Green-függvények simasága és halmazok sűrűsége

Tézis

Toókos Ferenc

2005.

A Green-függvények határpontok környezetében való viselkedése a harmonikus analízis alapvető kérdése, melynek számos alkalmazása van pl. Dirichlet problémák megoldásainak simasági vizsgálatában vagy polinomegyenlőtlenségeknél. A Green-függvények folytonosságával határpontokban sok tanulmány foglalkozik. Ezen munka célja, hogy a halmaz geometriáján alapuló feltételeket adjon az erősebb Hölder folytonosságra. Egyaránt tárgyaljuk a síkbeli és a magasabb dimenziós esetet. A disszertáció 3 részből áll, melyek egy-egy cikken alapulnak: [9], [10] és [11].

1. Optimális simaság $E \subset [0,1]$-re

Tegyük fel, hogy $E \subset \mathbf{C}$ egy kompakt halmaz $\mathrm{cap}(E) > 0$ logaritmikus kapacitással. Legyen $\Omega := \overline{\mathbf{C}} \setminus E$, ahol $\overline{\mathbf{C}} := \{\infty\} \cup \mathbf{C}$ a kibővített komplex sík. Jelölje $g_\Omega(z) = g_\Omega(z, \infty)$, $z \in \Omega$ az Ω Green-függvényét ∞ pólussal. A g_Ω viselkedését tanulmányozzuk egy reguláris határpontban.

Tegyük fel, hogy a 0 az E-nek egy reguláris pontja, vagyis, hogy $g_\Omega(z)$ folytonos 0-ban, és $g_\Omega(0) = 0$. Először tekintsük az $E \subset [0,1]$ esetet. A Green-függvény monotonitása miatt

$$g_\Omega(z) \geq g_{\overline{\mathbf{C}} \setminus [0,1]}(z), \quad z \in \mathbf{C} \setminus [0,1],$$

azaz, ha E-nek a "legnagyobb a sűrűsége" a 0-ban, akkor g_Ω-nak a "legnagyobb a simasága" az origóban. Ezért

$$g_\Omega(-r) \geq g_{\overline{\mathbf{C}} \setminus [0,1]}(-r) > \sqrt{r}, \quad 0 < r < 1.$$

Szeretnénk jellemezni azokat az E halmazokat, amelyek Green-függvényének a "legnagyobb a simasága" 0-ban, vagyis azokat az E-ket, amelyek eleget tesznek a következő feltételnek:

$$g_\Omega(z) \leq C|z|^{1/2}, \qquad z \in \mathbf{C},$$

amely ekvivalens a

$$g_\Omega(-r) \leq Cr^{1/2}, \qquad 0 < r < 1 \tag{1}$$

egyenlőtlenséggel (c.f. [1, Theorem 3.6]). V. Andrievskii [2] bebizonyította, hogy ha E teljesíti (1)-et, akkor a sűrűsége a logaritmikus kapacitással mérve a 0 egy kis környezetében tetszőlegesen közel van a $[0,1]$ sűrűségéhez abban a környezetben, azaz (1)-ből következik, hogy

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{cap}(E \cap [0,r])}{r} = \frac{1}{4}. \tag{2}$$

$0 < \varepsilon < 1/2$-re legyen (lásd [8])

$$E_\varepsilon(t) = (E \cap [0,t]) \cup [0, \varepsilon t] \cup [(1-\varepsilon)t, t]. \tag{3}$$

Első eredményünk:

1. Tétel. *Bármely $\varepsilon > 0$-ra*

$$\int_r^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{\mathrm{cap}(E_\varepsilon(t))}{t} \right) \frac{1}{t} dt < C_0 \frac{g_\Omega(-r)}{\sqrt{r}} \tag{4}$$

ahol C_0 független r-től.

L. Carleson és Totik Vilmos [8] egy Wiener-féle feltétellel jellemezték az optimális simaságot. Belátták a következőt:

2. Tétel (Carleson, Totik). *Legyen $\varepsilon < 1/3$. E akkor és csak akkor elégíti ki* (1)*-et, ha*

$$\sum_k \left(\frac{1}{4} - \frac{\operatorname{cap}(E_\varepsilon(2^{-k}))}{2^{-k}} \right) < \infty.$$

Ez a tétel ugyanazt a szerepet tölti be a Lip 1/2 simaság esetében, mint Wiener tétele a folytonosságra. A 2. Tétel Carlesontól származó bizonyítása [8]-ben a Poisson-formulán alapult. Van egy másik megközelítés is: a balayage-technika, mellyel a 2. Tétel következő változatát bizonyítjuk:

3. Tétel. *Legyen $\varepsilon < 1/2$. E akkor és csak akkor elégíti ki* (1)*-et, ha*

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{\operatorname{cap}(E_\varepsilon(t))}{t} \right) \frac{1}{t} dt < \infty. \tag{5}$$

Andrievskii tétele a 3. Tétel egy következménye.

Az 1. és 3. Tétel bizonyításánál használt módszer az $E \subset [-1, 1]$ esetre is alkalmazható (c.f. [8, Theorem 1.11]). Ebben az esetben

$$g_\Omega(ir) \geq g_{\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]}(ir) > \frac{r}{2}, \quad 0 < r < 1,$$

tehát a Green-függvény optimális simasága itt Hölder 1, és most azokat az E halmazokat keressük, melyekre

$$g_\Omega(z) \leq C|z|, \qquad 0 < |z| < 1.$$

Ez ekvivalens a

$$g_\Omega(ir) \le Cr, \qquad 0 < r < 1 \tag{6}$$

feltétellel, mert $g_\Omega(x+iy)$ monoton y-ban. A Green-függvény legnagyobb simasága az origónál (Lipschitz-feltétel) ismét ekvivalens a legnagyobb sűrűséggel a 0-ban. Azaz legyen $E \subset [-1,1]$ és definiáljuk $E_\varepsilon(t)$-t (3) szerint, továbbá legyen

$$E_\varepsilon(-t) = (E \cap [-t,0]) \cup [-t,(1-\varepsilon)(-t)] \cup [-\varepsilon t, 0].$$

4. Tétel. *Ha $E \subseteq [-1,1]$ és $\varepsilon > 0$, akkor*

$$\int_r^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{\operatorname{cap}(E_\varepsilon(t))}{t}\right)\frac{1}{t}dt < C_0 \frac{g_\Omega(ir)}{r} \tag{7}$$

Ugyanez igaz $E_\varepsilon(-t)$-re is.

5. Tétel. *Legyen $\varepsilon < 1/2$. E akkor és csak akkor tesz eleget a*

$$g_\Omega(z) \le C|z|, \qquad 0 < |z| < 1, \tag{8}$$

feltételnek, ha (5) *teljesül $E_\varepsilon(t)$-re és $E_\varepsilon(-t)$-re.*

Ez a [8, Theorem 1.11] egy változata.

1. Következmény. *Ha E kielégíti* (8)*-at, akkor*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{cap}(E \cap [-r,r])}{r} = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

2. Következmény. (c.f. [8, Corollary 1.12]) *g_Ω akkor és csak akkor Hölder* 1 *folytonos 0-ban, ha mind $g_{\overline{\mathbb{C}}\setminus(E\cap[0,1])}$ és $g_{\overline{\mathbb{C}}\setminus(E\cap[-1,0])}$ Hölder* 1/2 *folytonosak ugyanott.*

2. Markov-egyenlőtlenség és Green-függvények

A disszertáció ezen része Totik Vilmossal közös munka.

Jelölje Π_n a legfeljebb n-edfokú algebrai polinomok halmazát. A Markov egyenlőtlenség egy alapvető összefüggés egy $P_n \in \Pi_n$ polinom supremum-normája és a deriváltjának a supremum-normája között:

$$||P_n'||_{[-1,1]} \leq n^2 ||P_n||_{[-1,1]}.$$

Ha $C_1(0)$ jelöli az egységkört, akkor az egyenlőtlenség megfelelő alakja

$$||P_n'||_{C_1(0)} \leq n||P_n||_{C_1(0)},$$

mely Bernsteintől származik. Érdemes megemlíteni, hogy ez bizonyos értelemben az optimális eset, mivel tetszőleges E kompakt halmazhoz a komplex számsíkon léteznek $P_n \in \Pi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ polinomok, melyekre

$$||P_n'||_E \geq cn||P_n||_E$$

valamely $c > 0$ konstanssal.

Legyen $E \subset \mathbf{C}$ kompakt pozitív logaritmikus kapacitással. Azt mondjuk, hogy E eleget tesz a Markov-egyenlőtlenségnek polinomiális faktorral, ha létezik $C,\ k > 0$ úgy, hogy

$$||P_n'||_E \leq Cn^k ||P_n||_E \tag{10}$$

igaz minden n-re és $P_n \in \Pi_n$-re.

A (10) egyenlőtlenség szoros kapcsolatban áll E Green-függvényének simasági tulajdonságaival. Legyen Ω az E külső tartománya, azaz a $\overline{\mathbf{C}} \setminus E$ nemkorlátos komponense, és jelölje $g_\Omega(z)$ az Ω Green-függvényét végtelen pólussal. g_Ω-t Hölder-folytonosnak nevezzük, ha létezik $C_1,\ \alpha > 0$ úgy, hogy

$$g_\Omega(z) \leq C_1 \Big(\mathrm{dist}(z, E)\Big)^\alpha. \tag{11}$$

minden $z \in \mathbf{C}$-re. Ismeretes, hogy bizonyos esetekben a Markov-egyenlőtlenség ekvivalens a Green-függvény Hölder-folytonosságával. Ezt Totik (lásd [12]) bebizonyította Cantor-féle halmazokra, vagyis belátta, hogy (10) ekvivalens (11)-gyel, ha E Cantor-féle halmaz. Az azonban nyitott probléma, hogy (10) és (11) ekvivalensek-e bármely E kompakt halmazra. Ebben a munkában az a célunk, hogy megmutassuk, hogy a $k = 1$ és $\alpha = 1$ optimális esetek valóban ekvivalensek.

6. Tétel. *Legyen E a sík egy kompakt részhalmaza, és tegyük fel, hogy Ω, a $\overline{\mathbf{C}} \setminus E$ nemkorlátos komponense reguláris. Ekkor a következők páronként ekvivalensek.*

i) *E-n optimális Markov-egyenlőtlenség igaz, azaz létezik $C > 0$ úgy, hogy*

$$||P_n'||_E \leq Cn||P_n||_E \tag{12}$$

minden $P_n \in \Pi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ polinomra.

ii) *A g_Ω Green-függvény Lipschitz-folytonos, azaz létezik $C_1 > 0$ úgy, hogy*

$$g_\Omega(z) \leq C_1 \mathrm{dist}(z,\ E) \tag{13}$$

minden $z \in \mathbf{C}$-re.

iii) *Az E halmaz μ_E egyensúlyi mértéke kielégít egy Lipschitz-féle feltételt, azaz létezik $C_2 > 0$ úgy, hogy*

$$\mu_E\Big(D_\delta(z)\Big) \le C_2\delta \tag{14}$$

minden $z \in E$-re és $\delta > 0$-ra.

Továbbá, ha Ω egyszeresen összefüggő, akkor az **i)–iii)** *feltételekkel szintén ekvivalens a következő*

iv) *Az Ω-t az egységkör külsejére képező Φ konformis leképezés Lipschitz-folytonos, azaz*

$$|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)| \le C_3|z_1 - z_2|, \qquad z_1, z_2 \in \Omega.$$

Megemlítjük, hogy az **i), ii)** és **iv)** feltételek mindegyikéből következik a regularitás, így ekvivalenciájukban nem szükséges föltenni a regularitást.

A fenti tételnek van egy lokális változata is. Azt mondjuk, hogy E rendelkezik az optimális lokális Markov-tulajdonsággal a $z_0 \in \partial\Omega$ pontban, ha létezik olyan C konstans, hogy

$$|P_n^{(k)}(z_0)| \le C^k n^k \|P_n\|_E, \qquad P_n \in \Pi_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

ahol $k = 1, 2, \ldots$.

7. Tétel. *Legyen E a sík egy kompakt részhalmaza, Ω a $\overline{\mathbf{C}} \setminus E$ nemkorlátos komponense, és tegyük fel, hogy $z_0 \in \partial\Omega$ egy reguláris határpont (vagyis $g_\Omega(z_0) = 0$). Ekkor a következők ekvivalensek.*

i) *E rendelkezik az optimális Markov-tulajdonsággal z_0-ban.*

ii) *A g_Ω Green-függvény Lipschitz-folytonos z_0-ban, vagyis*

$$g_\Omega(z) \leq C_1|z - z_0|$$

valamilyen C_1 konstanssal.

iii) *Az E halmaz μ_E egyensúlyi mértéke kielégít egy Lipschitz-féle feltételt z_0-ban, azaz létezik $C_2 > 0$ úgy, hogy*

$$\mu_E\Big(D_\delta(z_0)\Big) \leq C_2\delta$$

minden $\delta > 0$-ra.

Továbbá, ha Ω egyszeresen összefüggő, akkor az **i)**–**iii)** *feltételekkel szintén ekvivalens a következő*

iv) *Az Ω-t az egységkör külsejére képező Φ konformis leképezés Lipschitz-folytonos z_0-ban.*

Érdemes megemlíteni, hogy **ii)** és **iii)** ekvivalenciájánál sokkal több is igaz. A Green-függvényre egy nagyon pontos kétoldalú becslést adhatunk az egyensúlyi mértékkel kifejezve.

8. Tétel. *Legyen E a sík egy kompakt részhalmaza, Ω a $\overline{\mathbf{C}} \setminus E$ nemkorlátos komponense, és tegyük fel, hogy $z_0 \in \partial\Omega$ egy reguláris határpont. Ekkor minden $0 < r < 1$-re*

$$\int_0^r \frac{\mu_E(D_t(z_0))}{t}dt \leq \sup_{|z-z_0|=r} g_\Omega(z) \leq 3\int_0^{4r} \frac{\mu_E(D_t(z_0))}{t}dt. \tag{15}$$

3. Egy Wiener-tipusú feltétel $\mathbf{R}^d$-ben

Legyen $E \subset \mathbf{R}^d$ egy kompakt halmaz pozitív Newton-féle kapacitással, Ω az $\mathbf{R}^d \setminus E$ nemkorlátos komponense, és $g_\Omega(x,a)$ az Ω Green-függvénye $a \in \Omega$ pólussal. g_Ω viselkedését vizsgáljuk Ω egy határpontjában, melyről az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a 0-ban van, vagyis hogy $0 \in \partial\Omega$.

Jelölje $B_r = \{x \mid |x| < r\}$ az origó körüli r sugarú nyílt gömböt, $\overline{B}_r$ a lezártját, és S_r a határát (a gömbhéjat). Legyen továbbá

$$E^n = E \cap (\overline{B}_{2^{-n+1}} \setminus B_{2^{-n}}) = \left\{ x \in E \,\middle|\, 2^{-n} \le |x| \le 2^{-n+1} \right\}.$$

Wienertől származik a 0 határpont regularitásának karakterizációja (lásd pl. [3, Theorem 5.2]): A $g_G(x,a)$ $(a \in \Omega)$ Green-függvény akkor és csak akkor folytonos $0 \in \partial\Omega$-ban (vagyis 0 az E reguláris határpontja), ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cap}(E^n) 2^{n(d-2)} = \infty, \tag{16}$$

ahol $\operatorname{cap}(E^n)$ jelöli az E^n halmaz (d-dimenziós) Newton-féle kapacitását. Célunk egy hasonló jellemzést adni az erősebb Hölder-folytonosságra:

$$g_\Omega(x,a) \le C|x|^\kappa \tag{17}$$

valamely pozitív C, κ konstansokkal.

[8] definícióit követve tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra vezessük be a következő jelölést:

$$\mathcal{N}_E(\varepsilon) = \{n \in \mathbf{N} \,\big|\, \operatorname{cap}(E^n) \ge \varepsilon 2^{-n(d-2)}\}. \tag{18}$$

Azt mondjuk, hogy a természetes számok egy $\mathcal{N} = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$ részsorozata pozitív alsó sűrűségű, ha

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{|\mathcal{N} \cap \{0, 1, \ldots, N\}|}{N+1} > 0,$$

ami nyilvánvalóan ekvivalens $n_k = O(k)$-val.

Legyen $x_0 \in S_1$, $0 < \tau < 1$, $\ell > 0$, továbbá

$$C(x_0, \tau, \ell) := \left\{x \in B_\ell \,\middle|\, \frac{\langle x, x_0\rangle}{\|x\|} \geq 1 - \tau\right\}. \tag{19}$$

Ez egy 0 csúcsú és x_0 tengelyirányú kúp. Azt mondjuk, hogy E eleget tesz a kúpfeltételnek, ha

$$C(x_0, \tau, \ell) \subset \Omega \tag{20}$$

valamilyen $x_0 \in S_1$-re, τ-ra és $\ell > 0$-ra, tehát ha Ω tartalmaz egy 0 csúcsú kúpot.

9. Tétel. a) *Ha $\mathcal{N}_E(\varepsilon)$ pozitív alsó sűrűségű valamilyen $\varepsilon > 0$-ra, akkor a g_Ω Green-függvény Hölder-folytonos 0-ban.*

b) *Ha a g_Ω Green-függvény Hölder-folytonos 0-ban, és E eleget tesz a kúpfeltételnek, akkor $\mathcal{N}_E(\varepsilon)$ pozitív alsó sűrűségű valamilyen $\varepsilon > 0$-ra.*

A fenti tétel első részét, a sűrűségi feltétel elégségességét a Dirichlet-probléma és más elliptikus egyenletek megoldásának Hölder-folytonosságához Maz'ja már a '60-as években belátta (lásd [4]- [7]). Maz'ja ezt a feltételt használta:

$$\sum_{n=1}^{N} 2^{n(d-2)} \mathrm{cap}(E \cap \overline{D}_{2^{-n}}) \geq \delta N, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

valamely $\delta > 0$-ra, ami ekvivalens $\mathcal{N}_E(\varepsilon)$ pozitív sűrűségével. Maz'ja [7]-ben azt is megmutatta, hogy általánosságban ez a feltétel nem szükséges. [6]-ban vetette föl a problémát olyan feltételek keresésére, melyek mellett (21) szükséges is lenne. Tehát a 9. Tétel egy régi nyílt problémát old meg az egyszerű kúpfeltétel mellett.

A Hölder-tulajdonság fontosságát a következő eredmény mutatja. Legyen G egy kompakt határú tartomány $\mathbf{R}^d$-ben, és tegyük fel, hogy 0 a G határán van. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $G \not\subseteq B_1$. Legyen $E = \overline{B}_1 \setminus G$. Ekkor $\Omega := \mathbf{R}^d \setminus E = G \cup (\mathbf{R}^d \setminus \overline{B}_1)$ egy G-nél nagyobb tartomány, és 0 az Ω határán van. Ha f egy korlátos Borel-mérhető függvény G határán, akkor jelölje u_f az f-hez tartozó Dirichlet-probléma Perron-Wiener-Brelot megoldását G-ben. u_f-et az $u_f = f$ definícióval terjesztjük ki ∂G-re.

1. Lemma. *Tegyük fel, hogy* 0 *a* G*-nek reguláris határpontja. Ekkor a következők ekvivalensek.*

1) $g_G(\cdot, a)$ *Hölder-folytonos* 0*-ban* $a \in G$*-re.*

2) $\mu_E(\overline{B}_r) \leq C r^{d-2+\kappa}$ *valamely* C*-re,* $\kappa > 0$*-ra és minden* $r < 1$*-re, ahol* μ_E *jelöli* E *egyensúlyi mértékét.*

Továbbá, ha G *eleget tesz* 0*-ban a kúpfeltételnek, akkor a fentiekkel szintén ekvivalens a következő*

3) *Ha* f *Hölder-folytonos* 0*-ban, akkor* u_f *is az.*

Hivatkozások

[1] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants*, New York: McGraw-Hill, 1973.

[2] V. V. Andrievskii, *The highest smoothness of the Green function implies the highest density of the set*, Ark. Mat., **42**, no. 2, 217-238, 2004.

[3] N. S. Landkof, *Foundations of Modern Potential Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **180**, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[4] V. G. Maz'ja, *Regularity at the boundary of solutions of elliptic equations, and comformal mappings*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **152**, 1297-1300, (Russian) 1963.

[5] V. G. Maz'ja, *On the modulus of continuity of the solutions of the Dirichlet problem near irregular boundary*, in: Problems in mathematical analysis; Boundary problems and integral equations, Izdat. Leningrad Univ., Leningrad, 45-48, (Russian) 1966.

[6] V. G. Maz'ja, *On the regularity of boundary points for elliptic equations*, in: Investigations on linear operators and function theory ; 99 unsolved problems in linear and complex analysis, Zap. Nauchn, Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), **81**, 197-199, (Russian) 1978.

[7] V. G. Maz'ja, *On the modulus of continuity of a harmonic function at a boundary point*, Zap. Nauchn. Sem. Le-

ningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), **135**, 87-95, (Russian) 1984.

[8] L. Carleson, V. Totik, *Hölder continuity of Green's functions*, Acta Sci. Math., Szeged, **70**, 557-608, 2004.

[9] F. Toókos, V. Totik, *Markov inequality and Green functions*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, to appear

[10] F. Toókos, *Smoothness of Green's functions and density of sets*, Acta Sci. Math., Szeged, to appear

[11] F. Toókos, *A Wiener-type condition for Hölder continuity*, Acta Math. Hungarica, to appear

[12] V. Totik,*Markoff constants for Cantor sets*, Acta Sci. Math. (Szeged), **60**, 715-734, 1995.