

LATTICES AND INVARIANTS
Ph.D. DISSERTATION
Eszter K. Horváth

Supervisors:
Prof. Dr. Béla Csákány
Doctor of mathematical science
Prof. Dr. Gábor Czédli
Doctor of mathematical science

SZTE Bolyai Institute
UNIVERSITY OF SZEGED
2004.

TÉZISEK

1. Bevezetés

A hálók nagyon fontos kísérőstruktúrák. Gyakran bukkannak fel az algebra különböző ágaiban. Egyszerűen áttekinthetők, de elég gazdagok ahhoz, hogy sokféle algebrai tulajdonságot jellemezzenek. Itt a hálók diagrammsémákkal és Malcev-feltételekkel kapcsolatban lépnek fel. Emellett hálóelméleti vizsgálatokat folytatunk a hálóazonosságok shiftjével kapcsolatban.

A matematikában hagyományosan az “**invariáns** valami olyan, ami változatlan marad transzformációk bizonyos halmazára nézve. Az ’invariánsnak lenni’ tulajdonságot *invarianciának* nevezzük.” (Wikipedia [Inv1].)

Az univerzális algebrában ezen szoros értelemben vett jelentésen túlmenően az ’invariáns’ szó általánosabb jelentéssel is bír. Helyettesítsük a fent említett transzformációt (amely egy $A \rightarrow A$ leképezés, ahol A tetszőleges halmaz) az algebrai művelet fogalmával. Ily módon az **invariáns reláció** fogalmához érkezhetünk ([PK]).

2. Küszöbfüggvények invarianciacsoportja

Egy Boole-függvényt *küszöbfüggvénynek* nevezünk, ha alkalmas w_1, \dots, w_n, t valós számokra

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 \text{ akkor és csak akkor, ha } \sum_{i=1}^n w_i x_i \geq t.$$

Itt w_i -t az x_i változó *súlyának* ($i = 1, 2, \dots, n$), a t -t pedig *küszöbértéknek* nevezzük.

A küszöbfüggvényeknek geometriai interpretációja is van. A $\{0, 1\}^n$ halmaz tekinthető az \mathbf{R}^n Euklideszi térben kifeszített hiperkockának. Egy Boole-függvény a 2^n számú csúcson 0-val, vagy 1-gyel történő megjelölése. Küszöbfüggvény esetén az 1-gyel megjelölt csúcsok hipersíkkal választhatók el a 0-val megjelöltektől. Ezért a küszöbfüggvényeket lineárisan szeparálható függvényeknek is szokás nevezni ([Sh]).

A küszöbfüggvényeket érdemes lenne minél jobban megismerni, ugyanis egyrészt modellezhetők velük az idegsejtek, másrészt elektromos hálózattal olcsón valósíthatók meg.

2.1. TÉTEL ([Ho1]). *Bármely n változós f küszöbfüggvényhez létezik $\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ -nek olyan C_f osztályozása, hogy f invarianciacsoportja pontosan S_n azon permutációiból*

áll, amelyek C_f minden blokkját megőrzik. Megfordítva: \mathbf{n} bármely C osztályozásához létezik olyan f_C küszöbfüggvény, hogy $C = C_{f_C}$.

A bizonyítás a következő segédteteleken alapszik, és csak elemi megfontolásokat tartalmaz. Definiáljuk a \sim relációt az \mathbf{n} halmazon a következő módon: $i \sim j$ akkor és csak akkor, ha az $(i j)$ transzpozíció f -et invariánsan hagyja.

2.1. Állítás $A \sim$ ekvivalenciareláció által definiált C_f osztályozás konvex.

2.2. Állítás Legyen $\gamma = (j_1 j_2 \dots j_{k-1} l j_k \dots j_m) \in S_n$ egy $m+1$ hosszúságú ciklus úgy, hogy $j_s \in C_p$, $1 \leq s \leq m$, $l \in C_q$, $p \neq q$. Ekkor $\gamma \notin G$.

2.1. Lemma ([Ho1]). Ha egy $\beta \in S_n$ legalább két C_f -blokkból tartalmaz elemet, akkor $\beta \notin G$.

2.2. Lemma [Ho1]). Legyen $\pi \in S_X$ alakja $\pi = \pi_2 \pi_1$, ahol $\pi_1, \pi_2 \in S_X$, és ahol $M(\pi_1) \cap M(\pi_2) = \emptyset$ és $\pi_1 \notin G$. Ekkor $\pi \notin G$.

2.3. Állítás. Legyen $\pi \in S_X$, legyen $\pi = \gamma_1 \dots \gamma_r$ ahol a γ_i -k diszjunkt ciklusok. Ha létezik olyan γ_j , hogy $1 \leq j \leq r$ és $\gamma_j \notin G$, akkor $\pi \notin G$.

Érdemes megfogalmazni a következő korolláriumot:

2.1. Korollárium ([Ho1]). Bármely küszöbfüggvény invarianciacsoportja szimmetrikus csoportok direkt szorzatával izomorf.

3. Teljességi tételek bizonyítása függvény-reláció dualitás segítségével

Tekintsük a k változós relációkat egyváltozós $r: \mathbf{k} \rightarrow A$ ($\mathbf{k} = \{1, 2, \dots, k\}$) függvények halmazának. Azt mondjuk, hogy egy k változós D reláció *diagonális*, ha létezik egy olyan ρ_D ekvivalenciareláció \mathbf{k} -n, hogy

$$D = \{r: \mathbf{k} \rightarrow A \mid r(u) = r(v), \text{ ha } u \rho_D v, u, v \in \mathbf{k} \}.$$

Az A -n definiálható diagonális relációk összessége alkotja a minimális relációklónt.

A következő 3.1 Állítás, valamint a 3.1 és a 3.1' Lemmák segítségével új bizonyítások adhatók ismert teljességi tételekre. (Az értekezésben egy ilyen új bizonyítást részletezünk.)

3.1. Állítás (Bodnarčuk–Kalužnin–Kotov–Romov [BKKR], Geiger [Gei], Krauss [Kr1], [Kr2]). Egy $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra pontosan akkor primál, ha minden olyan reláció diagonális, amelyet minden F -beli reláció megőriz.

3.1. Lemma ([Ho2]). Adott $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra esetén a következő két feltétel ekvivalens:

- (i) Bármely $R \subseteq A^k$ esetén az $[R]$ reláció diagonális.
- (ii) Bármely $x, y \in A^k$ esetén az $[x, y]$ reláció diagonális.

3.1'. Lemma ([Ho2]). A következő három állítás ekvivalens:

- (i) Az $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra primál.
- (ii) Bármely $x, y, z \in A^k$ esetén $z \in [x, y]$, ha

$$((\forall u, v \in \mathbf{k})(x(u) = x(v) \wedge y(u) = y(v) \rightarrow z(u) = z(v))).$$

(iii) Bármely $k \geq 1$ $x, y, z \in A^k$, és a \mathbf{k} -n definiált bármely ρ ekvivalenciareláció esetén ha $\rho \supseteq \rho_x \cap \rho_y$, akkor $D_\rho \subseteq [x, y]$.

A 3.1. Lemma alapján egy teljességi tétel bizonyítása alkalmasan választott mátrixok vizsgálatára egyszerűsödik. Módszerünket Słupecki tételének bizonyításán szemléltetjük részletesen.

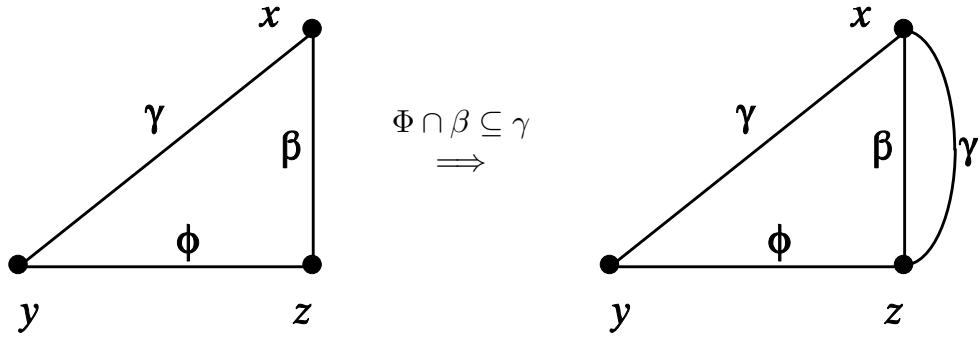
3.1. TÉTEL (Słupecki [Sl]). Legyen A véges halmaz úgy, hogy $|A| > 2$. Ha F tartalmaz egy f lényeges műveletet és az összes egyváltozós műveletet, akkor az $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra primál.

Módszerünkkel be tudjuk bizonyítani a ternáris diszkriminátor ([Sz]), a duális diszkriminátor ($|A| \geq 3$ esetén) ([FP]), az n -változós ($n \geq 3$) majdnem-projekciók ([Cs1]) függvényteljességét, valamint Foster ([F]) teljességi tételét.

4. Diagrammsémák

Gumm Shifting Lemmája ([Gu1]) azt állítja, hogy kongruencia-moduláris varietások szép, téglalap alakban felrajzolható diagrammsémát elégítenek ki. Ennek hatására Chajda ([ChH1], 4.2. Alfejezet) egy olyan háromszögsémát vizsgált, amely a kongruencia-disztributivitás következménye. A kongruencia-disztributív varietások nemcsak három tetszőleges kongruenciára, hanem egy toleranciára és két kongruenciára is kielégítik ezt a sémát, azaz Gumm Shifting (Téglalap) Elvének analógiája érvényes.

4.3. Definíció. Egy $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra kielégíti a *Háromszög Elvet*, ha bármely Φ toleranciára, és β, γ kongruenciára az 1. Ábrán látható implikáció teljesül.

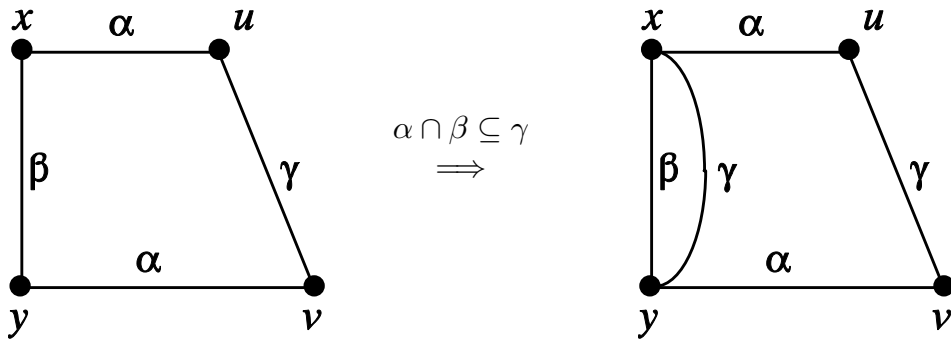


1. Ábra

4.3. TÉTEL ([ChH1]). *Kongruencia-disztributív varietásban (azaz az ilyen varietások algebraiban) teljesül a Háromszög Elv.*

Míg a háromszögsémáról nem ismert, hogy jellemzi-e a kongruencia-disztributivitást, egy trapézsémának nevezett megfelelő általánosításról megmutattuk, hogy igen ([CCH2], 4.3. Alfejezet).

A *Trapéz Lemmának* nevezett feltételt a következő módon vezetjük be: bármely $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Con A}$ esetén (ahol $\mathbf{A} = (A, F)$ egy algebra), ha $\alpha \cap \beta \subseteq \gamma$, $(x, u), (y, v) \in \alpha$, $(x, y) \in \beta$ és $(u, v) \in \gamma$, akkor $(x, y) \in \gamma$. A Trapéz Lemma a 2. ábrán látható.



2. Ábra

A *Trapéz Elvet* hasonlóan definiáltuk, az egyetlen eltérés, hogy α helyett Φ szerepel, amely egy tetszőleges *tolerancia* az \mathbf{A} algebraiban.

A következő 4.2 Állítás néhány összefüggést tár fel feltételeink között; algebraik varietásaira a 4.4. Tételben ezeknél többet tudunk állítani.

4.2. Állítás [(CCH1)]. *Legyen \mathbf{A} tetszőleges algebra.*

(1) Ha \mathbf{A} kielégíti a Trapéz Lemmát (Trapéz Elvet), akkor kielégíti a Téglalap Lemmát és a Háromszög Lemmát (Téglalap Elvet és a Háromszög Elvet). Továbbá mindhárom elvből következik a megfelelő lemma teljesülése.

(2) Ha $\mathbf{Con A}$ disztributív, akkor \mathbf{A} kielégíti a Trapéz Lemmát (és ily módon a másik két lemmát is).

(3) Ha \mathbf{A} kielégíti a Trapéz Elvet, akkor $\mathbf{Con A}$ disztributív.

(4) Ha \mathbf{A} kielégíti a Téglalap Elvet, akkor $\mathbf{Con A}$ moduláris ([Gu2], 4.2. Lemma).

(5) Ha \mathbf{A} is kongruencia-felcserélhető, akkor $\mathbf{Con A}$ pontosan akkor disztributív, ha \mathbf{A} kielégíti a Háromszög Lemmát ([CzH1], Cor. 2).

4.4. TÉTEL ([CCH1]). Legyen \mathcal{V} algebraik egy varietása. Ekkor a következő öt feltétel ekvivalens:

- (a) \mathcal{V} kongruencia-disztributív;
- (b) a Trapéz Elv teljesül \mathcal{V} -ben;
- (c) a Trapéz Lemma teljesül \mathcal{V} -ben;
- (d) a Téglalap Lemma és a Háromszög Lemma teljesül \mathcal{V} -ben;
- (e) létezik olyan n pozitív egész, és léteznek olyan d_0, d_1, \dots, d_n négyváltozós kifejezések, hogy

$$(e1) \ d_0(x, y, u, v) = x, \quad d_n(x, y, u, v) = y,$$

$$(e2) \ d_i(x, y, x, y) = d_{i+1}(x, y, x, y) \text{ ha } i \text{ páros,}$$

$$(e3) \ d_i(x, y, z, z) = d_{i+1}(x, y, z, z) \text{ ha } i \text{ páratlan, és}$$

$$(e4) \ d_i(x, x, y, z) = x \text{ bármely } i\text{-re}$$

teljesül \mathcal{V} -ben.

Ezek a példák mutatják, hogy kongruenciahálóbeli azonosságok, sőt Horn-formulák ([ChH2]) helyett időnként érdemes diagrammsémákban gondolkodni.

5. Hálóazonosságok shiftje

Legyen

$$\lambda: \quad p(x_1, \dots, x_n) \leq q(x_1, \dots, x_n)$$

hálóazonosság. (Megjegyezzük, hogy hálóazonosságon mindig egyenlőtlenséget értünk, azaz \leq -t használunk = helyett.) Ha y változó, akkor jelölje $S(\lambda, y)$ a

$$q(x_1, \dots, x_n) \leq y \implies p(x_1, \dots, x_n) \leq y$$

formulát. Ha $y \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, akkor λ nyilvánvalóan ekvivalens $S(\lambda, y)$ -nal. Számunkra az az eset a legfontosabb, amikor $y \in \{x_1, \dots, x_n\}$, azaz $y = x_i$ ($1 \leq i \leq n$). Ekkor $S(\lambda, x_i)$ következménye λ -nak. Ha $S(\lambda, x_i)$ ekvivalens λ -val, akkor $S(\lambda, x_i)$ -t *shiftjének* nevezzük. Ha $S(\lambda, x_i)$ ekvivalens λ -val egy \mathcal{V} varietáson belül, akkor azt mondjuk, hogy $S(\lambda, x_i)$ egy *shiftje* λ -nak \mathcal{V} -ben. Ebben a fejezetben néhány ismert hálózatonosságról megmutatjuk, hogy van shiftje, néhány további pedig azt, hogy nincs.

Huhn ([Hu1] és [Hu2]) nyomán egy \mathbf{L} hálót n -disztributívnek nevezünk ($n \geq 1$), ha \mathbf{L} -ben teljesül a

$$\text{dist}_n : \quad \beta \sum_{i=0}^n \alpha_i \leq \sum_{j=0}^n \left(\beta \sum_{i \in \{0, \dots, n\} \setminus \{j\}} \alpha_i \right)$$

azonosság.

5.1. TÉTEL ([CCH2]). $S(\text{dist}_n, \alpha_0)$ egy shiftje dist_n -nek a moduláris hálók varietásában. Azonban ha $n \geq 2$, akkor dist_n -nek nincs shiftje (az összes hálók varietásában).

A következő néhány hálózatonosság McKenzie ([Mc]) cikkében található:

$$\zeta_0 : \quad (x + y(z + xy))(z + xy) \leq y + (x + z(x + y))(y + z),$$

$$\zeta_1 : \quad x(xy + z(w + xyz)) \leq xy + (z + w)(x + w(x + z)),$$

$$\zeta_2 : \quad (x + y)(x + z) \leq x + (x + y)(x + z)(y + z),$$

$$\zeta_3 : \quad (x + yz)(z + xy) \leq z(x + yz) + x(z + xy), \text{ és}$$

$$\zeta_4 : \quad y(z + y(x + yz)) \leq x + (x + y)(z + x(y + z)).$$

A ζ_3 a Gedeonová-féle p -modularitás ([Ged1]).

5.2. TÉTEL ([CCH2]). Az $S(\zeta_0, y)$, $S(\zeta_1, y)$, $S(\zeta_2, x)$, és $S(\zeta_3, y)$ rendre shiftjei a ζ_0 , ζ_1 , ζ_2 és ζ_3 hálózatonosságoknak. Ellenben ζ_4 -nak nincsen shiftje.

A Fano-azonosság (Herrmann és Huhn ([HH])) a következő:

$$\chi_2 : \quad (x + y)(z + t) \leq (x + z)(y + t) + (x + t)(y + z).$$

5.3. TÉTEL ([CCH2]). A Fano-azonosságnak nincs shiftje — még a moduláris hálók varietásában sem.

6. Toleranciák és toleranciahálók

Jelölje $\text{dist}(x, y, z)$ a disztributív azonosságot:

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$\text{mod}(x, y, z)$ pedig a moduláris azonosságot:

$$x \wedge (y \vee (x \wedge z)) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Jelölje $\mathbf{Tol A}$ az \mathbf{A} algebra toleranciáinak *halmazát*, $\mathbf{Con A}$ pedig az \mathbf{A} algebra kongruenciáinak *hálóját*. Azt mondjuk, hogy $\text{dist}(\text{tol}, \text{tol}, \text{tol})$ teljesül \mathbf{A} -ban, ha

$$\Gamma \wedge (\Phi \vee \Psi) \subseteq (\Gamma \wedge \Phi) \vee (\Gamma \wedge \Psi)$$

fenáll bármely $\Gamma, \Phi, \Psi \in \mathbf{Tol A}$ esetén, ahol a \wedge közös rész képzést, \vee pedig az unió tranzitív lezártját jelöli. Analóg módon értelmezzük $\text{mod}(\text{tol}, \text{tol}, \text{tol})$ -t. Hangsúlyozzuk, hogy $\Phi \vee \Psi$ **nem** a $\mathbf{Tol A}$ hálóbeli egyesítést jelenti. Jónsson kifejezések ([J1]) segítségével bizonyítottuk a következő tételt:

6.1. TÉTEL ([CzH2]). Ha \mathcal{V} kongruencia-disztributív (kongruencia-moduláris) varietás, akkor \mathcal{V} minden algebrájában teljesül $\text{dist}(\text{tol}, \text{tol}, \text{tol})$ ($\text{mod}(\text{tol}, \text{tol}, \text{tol})$).

Két fontos következmény:

6.1 Korollárium (Gumm [Gu1]). Ha \mathcal{V} kongruencia-moduláris varietás, akkor teljesül a Gummtól származó *Shifting Elv*, azaz bármely $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ -re, $\alpha, \gamma \in \mathbf{Con A}$ és $\Phi \in \mathbf{Tol A}$ esetén, ha $(x, y), (u, v) \in \alpha$, $(x, u), (y, v) \in \Phi$, $(u, v) \in \gamma$ és $\alpha \cap \Phi \subseteq \gamma$, akkor $(x, y) \in \gamma$.

Jelöljük $*$ -gal a tranzitív lezártat. A következő állítás lényeges lépés a 7. Fejezetben található Malcev-feltételek felé:

6.1. Állítás ([CzH2]). Ha $\text{mod}(\text{tol}, \text{tol}, \text{tol})$ vagy $\text{dist}(\text{tol}, \text{tol}, \text{tol})$ teljesül egy \mathbf{A} algebrában, akkor $\Gamma \cap \Phi^* \subseteq (\Gamma \cap \Phi)^*$ bármely $\Gamma, \Phi \in \mathbf{Tol A}$ esetén.

Egy 0-elemes \mathbf{L} hálót *0-modulárisnak* nevezünk ([St]), ha nincs N_5 -tel izomorf, 0_L -et tartalmazó részhálója. Egy 0-val rendelkező \mathbf{L} háló teljesíti az *általános diszjunktsági tulajdonságot* (GD) ha az $a \wedge b = 0$ és az $(a \vee b) \wedge c = 0$ egyenlőségekből következik az $a \wedge (b \vee c) = 0$. Ha bármely $a \in \mathbf{L}$ esetén $\{x \in \mathbf{L} : a \wedge x = 0\}$ -nak van legnagyobb eleme, akkor L -et *pseudokomplementumos hálónak* nevezzük.

A most következő 6.2. és 6.3. Tételek tartalmazzák legfontosabb eredményeinket a kongruencia-moduláris varietásbeli tolerancia-hálókról.

6.2. TÉTEL ([CHR]). Legyen \mathbf{A} a \mathcal{V} kongruencia-moduláris varietás egy algebrája. Ekkor fennállnak a következők:

(i) A $h: \mathbf{Tol A} \rightarrow \mathbf{Con A}$, $\Phi \mapsto \Phi^*$ leképezés szürjektív hálómorfizmus, és $\mathbf{Tol A}$ 0-1 moduláris háló, amely rendelkezik a (GD) tulajdonsággal.

(ii) $\mathbf{Tol A}$ pontosan akkor pszeudokomplementumos, ha $\mathbf{Con A}$ pszeudokomplementumos.

6.3. TÉTEL ([CHR]). Legyen \mathbf{A} tetszőleges algebra. Ha \mathbf{A} -n van többségi függvény, akkor:

(i) $\mathbf{Tol A}$ 0-moduláris pszeudokomplementumos háló.

(ii) A Γ és a Φ pontosan akkor komplementumai egymásnak $\mathbf{Tol A}$ -ban, ha faktorkongruencia párt alkotnak \mathbf{A} -ban.

7. Kongruenciaháló-azonosságok Malcev-feltételei moduláris varietásokban

Már 34 éves az a probléma, hogy ekvivalens-e minden kongruenciaháló-azonosság egy-egy Malcev-feltétellel. Más szavakkal: azt mondjuk, hogy egy λ hálóazonosság jellemezhető Malcev-feltétellel, ha létezik olyan M Malcev-feltétel, hogy bármely \mathcal{V} varietás esetén λ teljesülése \mathcal{V} -ben ekvivalens M -nek \mathcal{V} -beli teljesülésével; a kérdés pedig az, hogy jellemezhető-e minden hálóazonosság ilyen módon. A problémát először Grätzer vetette fel [Gr1]-ben, ahol a Malcev-feltétel fogalmát bevezette.

Varietásra vonatkozó *erős Malcev-feltételnek* a következő alakú feltételt nevezzük: "léteznek olyan h_0, \dots, h_k kifejezések, amelyek kielégítik azonosságok egy Σ halmazát", ahol k rögzített, és Σ független a tekintett algebra típusától. *Malcev-feltétel* alatt "létezik olyan n természetes szám, hogy P_n teljesül" alakú feltételt értünk, ahol a P_n -ek erős Malcev-feltételek és P_n -ből következik P_{n+1} bármely n -re. A kérdést később többen is felvetették, például Taylor [T], Jónsson ([J2]), továbbá Freese és McKenzie ([FM]).

Bizonyos hálóazonosságok esetén ismert a Malcev-feltétellel történő jellemzés. Az első két ilyen típusú eredmény a (kongruencia-)disztributivitás Jónsson-féle jellemzése az úgynevezett Jónsson-kifejezések segítségével, és a (kongruencia-)modularitás Day-féle jellemzése a Day-kifejezések segítségével. Mivel Day eredményét használjuk is, ezért azt itt most részletesen is kimondjuk.

Legyen $n \geq 2$, ekkor jelölje (\mathbf{D}_n) a következő Malcev-feltételt: "léteznek olyan m_0, \dots, m_n négyváltozós kifejezések, amelyek kielégítik a következő azonosságokat:

$$m_0(x, y, z, u) = x, \quad m_n(x, y, z, u) = u,$$

$$\begin{aligned}
m_i(x, y, y, x) &= x, \quad \text{ha } i = 0, 1, \dots, n, \\
m_i(x, x, y, y) &= m_{i+1}(x, x, y, y), \quad \text{ha } i = 0, 1, \dots, n, \quad i \text{ páros,} \\
m_i(x, y, y, z) &= m_{i+1}(x, y, y, z), \quad \text{ha } i = 0, 1, \dots, n, \quad i \text{ páratlan.}
\end{aligned}$$

Day eredménye szerint egy \mathcal{V} varietás pontosan akkor kongruencia-moduláris, ha a ” $(\exists n)(\mathbf{D}_n)$ ” teljesül \mathcal{V} -ben.

A Jónsson-kifejezéseket és a Day-kifejezéseket hamarosan további hálóazonosságok jellemzése követte, például Gedeonová ([Ge2]) és Mederly ([Me]) eredményei, de Nation ([N]) és Day [(Da2)] megmutatta, hogy ezek a Malcev-feltételek ekvivalensek a Day-kifejezések és a Jónsson kifejezések létezésével ([J2], [FM]).

A következő mérföldkő a XIII. Fejezet Freese és McKenzie könyvében ([FM]). Az úgynevezett *keret-azonosságokkal* kapcsolatos eredmények egy ideig reményeket keltettek a probléma megoldására vonatkozóan, de Pálfy és Szabó ([PSz]) dolgozata lerombolta ezeket a reményeket.

A jelen fejezetben megmutatjuk, hogy minden olyan hálóazonosság, amelyből következik a kongruencia-modularitás, ekvivalens egy Malcev-feltétellel, amelyet ráadásul könnyű megkonstruálni.

Azt mondjuk, hogy a λ hálóazonosságból következik a modularitás kongruencia-varietásokban, azaz $\lambda \models_c \text{mod}$, ha bármely \mathcal{V} varietás esetén ha minden $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ kongruenciahálóban ($\mathbf{A} \in \mathcal{V}$) teljesül λ , akkor minden ilyen kongruenciaháló moduláris.

Legyen adott a p hálókifejezés és legyen $k \geq 2$. Definiáljuk a p_k kifejezéseket indukcióval a következőképpen. Ha p változó, akkor legyen $p_k = p$. Ha $p = r \wedge s$, akkor legyen $p_k = r_k \cap s_k$. Végül ha $p = r \vee s$, akkor legyen $p_k = r_k \circ s_k \circ r_k \circ s_k \circ \dots$, amely k -tényezős szorzat. Ha kongruenciákat, vagy még általánosabban, reflexív kompatibilis relációkat helyettesítünk p_k változói helyére, akkor a \cap közös rész képzésként és a \circ relációsorzásként interpretálandó.

A Malcev-feltételekkel kapcsolatos első eredményünk a 7.1. Tétel.

7.1. TÉTEL ([CzH3]). *Legyen $\lambda : p \leq q$ olyan hálóazonosság, hogy $\lambda \models_c \text{modularitás}$. Ekkor bármely \mathcal{V} varietásra a következő két feltétel ekvivalens:*

- (a) *Bármely $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebra esetén λ teljesül \mathbf{A} kongruenciahálójában.*
- (b) *\mathcal{V} kielégíti a következő Malcev-feltételt: ”létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_3 \subseteq q_n$ és (\mathbf{D}_n) teljesül”.*

Azt mondjuk, hogy az \mathbf{A} algebraiban teljesül a *tolerancia-metszési tulajdonság* (angolul *tolerance intersection property*, amelynek a rövidítése TIP), ha az \mathbf{A} bármely két Γ, Φ

toleranciájára teljesül a következő:

$$\Gamma^* \cap \Phi^* = (\Gamma \cap \Phi)^*$$

ahol $*$ tranzitív lezártat jelent. A 7.1. Tétel bizonyításában egyúttal a következőt is bebizonyítottuk:

7.2. TÉTEL ([CHL]). *Kongruencia-moduláris varietás minden algebrájában teljesül a TIP.*

A következőekben javítjuk a 7.1. Tételt oly módon, hogy megadjuk a λ -t jellemző legegyszerűbb (és ebben az értelemben a legjobb) Malcev-feltételt, amennyiben $\lambda \models_c$ modularitás.

Tetszőleges, a \cap, \vee, \circ műveleti jelekből és változól felépülő $p = p(x_1, \dots, x_k)$ kifejezésre, röviden $\{\cap, \vee, \circ\}$ -kifejezésre, és $n \geq 2$ -re definiáljuk a p_n és a $p_{2,2}\{\cap, \circ\}$ -kifejezéseket indukció segítségével a következő módon. Ha p változó, akkor legyen $p_n = p_{2,2} = p$. Ha $p = r \cap s$, akkor legyen $p_n = r_n \cap s_n$ és $p_{2,2} = r_{2,2} \cap s_{2,2}$. Hasonlóan, ha $p = r \circ s$, akkor legyen $p_n = r_n \circ s_n$ és $p_{2,2} = (r_{2,2} \circ s_{2,2}) \cap (s_{2,2} \circ r_{2,2})$. Végül, ha $p = r \vee s$, akkor legyen $p_n = r_n \circ s_n \circ r_n \circ s_n \circ \dots$ amely n szorzótényezőt tartalmaz a jobb oldalon, és legyen $p_{2,2} = (r_{2,2} \circ s_{2,2}) \cap (s_{2,2} \circ r_{2,2})$.

7.4. TÉTEL ([CHL]). *Legyen $p \subseteq q$ egy (kongruenciákra vonatkozó) tartalmazási formula, ahol q \circ -mentes. (Azaz a p egy $\{\cap, \vee, \circ\}$ -kifejezés és q pedig hálókifejezés.) Ekkor bármely \mathcal{V} kongruencia-moduláris varietásra a következő feltételek ekvivalensek:*

- (i) $p \subseteq q$ teljesül \mathcal{V} kongruenciáira,
- (ii) $p_2 \subseteq q$ teljesül \mathcal{V} kongruenciáira,
- (iii) $p_{2,2} \subseteq q$ teljesül \mathcal{V} kongruenciáira,
- (iv) A

$$(\exists n \geq 2) (M(p_2 \subseteq q_2 \circ q_2 \circ \dots \circ q_2))$$

Malcev-feltétel (ahol $q_2 \circ q_2 \circ \dots \circ q_2$ egy n -tényezős szorzatot jelöl) teljesül \mathcal{V} -ben.

Korolláriumként mondjuk ki a 7.1. Tétel javítását:

7.2. Korollárium ([CHL]). *Legyen $\lambda : p \leq q$ olyan hálózasonosság, hogy $\lambda \models_c$ modularitás. Ekkor bármely \mathcal{V} varietásra a következő három feltétel ekvivalens:*

- (a) *Bármely $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebra esetén λ teljesül \mathbf{A} kongruenciahálójában.*
- (b') \mathcal{V} *kielégíti a következő Malcev-feltételt: "létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_2 \subseteq q_n)$ és (\mathbf{D}_n) teljesül".*
- (c) \mathcal{V} *kielégíti a következő Malcev-feltételt: "létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_2 \subseteq q_2 \circ q_2 \circ \dots \circ q_2)$ (n szorzótényező) és (\mathbf{D}_n) teljesül".*

REFERENCES

- [BKCR] V. G. Bodnarčuk, L. A. Kalužnin, V. N. Kotov, B. A. Romov: Galois theory for Post algebras, I–II (Russian), *Kibernetika*, **5** (1969), 1–10; 1–9..
- [CCH1] I. Chajda, G. Czédli, E. K. Horváth.: Trapezoid lemma and congruence distributivity, *Math Slovaca*, **53** (2003), No.3, 247–253.
- [CCH2] I. Chajda, G. Czédli, E. K. Horváth: The shifting lemma and shifting lattice identities, *Algebra Universalis*, **50** (2003), 51–60.
- [ChH1] I. Chajda, E. K. Horváth: A triangular scheme for congruence distributivity, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **68** (2002), 29–35.
- [ChH2] I. Chajda, E. K. Horváth: A scheme for congruence semidistributivity, *Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications*, **23** (2003), 13–18.
- [Cs1] B. Csákány: Homogeneous algebras are functionally complete, *Algebra Universalis*, **11** (1980), 149–158.
- [CzH1] G. Czédli, E. K. Horváth: Reflexive relations and Mal'tsev conditions for congruence lattice identities in modular varieties, *Acta Univ. Palacki Olomouc., Fac. rer. nat., Mathematica*, **41** (2002), 43–53.
- [CzH2] G. Czédli, E. K. Horváth: Congruence distributivity and modularity permit tolerances, *Acta Univ. Palacki. Olomouc., Fac.rer.nat., Mathematica*, **41** (2002), 39–42.
- [CzH3] G. Czédli, E. K. Horváth: All congruence lattice identities implying modularity have Malt'sev conditions, *Algebra Universalis*, **50** (2003), 69–74.
- [CHR] G. Czédli, E. K. Horváth, S. Radeleczki: On tolerance lattices of algebras in congruence modular varieties, *Acta Math. Hungar.*, **100** (1–2) (2003), 9–17.
- [CHL] G. Czédli, E. K. Horváth, P. Lipparini: Optimal Mal'tsev conditions for congruence modular varieties, *Algebra Universalis*, to appear.
- [Da1] A. Day: A characterization of modularity for congruence lattices of algebras, *Canad. Math. Bull.*, **12** (1969), 167–173.
- [Da2] A. Day: p-modularity implies modularity in equational classes, *Algebra Universalis*, **3** (1973), 398–399.
- [F] A. L. Foster: An existence theorem for functionally complete universal algebras, *Math Z.*, **71** (1959), 69–82.
- [FM] R. Freese, R. McKenzie: *Commutator theory for congruence modular varieties*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [Ge1] E. Gedeonová: Jordan-Hölder theorem for lines, *Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied.*, **22**. (1972), 177–198

- [Ge2] E. Gedeonová: A characterization of p-modularity for congruence lattices of algebras, *Acta Fac. Rerum Natur. Univ Comenian. Math Publ.*, **28** (1972), 99–106.
- [Gei] D. Geiger: Closed systems of functions and predicates, *Pacific J. Math.*, **27** (1968), 95–100.
- [Gr1] G. Grätzer: Two Mal’cev-type theorems in universal algebra, *J. Combinatorial Theory*, **8** (1970), 334–342.
- [Gu1] H.-P. Gumm: *Geometrical methods in congruence modular algebras*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **45** (1983)
- [Gu2] H.-P. Gumm: Congruence modularity is permutability composed with distributivity, *Arch. Math. (Basel)*, **36** (1981), 569–576.
- [HH] C. Herrmann, A. P. Huhn: Zum Begriff der Charakteristik modulärer Verbände, *Math Z.*, **144** (1975), 185–194.
- [Ho1] E. K. Horváth: Invariance groups of threshold functions, *Acta Cybernetica.*, **11** (1994), 325–332.
- [Ho2] E. K. Horváth: The Slupecki criterion by duality, *Discussiones Mathematicae (General Algebra and Applications.)*, **21** (2001), 5–10.
- [Hu1] A. P. Huhn: Schwach distributive Verbände I, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **33** (1972), 297–305.
- [Hu2] A. P. Huhn: On Grätzer’s problem concerning automorphisms of a finitely presented lattice, *Algebra Universalis.*, **5** (1975), 65–71.
- [J1] B. Jónsson: Algebras whose congruence lattices are distributive, *Math. Scand.*, Polygon. **21** (1967), 110–121
- [J2] B. Jónsson: Congruence varieties, *Algebra Universalis*, **10** (1980), 355–394.
- [Kr1] P. H. Krauss: On primal algebras, *Algebra Universalis*, **I.X.** (1999), 37–46.
- [Kr2] P. H. Krauss: On quasi primal algebras, *Math Z.*, **134** (1973), 85–89.
- [Mc] R. McKenzie: Equational bases and non-modular lattice varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **174** (1972), 1–43.
- [Me] P. Mederly: Three Mal’cev type theorems and their application, *Mat. Casopis Sloven. Akad. Vied*, **25** (1975), 83–95.
- [N] G. B. Nation: Varieties whose congruences satisfy certain lattice identities, *Algebra Universalis*, **4** (1974), 78–88.
- [PSz] P. P. Pálffy, Cs. Szabó: An identity for subgroup lattices of abelian group, *Algebra Universalis*, **33.** (1995), 191–195
- [PK] R. Pöschel, L. A. Kalushnin: *Funktionen- und Relationenalgebren*, Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.

- [Sh] Ching Lai Sheng: *Threshold logic* (H. G. Booker and N. DeClaris, eds., Academic Press, London and New York, 1969..
- [Sl] J. Słupecki: Completeness criterion for systems of many-valued propositional calculus (in Polish), *C. R. des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie Cl. II*, **32** (1939), 102–109.
- [St] M. Stern: *Semimodular lattices, Theory and applications*, Cambridge-New York-Melbourne, 1999.
- [Sz] Á. Szendrei: *Clones in Universal Algebra*, Université de Montréal, 1986.
- [T] W. Taylor: Characterizing Mal'cev conditions, *Algebra Universalis*, **3** (1973), 351–397.
- [Inv1] <http://en.wikipedia.org/wiki/Invariants>