és munkássága, A Természet Világa, 2015.

[41] S. Kántor, T. Varga, Nagy Károly, A reformkor tankönyvírója, a tehetséggondozás úttörője, POLYGON, XXI/1-2., Szeged, 2013.

[42] C. Kieran, Concepts associated with the equal symbol, Educational Studies in Mathematics, 1981.

[43] C. Kieran, The early learning of algebra: A structural perspective, In Sigrid Wagner and Carolyn Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp.33-56), 1989

[44] C. Kieran, The learning and teaching of school algebra. In Douglas A. Grouws (Ed.), The handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 390-419),1992.

[45] C. Kieran, The learning and teaching of school algebra, Handbook of research on mathematics teaching and learning, New York, 1992.

[46] C. Kieran, A. Boileau, M. Garancon, Introducing algebra by means of a technology-supported functional approach, Approaches to Algebra: Perspective for Research and Teaching, Dordrecht, 1996.

[47] C. Kieran, Mathematical concepts at the secondary school level: The learning of algebra and functions, Learning and teaching mathematics: An international perspective, Psychology Press, 1997.

[48] É. Kiss K., Kiefer F., Siptár P., Új magyar nyelvtan, Osiris, 1998.

[49] J. Kosztolányi, I. Kovács, K. Pintér, J. Urbán and I. Vincze, Sokszínű matematika 7., Mozaik, Szeged, 2003.

[50] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. and I. Vincze I., Sokszínű matematika 9, Mozaik, Szeged, 2003.

[51] Kosztolányi J., Pintér K., Kovács I., Urbán J., Vincze I. Sokszínű matematika 10., Mozaik kiadó, Szeged, 2006.

[52] Kosztolányi J., Pintér K., Kovács I., Urbán J., Vincze I., Sokszínű matematika 12., Mozaik, Szeged, 2006.

[53] S. Laban, I. Osta, Seventh Graders' Prealgebraic Problem Solving Strategies: Geometric, arithmetic and algebraic interplay, www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/osta.pdf

[54] Leindler L., Analízis, Polygon Kiadó, Szeged, 2004.

[55] Leitzel, J. R., Critical considerations for the future of algebraic instruction, In Sigrid Wagner and Carolyn Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp. 25-32), 1989.

[56] Lénárd F., A problémamegoldó gondolkodás, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1963.

[57] L. Linchevski, Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra, Journal of Mathematical Behavior, 1995.

[58] L. Linchevski, N.Herscovics, Cognitive obstacles in pre-algebra, Proceeding of the 18th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, 1994.

[59] L. Linchevski, N.Herscovics, Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations, Educational Studies in Mathematics, 1996.

[60] L. Linchevski, D. Livneh, Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts, Educational Studies in Mathematics, 1999.

[61] R. D. Lodholz, The transition from arithmetic to algebra, Algebra for everyone, Richmond, 1993.

[62] M. MacGregor, K. Stacey, Students understanding of algebraic notation, Educational Studies in Mathematics, 33, 1997.

[63] Gy. Maróthi, Arithmetica, Debrecen, 1782, https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015021321925

[64] C. Morris, Developing concepts of mathematical structure: Pre-arithmetic reasoning versus arithmetic reasoning, Focus on Learning Problems in Mathematics, 1999.

[65] K. Nagy, Elemi arithmologia, Arithmografia, 1835.

[66] M. A. Newman, An analysis of sixth-grade pupils errors on written mathematical tasks, Research in Mathematics Education in Australia, Melbourne, 1977.

[67] Nicolescu C. P., Sinteze de matematica, Editura Albatros, Bucuresti, 1990.

[68] S. Norton, J. Irvin, A Concrete Approach to Teaching Symbolic Algebra, Presented at the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart (2007).

[69] S. Norton, T. Cooper, Students' perceptions of the importance of closure in arithmetic: implications for algebra.

[70] S. Norton, T. Cooper, Do our students really have the arithmetic knowledge to start algebra? Analysing misconceptions.

[71] S. Ohlsson, Abstract schemas, Educational Psychologist, 1993.

[72] Pintér Lajos, Analízis, Typotex Kiadó, Budapest, 2006.

[73] Pólya Gy., A matematikai gondolkodás művészete I. kötet: Indukció és analógia, Gondolat Kiadó, Budapest.

[74] G. Pólya, Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1981.

[75] G. Pólya, How to Solve It, Princeton University Press, Princeton, 1945.

[76] Póla Gy., A problémamegoldás iskolája, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

[77] http://kerettanterv.ofi.hu/03 melleklet 9-12

[78] Rácz E., A mai magyar nyelv, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[79] H. Radatz, Error analysis in mathematics education, Journal for Research in Mathematics Education 10, 1979.

[80] P. Rosnick, J. Clements, Learning without understanding: the effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behavior, 3(l), 3-27, 1980.

[81] A. Sfard, On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 34, 1997.

[82] A. Sfard, The gains and pitfalls of reification - the case of algebra, Educational Studies in Mathematics, 26, 1994.

[83] D. Slavitt, The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebra thought, Educational Studies in Mathematics, 1999.

[84] K. Stacey, M. MacGregor, Ideas about symbolism that students bring to algebra, The Mathematics Teacher, 1997.

[85] K. Stacey, M. MacGregor, Implications for mathematics education policy of research on algebra learning, Australian Journal of Education, 1999

[86] K. Stacey, M. MacGregor, Learning the algebraic methods of solving problems, Journal of Mathematical Behavior, 18, 2000

[87] K. Stacey, M. MacGregor, Taking the algebraic thinking out of algebra, Mathematics Education Research Journal, 1, 1999

[88] K. Stacey, The transition from arithmetic thinking to algebraic thinking, University of Melbourne, www.mathhouse.org/files/.../IMECstaceyALGEBRA.doc

[89] Szalay I., A kultúrfilozófia természettudományos alapjai, Szegedi Egyetemi Kiadó, Szeged, 2006

[90] Szalay I., A tanár előnye: a felsőbb matematikai módszerek ismerete és az általánosítás készsége, Polygon XX. évf. 1. sz., Polygon Kiadó, Szeged, 2011.

[91] Szalay I., Holistic approach to the teaching of Mathematics, Practice and Theory in Systems of Education, 5. évf. 1. sz., 2010.

[92] D. Tall, M. Thomas, The long-term cognitive development of symbolic algebra, International Congress of Mathematical Instruction (ICMI) Working Group Proceedings, The Future of the Teaching of Algebra, Melbourne, 2001.

[93] E. Thorndike, M. Cobb, J. Orleans, P. Symonds, E. Wald, E. Woodyard, The psychology of algebra, Macmillan, New York, 1923.

[94] J. A. Thorpe, What should we teach and how should we teach it? Research issues in learning and teaching of algebra, Lawrence Erlbaum Associates, 1989.

[95] Z. Tuzson, Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat?, Ábel Kiadó, Kolozsvár, 2011.

[96] S. Wagner, S. Parker, Advancing algebra, Research ideas for the classroom: high school mathematics, New York, 1993.

[97] E. Warren, The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra, Mathematics Education Research Journal, 2003.

[98] T. Weston, A Treatise of Arithmetic: In Whole Numbers and Fractions, University of Michigan, 1729,
https://archive.org/details/atreatisearithm00westgoog

[99] M. Yerushalmy, Problem solving strategies, A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra, Educational Studies in Mathematics, vol. 43, 2000.

1. Felmérés

1. Feladat: *Egy szálloda 23 szobájában 52 fekvőhely van, a szobák kétágyasak, illetve háromágyasak. Hány kétágyas szoba található a szállodában?*

2. Feladat: *Egy iskolába összesen 760 tanuló jár. A lányok száma 168-cal több, mint a fiúk száma. Hány fiú jár az iskolába?*

3. Feladat: *Egy udvarban kacsák és libák vannak, négyszer annyi kacsa, mint liba. Összesen 165 szárnyas van. Hány liba van az udvarban?*

4. Feladat: *Egy szekrény három polcán könyvek vannak. Az első polcon 5-tel több, mint a másodikon. A harmadik polcon kétszer annyi, mint a másodikon. A három polcon összesen 149 könyv van. Hány könyv van a polcokon külön-külön?*

5. Feladat: *Bea a zsebpénzét megkétszerezte, majd elköltött 368 forintot, így 432 forintja maradt. Mennyi pénze volt eredetileg?*

6. Feladat: *Egy osztály diákjainak fele Debrecenbe utazott, egy harmada Székesfehérvárra, a többi 6 tanuló pedig Budapestre. Hány fős az osztálylétszám?*

2. Felmérés

1. Feladat: *Peti a 960 forintos csokit 20 forintos és 100 forintos érmékkel fizeti ki. Hány érme van mindegyikből külön-külön, ha összesen 20 érmét használt?*

2. Feladat: *Egy téglalap kerülete 136 cm. A hosszúsága 12 cm-rel több, mint a szélessége. Mekkorák a téglalap oldalai?*

3. Feladat: *Kukutyinban háromszor annyian laknak, mint Nekeresden. Kukutyin lakosainak száma 264-gyel több, mint a nekeresdi lakosok száma. Hányan laknak Nekeresden?*

4. Feladat:*Bea három nap alatt elköltött 5450 forintot. Első nap háromszor annyit, mint a másodikon, a harmadikon pedig 40 forinttal többet, mint a másodikon. Mennyit költöttem el az első napon?*

5. Feladat: *Egy településen a lakosok száma megkétszereződött, majd elköltözött 456 lakos, így a település lakosainak a száma 1230 lett. Mennyi lakos volt eredetileg a településen?*

6. Feladat: *Egy farmon libák, kacsák és pulykák vannak. A szárnyasok egy negyede pulyka és egy harmada liba. A kacsák száma 65. Mennyi szárnyas van a farmon?*

3. Felmérés

1. Feladat: *Hajni pókokat és cserebogarakat gyűjtött, összesen 38 darabot. Egy cserebogárnak 6, míg egy póknak 8 lába van. Összesen 250 lábat számolt meg. Hány pókot és hány cserebogarat gyűjtött külön-külön?*

2. Feladat: *Bea egy 2410 forintos játék kifizetésénél 5-tel több 20 forintost használt, mint 50 forintost. Hány 20 forintos, illetve hány 50 forintos érmét használt külön-külön?*

3. Feladat: *Egy autóbusz az első napon négyszer akkora távolságot tett meg, mint a másodikon. Mekkora utat tett meg a két napon külön-külön, ha az első napon 135 km-rel többet tett meg, mint a másodikon?*

4. Feladat: *Peti és Zoli bélyegeket gyűjt. Zolinak 12-vel több bélyege van, mint Peti bélyegei számának a kétszerese. Kettőjüknek együtt 168 bélyege van. Hány bélyegük van külön-külön?*

5. Feladat: *Két könyvespolcon könyvek vannak, a másodikon háromszor annyi, mint az elsőn. Ha a másodikról elveszünk 13 könyvet, az elsőre pedig felteszünk még 10 könyvet, akkor a másodikon kétszer annyi könyv lesz, mint az elsőn. Hány könyv van a két könyvespolcon külön-külön?*

6. Feladat: *András elolvasta egy könyvnek az* $\frac{1}{4}$ *részét és még 12 oldalt, hátra van még a könyv* $\frac{2}{3}$ *része. Hány oldalas a könyv?*

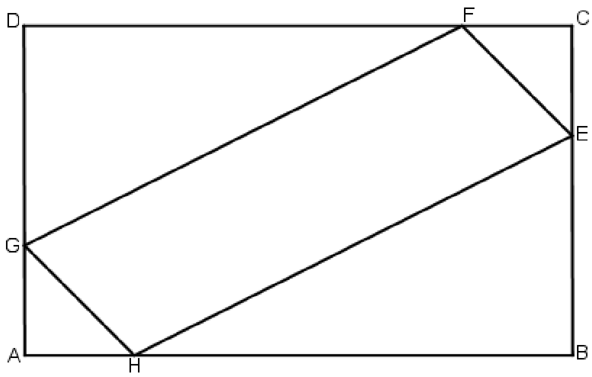
Szélsőérték-feladatok - Felmérés (10. osztály)

1. Feladat: *Egy derékszögű háromszög átfogója* $c = 10$. *Határozzuk meg a befogók hosszát úgy, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!*

2. Feladat: *Határozzuk meg az* $f : [3\ ;\ 7] \to R\ ;\ f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ *függvény legkisebb, illetve legnagyobb értékét!*

3. Feladat: *Határozzuk meg az* $a \cdot b$ *szorzat maximumát, ha* $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ *és* $a + 2 \cdot b = 4$!

4. Feladat: *Legyen egy* $ABCD$ *téglalap, melynek oldalai 6 cm és 10 cm. A téglalap oldalain felvesszük az* E , F , G , *illetve* H *pontokat az ábrán látható módon, úgy, hogy* $AH = AG = CE = CF = x$. *Határozzuk meg, hogy az* x *mely értékére lesz az* $EFGH$ *paralelogramma területe maximális és számítsuk ki a terület maximumának értékét!*



Szélsőérték-feladatok - Felmérés (11. osztály)

1. Feladat: *Egy egyenlő szárú háromszög szárainak hossza 4 cm. Határozzuk meg a háromszög alapját úgy, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!*

2. Feladat: *Határozzuk meg az* $f : [-3\ ;\ 2] \to R\ ;\ f(x) = \sqrt{x+3} + 2 \cdot \sqrt{2-x}$ *függvény legkisebb, illetve legnagyobb értékét!*

3. és 4. Feladat: *Ugyanaz mint az 10. osztály 3., illetve 4. feladata.*

A matematika és a nyelv viszonya - Felmérés

1. Ha Béla korán kel, aranyat lel.

A. Béla nem kel korán és nem lel aranyat.
B. Béla nem kel korán és aranyat lel.
C. Béla korán kel és nem lel aranyat.
D. Ha Béla nem kel korán, nem lel aranyat.
E. Ha Béla nem kel korán, aranyat lel.
F. Ha Béla korán kel, nem lel aranyat.

2. Hull a hó és Micimackó fázik.

A. Nem hull a hó és Micimackó nem fázik.
B. Nem hull a hó és Micimackó fázik.
C. Nem hull a hó vagy Micimackó nem fázik.
D. Hull a hó és Micimackó nem fázik.
E. Nem hull a hó vagy Micimackó fázik.
F. Hull a hó vagy Micimackó nem fázik.

3. Ha hull a hó, nem megyek moziba.

A. Nem hull a hó és moziba megyek.
B. Ha nem hull a hó, nem megyek moziba.
C. Nem hull a hó és nem megyek moziba.
D. Ha hull a hó, moziba megyek.
E. Hull a hó és moziba megyek.
F. Ha nem hull a hó, moziba megyek.