Aszimptotikus Bernstein típusú egyenlőtlenségek

Tézis

Nagy Béla

Témavezető: Totik Vilmos

Szeged

2005

A Bernstein és Markov típusú egyenlőtlenségek fontos eszközök az approximáció-elméletben. Az eredeti két cikk [3] és [2] óta sok általánosításuk jelent meg. Ennek a disszertációnak a célja a Bernstein egyenlőtlenség kiterjesztése a halmazok egy szélesebb osztályára, és hogy megmagyarázza a "geometriai" szorzót potenciál-elmélet segítségével. Ez a disszertáció három részből áll, az egyes részek megfelelnek a [4], [6] és [5] cikkeknek. Potenciál-elméleti bevezetőként hivatkozunk a [9] vagy [8] könyvre.

Megjegyzés.
A tételek és formulák számozása itt és a disszertációban megegyezik az egyszerűbb olvashatóság kedvéért.

Előzmények

A jól-ismert Bernstein egyenlőtlenség (komplex alakja) azt állítja, hogy

$$\left|P_n'(z_0)\right| \le n||P_n||_D \ , \tag{1.1}$$

ahol P_n egy tetszőleges, n-ed fokú komplex polinom, $||P_n||_D$ jelöli a szuprémum normáját P_n-nek a $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \le 1\}$ egységkörlap fölött és $|z_0| = 1$. Egyszerű helyettesítéssel kapható egy másik egyenlőtlenség, ami már az $I = [-1, 1]$ intervallumon van:

$$\left|P_n'(t)\right| \le n\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}||P_n||_I \tag{1.2}$$

ahol $-1 < t < 1$ és $||P_n||_I$ jelöli P_n szuprémum normáját I fölött. Ezt az egyenlőtlenséget is Bernstein egyenlőtlenségnek hívják.
A $(1-t^2)^{-1/2}$ szorzó szoros kapcsolatban van $[-1, 1]$ "geometriájával", és potenciál-elmélet segítségével ki lehet fejezni $(1-t^2)^{-1/2} = \pi\omega_I(t)$ alakban, ahol $\omega_I(t)$ a sűrűség-függvénye az I egyensúlyi mértékének (a Lebesgue mértékre nézve). Használva ezt a potenciál-elméleti megközelítést, a következő általánosítás jelent meg nemrég [10] és [1]-ben:

Tétel.

$$\left|P_n'(t)\right| \leq n\pi\omega_K(t)||P_n||_K \tag{1.3}$$

ahol $K \subset \mathbf{C}$ egy kompakt halmaz, $\omega_K(t)$ a sűrűség-függvénye a ν_K egyensúlyi mértéknek, $\omega_K(t)dt = d\nu_K(t)$, $t \in \operatorname{Int} K$ (így $\omega_K(t)$ véges), és $||P_n||_K$ a szuprémum normája P_n-nek K fölött.

Használjuk a Green függvény fogalmát is, és egy $K \subset \mathbf{C}$ kompakt halmaz esetén $g_K(z) = g(K, z)$ jelöli $\mathbf{C} \setminus K$ nemkorlátos komponensének Green függvényét végtelenbeli pólussal.

Érdemes megemlíteni, hogy az $\omega(K)$ sűrűség-függvény szoros kapcsolatban van a Green függvény külső normális szerinti deriváltjával, pontosabban:

Tétel. *Ha $K \subset \mathbf{C}$ egy olyan kompakt halmaz, hogy ∂K véges sok $C^{1+\delta}$ sima zárt görbe uniója ($\delta > 0$), akkor az egyensúlyi mérték abszolút folytonos az ívhosszra nézve, továbbá*

$$\frac{d\nu_K(z)}{ds} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_z} g_K(z)$$

ahol ds jelöli az ívhossz mértéket ∂K-n, és $\partial/\partial\mathbf{n}_z$ jelenti a $\mathbf{n}_z$ külső normális szerinti deriválást z-ben.

Fő eredmény

Az (1.3) bizonyítása egy kimerítési technikát használ, amelyről kiderült, hogy nagyon hasznos eszköz egy- (valós vagy komplex) dimenzióban, és magasabb dimenzióban is megjelenik bizonyos formában. A következő fogalom jelöli ki az általánosság határát.

Egy $K \subset \mathbf{C}$ halmazt Jordan kövérnek hívunk, ha minden komponensének a határa egy zárt Jordan görbe, és K a belsejének a lezártja: $K = \overline{\operatorname{Int}(K)}$.

Az egyik fő

Tétel (9). *Legyen K egy Jordan kövér kompakt halmaz összefüggő komponenssel, és álljon véges sok komponensből. Legyen z_0 egy pont* *a K határán, és tegyük fel, hogy ∂K kétszer folytonosan differenciálható Jordan ív a z_0 egy környezetében. Ekkor*

$$|P_n'(z_0)| \leq n(1+o(1))\frac{\partial g(K,z_0)}{\partial \mathbf{n}}\|P_n\|_K, \tag{3.3}$$

ahol $o(1)$ tart 0-hoz egyenletesen a legfeljebb n-ed fokú polinomokon amint $n \to \infty$.

Ennek az egyenlőtlenségnek az élességét is tárgyaljuk.

A 9. Tétel bizonyítása számos lépésből áll, egyre általánosabb feltételek mellett bizonyítva.

(3.3) lemniszkátán

Idézzünk föl egy fogalmat, amely esetében bizonyítjuk először (3.3) egyenlőtlenséget.

Jelölje D az egységkörlapot, $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$.

Definíció (1). *Az $L \subset \mathbf{C}$ halmaz egy* lemniszkáta*, ha valamilyen r komplex polinomra $L = r^{-1}[\partial D]$, vagyis, $z \in L \Leftrightarrow |r(z)| = 1$. Az $r^{-1}[D] = \{z \in \mathbf{C} : |r(z)| \leq 1\}$ halmazt az L* lemniszkáta belsejének *hívjuk.*

Jegyezzük meg, hogy a lemniszkáta belseje nem a topologikus belseje a lemniszkátának (ami tulajdonképpen $\{z \in \mathbf{C} : |r(z)| < 1\}$).

Egy lemniszkáta véges sok, zárt Jordan görbék uniója. Nem szükségképp egyszerű görbék, ezért megkülönböztetjük a pontjaikat. Ha $z \in L = r^{-1}[\partial D]$ egy pontja az L lemniszkátának, ahol $r'(z) \neq 0$, akkor z egyszerű pont (az L lemniszkátán). Más szavakkal, z nem kritikus pontja r-nek. Azzal is ekvivalens, hogy L egy egyszerű görbe z_0 közelében (nem metszi át önmagát). Sőt, ha $r'(z) \neq 0$, akkor $L = r^{-1}[\partial D]$ egy sima (tulajdonképpen analitikus) görbe z közelében.

Első lépésben az (3.3) egyenlőtlenséget speciális esetben bizonyítjuk, nevezetes lemniszkátán (lásd [4]).

A következő lemma mutatja, hogy a lemniszkáta fogalma menynyire illeszkedik ebbe a környezetbe.

Lemma (4). *Legyen* $K := r^{-1}[D] = \{z \in \mathbf{C} : |r(z)| \leq 1\}$. *Jelölje* $\mathbf{C}_\infty \setminus K$ *nemkorlátos komponensének Green függvényét* g_K. *Ha* $z_0 \in \partial K$ *és* $r'(z_0) \neq 0$, *akkor*

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{z_0}} g_K(z_0) = \frac{1}{\deg r} |r'(z_0)| \ . \tag{2.2}$$

Másik fontos eszköz ebben a lépésben a következő szimmetrizálási trükk. Adott $z \in r^{-1}[\partial D]$ esetén jelölje $z^{(j)}$, $j = 0, \ldots, \deg r - 1$ azokat a pontokat, amelyekre $r(z) = r(z^{(j)})$ (minden j esetén). Más szavakkal, ezek a pontok "társítva" vannak z-hez az $r^{-1}[\partial D]$ ágairól, és valamilyen j_0 esetén $z = z^{(j_0)}$.

Tekintsük a P_n következő "periodikus kiterjesztését":

$$P^*(z) := \sum_{j=0}^{\deg r - 1} P_n(z^{(j)}) \cdot Q(z_0; z^{(j)}) \tag{2.8}$$

ahol $Q(z_0; z)$ egy megfelelően konstruált polinom, ami csak K-tól és z_0-tól függ. Használva a (2.8) szimmetrizálást és a 4. Lemmát kapjuk, hogy (3.3) fennáll lemniszkátán, vagyis:

Tétel (2). *Legyen* $K \subset \mathbf{C}$ *az* r *polinomhoz tartozó lemniszkáta belseje, vagyis,* $K = r^{-1}[D]$ *és legyen* $z_0 \in \partial K$ *rögzítve. Tegyük fel, hogy* z_0 *egyszerű pontja* ∂K*-nak. Jelölje* $g_K(z)$ *a* $\mathbf{C}_\infty \setminus K$ *nemkorlátos komponensének Green függvényét. Ekkor minden* n*-ed fokú* P_n *polinomra*

$$|P_n'(z_0)| \leq \big(1 + o(1)\big) \cdot \ n \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{z_0}} g_K(z_0) \cdot ||P_n||_K \ , \tag{1}$$

ahol $o(1)$ *tart* 0*-hoz ahogy* $n \to \infty$ *és csak* K*-tól és* z_0*-tól függ,* P_n*-től nem.*

Ez az eredmény éles a következő két értelemben:

Tétel (3). *i) Rögzített n esetén az $1 + o(1)$ szorzó tetszőleges nagy lehet, ha megfelelően választjuk meg a lemniszkáta belsejét (K) és a P_n polinomot.*

ii) Minden K lemniszkáta belsejére létezik egy nemnulla polinomokból álló $\{P_n\}$ sorozat ($\deg P_n = n \to \infty$) úgy, hogy

$$\left|P_n'(z_0)\right| = n||P_n||_K \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{z_0}} g_K(z_0)$$

ahol $z_0 \in K$ és z_0 egyszerű pontja K-nak.

Más szavakkal, az $1 + o(1)$ szorzót nem lehet kihagyni, ha megfelelően választjuk a K halmazt és a polinomot, és a konstansot (a $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{z_0}} g_K(z_0)$ szorzót a jobb oldalon) nem lehet kisebbre cserélni még lemniszkáták esetében sem.

(3.3) **általános esetben**

Használjuk a következő fogalmat és két tételt.

Legyen γ és Γ kétszer folytonosan differenciálható Jordan görbe a P pont egy környezetében, és érintsék egymást P-ben. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$-*érintik* egymást, ha az (előjeles) görbületük P-ben különböző (az előjeles görbületet Γ külsejéből nézve). Ekvivalensen fogalmazva, P egy környezetében a két görbét el lehet választani két körvonallal úgy, hogy az egyik körvonal a másik körvonal belsejében van.

Legyenek γ_j, Γ_j, $j = 1, \ldots, m$ Jordan görbék γ_j a Γ_j belsejében, a Γ_j-k egymás külsejében, és legyen $\gamma^* = \cup_j \gamma_j$, $\Gamma^* = \cup_j \Gamma_j$.

Tétel (7). *Legyen $\gamma^* = \cup_{j=1}^m \gamma_j$ és $\Gamma^* = \cup_{j=1}^m \Gamma_j$ mint fent, továbbá γ^* és Γ^* $\mathcal{K}$-érintse egymást a $P_1, \ldots, P_k$ pontokban, amelyek egy-egy környezetében mindkét görbe kétszer folytonosan differenciálható. Ekkor létezik egy σ lemniszkáta, amely elválasztja γ^*-ot Γ^*-tól, és $\mathcal{K}$-érinti γ^*-t Γ^*-t mindegyik P_j-nél.*

Továbbá, σ szigorúan γ^* és Γ^* közt fekszik, kivéve a $P_1, \ldots, P_k$ pontokat, és pontosan egy összefüggő komponense van minden γ_j és Γ_j közt $j = 1, \ldots, m$, és ezek a komponensek Jordan görbék.

Az 7. Tétel bizonyítása eléggé technikai, a vázlata a következő. Az egyszerűség kedvéért elhagyjuk a j indexet és K_0-lal jelöljük azt a kompakt halmazt, amit γ^* közrezár.

- Először elvesszük egy kis részét a K_0-nak a P pont körül, a maradékot K_1-gyel jelöljük.

- Az eltávolított rész helyett egy S lencse alakú tartomány $T^{\theta,\delta}(S)$ elforgatott és eltolt példányát vesszük hozzá, ahol a lencse alakú tartományt olyan körívek határolják, amelyeknek a görbülete a Γ és γ P-beli görbülete közt van.

- A Green vonal a $g(K_1 \cup T^{\theta,\delta}(S), z)$ Green függvény szintvonala valamilyen kis $\tau > 0$ értékre.

- Megvizsgáljuk ezeket a τ-szintvonalakat a $T^{\theta,\delta}(S)$ határa közelében a tükrözési elv segítségével. Vagyis folytatjuk a Green függvényt a $\partial T^{\theta,\delta}(S)$ íven át, és kiegészítjük ezt a harmonikus függvényt egy analitikus függvénnyé. Így a τ-szintvonala a $g(K_1 \cup T^{\theta,\delta}(S), z)$-nek megegyezik egy szakasz analitikus függvény általi inverzképével, és így az analitikus tulajdonságokat fel lehet használni a vizsgálathoz (11. Lemma).

- A Brouwer fixpont-tétel segítségével bebizonyítjuk, hogy megfelelő(en kis θ szögű) forgatás és (δ hosszú) eltolás esetén a τ-szintvonal áthalad a P ponton és ugyanaz lesz az érintője ott, mint Γ-nak (és γ-nak).

- Kis τ esetén a τ-szintvonal nagyon közel megy a $K_1 \cup T^{\theta,\delta}(S)$-hoz, így elválasztja mindegyik γ_j-t Γ_j-től és végig a $T^{\theta,\delta}(S)$ határa mentén a görbülete nagyon közel lesz a $\partial T^{\theta,\delta}(S)$ görbületéhez, ami ugyanaz, mint S görbülete.

- Következésképp, a P-nek abban a környezetében, amelyben dolgozunk, a τ-szintvonal γ és Γ közt halad, és ugyanakkor érinti mindkettőjüket P-ben. Így, a Blaschke gördülési tételének egy változatával (lásd 13. Lemma) a szintvonal ezen két görbe közt halad egy kisebb környezetben.

- Máshol a τ-szintvonal közel halad a $K_1 \cup T^{\theta,\delta}(S)$ határához, emiatt γ^*-on kívül van, de Γ^*-on belül.

Ezenkívül, a P_j-knél a K_0 kompakt halmaz és a σ kimerítő lemniszkáta Green függvény kapcsolatát írja le a következő

Tétel (8). *Legyen Γ^*, γ^* és $P_1, \dots, P_k \in \Gamma^*$ mint a 7. Tételben. Ekkor, minden $\varepsilon > 0$-ra létezik egy σ lemniszkáta a 7. Tételbeli tulajdonságokkal úgy, hogy mindegyik P_j-nél*

$$\frac{\partial g(L, P_j)}{\partial \mathbf{n}} \leq \frac{\partial g(K, P_j)}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon, \tag{3.1}$$

ahol $\partial(\cdot)/\partial\mathbf{n}$ jelöli a (külső) normális szerinti derváltat.

Hasonlóan, minden $\varepsilon > 0$-ra létezik egy σ lemniszkáta a 7. Tételbeli tulajdonságokkal úgy, hogy mindegyik P_j-nél

$$\frac{\partial g(K_0, P_j)}{\partial \mathbf{n}} \leq \frac{\partial g(L, P_j)}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Élesség

Az 9. Tétel éles a következő két értelemben.
Először is, általában, a

$$|P_n'(z_0)| \leq n \frac{\partial g(K, z_0)}{\partial \mathbf{n}} \|P_n\|_K$$

egyenlőtlenség, vagyis (3.3) az $1 + o(1)$ szorzó nélkül, nem igaz.
Másodszor, a ”geometriai” konstanst nem lehet kisebbre cserélni:

Tétel (10). *Legyen K és z_0 olyan, mint a 9. Tételben. Ekkor minden n-re létezik egy n-ed fokú P_n polinom úgy, hogy*

$$|P_n'(z_0)| > n(1 - o(1)) \frac{\partial g(K, z_0)}{\partial \mathbf{n}} \|P_n\|_K. \tag{3.4}$$

Továbbá, az általánosított Hilbert lemniszkáta tétel is éles abban az értelemben, hogy a C^2 simasági feltételt nem lehet kihagyni. Vagyis, a 7. Tétel bizonyításában lényegesen kihasználtuk, hogy van a görbéknek egy olyan (másod-) rendű deriváltja, amelyek különböznek.

Hivatkozások

[1] Mirosław Baran. Complex equilibrium measure and Bernstein type theorems for compact sets in $\mathbf{R}^n$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(2):485–494, 1995.

[2] Sergeĭ Natanovich Bernstein. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes de degré donné. *Mem. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg.*, (4):1–103, 1912.

[3] Andrei Andreyevich Markov. Ob odnom voproce D. I. Mendeleeva. *Zapiski Imperatorskoi Akademii Nauk SP6.*, (62):1–24, 1890.

[4] Béla Nagy. Asymptotic Bernstein inequality on lemniscates. *J. Math. Anal. Appl.*, 301(2):449–456, 2005.

[5] Béla Nagy. The higher order sharpness of the generalized Hilbert's lemniscate theorem. In *Approximation theory XI: Gatlinburg 2004*, Mod. Methods Math., pages 319–326. Nashboro Press, Brentwood, TN, 2005.

[6] Béla Nagy and Vilmos Totik. Sharpening Hilbert's lemniscate theorem. to appear in J. Anal. Math.

[7] Izidor Pavlovics Natanszon. *Konstruktív függvénytan.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[8] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[9] Edward B. Saff and Vilmos Totik. *Logarithmic potentials with external fields*, volume 316 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. Appendix B by Thomas Bloom.

[10] Vilmos Totik. Polynomial inverse images and polynomial inequalities. *Acta Math.*, 187(1):139–160, 2001.