Periodikus funkcionál-differenciálegyenletek bifurkációelmélete

Röst Gergely

PhD Tézisek

Szeged, 2005

SZTE Bolyai Intézet
Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék

témavezető:

Dr. Krisztin Tibor

Bevezetés

A disszertáció témája az

$$\dot{x}(t) = \gamma\big(a(t)x(t) + f(t, x(t-1))\big)$$

alakú, időben periodikus, késleltetett argumentumú differenciálegyenletek dinamikájának vizsgálata kritikus paraméterértékek közelében. Ilyen típusú egyenletek számos gyakorlati alkalmazásban előfordulnak (neurális hálózatok, populációdinamika, nagy teljesítményű gépek mechanikája). A modern elmélet két alapvető monográfiája [1] és [3]. Bifurkációnak azt a jelenséget nevezzük, amikor a dinamika hirtelen megváltozik a paraméter egy kritikus értékénél, például az egyensúlyi helyzet elveszti a stabilitását, megjelennek periodikus megoldások, stb. A klasszikus bifurkációelméletet, amelynek gyökerei már Poincaré munkáiban megtalálhatóak, egy- és kétdimenziós dinamikai rendszerekre dolgozták ki, később általánosították magasabb dimenziós esetre is centrális sokaság redukció, vagy más néven projekciós módszer segítségével. A funkcionál-differenciálegyenletek esetében a természetes fázistér a kezdeti intervallumon folytonos függvények végtelen dimenziós Banach-tere. A kritikus esetben a dinamika összes lényegi sajátsága a centrális sokaságon mutatkozik meg. Autonóm esetben erre is van módszer: a Hale-féle bilineáris formákkal kiszámolható a projekció a centrális sokaságra. Ez azonban nem alkalmazható periodikus egyenletekre. Az elmúlt években kifejlesztettek egy normálforma elméletet periodikus funkcionál-differenciálegyenletekre, de az is csak olyan egyenletekre alkalmazható, amelyeknél a lineáris rész autonóm.

A disszertáció fő eredménye, hogy teljes bifurcióanalízist ad periodikus egyenletek egy széles osztályára. Amikor a késleltetés megegyezik a periódussal, a Neimark-Sacker bifurkáció teljes elmélete átvihető a végtelen dimenziós esetre, anélkül, hogy bármilyen extra feltételt követelnénk meg a nemlinearitástól. A legnagyobb technikai nehézséget az okozza, hogy a Banachterünkben explicit számításokra van szükség: véges dimenziós invariáns sokaságok és normálformák meghatározására. Ehhez egy funkcionálanalitikus megközelítést használunk, a spektrális projekciót. Az összes eredményünk explicit, az egyenlet ismeretében meghatározhatjuk a bifurkációs pontokat és a bifurkáció irányát is, ez az alkalmazások szempontjából különösen fontos. A kiterjesztett fázistérben invariáns tóruszok megjelenése figyelhető meg.

Mint kiderül, az

$$\dot{x}(t) = \gamma f(t, x(t-1))$$

egyenlet nem csak egy speciális esete az előzőnek, ahol $a(t) \equiv 0$, hanem itt egészen új jelenségek is előfordulhatnak. Ekkor ugyanis a bifurkáció erősen 1:4 rezonáns és az invariáns tórusz nem feltétlenül létezik. Az erős rezonanciáknak is kiterjedt elmélete van, a disszertációban az 1:4 rezonancia esetét is általánosítjuk periodikus funkcionál-differenciálegyenletekre. Az eredményeink itt is explicitek.

Tételeink számos jól ismert egyenletre alkalmazhatóak. Az alábbiakban ismertetjük a disszertáció fő eredményeit és az azokhoz felhasznált módszereket, a kimondott tételek mindegyike saját eredmény.

Neimark-Sacker Bifurkáció

Először az

$$\dot{x}(t) = \gamma\big(a(t)x(t) + f(t, x(t-1))\big) \tag{1}$$

egyenletet vizsgáljuk, ahol γ valós paraméter, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^4-sima függvények, amelyek teljesítik az $a(t+1) = a(t)$, $f(t+1, \xi) = f(t, \xi)$ és az $f(t, 0) = 0$ feltételeket minden $t, \xi \in \mathbb{R}$ esetén. Állapotterünk a $[-1, 0]$ intervallumon folytonos függvények $C := C([-1, 0], \mathbb{R})$ Banach-tere a szuprémumnormával. Minden $\phi \in C$ kezdeti függvény egyértelműen meghatároz egy $x^\phi : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ függvényt, ami differenciálható a $(0, \infty)$-n, teljesíti az egyenletet minden $t > 0$-ra és $x^\phi(t) = \phi(t)$ minden $t \in [-1, 0]$ esetén. Az ilyen x^ϕ függvényt nevezzük az egyenlet megoldásának. Az $F : C \to C$ periódus-leképezést az

$$F(\phi) = x_1^\phi, x_t(s) = x(t+s), s \in [-1, 0]$$

relációkkal definiáljuk.

Floquet-elméletet ([3]) használva levezetjük a $h(\lambda) = \gamma\alpha + \gamma\beta e^{-\lambda} - \lambda$ karakterisztikus függvényt, ahol $\alpha = \int_{-1}^{0} a(t)dt$, $\beta = \int_{-1}^{0} f_\xi(t, 0)dt$. Ennek zéróhelyei a Floquet-exponensek. A Floquet-együtthatók pontosan a monodrómia operátor sajátértékei is egyben. Az U monodrómia operátor a periódusleképezés deriváltja a 0 egyensúlyi helyzetben. A karakterisztikus egyenlet alapos vizsgálatával felderítjük, milyen paraméterértékeknél hány Floquet-együttható van a komplex egységkörön belül, melyek a kritikus paraméterértékek, amikor ez a szám változik. Megmutatjuk, hogy a bifurkációs tétel feltételei teljesülnek. Amikor a paraméter értékét változtatjuk és az áthalad a kritikus értéken, egy konjugált Floquet-együttható pár metszi az egységkört, Neimark-Sacker bifurkáció történik és egy invariáns görbe jelenik meg a centrális sokaságon. A kiterjesztett fázistérben ez egy invariáns tórusznak tekinthető. A centrális sokaságra megszorított leképezés kiszámításához és a bifurkáció irányának meghatározásához általánosítjuk a projekciós módszert. Fontos eszköz Riesz és Schauder tétele a spektrál dekompozícióról. A spektrális projekció operátor egy Riesz-Dunford integrállal fejezhető ki, ezt kiszámoljuk, miután egy peremérték-problémát megoldva sikerül meghatározni a rezolvenst. Ezután már el tudjuk végezni a bifurkációs analízist és a bifurkáció irányának meghatározására explicit számolható feltételt adunk, ez meghatározza az invariáns görbe stabilitását is. A Neimark-Sacker bifurkációs tétel ([6]), a Banach-térbeli leképezések sima centrális sokaság tétele ([2], [5]) és a karakterisztikus egyenletből nyert információk kombinálásával kapjuk a következő bifurkációs tételünket.

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (1) egyenlethez tartozó $F_\gamma : C \to C$ periódusleképezések egyparaméteres családjának a $\gamma = \gamma_j$ kritikus paraméter-értéknél a $\phi = 0$ olyan fixpontja, amelynek pontosan két Floquet-együtthatója ($e^{i\theta}$ és $e^{-i\theta}$) van a komplex egységkörön. Ekkor létezik egy olyan környezete a 0-nak, amelyben pontosan egy invariáns görbe bifurkál a 0 fixpontból, amint a γ paraméterérték áthalad a kritikus γ_j értéken, feltéve, hogy a $\mu_j^4 \neq 1, \mu_j^3 \neq 1$ nemrezonancia feltételek teljesülnek. A $\frac{\partial|\mu(\gamma)|}{\partial\gamma}\,|_{\gamma_j}\neq 0$ transzverzalitási (Hopf) feltétel mindig teljesül (1)-re, $\mu_j^4 = 1$ pontosan akkor, ha $\alpha = 0$, valamint $\mu_j^3 = 1$ pontosan akkor, ha $\beta = 2\alpha$. A két kritikus Floquet-együttható $\mu_j = e^{\lambda_j} = e^{i\gamma_j\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} = -\frac{\alpha}{\beta} - i\sqrt{1-\frac{\alpha}{\beta}^2}$ és $\bar{\mu}_j = e^{\bar{\lambda}_j} = e^{-i\gamma_j\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} = -\frac{\alpha}{\beta} + i\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}}$ egyszeres sajátértékek. A kritikus paramétértékek $\gamma_{\pm n} = -\frac{\pm\arccos(-\frac{\alpha}{\beta})+2n\pi}{\pm\beta\sin\left(\arccos(-\frac{\alpha}{\beta})\right)}, n \in \mathbb{N}$.*

Az egyszerűség kedvéért legyen $b(t) = \gamma f_\xi(t,0)$ és $c(t) = \gamma a(t)$. Ezzel a jelöléssel a linearizált egyenlet így írandó:

$$\dot{y}(t) = c(t)y(t) + b(t)y(t-1),$$

az egyszeres sajátértékhez tartozó sajátfüggvények pedig:

$$\chi_\mu(t) : [-1,0] \ni t \mapsto e^{\int_{-1}^{t}[c(s)+\frac{b(s)}{\mu}]ds} \in \mathbb{C}.$$

Egy peremérték-problémát megoldva kapható meg a monodrómia operátor rezolvense, ennek reziduuma a spektrális projekció operátor.

2. Tétel. *A monodrómia-operátor rezolvense az alábbi képlettel fejezhető ki:*

$$
\begin{aligned}
(zI-U)^{-1}(\psi)(t) &= e^{\int_{-1}^{t}[c(u)+\frac{b(u)}{z}]du} \\
&\times \Bigg(\bigg(\frac{1}{z}\psi(0)+e^{\int_{-1}^{0}[c(u)+\frac{b(u)}{z}]du}\int_{-1}^{0}\frac{1}{z^2}e^{-\int_{-1}^{s}[c(u)+\frac{b(u)}{z}]du}b(s)\psi(s)ds\bigg) \\
&\times \big(z-e^{\int_{-1}^{0}[c(u)+\frac{b(u)}{z}]du}\big)^{-1}+\frac{1}{z}e^{-\int_{-1}^{t}[c(u)+\frac{b(u)}{z}]du}\psi(t) \\
&+\int_{-1}^{t}\frac{1}{z^2}e^{-\int_{-1}^{s}[c(u)+\frac{b(u)}{z}]du}b(s)\psi(s)ds\Bigg), \quad t\in[-1,0], z\in\mathbb{C}, \psi\in C.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

3. Tétel. *A spektrál projekció operátorra μ egyszerű sajátérték esetén a*

$$P_\mu(\psi)=\chi_\mu R_\mu(\psi)$$

reprezentáció teljesül, ahol

$$R_\mu(\psi)=\left(\frac{1}{\mu+\gamma\beta}\right)\left(\psi(0)+\int_{-1}^{0}\frac{b(s)\psi(s)}{\chi_\mu(s)}ds\right).$$

A spektrál projekció segítségével a projekciós módszert általánosítva hosszas számolás után levezethető a centrális sokaságra megszorított leképezés és a bifurkáció irányát meghatározó együttható, ami a fejezet egyik fő eredménye. Definiáljuk a $V := D^2F(0)$ és $W := D^3F(0)$ multilineáris operátorokat.

4. Tétel. *Az invariáns görbe megjelenésének irányát az alábbi kifejezés előjele határozza meg:*

$$
\begin{aligned}
\delta(\gamma_j)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\Bigg(\frac{1}{\mu}R_\mu\Big(&W(\chi_\mu,\chi_\mu,\bar\chi_\mu)+2V\big(\chi_\mu,(1-U)^{-1}V(\chi_\mu,\bar\chi_\mu)\big) \\
&+V\big(\bar\chi_\mu,(\mu^2-U)^{-1}V(\chi_\mu,\chi_\mu)\big)\Big)\Bigg),
\end{aligned}
$$

ahol minden tényező explicit módon kiszámolható a (1) egyenletből.

A $\delta(\gamma_j) < 0$ és a $\delta(\gamma_j) > 0$ eseteket szuperkritikus, illetve szubkritikus bifurkációnak nevezzük. A szuperkritikus esetben egy stabil (csak egy megszorított értelemben, az invariáns sokaságon belül stabil) invariáns görbe jelenik meg, ha $\gamma > \gamma_j$, míg a szubkritikus esetben egy instabil invariáns görbe tűnik el, amint a γ paraméter növekedve áthalad γ_j-n. Amennyiben $\delta(\gamma_j) = 0$, további vizsgálatokra van szükség. Jelen dolgozatban feltesszük, hogy a $\delta(\gamma_j) \neq 0$ nem-degeneráltsági feltétel teljesül. Az F_γ leképezések simasága az $a(t)$ és $f(t,\xi)$ függvények megfelelő simaságából következik.

Az egyenlet által generált periodikus szemidinamikai rendszerre a $C \times S^1$ kiterjesztett fázistérben autonóm rendszerként is tekinthetünk, jelölje $G(t)$ ennek a megoldás-operátorát.

5. Tétel. *Ha a Neimark-Sacker Bifurkációs Tétel feltételei teljesülnek, akkor a $G_\gamma(t) : C \times S^1 \to C \times S^1$ megoldás-operátorok által generált dinamikai rendszerek egyparaméteres, a (1) egyenlethez tartozó családjában pontosan egy invariáns tórusz bifurkál a $(0,t)$ periodikus megoldásból, amint a γ paraméter áthalad a kritikus γ_j értéken. Az invariáns tórusz megjelenésének irányát a $\delta(\gamma_j)$ együttható előjele határozza meg, amely explicit módon kiszámolható.*

Alkalmazások

Eredményeinket alkalmazni tudjuk a funkcionál-differenciálegyenletek elméletében legnevezetesebb egyenletek (Mackey-Glass, Nicholson és Krisztin-Walther egyenlet) periodikus változataira is, így számos új bifurkációs tételt bizonyíthatunk. A továbbiakban $r(t)$ olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt jelöl, amelyre $r(t) = r(t+1) \geq 0$ teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Hasonlóképpen $m(t), q(t)$ is nemnegatív 1-periodikus függvények. Használjuk még az R, M és Q jelölést rendre az $r(t), m(t)$ és $q(t)$ 1-hosszú intervallumon vett integráljaira. Kezdjük a Krisztin-Walther egyenlet egy általánosabb alakjával.

6. Tétel. *Tegyük fel, hogy $0 < R$, $g'(0) < 0$, $g''(0) = 0$ és $g'''(0) \neq 0$. Ekkor a*

$$\dot{z}(t) = \gamma r(t)\big(-mz(t) + g(z(t-1))\big) \tag{3}$$

egyenlethez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer a $g'''(0) < 0$ esetben szubkritikus, a $g'''(0) > 0$ esetben szuperkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy át, amint a γ paraméter növekedve áthalad γ_0-n.

Következő két tételünk a Mackey-Glass és a Nicholson-egyenlet periodikus változatairól szól.

7. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $0,9 < \frac{M}{Q} < 1$. *Ekkor az*

$$\dot{x}(t) = \gamma\Big(- m(t)x(t) + \frac{q(t)x(t-1)}{1+x(t-1)^2}\Big), \tag{4}$$

egyenlethez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer szuperkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy át, amint a γ *paraméter növekedve áthalad* γ_n*-en.*

A továbbiakban feltesszük, hogy $p > d > 0$, $c > 0$, $\beta > 0$.

8. Tétel. *Az*

$$\dot{N}(t) = \gamma r(t)\big(- dN(t) + pN(t-1)e^{-aN(t-1)}\big) \tag{5}$$

egyenlethez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer a pozitív egyensúlyi helyzet körül szuperkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy keresztül, amint a γ *paraméter növekedve áthalad a kritikus* γ_n *értéken, ahol* $n \geq 1$.

Végezetül a Krisztin-Walther egyenletnek azt a változatát tekintjük, amelyik egy periodikusan gerjesztett neuron dinamikáját írja le, majd ezt általánosítjuk.

9. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $0,9 < \frac{M}{\beta Q} < 1$. *Ekkor az*

$$\dot{x}(t) = \gamma\big(- m(t)x(t) + q(t)\tanh(\beta x(t-1))\big), \tag{6}$$

egyenlethez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer szuperkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy át, amint a γ *paraméter növekedve áthalad a* γ_n *kritikus értéken.*

10. Tétel. *Tekintsük az*

$$\dot{x}(t) = \gamma\big(- m(t)x(t) + f(t, x(t-1))\big) \tag{7}$$

egyenletet, ahol $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^4*-sima függvény, amelyre* $f(t+1,\xi) = f(t,\xi)$ *és* $f(t,0) = 0$ *teljesül minden* $t, \xi \in \mathbb{R}$ *esetén. Tételezzük fel, hogy*

$f_\xi(t,0) > 0$ minden $t \in \mathbb{R}$-re és $0,9 < \frac{M}{\int_{-1}^{0} f_\xi(s,0)ds} < 1$. Ekkor ha $f_{\xi\xi\xi}(t,0) < 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a (7) egyenlethez tartozó periódus-leképezés által generált dinamikai rendszer szuperkritikus, ha pedig $f_{\xi\xi\xi}(t,0) > 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor szubkritikus Neimark-Sacker bifurkáción megy át, amint a γ paraméter növekedve áthalad a γ_n kritikus értéken.

Rezonáns Bifurkációk

Ebben a fejezetben az

$$\dot{x}(t) = \gamma f(t, x(t-1)) \tag{8}$$

egyenletet vizsgáljuk, amelyik ugyanaz, mint az (1) egyenlet, amennyiben $a(t) \equiv 0$. Ekkor viszont nem teljesül a nemrezonancia-feltétel, tehát nem érvényes a bifurkációs tételünk. Az $1:4$ erős rezonancia esetén előfordulhat, hogy nem jelenik meg az invariáns görbe, helyette 4-periodikus pontok bifurkálnak ([4]).

A továbbiakban explicit ellenőrizhető feltételt adunk arra, hogy az eredmények mikor terjeszthetők ki a rezonáns esetre, mikor jelennek meg stabil és instabil 4-periodikus pontok. Levezetjük a rezonáns Poincaré-normálformát. Bebizonyítjuk, hogy a periodikus együtthatók esetében az erős rezonanciának nincs hatása a bifurkációra, mindezt a periodikus együtthatós Wright-egyenlettel illusztráljuk.

11. Tétel. *Legyen $g = g_\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,*

$$g(z) = \mu z + \frac{\rho_{20}}{2} z^2 + \rho_{11} z\bar{z} + \frac{\rho_{02}}{2}\bar{z}^2 + \frac{\rho_{30}}{6} z^3 + \frac{\rho_{21}}{2} z^2\bar{z} + \frac{\rho_{12}}{2} z\bar{z}^2 + \frac{\rho_{03}}{6}\bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4) \tag{9}$$

egy $\gamma \in \mathbb{R}$ paramétertől függő leképezés, ahol $\mu = \mu(\gamma)$ és a $\rho_{kl} = \rho_{kl}(\gamma)$ együtthatók a paraméter sima függvényei, valamint $\mu(\gamma_j) = i$ a kritikus $\gamma = \gamma_j$ paraméterértékekre. Ekkor egy, a paramétertől simán függő koordináta-transzformáció segítségével a kritikus esetben a leképezés a

$$\tilde{g}(w) = iw + c_1 w^2 \bar{w} + c_2 \bar{w}^3 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

alakba transzformálható, ahol

$$c_1 = \frac{1+3i}{4}\rho_{20}\rho_{11} + \frac{1-i}{2}\rho_{11}\bar{\rho}_{11} + \frac{-1-i}{4}\rho_{02}\bar{\rho}_{02} + \frac{\rho_{21}}{2}$$

és

$$c_2 = \frac{i-1}{4}\rho_{11}\rho_{02} + \frac{-i-1}{4}\rho_{02}\bar{\rho}_{20} + \frac{\rho_{03}}{6}.$$

A c_1 együttható a nemrezonáns esetben is megmarad, a $\bar{w}^3$ (ún. rezonáns tag) együtthatójától viszont csak a rezonáns esetben nem tudunk megszabadulni. A c_1-re vonatkozó formula közismert, [6] c_2-t is közli, a részletes levezetés mellőzésével. Ugyanakkor c_2-re az irodalomban hibás formulák is előfordulnak, és többen ezeket alkalmazzák. Ezért indokoltnak láttuk a helyes formula kiszámítását ezen értekezés keretei között közölni, a konkrét alkalmazásokhoz ugyanis fontos, hogy c_2 pontos értékét ismerjük.

Definiáljuk az $a_1 = \frac{c_1}{i}$, $a_2 = \frac{c_2}{i}$ és $d = \frac{\partial|\mu(\gamma)|}{\partial\gamma}\ |_{\gamma=\gamma_j}$ és a

$$\delta = |\mathrm{Im}\ (a_1) - B\mathrm{Re}\ (a_1)| - |a_2|\sqrt{1+B^2} \tag{10}$$

mennyiségeket, ahol B a $b(t)$ integrálja egy egységnyi hosszú intervallumon.

12. Tétel. *A (8) periódus-leképezéséhez tartozó megszorított leképezés esetén*

$$\begin{aligned} a_1 = -\frac{i}{2}\Big[&R_i(W(\chi_i,\chi_i,\bar{\chi}_i)) + 2R_i(V(\chi_i,(1-U)^{-1}V(\chi_i,\bar{\chi}_i))) \\ &+ R_i(V(\bar{\chi}_i,(i^2-U)^{-1}V(\chi_i,\chi_i)))\Big], \end{aligned} \tag{11}$$

$$a_2 - \frac{i}{6}\Big[R_i(W(\bar{\chi}_i,\bar{\chi}_i,\bar{\chi}_i)) + 3R_i\Big(V(\bar{\chi}_i,(i^{-2}I-U)^{-1}\big(V(\bar{\chi}_i,\bar{\chi}_i)\big)\Big)\Big]. \tag{12}$$

Az 1:4 rezonáns bifurkációs tételt ([4]) is kiterjesztjük periodikus funkcionál-differenciálegyenletek esetére.

13. Tétel. *A (8) egyenlethez tartozó F_γ periódus-leképezések családjának a $\phi = 0$ fixpontjának a $\gamma = \gamma_j$ kritikus értékben pontosan két egyszerű Floquet együtthatója van a komplex egységkörön, mégpedig $\mu_j = i$ és $\bar{\mu}_j = -i$. Ez egy 1:4 erős rezonanciát jelent. A transzverzalitási feltétel teljesül. A 0-nak van egy környezete, amelyben egy invariáns görbe bifurkál (és 4-periodikus pont nem) az egyensúlyi helyzetből, amennyiben $\delta > 0$ fennáll. A bifurkáció irányát*

Re (a_1) *határozza meg. Ha* $\delta < 0$, *akkor 4-periodikus pontok két családja bifurkál a* 0 *egyensúlyi helyzetből, invariáns görbe pedig nem. Továbbá, ha* $|a_1| > |a_2|$, *akkor a két család azonos oldalon jelenik meg és legalább az egyik instabil. Ha* $|a_1| < |a_2|$, *akkor a két család különböző oldalon jelenik meg és mindkettő instabil.*

Látható, hogy a bifurkációnak többféle lehetséges kimenetele van. Mivel a feltételeink explicit számolhatóak, minden konkrét egyenlet esetén el tudjuk dönteni, milyen bifurkáció megy végbe. Bebizonyítjuk, hogy a periodikus együttható esetén az egyenlet bifurkációjára az erős rezonanciának nincs hatása.

14. Tétel. *Tekintsük az*

$$\dot{x}(t) = \gamma r(t) f(x(t-1))$$

egyenletet, ahol $f(\xi) = \xi + \frac{S}{2}\xi^2 + \frac{T}{6}\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4)$ *egy* C^4*-sima függvény,* $r(t)$ *pedig* 1*-periodikus. Az egyenlethez tartozó periódus leképezések családjára a következő teljesül: ha* $T \neq \frac{11S^2}{5}$, *akkor a* 0 *egyensúlyi helyzetből pontosan egy invariáns görbe bifurkál amint a* γ *paraméter áthalad a* γ_j *kritikus értéken. A bifurkáció szuperkritikus, ha* $T < S^2\left(\frac{11B+2}{5B}\right)$ *és szubkritikus, ha* $T > S^2\left(\frac{11B+2}{5B}\right)$.

A tétel alkalmazható a híres Wright-egyenlet periodikus változatára is, azonnali következményként kapjuk a következő eredményt, amely konzisztens az autonóm eset közismert bifurkációs tételével.

15. Tétel. *A*

$$\dot{z}(t) = -\alpha r(t)(e^{z(t-1)} - 1)$$

egyenlet periódus-leképezéseinek családja szuperkritikus bifurkáción megy át és pontosan egy invariáns görbe bifurkál a 0 *egyensúlyi helyzetből, amint az* α *paraméter áthalad* $\frac{\pi}{2}$*-n.*

Az értekezés végén további kérdésekkel is foglalkozunk: dinamika az invariáns tóruszon, az invariáns tóruszok globális létezésének problémája, valamint az eredmények kiterjesztése arra az esetre, amikor a periódus a késleltetés racionális/irracionális többszöröse, valamint magasabbrendű egyenletekre.

A disszertáció a szerző alábbi publikációin alapul:

- Röst, G. , *Neimark-Sacker Bifurcation for Periodic Delay Differential Equations*, Nonlinear Analysis Theor., 2005, vol. 60, issue 6, pp. 1025-1044

- Röst, G. , *Some Applications of Bifurcation Formulae to the Period Map of Delay Differential Equations*, in: Dynamical Systems and Applications (eds.: Akca H., Boucherif A. and Covachev V.), GBS Publishers, Delhi, 2005, pp. 624-641

- Röst, G. , *Bifurcation for Periodic Delay Differential Equations at Points of 1:4 Resonance*, Functional Differential Equations, megjelenés alatt, pp. 1-17

Irodalom

[1] O. Diekmann, S. A. Van Gils, S. M. Verduyn Lunel, and H.-O. Walther. *Delay Equations. Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, volume 110 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] T. Faria, W. Huang, and J. Wu. Smoothness of center manifolds for maps and formal adjoints for semilinear FDEs in general Banach spaces. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(1):173–203, 2002.

[3] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*, volume 99 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] G. Iooss. *Bifurcation of Maps and Applications*, volume 36 of *Mathematics Studies.* North-Holland, Amsterdam, 1979.

[5] T. Krisztin, H.-O. Walther, and J. Wu. *Shape, Smoothness and Invariant Stratification of an Attracting Set for Delayed Monotone Positive Feedback*, volume 11 of *Fields Institute Monographs.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[6] Yu. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.