TIPIKUS GONDOLKODÁSI HIBÁK SZÁMOLÁSBÓL ÉS MÉRÉSBŐL AZ ÁLTALÁNOS ISKOLA FELSŐ TAGOZATÁBAN

- Doktori értekezés -

A Szegedi József Attila Tudományegyetem Bölcsészettudományi

Karának benyujtotta

M o s o n y i   K á l m á n

B e v e z e t é s

Hosszu évek munkáját foglalom össze ebben a tanulmányomban. 1936-ban kezdtem meg tanitói pályámat, s azonnal feltünt nekem, hogy egyes számolási hibák évről évre következetesen ismétlődnek. Tanítási módszerem tökéletesedésével ezek a hibák ugyan csökkenő tendenciát mutattak, egyeseket sikerült ki is küszöbölnöm, a hibák következetes felbukkanása azonban mégis arra inditott, hogy komoly figyelmet forditsak rájuk. Amikor 1948-ban szakfelügyelő lettem, tapasztaltam, hogy a hibák más kartársak osztályaiban is felbukkannak, éppen ugy, mint nálam kezdő pedagógus koromban. Ekkor kezdtem első kisérleteimet végezni, megfigyeléseim eredményeit feljegyezni. Később, amikor a Szegedi Pedagógiai Főiskola matematika szakos gyakorló iskolai szakvezető tanára lettem, s a matematikatanitás módszertanával való foglalkozás többé nem csupán saját módszerem tökéletesitését jelentette a számomra, hanem a fiatal tanárnemzedék nevelése eredményesebbé tételét is, egyre több és több kisérletet végeztem, cikket is irtam erről a témáról./55/ Ma már ott tartok, hogy tapasztalataimat - bár ilyen irányu munkámat korántsem tartom még befejezettnek - elég rendszeresnek és elég érettnek tekintem ahhoz, hogy másokkal is közöljem. Ezzel elérhetőnek vélem, hogy mások tapasztalatával, felfogásával összevetve hasznára legyenek a matematikatanitásnak.

Egy módszertani munka nem tüzhet ki maga elé olyan célt, hogy tökéletes eljárásokat találjon, amelyek határozottan célhoz vezetnek. Nem lehet recepteket találni, amelyek feltétlenül eredményesek, függetlenül a helyi adottságoktól, körülményektől, az osztály és az egyes tanitványok képességétől, előképzettségének fokától és eredményességétől, a nevelő egyéniségétől, szakmai és pedagógiai felkészültségétől. Az oktató nevelő munka minden nevelőtől önálló alkotó munkát, kezdeményezőképességet, ötletességet követel, megszervezése és megvalósitása sohasem lehet mechanikus eljárás. Nem célom tehát ilyen eljárás meghatározása és nyilvánosságra hozatala. Azt viszont határozottan állitom, hogy vannak olyan - gyakran nagyon elterjedt - eljárások, amelyeknek az alkalmazása határozottan káros, amelyeket tanügyi hatóságainknak adminisztrativ eszközökkel kell eltiltaniok. Ezek az eljárások mint sokévi tapasztalat mutatja, valami oknál fogva félrevezetik a gyermekeket, helytelen irányba vezetik a gondolkodását, vagy a gyermeket esetleg a gondolkodás teljes mellőzése irányában befolyásolják. Még ha egyes esetekben nem is vitatható az alkalmazók jóhiszemüsége, akkor is meg kell szüntetni azokat a módszereket, amelyekről tapasztalatilag kimutatható, hogy helytelenül befolyásolják a tanulókat.

Mig a rossznak bizonyult eljárások elitélésében ilyen határozott az álláspontom, a tapasztalatom szerint jó eljárások tekintetében korántsem merek ilyen határozott lenni. Tanulmányomban ismertetek néhány eljárást, amelyet az én tapasztalatom jónak minősit, s levonok ezekből néhány következtetést. Ezekről azonban csak annyit állitok, hogy nagyon valószinü, hogy az iskolák nagy többségében jó eredményre vezetnek. Egyrészt az én kezemben, másrészt néhány általam felkért tanár kezében eredményeseknek bizonyultak, tehát valószinü, hogy máshol is azok lesznek. Lehetnek azonban olyan szempontok, amelyek a legnagyobb körültekintés mellett is elkerülték a figyelmünket, azonkivül tekintetbe kell venni azt is, hogy ha valaki uj eljárást próbál ki - különösen ha az a saját elképzelésén alapul - mindig nagyobb energiával, nagyobb lelkesedéssel dolgozik, a kapott eredmény tehát ebből a többletmunkából is származhatik. Azt képzelni pedig, hogy egy módszer olyan tökéletes, hogy azt más pedagógus uj ötlettel tökéletesiteni, finomitani már nem tudhatja, enyhén szólva tulzott önbizalomra vallana. Éppen ezért nemcsak lehetőnek tartom, hanem remélem is, hogy a javasolt eljárásokon más pedagógusok javitásokat, tökéletesitéseket, finomitásokat találnak, s igy hasznosabbá teszik azokat.

A tapasztalt tipushibáknál első célom mindig a hiba okának megkeresése. Ebben Beke Manó/6/ tanitását kivánom követni, aki a Magyar Pedagógiai Társaságban, 1900.okt. 20.-án tartott székfoglaló beszédében a következőket mondta: "A hibák elkerülésének vagy azok minimumra szállitásának legfontosabb kelléke, hogy a tanár a hibákat ismerje, felismerje és azok okait türelmesen keresse. E keresésnél én mindig azt az elvet követtem, hogy először a magam eljárásában, azután a tárgy természetében és csak harmadsorban kerestem a növendékekben a hibát."

Keveset nyujtanék azonban akkor, ha meg akarnék állni a lélektani elemzéseknél. Elsősorban azzal a céllal fogtam a munkához, hogy a hiba okának megtalálása után, mostmár az ok ismeretében, megtaláljam a hiba megelőzésének illetve javításának módját. Amennyiben a megelőzésre illetve a javitásra több út is áll rendelkezésünkre, megvizsgáltam, hogy ezek közül melyik ut a célszerübb, "gazdaságosabb", azaz melyik út vezet gyorsabb és tartósabb eredményre, melyik vesz el a pedagógus szükreszabott perceiből kevesebbet.

Az, hogy a munka elsősorban gyakorlati pedagógiai jellegü, természetesen nem jelenti azt, hogy a lélektan szerepét a legkisebb mértékben is kisebbiteni óhajtanám. Fettweiss /29/ kívánságára gondolok elsősorban, aki szerint a pszichologia komoly szolgálatot tenne a matematika tanitásának, ha a tanulók dolgozataiban előforduló tipikus hibákat feltárná. A pszichologia szerepe tehát elsősorban a diagnozis: állapitsuk meg a hiba okát, s ez maga után vonja azt, hogy a hiba megszüntetésére kidolgozott eljárás nem lesz tüneti kezelés, hanem az ok megszüntetésére irányuló tevékenység. Az együttmüködésből azonban remélhetőleg nemcsak a matematikatanitás jut haszonhoz. Ugy vélem ugyanis, hogy a számolási hibák gondos analizise a pszichologusok számára is igen jó alkalom a számolásnál végbemenő lelki müködés mind teljesebb megértésére. És az itt megállapitott tények hipotézisként segitségére lehetnek a pszichologusoknak a gondolkodási folyamat törvényszerüségei vizsgálatánál. Azért gondolom, hogy csak hipotézisként, mert a gondolkodási folyamat mindig egy meghatározott tartalommal /jelen esetben számtani tartalommal/ megy végbe, és ez bizonyos sajátszerüségeket eredményez.

A gondolkodás nevelésének kérdése a matematika tanitásának igen fontos problémája. Ma már közhely, hogy a matematika tanitása a gondolkodás fejlesztésének nagyszerü iskolája. Annyira az, hogy a polgári társadalom iskoláiban a matematika formális képző erejének hangsulyozása az ismeret és készség, a tudás és képesség egységének szétszakitásához vezetett. W. Lietzmann /45/ a matematikatanitás gyakorlatias célkitüzéseit egyszerüen utilitarista elvnek nevezi. A matematikai ismeretszerzés szempontjainak háttérbe szorulása vezetett végül a didaktikai formalizmushoz. Ez természetesen sulyos hiba. Amikor a matematika először jelenik meg iskoláinkban és tanterveinkben, a hangsuly a matematikai ismereteink hasznosságán van. A matematika tanitásában rejlő gondolkodásra való nevelési lehetőségek felismerése után ezt az eredeti célt minősitik utilitarizmusnak a formális képzés hivei.

Rubinstein/68/ fejti ki, hogy a gondolkodás az ember és az objektiv világ közötti szakadatlan kölcsönhatás folyamatába iktatódik be. A gondolkodást a tárgy determinálja, de nem közvetlenül - ahogy a mechanikus determinizmus hivei gondolták - hanem a gondolkodási tevékenység belső törvényszerüségei utján. Amikor tehát a didaktikai formalisták a matematika formális képző erejének hangsúlyozását tartják fontosnak és a matematikai ismeretek nyújtását mellékesnek, tulajdonképpen a gondolkodás külső és belső feltételeit szakitják el egymástól, s a kapcsolatban domináns szerepet játszó külső feltételeket hanyagolják el.

Az elmondottakból világos, hogy ismeret és készség, tudás és képesség egységének szétválasztása antidialektikus álláspont, "Elfogadhatatlan számunkra minden olyan elmélet, amely az értelmi képességek fejlesztését elválasztja attól a tartalomtól, anyagtól, amelyet a gyermekkel megtanultatunk." - irja Ágoston György./2/"A modern matematikatanitásnak állandóan nyitva kell tartani a kaput ismeret- és alkalmazás, elmélet és gyakorlat között" - határozza meg e kérdésben a matematikatanár feladatát Faragó László/22/ A modern társadalomban a technikai civilizáció egyre magasabb és magasabb fokra lép, és ennek következtében a felnövő uj nemzedéknek egyre több és több matematikai ismeretre lesz szüksége. Ezeket az ismereteket az iskola csak akkor nyujtja helyesen, ha azok állandó gyakorlati alkalmazásokon keresztül szilárdulnak meg, válnak a gyakorlati életben közvetlenül felhasználható készségekké.

Nem szabad azonban azt feltételeznünk, hogy a tudományosan felépitett, logikus, rendszeres, elméletet a gyakorlattal összekapcsoló matematikatanitás automatikusan biztositja, hogy a tanulók logikus gondolkodási képessége kialakuljon és készséggé szilárduljon. A matematika megfelelő részeinek alapos és mélyreható ismerete, a tananyag célszerü, az elméletet a gyakorlattal összekapcsoló elrendezése, a gyakorlás, a rögzités biztositása feltétlenül szükséges, de semmiesetre sem elégséges feltétele a minden szempontból eredményes matematikatanitásnak. Tapasztalatom, hogy alacsony osztályokban, ahol a matematika tananyag olyan csekély, hogy szinte minden ember teljesen birtokában van, lényegesen több nehézség előtt áll a pedagógus a tanitás módszerének megválasztása, tökéletesitése terén.

Kezdő pedagógusok - főleg az általános iskola alsó osztályaiban - gyakran állnak értetlenül az előtt a kérdés előtt, miért volt eredménytelen az órájuk. Szakfelügyelőként pedig statisztikus érvénnyel megállapitottam, hogy pl. kérdezés technikájában kitünő iskola a felső tagozat tanárainak, ha néhány évet alsó tagozatban tanitottak, természetesen azzal, hogy ott tudatosan tapasztalatokat gyüjtenek. Minél alacsonyabb osztályban tanitunk, annál inkább észre kell vennünk, hogy nem elég a nevelőnek a tanitás anyagát ismernie, hanem a közölt gondolati tartalmon kivül ismernie kell az elsajátitás gondolkodási folyamatát.

A hibakutatás történeti áttekintése

A hibakutatók figyelme hamar fordult a számtan felé, de természetesen elsősorban a müveleti mechanizmusokat vizsgálták. Már Disterweg, Harnisch és Hentschel is ugy nyilatkoztak, hogy nincs még egy tárgy, amely a tanitónak annyi fáradtságot adna és olyan kevés eredménnyel járna, mint a helyesirás és a számolás tanitása./76/ A hibafajok első kutatója, a német Meringer/51/ a beszéd és olvasási hibák nagy anyagát gyüjtötte össze és rendszerezte. Az iráshibák lélektani analiziséről - az asszociációs lélektan alapján - elsőnek a német Offner számolt be a kisérleti pszichologusok III. kongresszusán.

A számolási hibák első vizsgálója a német Kräpelin volt, aki egyjegyü számok összeadásánál a számolás gyorsaságát és a hibák számát figyelte meg, s vont le belőle következtetéseket. Matematikai számteszteket elsőnek Voigt alkalmazott. Az amerikai Stone és Courtis tömegvizsgálatokon számtesztekkel elemezte az egyes müveletek relativ nehézségeit. /Stone 3000, Courtis 10000 tanulóval./ A Courtis féle teszteket Lippmann Berlinben már tantervi vizsgálatokra használta, majd a nürtingeni tanitóképző intézet is ezekkel dolgozott./76/

Az empirikus hibavizsgálatok után a hibák kvalitativ vizsgálatára az első kisérletet Hylla berlini tanárnál /34/ látjuk, aki a gimnázium I. osztályában az irásbeli dolgozatok hibáit értékelte. Weimer/82/ adja a hibafogalom megszükitésével a hiba első definicióját: a hiba olyan folyamat, amely elkövetőjének akarata ellenére tér el a helyestől, és amelynek helytelensége a pszichés müködés csődjét /Versagen/ feltételezi. Ezzel kizárja a hiba fogalmából a patologikus eseteket, a szándékosságot és sok más esetet. /Wundt például a hibák közé sorolta a dadogást, mások a rövidlátást, nagyotthallást./ Seemann[71] szerint a számolási folyamat azért nem megy végbe normális uton, mert vagy a funkcionális tényezők háttérbe szorulásával az asszociációs tényezők vezetnek rossz vágányra, vagy pedig a determináló tendenciák és a vele kapcsolatos gondolatelemek müködnek hibásan. Schanoff /Würzburg/[70] a számolás folyamatát elemzi, önmegfigyelés utján próbálja rögziteni, mi történik az ember lelkében számolás közben. Megállapitotta, hogy a látási képzetek mellett nagy szerepe van a hallási és beszédmotorikus képzeteknek. A hamburgi Neumann, Schanoff eredményeit vizsgálva, megállapitotta jól begyakorlott egyszerü müveleteknél /pl.szorzótábla/ a gondolkodási folyamat elhomályosodását és a müvelet gépiessé válását.

Hazánkban Ranschburg Pál [66] foglalkozott elsőnek beszéd-, irás - és számoláshibákkal, 153 elsőosztályos tanulóval végeztetett müveleteket a tizes számkörben. Arra az eredményre jutott, hogy tisztán emlékezetre alapitott számolás nincsen, a legegyszerübb számolási müvelet megoldása is gondolkodás eredménye, amelyet a képzetek egész sora ellenőriz. Beke Manó 1900-as székfoglaló beszéde és cikke[6] gondolkodási hibák egész sorát ismerteti az akkori gimnázium alsó osztályaitól az egyetemig, s elsősorban a hamis analogiák kiküszöbölésében látja a javitás és a megelőzés módját. Kauffmann és Schmidt 1922-ben 9-12 éves gyermekek számolási készségét vizsgálta, majd Szegeden Várkonyi Hildebrand irányitásával folytak matematikai tárgyu neveléslélektani vizsgálatok. Igen értékesek Szenes Adolf[76] eredményei, aki főleg a négy alapmüvelet végzése közben elkövetett hibákat vizsgálta.

Ma is dolgozik Győrött Szeliánszky Ferenc/74,75/aki a hibák lélektani csoportositásával és elemzésével foglalkozik, a gyakorlati pedagógia szempontjai csak másodlagosak nála. Napjainkban a magyar hibakutatás kiemelkedő alakja a nemrég elhunyt Faragó László volt, aki viszont a gyakorlati pedagógia szempontjából nézte a hibákat, a széleskörü ismereteit, nagy pszichologiai tudását elsősorban a közvetlen iskolai munka megjavitására kivánta forditani. Sokoldalu irodalmi tevékenysége /21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28/ rendkivül hasznos, eredményes, példamutató és kutatásokra ösztönző. Surányi Gábor/72/elsősorban az általános iskola alsó tagozatában végezte vizsgálatait, én pedig egy cikkel/55/ a felső tagozat hibáit elemeztem, s e dolgozattal - lényegesen nagyobb terjedelemben - ugyanazt teszem.

A Szovjetunióban a hibakutatások a számolás-mérés terén elsősorban N.A. Menscsinszkaja nevéhez füződnek. Az ő kisérletei elsősorban a feladatmegoldások vizsgálatával foglalkoznak, a szöveg értelmezése, a szöveg számadatai és kérdése kapcsolatával/49, 50/ A szovjet kutatók figyelmét A. R. Lurija forditotta a számolási hibák vizsgálata felé/47/, továbbá az a tény, hogy Rubinstein gondolkodáslélektani vizsgálatoknál előszeretettel használt számtani példákat. Geometriai ábrákat elemeznek I.Sz.Jakimanszkaja, K.A.Szlavszkaja, N.T.Frolova/68/, szöveges feladatoknak egyenletekkel való megoldását vizsgálja M.F.Dobrinyina /19/, N.N. Nyikolajeva /58/, I.G. Polszkij/64/, K.P. Szikorszkij/77/ és P.A. Szevarjov/72/. Egyetemi hallgatókkal végzett kisérleteket nem tizes alapszámu számrendszerekkel A.M. Matjuskin/68/ az általánositás törvényszerüségeinek vizsgálata céljából.

A tőkés országokban dolgozó hibakutatók közül a svájci J.Johannot,/36/ a francia G. Mialaret/52, 53/, S. Monavon/54/ és az amerikai Guiler/26/ munkái a legérdekesebbek. Ezeket a kutatókat elsősorban a törtszámok bevezetése és a törtszámokkal való müveletek érdeklik. Általában sok tanulón végzik a kisérleteiket. A három európai kutató részletes statisztikai adatokat közöl az eredményeiről, az amerikai kutatásairól azonban csak az összesitett végeredményt ismerjük. Az eredmények számunkra különösen azért érdekesek, mert Thorndike és iskolájának hatására a törtekkel való müveleteket túlnyomóan mechanikusan tanitják, s csak 10-15 éve tapasztalható a törekvés, hogy a mechanikus készségfejlesztést elvessék, s helyébe a megértést, belátást /maening, understanding/ helyezzék. Johannot foglalkozik még a szimbolumok bevezetésének kérdésével, s az itt elkövetett "konvencionalizmus hibáival."

A hibák osztályozása

A pedagógusok jelentős része meglehetősen differenciálatlanul kezeli a hibákat. Számukra ugyanolyan hiba 34.21=604 mint 34.21=64, aláhuzzák a dolgozatban, kijavittatják, s ezzel a kérdés el van intézve. Sok pedagógus hajlandó minden hibát egyszerüen a tanuló lustaságának, butaságának, gondolkodási restségének, figyelmetlenségének betudni, s ebből a felfogásából nem mozditja ki a hibáknak évről évre történő periodikus ismétlődése sem. Kétségtelen, hogy sok hibának az oka pl. a tanulók figyelmetlensége, lustasága, s minden tanuló teljesitőképességének is megvannak a határai, ez a felfogás mégis gyökerében helytelen, már a legelső hibakutatók szembefordultak vele s a javitás tudatosságára, rendszerességére ösztönöztek.

Hogyan csoportositsuk a hibákat? A legegyszerübb az volna, ha tanitási egységenként, témánként csoportositanánk. A kutató részéről ez a legegyszerübb, hiszen egy általános iskolai tananyagbeosztás mechanikusan mindent megold és még gondolkodni sem kell. Vannak esetek - pl. módszertankönyv, jegyzet irásakor - mikor ez az eljárás még célszerü is, hiszen a kezdő pedagógus számára megkönnyiti a tanulást. Ha viszont a kutatás célja a hibák vizsgálata és javitása, akkor ez az eljárás nem használható, hiszen ugyanaz az ok - pl. az analog szituáció helytelen feltételezése - a matematikatanitás különböző területein is okozhat hibákat. Ilyen osztályozás mellett tehát az összefüggések nem fedhetők fel a szükséges mértékben.

Kétes értékü volna a hibákat előfordulásuk gyakorisága alapján osztályozni annak ellenére, hogy egy ilyen osztályozás bizonyos gyakorlati haszonnal járna. Ha ugyanis egy gyakorló pedagógus a gyakrabban előforduló hibák javitására nagyobb energiát fordit, iskolájában a számolási hibák csökkenése gyorsabb lesz. Az ilyen osztályozás azonban elhanyagolhatónak minősitené azokat a ritkán - gyenge tanulóknál vagy tapasztalatlan tanárok által vezetett osztályokban - előforduló hibákat, amelyek gyakran igen élesen mutatnak rá a hibák okára, sőt a javitás útjára is. Ugyanaz az ok okozhat gyakran előforduló és ritkán előforduló hibát is. Az ilyen osztályozás ezenkivül megkivánná, hogy kisérleteinket igen sok gyermekkel végezzük el, hogy a véletlen tényezőjét kikapcsoljuk. Ez a kivánság viszont gyakran megoldhatatlan szervezési és munkaidő problémák elé állitana bennünket. Ezenfelül ez az osztályozás menthetetlenül mechanikus lenne. Hol a határ a gyakori és a ritka hiba között? Mekkora számszerü /százalékos/ különbség jelent minőségi különbséget is? A leghelyesebb tehát az,ha ezt az osztályozási lehetőséget elvetjük, de ugyanakkor más osztályozási rendszer mellett figyelmet forditunk a hibák gyakoriságára is.

Faragó László egyik nagy tanulmányában /22/ a hibákat aszerint osztályozza, hogy melyik oktatási alapelv megsértéséből erednek. Ez az eljárás kétségtelenül mélyebb, mint az előzők, hiszen a hiba oka felé nyul, s a gyakorlati pedagógust segiteni akaró kutató lelkiismeretességével keresi a hibák közötti összefüggéseket. Ugyanakkor maga Faragó is rámutat arra, hogy ritka eset az, amikor valamely hiba egyetlen alapelv megsértésére vezethető vissza, s legtöbb esetben összetett okról van szó, sőt megemlit egy hibát, amelynél valamennyi oktatási alapelvet megsértette a tanár. Sajnos a hibának többforrásu volta, amelyre már Weimer is rámutatott/82/ minden osztályozás mellett nehézséget jelent a kutatónak, igy csupán ezért nem lehet az osztályozásnak ezt a módját mellőzni. Hogy én mégsem ezt az osztályozást választom, annak elsősorban az az oka, hogy nem akarom azt a látszatot sem kelteni, mintha minden előforduló hibáért a pedagógus volna felelős. Hangsulyozni kivánom, hogy a hibáknak valóban leggyakoribb forrása az okok nem ismeréséből származó rossz módszer, mégis vannak hibák, amelyek a legjobb munka mellett is előjönnek, amelyek "fogadására" a jó tanárnak fel kell készülnie, s ezekért a hibákért nem okolható a pedagógus, nem származnak tehát az oktatási alapelvek megsértéséből.

Szeliánszky/74/ a hibákat sok ötletességgel egyéni módon osztályozza a következőképpen: 1./ A feladat meg nem értése. 2./ Kellő tárgyi ismeret hiánya 3./ Tartalmi félreismerés 4./ Csalás, puskázás 5./ Akarati tényezők /pl.próba-szerencse alapon való "megoldás"/ 6./ Feledékenység 7./ Érzelmi tényezők /pl. forditott szövegezésü feladat megtévesztő hatása/ 8./ Előzményekből következő hiba 9./ Folyamatra vonatkozó hiba /analógia, gátlások/ 10./ Végrehajtási hiba /erős munkatempó/ 11./ Idegen hiba /tanártól eredő/. Ez a kétségkivül kissé önkényes felosztás sok értéket árul el: törekvést a hibák okainak feltárására, a problémának gyökerében való megragadására. Ugyanakkor a hiba fogalmát meglehetősen kiszélesiti azzal,hogy pl. a puskázást is idesorolja. Kár, hogy Szeliánszky a hiba ilyen széleskörü értelmezése mellett /L.Weimer hibadefinicióját/ kutatásait csak a müveleti mechanizmusokra korlátozta, mert ha kiterjeszti a szöveges feladatok megoldására is, tovább finomitotta volna, s valószinüleg megelégedett volna a hibának Weimer által körülhatárolt értelmezésével.

Weimer[82] - aki kutatásaiban a müveleti mechanizmusokra szoritkozott - a pszichés hibákat a következő okokra vezette vissza: 1./ Begyakorlottsági hiba. 2./ Perzeverációs hiba. 3./ Hasonlósági hiba 4./ Keveredési hiba 5./ Érzelmi és akarati feltételü hiba. A hiba előfordulásának sorrendje alapján különbséget tesz őshiba, utóhiba és szokáshiba között. - Szenes Adolf[76] a fenti osztályozás leszükitésével a folyamatosság, a gátlások és a perzeveráció hibáit elemzi.

Vannak kutatók, akik arra törekszenek, hogy valamennyi hibát egyetlen egy okra vezessék vissza. Igy pl. Szenes Adolf szerint minden hiba oka végső fokon a csökkent illetve más irányban elfoglalt figyelem. A francia kutatók egy csoportja /M.Dabout, I.Gille, M.Yoli, R.Lepez és A.Vincent/ szerint minden hiba oka a feladat meg nem értése.[72] Beke Manó[6] valamennyi számolási hibát a hamis analógiára vezet vissza, sőt azt irja, hogy "ugyszólván a tudomány haladásának egész utja a hamis analógiák kiküszöbölését célozza" Maga az a tény, hogy különböző kutatók az egyetlenegy hibaokot más más területen keresték és vélték megtalálni, azt valószinüsitik, hogy az egyetlen hibaok keresésére irányuló törekvés reménytelen feladat, vagy legalább is tul általános okmeghatározáshoz vezet.

Herrmann Imre[33], aki a jelenségeket a pszichoanalizis szemüvegén át nézte, a hibák két főtipusát a következőkben látja: 1./ A gondolkodás technikájából eredő hibák, amikor egy gondolkodási müvelet helyett mást alkalmaznak 2./ A gondolkodó személyiségéből fakadó hibák, pl. egyes embereknek az a hite, hogy az ő gondolkodása többet ér minden tapasztalatnál. Megitélésem szerint az általános iskolában állandóan előforduló hibák mind az első tipusba tartoznak. Igen élesen látja Herrmann a gondolkodási hiba motivációját: 1./ Gyors eredmény elérésére való törekvés 2./ Ragaszkodás a megszokott eljárásokhoz 3./ Racionalizálásra való törekvés.

Értekezésemben a hibák osztályozására uj utat választottam. A tapasztalatok alapján arról győződtem meg, hogy bizonyos hibák közös okokra vezethetők vissza. Az igy, természetes uton készitett csoportositásban természetesen sok az empiria, viszont igen alkalmas az összefüggések meghatározására, a megelőzés illetve a javitás módjának meghatározására. Ugyanakkor azonban azt a kötelezettséget rójja a kutatóra, hogy munkáját a szubjektiv vonásoktól mentesiteni tudja, s elkerülje az ok meghatározásának önkényességét. El kell mennie a jelenségek elemzésében addig, ameddig a gyakorlati pedagógiai cél érdekében szükségesnek látszik.

Eredeti törekvésem az volt, hogy a tapasztalt egyes hibáknak egy-egy okát határozzam meg, s ezek szerint végezzem el az osztályozást. Ezt a tervemet azonban fel kellett adnom, mert tapasztaltam - amit különben már Weimer megállapitott/82/ - hogy minden hiba több okra vezethető vissza. Kisérleteket kellett tehát végeznem a domináns ok meghatározására. Ez egyrészt nehézséget jelentett számomra, másrészt előnyt, hiszen tapasztalhattam ugyanazon hibaokok gyakori együttes jelentkezését, s vizsgálhattam kölcsönhatásukat is.

A gondolkodási hibákat domináns okuk alapján a következőképpen osztályoztam:

1./ Helytelenül feltételezett analogián alapuló hibák.
2./ Formalizmuson alapuló hibák.
3./ Megszokáson alapuló hibák.
4./ Fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák.
5./ Hiányos előismeretek által okozott hibák.
6./ Matematikai müszavakból, szakkifejezésekből eredő hibák.

A kisérleteket a legtöbb esetben egy osztállyal hajtottam végre, lefolyásukat az egyes konkrét esetekben ismertetem. "A pedagógiai kisérlet lényege a feltételvariálás"/2/, tehát a vizsgált jelenség tudatos változtatása mellett iparkodtam a többbit konstansan hagyni. Eljárásomat egyes esetekben befolyásolta, hogy az adott kisérlet célja a domináns ok meghatározása, a megelőzésre vagy javitásra szánt eljárás kipróbálása, a lehetséges eljárások közül a legcélszerübb kiválasztása vagy pedig a feltételezett módszertani hiba ellenőrzése volt. Természetesen a kisérlet eredményéből csak a hibára, javitására, megelőzésére vontam le következtetéseket, a gyermekekre, azoknak további fejlődésére nem. "A teljesitménypróbával célunk nem az, hogy a gyermekek képességeiről... végleges itéletet mondjunk, hanem hogy az adott helyzetet földeritsük, és kutassuk... azokat a pedagógiai okokat, amelyek az adott helyzet létrejöttében többé vagy kevésbé közreműködtek." - irja Ágoston György./2/

Módom volt arra is, hogy néhány kisérletet nagyobb tanulólétszámmal ellenőrizzek. Geréb Györggyel közösen végeztünk kisérleteket 16 szegedi általános iskolában közös tanitványaink bekapcsolásával. Ritka hibáknál, kevés hibázó mellett alkalmaztam az egyéni beszélgetés módszerét is gondosan előkészitett kérdésekkel és megfelelő elágazásokkal.

A kisérletezőnek minden kisérletnél vannak előzetes feltételezései a kisérlet várható eredményéről. Mint az alábbiakban közölt eredményeim illusztrálják, igen nagy gondot forditottam arra, hogy ne kötelezzem el magamat az előzetes feltételezésem mellett. A kisérlet célja sohasem a feltételezés igazolása, hanem az ellenőrzése. Ha objektivak akarunk maradni, erről nem szabad elfeledkeznünk.

1./ Helytelenül feltételezett analógián alapuló hibák.

A hibák jelentős részének az az oka, hogy a gyermek analóg szituációt sejt olyan esetekben is, amelyekben valóban nincs analóg szituáció. Ilyenkor mellőzi az alapos gondolkodást, elmarad a szintézisen alapuló analizis, s a helytelenül feltételezett analógia alapján a más helyzetben alkalmazott eljárást automatikusan átviszi az analógnak feltételezett uj feladatra is.

Az ilyen módon előálló hibák száma nagy, az egyes hibák előfordulása gyakori, s néha alapvető tévedéseket eredményez, amelyek más hibák forrásai lesznek. Éppen ezért igen nagy gonddal kell az ilyen hibákat vizsgálnunk, javitásukra illetve megelőzésükre komoly erőfeszitéseket kell tennünk. Sulyos tévedés volna azonban feltételezni, hogy az analógia káros hatással van a matematikatanitásra. Éppen ellenkezőleg: a matematikatanár egyik legjobb segitőtársa a helyes analógia, amely az esetek tulnyomó többségében megkönnyiti a munkáját, gyors és viszonylag könnyü eredményre vezet. Például a természetes számok megismerése, a velük való müveletek jártassággá majd készséggé válása után az analógia könnyiti meg a tizedes törteknél tanár és tanitvány munkáját egyaránt. Ha matematikai feladatot kell megoldanunk, szinte ösztönösen kutatunk az emlékezetünkben hasonló tipusu feladatok után. Pólya György/62/ a feladat megoldási terve elkészitésénél lépten-nyomon az analógia alkalmazását tanácsolja. /"Ismersz-e valami rokon feladatot?... Próbálj visszaemlékezni valamely ismert feladatra.... Nem tudnád átfogalmazni a feladatot?.. Nem tudnál kigondolni valami könnyebben megoldható rokonfeladatot? ... Vagy analóg feladatot?.."/ Semmi ellentét sincs Pólya György tanácsai és Beke Manó előbb kifejtett álláspontja között, mert Beke a hamis analógiák elleni éberségre int, s a hiba okának nem az analógia létezését és hatását, hanem a hamisan feltételezett analógiát tartja.

A rutinos matematikatanár tudja, hogy ha a tananyag valamely részének megtanitása tulságosan könnyen sikerül, akkor nagyon óvatosnak kell lennie, mert nagyon közel van a lehetőség hibát elkövetni. Ilyenkor könnyebben ellankad a tanár figyelme is, s a gyermek - könnyünek érezvén a feladatát - hajlamos a felületes megállapitásokra. "A naiv és kritikátlan gondolkodás elfogad meg nem felelő hipotéziseket is... a kritikai ellenőrzés... elvezet a helyes megoldáshoz" - fogalmazza meg ilyen esetekre Lénárd Ferenc/44/ a tanár feladatát.

Az analóg szituáció helytelen feltételezése sok közös vonást mutat a megszokással, hiszen az az eljárás, amelynek sablonját követni akarja a gyermek, készségi vagy jártassági fokon sajátja már. Éppen ezért nem lehet éles határt vonni. Erősen "belesegit" a hamis analógia létrejöttébe, ha azt külső forma, matematikai jelölés támogatja. Ilyen esetekben a két hatás olyan erős, hogy nem is lehet tulajdonképpen domináns okról beszélni. Néhány esetben a fogalom tisztázatlan volta, nem elég alapos ismerete is elősegiti az analógiás hiba kialakulását.

Nézzük először azokat a hibákat, amelyeknél a hamis analógia kialakulását a megszokás segiti másodlagos okként a legerősebben.

1. hiba.

Igen gyakori hiba az V. osztályban, hogy a törtszám fogalmának megismerése után a gyermek azt hiszi, hogy

$$\frac{1}{7} > \frac{1}{5}$$

Olyan hibával állunk szemben, amely nyilvánvalóan több más hibának lehet a forrása. A közvetlen oka a hamis analógia: a gyermek tudja, hogy $7 > 5$, s ezen az alapon gondolja, hogy $\frac{1}{7} > \frac{1}{5}$.

A hibás gondolkodást nagymértékben támogatja az is, hogy a törtszám fogalma ebben az időben még egészen uj s nem elég alapos. Ezenkivül a matematikai jelölés is az $\frac{1}{7}$ nagyobb voltát sugalmazza a gyermeknek.

Nem látszik ugyan valószinünek, hogy a hiba megelőzhető legyen, még is meg kell emlékeznünk egy tanári hibáról, amely a fenti gondolkodási hiba létrejöttét elősegiti. Elég sok tanár - gyakorlatiasság ürügyén - nem foglalkozik eleget a fogalom kialakitásával, esetleg ki sem tér a nagysági relációkra, hanem igyekszik minél hamarább rátérni a müveletekre. Az ilyen tanár előtt a hiba rejtve marad, nem is tudja, hogy a gyermek a kisebb törtszámot gondolja nagyobbnak. Csak akkor kapkod, próbál javitani, szemléltet kétségbeesetten, amikor a következmények jelentkeznek, például az, hogy a gyermek az $\frac{1}{2}$-et kisebbnek gondolja a $\frac{27}{98}$-nál, nem látja be, hogy $\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$, nem érti, hogy $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Mivel a tanár jó munkája esetén is várható a hiba megjelenése, a vizsgálatnak elsősorban a javitásra kell irányulnia.

1. kisérlet.

Egy osztályban minden kommentár nélkül feladtam a következő feladatot:

Állitsátok sorba nagyság szerint a következő törtszámokat:

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$$

A félreértés illetve félremagyarázás elkerülése céljából a megoldásnál odairattam a papir szélére, hogy mely számok a kisebbek, nagyobbak. A helyes megoldók a következőt irták a cédulára:

Kisebbek $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ Nagyobbak

A kisérlet eredménye:

Helyes sorrend:	16 tanuló / 55 % /
Hibás sorrend:	11 tanuló / 45 % /

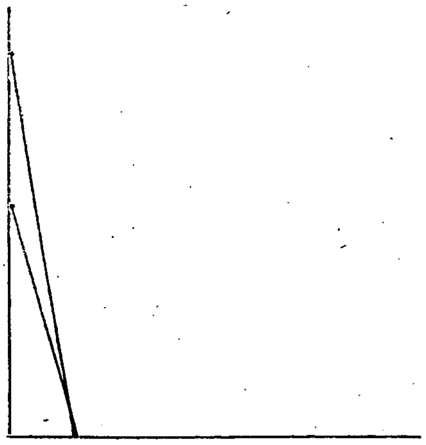
A hibás sorrend minden esetben pontosan a forditottját jelentette a helyes sorrendnek, zavaros sorrend seholsem volt, igy a hiba a további kisérletekhez igen tisztán állt rendelkezésre. A következőkben A. csoportnak azt a 16 tanulót nevezem, akik a feladatot helyesen oldották meg, B csoportnak pedig a hibázó 11 tanulót.

2. kisérlet.

Ugyanabban az osztályban azonnal az 1. kisérlet után adtam fel a következő feladatot: "Ábrázoljátok a számegyenesen az $\frac{1}{5}$-öt és az $\frac{1}{3}$-ot!"

A kisérlet eredménye a következő volt:

	A.csoport	B.csoport	Összesen
Helyesen és viszonylag pontosan ábrázolt	13/81 %/	1 /9 %/	14/52 %/
Elvileg helyesen ábrázolt /0 és 1 között helyes sorrendben/	3/19 %/	---	3/11 %/
1 és 2 között ábrázolt /1,3 és 1,5 vagy $1\frac{1}{3}$ és $1\frac{1}{5}$/	---	6 /55 %/	6/22 %/
Két tengelyen ábrázolt teljesen hamisan/ 1.1. ábra/	---	4 /36 %/	4/15 %/



1. ábra.

Az utolsó hibához megjegyzek annyit, hogy az órán két tengelyről nem volt szó, de természetesen a grafikus ábrázolást már ismerték. Mindenesetre kétségtelen, hogy ez a 4 tanuló a törtszámot nem egy, hanem két számnak képzelte.

3. kisérlet.

Ugyanabban az osztályban a következő számokat kellett a gyermekeknek nagyság szerint az 1. kisérlethez hasonlóan sorbaállitaniok:

$$4 , \frac{1}{3} , 1 , 9 , \frac{1}{9} , \frac{1}{4} , 3$$

A feladat nehezebb, mint az 1. kisérlet feladata volt, hiszen természetes számok és törtszámok vegyesen szerepelnek benne. A várt rosszabb eredmény azonban nem következett be:

Helyes sorrend: 15 tanuló / 58 % /

Hibás sorrend: 11 tanuló / 42 % /

Egy hiányzó volt, különben személy szerint ugyanazok a tanulók hibáztak, mint az 1. kisérletnél. A hibás sorrend azonban ebben az esetben nem mindig a pontosan forditott sorrendet jelentette. 5 tanuló keverte a számokat, általában egymás mellé irták a számot és a reciprok értékét. 1 tanuló pedig teljesen zavaros képet adott, véleményem szerint a "trial and error" módszerérről volt szó.

Összehasonlitva az 1. kisérlettel a hibázó tanulóktól ugyanazt kaptam, amit vártam. Kellemes meglepetés volt azonban, hogy akik az 1. kisérletnél helytálltak, azokat az egész számok bekapcsolása sem zavarta meg. Mindenesetre szükségesnek tartottam ezt a tényt ellenőrizni, ezért két osztályban két kartársat ellenőrző kisérlet végrehajtására kértem fel a következő eredménnyel:

4. kisérlet.

1. feladat: Állitsátok nagyság szerint sorrendbe a következő számokat!

$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$

2. feladat: Állitsátok nagyság szerint sorrendben a következő számokat!

3 , $\frac{1}{5}$, 4, 1 , 5 , $\frac{1}{4}$

Az eredmény igazolta a 3. kisérletnél tapasztaltakat:

	Helyes sorrend:	Hibás sorrend:
1. feladat.	30 tanuló /55 %/	24 tanuló /45 %/
2. feladat.	28 tanuló /52 %/	26 tanuló /48 %/

A csekély különbség, amivel rosszabb a második feladat eredménye, nem befolyásolja az előző megállapitást. A hibázó tanulóknál is ugyanaz volt a helyzet, mint az előző kisérletekben: az 1. feladatnál pontosan a forditott sorrendet irták fel, a másodiknál voltak zavaros válaszok is.

5. kisérlet.

A kisérletet ugyanabban az osztályban hajtottam végre, amelyben az 1.-3. kisérleteket azzal a különbséggel, hogy akkor minden kommentár nélkül adtam a feladatokat, most pedig kellő előkészitéssel.

Először szétszedtem egy kört 8 egyenlő körcikkre, majd a körcikkekből összeraktuk a $\frac{8}{8}$- ot. Utána megismételtük ugyanezt az analizálást és szintétizálást $\frac{6}{6}$- dal és $\frac{10}{10}$- del is. Az előkészités utolsó lépéseként körcikkek szétvágásával és összerakásával megállapitottuk, hogy $\frac{1}{4}$ fele $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$ fele $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ harmada $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ fele $\frac{1}{10}$. Ezután kapták a gyermekek a feladatot, hogy állitsák nagyság szerint sorba a következő számokat:

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{29}, \frac{1}{3}$$

A kisérlet igen jó eredménnyel zárult:

Helyes sorrend	24 tanuló / 92 %/
Kisebb, jelentéktelen hiba	1 tanuló / 4 %/
Hibás sorrend	1 tanuló / 4 %/

Az eredmény egyfelöl igazolta azt a feltevésemet, hogy a hamis analóg szituáció feltételezésében erősen befolyásolta a gyermeket a törtszám fogalmának tisztázatlan volta is. Másrészt a hiba javitásának módját is bemutatja a kisérlet: erős szemléltetés, továbbá a törtszám fogalmának tisztázásakor a nagysági relációk kellő hangsullyal való tanitása.

2. hiba.

Teljesen az 1. hibához hasonló tipusu hiba, amikor a tizedestört fogalmának kialakulása után a gyermek azt hiszi, hogy

$$0,8 < 0,12$$

A hibás gondolkodás szinte teljesen azonos az előbbivel: a gyermek a $8 < 12$ analógiájára állitja, hogy $0,8 < 0,12$. Nyilvánvaló, hogy ez a hiba is több uj hibának lehet a forrása. A közönséges törteknél vizsgált hasonló hibával szemben az a különbség, hogy itt a fogalom tisztázatlan volta erősebb szerepet játszik.

Általános iskolai fokon - amikor az irracionális szám fogalmát a gyermek még nem ismeri - a közönséges tört és a tizedestört fogalmilag azonos. A gyermek ezt nem könnyen látja be, hiszen a különböző irásmód, később a tizedes törtekkel végzett müveletek könnyebb volta, az osztásnak másként való felépitése a fogalmi azonosságot nem támasztják alá. Gyakori módszertani hiba, hogy a tanár nem kivánja meg, hogy a gyermek a tizedes törtnek a nevezőjét is kimondja, az "egyszerüség kedvéért" a nevező kimondását elengedi. /Egy egész hét tized helyett annyit mond, hogy egy egész hét, három egész nyolc század helyett pedig gyakran azt mondják, hogy három egész nulla nyolc./ A természetesen és elkerülhetetlenül ható tényezők mellett ha még ez a módszertani hiba is megvan, akkor semmi meglepő sincs abban, hogy a gyermek azt hiszi, hogy a tizedes törtnek nincs nevezője. Ebben az esetben a hiba szinte biztosan be fog következni.

Ugyanazzal a feladattal négy különböző osztályban négy kisérletet végeztem részint más előzmények mellett, részint más eljárással. A kérdés ez volt: "Melyik a nagyobb szám, 0,8 vagy

0,12 ?"

1. kisérlet.

Ebben az osztályban a tanár rendszeresen megengedte, hogy a gyermekek a tizedes tört kimondásakor a nevező kimondását mellőzzék. Eredmény: 22 helyes válasz /73 %/ és 8 hibás válasz /27 %/

2. kisérlet.

Az előbbi tanárral ellentétben ebben az osztályban a tanár erősen megkövetelte a gyermekektől a tizedestört nevezőjének kimondását. Eredmény: 27 helyes válasz /87 %/ és 4 hibás válasz /13 %/

3. kisérlet.

Ennek az osztálynak a tanára mindig kimondta a tizedestört nevezőjét, de a gyermekektől nem követelte meg elég következetesen a nevező kimondását, néha elnéző volt. - A kisérlet előtt viszont a két tizedestörtet felirtuk a táblára közönséges tört alakjában, letöröltük, s azután kapták a kérdést. Eredmény: 28 helyes válasz /93 %/ és 2 hibás válasz /7 %/

4. kisérlet.

A 3. kisérlet tanárának másik osztályában a kisérlet előtt méterrudon szemléltetve megállapitottuk, hogy 0,7 méter az 7 deciméter illetve 70 centiméter, 0,14 méter pedig 14 centiméter. A kisérlet eredménye az volt, hogy mind a 27 tanuló helyesen nagyobbnak mondta a 0,8-et a 0,12-nál.

A kisérletek eredménye kétségtelenül igazolta, hogy a nevező ki nem mondása komoly módszertani hiba, amely a gyermeket a hibázás irányában inditja el. Ebből következik, hogy a tizedes tört nevezője kimondásának következetes megkövetelése mind a hiba megelőzése, mind a javitása szempontjából fontos. A közönséges törttel való összehasonlitás is, a szemléltetés is hasznos eljárásnak bizonyult, s a magam részéről a szemléltetést tartom a kettő közül jobbnak nemcsak a 100 százalékos eredmény miatt /a 3. kisérlet 2 hibázója véletlen is lehetett/, hanem a ráforditott idő rövidsége miatt is.

Egy kérdés maradt még nyitva: a numerikus különbségek milyen mértékben befolyásolják a hibázók számát? Ezt is kisérlettel néztem meg:

5. kisérlet.

Az 1. kisérletben szereplő osztállyal végeztem, mert ott volt a hibázók száma a legnagyobb. Az 1. kisérlet befejezése után megkérdeztem a következőt is: "Melyik szám nagyobb, a 0,84 vagy a 0,9 ?" Eredmény:

	Helyes válasz	Hibás válasz
0,8 és 0,12 összehasonlitása	22 tanuló/73 %/	8 tanuló/27%/
0,84 és 0,9 összehasonlitása	23 tanuló/77%/	7 tanuló/23%/

A sorrend felcserélésével azt akartam elérni, hogy ne megszokásból válassza ki a nagyobbat, hanem gondolkodni legyen kénytelen a gyermek. Ugyanazok a tanulók hibáztak, egy javitott, de indokolni nem tudta a válaszát.

A hiba szempontjából közömbösnek lehet tekinteni, hogy a két szám nagyságban közel vagy távol van egymástól.

3. hiba.

Az 1. és 2. hibákhoz hasonló hiba a negativ számok bevezetése után is előfordul. Az $5 < 8$ analógiájára azt hiszi a gyermek, hogy

$$-5 < -8$$

Az előző két hibához hasonlóan itt is kétségtelenül a hamis analógia tekinthető domináns oknak, s a fogalom tisztázatlan volta, a nagysági relációk felületes tanitása, elsietése befolyásolja a gyermeket a hamis analógia irányába.

Ennek a hibának az előző kettőtől való eltérése abból áll, hogy gyakrabban marad rejtve a tanár előtt, mint az előbbi kettő. A negativ számokat ugyanis a VIII. osztályban tanitjuk, megtanitjuk ugyan vele a müveleteket, de az általános iskolában később, vagy egyáltalán nem végzünk müveleteket negativ számokkal, vagy viszonylag keveset. Igy a hibát az általános iskolából a gimnázium tanára örökli, aki általában nem azonos személy az általános iskola tanárával. Ha pedig a gyermek nem kerül gimnáziumba, akkor véglegesen ugy marad a tudatában, nincs aki kijavitsa.

A hibával kapcsolatban a következő kisérleteket végeztem:

<u>1. kisérlet.</u>

A gyermekek a következő feladatot kapták: Állitsátok sorba nagyság szerint a következő számokat!

$-5, -8, -3, -7, -11$

Eredmény: 18 helyes megoldás /58 %/ és 13 hibás megoldás /42 %/

A hibás megoldás minden esetben pontosan a forditott sorrendet jelentette.

Nehogy a feladat értelmezésében félreértés legyen, az 1.hiba 1.kisérletéhez hasonlóan a számsorozat két végéhez odairattam a "kisebbek", "nagyobbak" szavakat. Az eredmény a százalékos arányt illetően is, a hibák tartalmát illetően is szinte azonos a közönséges törteknél tapasztaltakkal. /1.hiba 1. kisérlet./

2. kisérlet.

Az 1. kisérlettel azonos módon kellett a gyermekeknek a következő számokat nagyság szerint sorbaállitani:

$$-9, \quad -12{,}5, \quad -12, \quad -7\tfrac{1}{4}, \quad -\tfrac{2}{3}$$

A kisérlet számszerü eredménye pontosan ugyanaz, mint az előbbinél: 18 helyes válasz /58 %/ és 13 hibás válasz /42 %/. A hibázók személy szerint is ugyanazok voltak, mint az előző kisérletnél azzal a különbséggel, hogy 12 gyermek irta pontosan a forditott sorrendet, 1 tanuló - az osztályban tanitó tanár információja szerint a leggyengébb - a két közönséges tört ill. vegyes szám alakban felirt számot minősitette a legkisebbnek, a többit pedig forditott sorrendben irta. /Ebben az esetben nem a "trial and error" módszerével állunk szemben, hanem kettős fogalomzavarral: negativ számoknál is, törteknél is./ Ez a különbség az eredményt lényegesen nem befolyásolja, az viszont határozottan megállapitható, hogy az 1. hiba 3. kisérletéhez hasonlóan a törtek bekapcsolása, tehát a numerikus nehezités a hibázók számán nem változtatott semmit.

3. kisérlet.

Egy másik osztályban a javitás módjának meghatározására a következő kisérletet végeztem: Először az előbbi kisérletekkel azonos módon állittattam sorba a következő számokat:

$$3, \quad -4, \quad 2, \quad 0, \quad -1, \quad -7$$

Összeszedtem a cédulákat, majd a kisérlet második lépéseként számegyenest rajzoltunk /én a táblán, a gyermekek a füzetükben/, s azon ábrázoltuk a fenti számokat. Ezután kapták az uj feladatot: nagyság szerint sorbaállitani ugyanezeket a számokat. A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
Ábrázolás előtt	20 tanuló /65 %/	11 tanuló /35 %/
Ábrázolás után	29 tanuló /94 %/	2 tanuló / 6 %/

A javitás sikere felülmulta az előzetes várakozásokat egyrészt azért, mert az ujból hibázó két tanuló minden téren - nemcsak számtanból - nagyon gyenge volt, igy az eredmény szinte 100 százalékosnak tekinthető, másrészt pedig azért, mert az ábrázolás tekintetében igen könnyen, gyorsan dolgoztak, s szinte felesleges volt, hogy én is rajzoljak a táblán. Olyan hibákat, mint a közönséges törteknél való ábrázolásnál tapasztaltam, itt nem láttam. Később ábrázoltattam ezzel az osztállyal teljesen önállóan negativ törteket is a számegyenesen, de az 1. hiba 2. kisérleténél tapasztalt hiba itt már csak egyetlenegy esetben fordult elő.

Érdekes volt ennél a kisérletnél megfigyelni, hogyan képzelték el a számok nagyságát a hibázó tanulók. Mindkettőnek ez állt a céduláján:

Kisebbek 0 , -1 , -4 , -7 , 2 , 3 Nagyobbak

Nem ültek egymás közelében, igy a puskázás lehetőségét ki kell kapcsolnunk. Igen jó tanár osztályáról lévén szó kétségtelen, hogy a negativ szám fogalmának gondos kialakitása megtörtént. A két hibázó tanulónál a képesség hiánya abban mutatkozott meg, hogy a pozitiv és negativ szám valamint a 0 fogalma nem olvadt egy egységbe, az egész számok fogalmába, hanem külön-külön elszigetelten élt a tudatukban, s a hibák egyik forrása éppen a számok elszigetelt kezelése volt. /A negativ számok kisebbek, de a 0 még azoknál is kisebb, mert a 0 a semmi - a negativ számokon belül a sorrend helytelen megállapitása./

A kisérlet eredményeként azt a megállapitást tehetem, hogy a számegyenesen való ábrázolás szinte tökéletes szemléltetés a fenti hiba kiküszöbölésére. Ugyanakkor felvetődött bennem egy probléma e kisérlet nyomán: nehezitem vagy könnyitem a gyermek számára a feladatot, ha a számok nagyságának megállapitásakor pozitiv és negativ számokat vegyesen adok. Kisérlettel döntöttem el:

4. kisérlet.

Két feladatot kapott az osztály. Az első feladat eredményét összeszedtem, s csak azután adtam fel a másodikat.

1. feladat. Állitsátok nagyság szerint sorba a következő számokat:

-5 , -3 , -9 , -1 , -13 , -4 , -8

2. feladat. Állitsátok nagyság szerint sorba a következő számokat:

-2 , 3 , -7 , -0 , 12 , -12 , 5

A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
1. feladat /negativ számok/	24 tanuló /75 %/	8 tanuló /25 %/
2. feladat /vegyesen/	27 tanuló /88 %/	5 tanuló /12 %/

A gyermek számára könnyitést jelentett, hogy ha a pozitiv és negativ számokat vegyesen kapta. Az első pillanatra meglepőnek tünő eredményt azonban meg lehet magyarázni. Amig a gyermek csak negativ számokat lát maga előtt, természetesen szigetelődnek el a negativ számok a pozitivoktól, s részben az analógia, részben a megszokás miatt adva van a hibázási lehetőség. Ahogy azonban a pozitiv, negativ számok és 0 szerepelnek a feladatban, a gyermek erősebb gondolkodásra kényszerül, eszébe jutnak a számegyenesen történt szemléltetések /természetesen csak akkor, ha azok valóban voltak/, s az emlékeiben élő szemléltetés hatására a hiba valószinüsége lecsökken.

Mindenesetre az 1.-3. hibák megjelenéséből s a velük kapcsolatban tapasztaltakból levonhatjuk azt a következtetést, hogy sulyos módszertani hibát vét az a pedagógus, aki azon a cimen, hogy ő az életre nevel, gyakorlatiasan akar tanitani, elnagyolja a fogalom kialakitását, s igyekszik minél előbb a müveletekre rátérni. Az I. osztály tanitója nagy gonddal ügyel a számképek kialakitására, óvatosan bőviti a tárgykört, s tudja, hogy a sietség az ő munkájánál a biztos sikertelenséget jelenti. Ha a felső tagozat tanárának nem is kell olyan aprólékos gonddal szemléltetnie mindent, mint ahogy ezt az I. osztályban kell tenni, a szemléltetés elhanyagolása, a fogalom kialakitása fontosságának fel nem ismerése itt is tönkreteszi a munka eredményét.

4. hiba.

Jellegzetes példa az analógiás gondolkodás hibájára az az eset, amikor a 10 hatványaival való szorzás szabályát akarja a gyermek automatikusan átvinni a tizedes törtekre is. A gyermek megtanulta a természetes számoknál, hogy 62.10=620, 62.100=6200, ... s.i.t. Mivel tapasztalja, hogy a tizedestörtekkel ugyanugy végezzük el a müveleteket, mint a természetes számokkal - csak a tizedesvonásra kell vigyáznunk - természetes dolog, hogy azt hiszi, hogy

6,2.10 = 6,20 6,2.100=6,200 ..... s.i.t.

A hiba bekövetkezése minden osztályban várható, a legjobb tanári munka mellett is. Az azonban, hogy hány gyermek esik bele ebbe a hibába, nagymértékben függ a tanár munkájától. Ezt igazolja az, hogy a hiba előfordulása osztályonkint és tanáronkint nagy ingadozást mutat, mint első kisérletem illusztrálja.

1. kisérlet.

Ugyanabban az iskolában két különböző tanár osztályában adtam fel a feladatot: 8,9.10 = . Az eredmény a két tanár különböző eredményü munkáját tükrözi:

A.osztály 28 helyes megoldás/93 %/és 2 hibás megoldás/7%/
B.osztály 19 helyes megoldás/66 %/és 10 hibás megoldás/34%/

A százalékos különbség tul nagy ahhoz, hogy a két osztály közötti képességbeli különbséggel lehessen magyarázni az osztályokban tanitó más szakos tanárok szerint sincs lényeges különbség a két osztály között.

2. kisérlet.

Másik iskolában végeztem el ezt a kisérletet. Az első feladat ez volt: 3,4.10= . Összeszedtem a válaszokat, azután a táblán közösen megszoroztuk 8,3-et 9-cel. Ezután kapták a második feladatot: 8,3.10= . A kisérlet eredménye:

1.feladat	22 helyes megoldás /73 %/	és	8 hibás megoldás/27 %/
2.feladat	26 helyes megoldás /87 %/	és	4 hibás megoldás/13 %/

Az eredmény javulásának oka, hogy a második lépésként beiktatott 8,3.9=74,7 szorzás becslésnek bizonyult; nem hitte el a gyermek utána, hogy 8,3.10 olyan kicsi legyen. A hibák számát ezzel felére sikerült csökkenteni.

3. kisérlet.

Egy harmadik iskolában más javitási eljárást próbáltam ki. Feladtam először a következő feladatot: 4,3.10= . Megállapitottuk, hogy 7.10=70, majd megkapták a második feladatot is: 7,4.10= . A kisérlet eredménye:

1.feladat:	25 helyes megoldás /76 %/	és	8 hibás megoldás/24 %/
2.feladat	32 helyes megoldás /97 %/	és	1 hibás megoldás/3 %/

Ez az eljárás még előnyösebbnek bizonyult, mint az előbbi, hiszen szinte teljesen kiküszöbölte a hibát. Mivel a becslés itt lényegesen kevesebb időt vett igénybe, mint az előbbi kisérletnél a szorzás elvégzése, részmüvelete is volt a tulajdonképpeni feladatmegoldásnak, s az eredmény is jobb, a becslésnek ezt a módját feltétlenül előnyben kell részesitenünk az előbbivel szemben, annak ellenére, hogy az is sikerült.

4. kisérlet.

Egy másik osztályban a következő eljárást próbáltam ki. Feladtam az első feladatot: 4,6.10= . Összeszedtem a megoldásokat, majd szemléletesen megállapitottuk, hogy $9\frac{1}{2}$.10=95. /Az 1958. évi Tanterv és az azelőtti Tantervek szerint a közönséges tört tanitása később került sorra, igy kénytelen voltam 10 kosár alma sulyát kiszámittatni, amelyekben $9\frac{1}{2}$ kg alma volt kosarankint./ Ezután kapták a gyermekek a második feladatot: 9,6.10= .

A kisérlet meglepő eredményre vezetett:

1.feladat: 20 helyes megoldás/71 %/ és 8 hibás megoldás/29%/

2.feladat 17 helyes megoldás/61 %/ és11 hibás megoldás/39%/

Nem számitottam arra - elsősorban a második lépés körülményes volta miatt - hogy jobb eredményt kapok, mint a becsléseknél, de hogy a közbeiktatás rontani fog az eredményen, azt nem vártam. Éppen ezért egy másik osztályban megismételtem a kisérletet. Itt mindkét feladatnál 14 helyes /70 %/ és 6 hibás /30 %/ választ kaptam. Bár ebben az esetben legalább nem rontott a közbeiktatott eljárás az eredményen, a két eredményt egybevetve az eljárást el kellett vetnem legalábbis addig, amig iskoláinkban a közönséges törttel való szorzás tanitása meg nem előzi a tizedestörtekkel való szorzást.

A sikertelenséget a következőkkel magyarázom: a gyermek számára nem volt fogalmi egység a tanult 9,6 és a csak szemléletesen ismert $9\frac{1}{2}$ között. A kényszerüségből hosszadalmassá lett szemléletes magyarázat is zavarólag hatott, igy a javitási elgondolás sikertelensége érthető.

Megmarad a kérdés: a most befejezett iskolareform után megváltozik-e ez a helyzet, hiszen nem lesz szükség a szemléletes magyarázatra. Lehetséges, hogy az uj felosztás mellett javulni fog a hibaszázalék, de a 3. kisérlet teljes sikere mellett nem valószinü, hogy szükség lesz erre az eljárásra is.

Végül egy tapasztalatomat közlöm a hiba szemléletes uton való javitásával kapcsolatban. Megfigyeltem, hogy a tizedestörtek tanitásánál mindenütt jobban beválnak a szemléltetésre a méter és részei, mint más mértékegységek. Ennek a magyarázatát nemcsak a méter és részei igen szemléletes voltában találtam meg, hanem abban is, hogy a méter tized-, század- és ezredrészének nemcsak külön neve van, hanem ezek a gyakorlatban használatosak is, mig pl. a kilogram tizedrészének van ugyan külön neve, de az a gyakorlatban nem terjedt el, igy a gyermek előtt nem ismert, ugyanigy a liter század- és ezredrésze, a forint tizedrészének pedig nincs is külön neve.

A hiba megelőzésének és javitásának a tapasztalatok alapján a becslésben látom a legjobb módját, mégpedig a 3. kisérletben leirt módon.

5. hiba.

Jellegzetesen analógiás hiba a következő. A gyermek a szorzótábla készségi fokon való ismeretében azt hiszi, hogy 0,2.0,3=0,6, hiszen 2.3=6 Ugyanennek a hibának a megfelelője az osztásnál, hogy 8:2=4 analógiájára azt hiszi a gyermek, hogy 0,8:0,2=0,4.

A hiba nem gyakori, inkább a gyenge tanulóknál fordul elő. A tényezők formájának megváltoztatásával a gyermek automatikusan változtatja meg a szorzat formáját is, az osztandó és az osztó formájának megváltoztatásával a hányados formáját is, anélkül, hogy tartalmilag megvizsgálta volna, hogy mit tesz. Érdekessége még ennek a hibának, hogy csak a tizedestörteknél fordul elő, magasabb helyiértékeknél nem. Azt még sohasem láttam, hogy a gyermek azt higyje, hogy 20.30=60, vagy hogy 80:20=40. A hibának a tizedes törtekre való korlátozódását nagyrészt megmagyarázza az, hogy az általános iskola III. és IV.osztályában a természetes számokkal való müveletek alapos és szemléletes magyarázatot kapnak, s a gyakorlásra is sok idő áll rendelkezésre. Nem kapcsolható ki azonban a hiba létrejöttéből a tizedesvonás zavaró hatása és a tört fogalmának tisztázatlan volta sem.

A hiba megelőzésére illetve javitására három eljárást próbáltam ki, a véletlen azonban mindháromnál jobb eljárást ismertetett meg velem. A három kipróbált eljárás a következő:

1./ A feladatot megfelelő szöveggel adom fel. Az eljárás bevált, de inkább a probléma elódázásának bizonyult, mert a gyenge tanulóknál a szöveg elhagyása után a probléma - ritkábban ugyan - ujra jelentkezett.

2./ Szemléltetés mértékegységen. Ez az eljárás nem vált be, mert a szorzás alkalmával át kellett mennünk a méterről a négyzetméterre, s ez a hiba javitása terén nehézségeket okozott. A szemléltetés, amely általában a legcélravezetőbb eljárás, itt nem vált be, legalábbis ezen a módon.

3./ Előkészités feladatsorral a következőképpen:

2.3=6	0,2.3=0,6	2.0,3=0,6	0,2.0,3=0,06
8:2=4	8:0,2=40	0,8:2=0,4	0,8:0,2=4

A három eljárás közül viszonylag ez bizonyult a legjobbnak.

Különösen az osztásnál vált be, ahol a gyermekek hamar meglátták azt, hogy a forma nem automatikusan változik, gondolkodni kezdtek, s megértették a nagysági relációkat.

A véletlen, ami az ezeknél is jobb eljárást a kezembe adta, az volt, hogy egy kartársam, Kálmán Mihály gyakorlóiskolai tanár a szorzótábla gyakorlásának unalmas, fárasztó munkáját érdekesebbé, szinesebbé akarta tenni, s kidolgozott egy eljárást a szorzótábla gyakorlásának változatosabbá tételére. Az óraeleji fejszámolásnál a következőképpen variálta a szorzótáblát:

2.4	5.9	3.7	3.2	.....
0,4.3	0,5.7	0,9.5	0,2.3	.....
5.0,7	7.0,2	3.0,3	4.0,2	.....
0,6.0,8	0,7.0,3	0,2.0,8	0,3.0,1	.....

Az eljárás érdekessége és ereje az, hogy kihasználja az analógiát és ezzel párhuzamosan a nagysági relációkra irányitja a gyermek figyelmét, s szinte lehetetlenné teszi a hamis analógia kialakulását. Kálmán Mihály még más eljárást is dolgozott ki a számolás érdekessé tétele érdekében,az itt felvetett hiba javitása szempontjából azonban az itt bemutatott rész a fontos. Az eredmény teljes volt, a hiba ugyszólván teljesen megszünt.

Természetesen az osztási hiba kiküszöbölése is analóg módon, az osztótábla érdekessé tétele utján történik.

6. hiba.

Azokban az osztályokban, ahol a tanár komolyabb igénnyel lép fel a fejszámolás terén, gyakran tapasztalható a következő fejszámolási hiba:

$$25.34=20.30 + 5.4 = 600 + 20 = 620$$

A hiba az ötödik osztályban tapasztalható, amikor a természetes számokat tanitjuk. Természetesen azokban az osztályokban, ahol a tanár nem kivánja meg a fejszámolást ilyen fokon, szintén előbukkan ez a hiba, ha hasonló feladat megoldatását megkiséreljük, a hiba tehát nem az igény magas voltában van. A hiba elég gyakran előfordul, s domináns okának a hamis analógiát tekintettem, amelyet egy - a II. osztályban előforduló - módszertani hiba támaszt alá. A II. osztályban a Tantervhez kiadott Utasitás ugyanis kifejezetten megkivánja, hogy a kétjegyü számok összeadásakor csak az egyik összeadandót bontsuk fel helyiértékek alapján, a másikat ne:

$25 + 34 = ?$ $\quad 25 + 30 = 55 \quad 55 + 4 = 59$

$25 + 34 = 59$

Az Utasitással ellentétben gyakran tapasztaljuk a II. osztályban - sőt magasabb osztályokban is- hogy sok pedagógus megengedi /esetleg tanitja/ azt az eljárást, hogy mind a két összeadandót felbontjuk

$25 + 34 = ?$ $\quad 20 + 30 = 50 \quad 5 + 4 = 9$

$25 + 34 = 59$

Bár ezt a második eljárást az Utasitás kifejezetten tiltja, gyakran elsiklanak mellette, hiszen helytelen eredményhez nem vezet. Ugyanakkor az V. osztályban a kétjegyü számok fejbeli szorzásánál előforduló fenti hiba domináns okaként feltételezhető, hogy a II. osztályban megszokott eljárás analógiájára dolgozik a gyermek. Természetesen a közben eltelt két-három év miatt kérdéses, hogy a feltételezés helytálló-e. Az első kisérletem éppen ezért a feltevés helyességét vagy helytelenségét volt hivatott eldönteni.

1. kisérlet.

Két iskola V. osztályában végeztettem el az V. osztályban a 23.37 szorzást. Tanyai iskolákról volt szó, ahol az alsó tagozatot hosszu éveken át ugyanaz a pedagógus tanitotta. Az A. iskola tanitója nemcsak megengedte, de tanitotta is a II. osztályban a fenti, módszertanilag hátrányos eljárást, a B. iskola tanitója pedig kifejezetten tiltotta azt. A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
A. iskola	6 tanuló /40 %/	9 tanuló /60 %/
B. iskola	13 tanuló /93 %/	1 tanuló /7 % /

Az eredmény igazolni látszik a feltevésemet, azonban egyrészt a százalékok eltérése tulságosan magas ahhoz, hogy más tényezők hatását elhanyagolhatónak gondoljuk, másrészt a vizsgált tanulók száma nagyon kicsi. A két iskola közül a B. iskolát jól ismertem, az A. iskolában azonban szakfelügyelői minőségben akkor jártam először. Alaposan szétnéztem, s megállapitottam, hogy az A. iskola minden szempontból, más tárgyakból is gyengébb szinvonalu volt a B. iskolánál, igy a fenti százalékban ez a szinvonal különbség is benne van. Megismételtem az eljárást C. iskolában is, ahol a körülmények ugyanilyenek voltak, s a tanitó a hibás eljárást megengedte.

C. iskola 8 helyes megoldás /57 %/ 6 hibás megoldás/43 %/

Az eredmény, valószinübb arányokban, mint az A. iskoláé, valószinüsiti a feltevésemet. Emellett az A. és C. iskola egyesitett tanulólétszáma /29 gyermek/ már kitesz egy átlagos osztályt. A B. iskolában később is volt alkalmam megfigyeléseket végezni, s az uj megfigyelések is azt igazolták, hogy ott a helyes megoldók száma átlagosan 90 % körül mozgott. Igy a kisérletben résztvevő tanulók kis létszáma ellenére feltevésemet igazoltnak tekinthetem.

2. kisérlet.

Egy osztályban fejben elvégeztettem a tanulókkal a 36.23 szorzást. Az eredményt megállapitottam, s másnap a második feladat feladása előtt néhány összeadási példát kiszámoltattam a gyermekekkel a II. osztályban megismert hibás eljárással / 35+12 , 47+23 , 55+32 /, majd feladtam a második szorzási feladatot: 32.26= ?

Azt vártam, hogy az eredmény rosszabb lesz, mint az első feladatnál, hiszen felujitottuk a hiba okául meghatározott eljárást. Az eredmény nem igazolta a feltevésemet, mindkét feladatnál 18 helyes választ /45 %/ és 22 hibás választ /55 %/ kaptam. A magyarázatot abban találom, hogy az összeadási eljárás már készségi fokon volt, a szorzási legalább jártasságin, igy a felujitás a gyermekeket már nem befolyásolta. Természetesen ugyanazok a tanulók hibáztak mindkét feladatnál.

3. kisérlet.

Ezt a kisérletet közvetlenül az első kisérlet után végeztem az első kisérletben szereplő három iskolában. Feladtam a feladatot: 18.23, megbecsültük, hogy mivel 18.20=360, az eredmény 360-nál nagyobb lesz, valószinüleg 400 körül, majd megoldották a feladatot. Az első kisérletnél helyesen dolgozó tanulók most sem hibáztak, a hibázó tanulóknál pedig a következő volt az eredmény:

	A.iskola	B.iskola	C.iskola	Összesen
Önállóan jól oldotta meg a feladatát	1 tanuló	------	1 tanuló	2 tanuló
Hibásan számolt, észrevette a tévedését, helyesre javitott	1 tanuló	------	2 tanuló	3 tanuló
Hibásan számolt, észrevette tévedését, javitás közben számolási hibát vétett	4 tanuló	------	2 tanuló	6 tanuló
Ismét elkövette a hibát, s elfogadta a hibás eredményt.	3 tanuló	1 tanuló	1 tanuló	5 tanuló

A hibázó tanulóknak csak 12,5 %-a javitott első látásra, önállóan, igy a becslés - más helyütt tapasztaltakkal szemben - kevesebbet segitett. Ugyanakkor azonban azt is meg kell állapitanunk, hogy a becslés itt is hasznosnak bizonyult, hiszen csak a hibázó tanulók 31 százalékára volt hatástalan. Még plasztikusabban látjuk a javitást, ha megállapitjuk, hogy a három iskola összesen 43 vizsgált tanulója közül a becslés nélkül 16 tanuló /37 %/ hibázott, a becslés után viszont csak 5 tanuló /12 %/ fogadta el a hibás eredményt.

Feltünően sok azoknak a tanulóknak a száma, akik a becslés alapján megállapitották, hogy számolási eredményük helytelen, de javitás közben számolástechnikai hibát vétettek, s nem kaptak helyes eredményt. Volt közöttük olyan is, aki egyszerüen beirt egy 400 körüli számot /trial and error/, volt viszont aki megtalálta a helyes elvi utat, de primitiv számolástechnikai hibával elrontotta az eredményt. Megitélésem szerint ebben az esetben a számolási hibát nem lehetett figyelmen kivül hagyni, s csak azt fogadni el, hogy az elvileg helyes utat megtalálta, mert a sok számolási hiba nem lehet véletlen, hanem a rossz beidegződés gátló hatásának megnyilvánulása.

Mindenesetre megállapitható, hogy a becslés itt is hasznos javitási mód, azonban még fontosabb - mint a B. iskola eredménye is mutatja - a Tantervi Utasitásban a II. osztálynál emlitett rendelkezés következetes megtartása.

7. hiba.

A vegyes számok szorzásánál fordul elő egy - lényegileg a 6. hibával azonos hiba

$$3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4} = 6\frac{1}{8}$$

Ez a VI. osztályban előforduló hiba szintén elég gyakran előfordul, s a hiba domináns okául itt is a hamis analógiát kell tekintenünk. A vegyes számok összeadásánál ugyanis - néhány hónappal a szorzás előtt - azt tanulja a gyermek, hogy az egészeket az egészekkel, a törteket a törtekkel adjuk össze.

$$3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = ? \qquad 3 + 2 = 6 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad 6 + \frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}$$

Mi sem természetesebb annál, hogy a gyermek a fenti eljárást sablonnak tekintse, s gondolkodás nélkül ennek a mintájára szorozza meg a 3-at a 2-vel, az $\frac{1}{2}$ -et az $\frac{1}{4}$ -del, s adja össze a két szorzatot. Ez a magyarázata a hiba gyakori előfordulásának még a legjobb tanári munka mellett is. Szükséges tehát, hogy a hiba bekövetkezésére felkészüljünk, s a javitás módját meghatározzuk.

Mielőtt a végzett kisérleteket ismertetném, nézzük, hányféleképpen oldhatja meg az általános iskolai tanuló a feladatot:

A, $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}$

B, $\begin{array}{r} 3{,}5 \cdot 2{,}25 \\ \hline 7\ 0 \\ 7\ 0 \\ 1\ 7\ 5 \\ \hline 7{,}8\ 7\ 5 \end{array}$ $\quad 7{,}875 = 7\frac{7}{8}$

C, $/3 + \frac{1}{2}/ \cdot /2 + \frac{1}{4}/ = 6 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 7\frac{7}{8}$

Azonnal látjuk, hogy az első két eljárásnál a tulajdonképpeni problémát megkerültük, hiszen a feladatot nem végeztük el, hanem átalakitottuk egy már ismert eljárásra. Mellesleg: a B, eljárás csak akkor használható, ha mindkét tényező véges tizedestörtté irható át. Gyakran tapasztaljuk, hogy sok pedagógus kötelezően előirja tanitványainak, az áltörtté való átalakitást, hiszen ezzel a fenti hibát eleve megelőzi. Ez viszont numerikusan nehéz feladat elé állitja a gyermeket pl. ha $39\frac{15}{17} \cdot 34\frac{11}{13}$ szorzást kell elvégeznie, s ez ellentmond annak az általános törekvésünknek, hogy szoktassuk rá a gyermekeket az ésszerüsités lehetőségeinek felkutatására. - A C, eljárás volna az igazi, és itt akadályoz bennünket az a szokássá vált következetlenség, hogy mig a matematikában általában ha két szám közé nem irunk müveleti jelet, az szorzást jelent, itt azonban kivételesen nem szorzást, hanem összeadást.

Ellentétben a 6. hibával, ahol a hiba végső okául szolgáló eljárás nemcsak mellőzhető, de tilos is, itt azt az eljárást, amelynek analógiájára a gyermek a 7. hibát elköveti, nemcsak szabad, de kell is tanitanunk. Ez csak fokozza a nehézségeinket.

Első kisérletemben azt vizsgáltam meg, hogy a gyermekek melyik utat választják legszivesebben.

1. kisérlet.

Egy osztályban minden előzetes megbeszélés nélkül feladtam a fenti példát: $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4} = ?$ Csupán annyit mondtam, hogy ne számoljanak áltört alakban, mert enélkül az utasitás nélkül tapasztalatom szerint valamennyi ugy számolt volna. A kisérlet eredménye:

Hibátlanul számolt "polinomszorzással"......11 tanuló /37 %/

Tizedestört alakban számolt............... 4 tanuló /13 %/

A tilalom ellenére áltört alakban számolt.. 7 tanuló /23 %/

Elkövette a tipushibát.................... 8 tanuló /27 %/

Tekintettel arra, hogy elég erős osztályban folyt le a kisérlet, az eredmény mutatja, hogy olyan hibával állunk szemben, amely elég sok gyermeket vezet félre. Feltünően nagy azoknak a gyermekeknek a száma, akik megkerülték a feladatot tizedestörttel vagy áltörttel.

2. kisérlet.

Az előző kisérletnél hibázó 8 tanulóval elvégeztettem a szorzást tizedestört alakban is.

$$3\,\frac{1}{2} \cdot 2\,\frac{1}{4} = 6\,\frac{1}{8} \qquad 3{,}5.2.5 = 7{,}875$$

Melyik a helyes eredmény a kettő közül? - kérdeztem meg külön-külön mind a nyolc tanulótól. Hét tanuló bizonytalankodott, egy adott határozott választ: a tizedestörteknél kapott eredmény. Indokolása azonban meglepő volt: ez a helyes, mert a tizedestörtekkel könnyebb számolni, ezt tudom jobban. Akkor a másiknál hibáztál? Igen. Keresd meg, hol! Nem sikerült.

Ezután áltört alakban is elvégeztettem velük a feladatot:

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{63}{8} = 7\,\frac{7}{8}$$

Erre mind a nyolc gyermek határozottá vált: Ez a helyes eredmény - mert ez kétszer is kijött, a $6\frac{1}{8}$ pedig csak egyszer. Mind megállapitotta, hogy a $6\frac{1}{8}$ -nál hibáztak, de hogy miben áll a hiba, azt egy sem tudta önállóan megtalálni.

3. kisérlet.

Két osztály tanulóit három csoportra osztottam, s ugyanazt a példát adtam fel nekik különböző módon. Az A. csoport minden segitség nélkül az 1. kisérlethez hasonló körülmények között dolgozott. A B. csoportnál megbecsültük, hogy az eredmény nagyobb lesz 7-nél, mert $3\frac{1}{2} \cdot 2=7$, itt pedig 2-nél nagyobb számmal szorzunk. A C. csoportnál csináltunk egy mintapéldát / $5\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3}$ /, azután feladtam a feladatot, megbecsültük, hogy az eredmény nagyobb lesz 7-nél, majd elvégezték a feladatot.

A kisérlet eredménye:

	A. csoport	B. csoport	C. csoport
Hibátlan megoldás	7 tanuló /32 %/	9 tanuló /41 %/	9 tanuló /43 %/
Tizedestörttel dolgozott	1 tanuló / 5 %/	---------	1 tanuló /5 %/
Tilalom ellenére áltörttel dolgozott	4 tanuló /18 %/	3 tanuló /13,5%/	2 tanuló/9,5 %/
Hibázott és utólag helyesbitett	---------	7 tanuló /32 %/	7 tanuló /33 %/
Elkövette a hibát és elfogadta a rossz eredményt	10 tanuló/45 %/	3 tanuló/13,5 %/	2 tanuló /9,5%/

Az eredmény elsősorban azt mutatja, hogy a feladat előzetes megbecsülése mind a megelőzés, mind a javitás szempontjából jelentősebb, mint a mintapélda bemutatása. A becslés ugyanis a hibázók arányát harmadrésze alá csökkentette, a mintapélda beiktatása viszont már nem sokat változtatott a helyzeten. Szükségesnek látszott a hibával kapcsolatban egy olyan csoportot is alakitani, ahol mintapéldát kapnak a gyermekek, becslést nem. Tekintettel azonban arra, hogy a becslés sokkal kevesebb időt vesz igénybe a tanitási órából, s a tanulók önállóságra való nevelését is lényegesen jobban szolgálja, mint a mintapélda, ettől a kisérlettől eltekintettem, hiszen annak eredményétől függetlenül a becslést kell a tanitásnál célszerübb eljárásnak minősitenünk.

Érdekes megfigyelni, hogy a problémát megkerülők száma kisebb mértékben javult - még felére sem csökkent - a becslés és a mintapélda következtében. Ennek abban találom a magyarázatát, hogy a gyermekek megszokták a kényelmes utat, s nem szivesen hagyják el, hiszen helyes eredményt kapnak.

4. kisérlet.

Az előző kisérlet érdekes eredményei arra inditottak, hogy ezt a kisérletet nagyobb tanulólétszámmal is megismételjem. Geréb György és én 16 szegedi általános iskolában szerveztük meg a vizsgálatot az előző kisérlettel teljesen azonos módon. A kisérlet eredménye:

	A. csoport	B, csoport	C, csoport
Hibátlan megoldás	72 tanuló /26 %/	103 tanuló /37 %/	61 tanuló /24 %/
Tizedestörtel dolgozott	8 tanuló /3 %/	7 tanuló /2 %/	9 tanuló /3 %/
Tilalom ellenére áltörttel dolgozott	24 tanuló /8,5 %/	33 tanuló/12 %/	18 tanuló/7 %/
Elkövette a tipushibát, és elfogadta a rossz eredményt	150 tanuló /54 %/	95 tanuló/34 %/	45 tanuló/17 %/
Más hibát követett el /számolástechnikai, stb./	24 tanuló /8,5 %/	42 tanuló/15 %/	127 tanuló/49 %/

A nagy tömeggel /818 tanuló/ végzett kisérlet technikai lebonyolitása olyan nehézségek elé állitott bennünket, hogy nem tudtunk különbséget tenni a között a két csoport között, amely első kisérletre produkálta a hibátlan megoldást, illetve utólag javitott. Igy ennek a táblázatnak az első sora az első táblázat első és utolsó sora összegének felel meg. Ugyancsak a nagy tömeg ismeretlen gyermekkel való nehézkes bánásmód okozhatta, hogy a számolástechnikai hibát vétő tanulók száma olyan nagymértékben megnövekedett, hogy külön rovatot kellett beállitani, s nem lehetett figyelmen kivül hagyni.

A két táblázat összehasonlitásából elsősorban az tünik ki, hogy a tömegkisérletnél általában gyengébb eredményt kaptunk. Erre számitottam is, mivel az előző kisérletnél elég erős osztályokkal dolgoztam. A becslés, mint javitási mód értékét ez a kisérlet éppen ugy aláhuzza, mint az előző, ugyanakkor a C. csoportnál a mintapélda kifejezetten zavarólag hatott, erre mutat a számolástechnikai hibát vétő tanulók számának meglépő nagy emelkedése. Megitélésem szerint itt a Ranschburg-féle gátlással állunk szemben, a homogén elemek /mintapélda és a becslés/ eredménye gátlólag hatottak egymásra, s e gátlás eredményeként kapkodtak a gyermekek. Menscsinszkaja/50/ kimutatta, hogy a homogén elemek számának csökkenésével csökken a hibázók száma.

Még két részletprobléma tisztázása volt szükséges, ezt két kisérlettel végeztem el.

5. kisérlet.

Az óra bevezető részében felujitottuk a vegyes számok összeadását, utána kommentár nélkül kaptak a tanulók egy feladatot a vegyes számok szorzására.

A kisérlet eredménye:

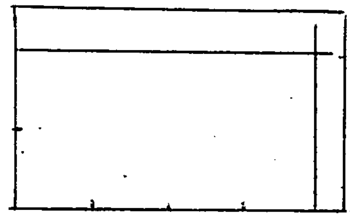
Hibátlan megoldás...........................	10 tanuló /36 %/
Tizedestört alakban számolt................	---------------
Áltört alakban számolt......................	5 tanuló /18 %/
Elkövette a tipushibát és elfogadta a rossz eredményt..........................	13 tanuló /46 %/

A kisérlettől azt vártam, hogy az eredmény rosszabbodni fog, mivel a helytelen analógia alapjául szolgáló eljárást az óra elején felujitottam, mintegy megerősitettem. A tapasztalat azt mutatta, hogy az előző csoportokhoz képest a helyesen dolgozó gyermekek száma nem változott lényegesen, viszont a hibázók száma jelentősen megnövekedett azoknak a rovására, akik a felujitás nélkül megkerülték volna a problémát. A helytelen analóg szituáció nem zavarta meg azokat a tanulókat, akik a problémát előzőleg megértették, de alaposan megzavarta a bizonytalankodókat.

6. kisérlet.

A gyermekek szöveges feladatot kaptak. Egy virágágy hossza $4\frac{1}{2}$ méter, szélessége $2\frac{3}{5}$ méter. Mekkora a területe?

Felrajzoltuk a téglalapot 1:100 kicsinyitéssel /1.2.ábra/ Azután - magyarázkodás nélkül - megoldották a feladatot.



2. ábra

Eredmény:

Hibátlanul dolgozott...........	19 tanuló / 63 %/
Tizedes törttel dolgozott......	2 tanuló / 7 %/
Áltört alakban dolgozott.......	6 tanuló /20 %/
Elkövette a tipushibát és elfogadta a rossz eredményt........	3 tanuló /10 %/

E kisérlet eredménye mutatja, hogy a becslés mellett a hiba másik jó orvossága a világos, félreérthetetlen és egyszerü szemléltetés, s az abból kiinduló általánositás.

Összefoglalva: a 7. hiba a legjobb tanári munka mellett is elég gyakran megjelenik, megelőzésének illetve javitásának a legjobb utja az eredmény előzetes becslése és a 6. kisérletben szereplő szemléltetés.

8. hiba.

Egyenes és forditott arányossági feladatoknál gyakran tapasztaljuk, hogy a gyermek nem az összefüggések analizise alapján dönti el, hogy egyenes vagy forditott arányossági feladatról van szó, hanem a feladat tárgyköre alapján. Megoldottunk két-három egyenes arányossági feladatot, amelynek a tárgyköre vásárlás, mérés vagy sulyszámitás volt, s innen kezdve ha vásárlásról, mérésről, sulyszámitásról van szó, gondolkodás nélkül minősiti a feladatot egyenes arányossági feladatnak. Megforditva: megoldunk két három forditott arányossági feladatot, amelynek a tárgyköre munkavégzés, üzemi konyha készletének felhasználása, s innen kezdve ha üzemi konyháról vagy munkáról hall, forditott arányosságnak véli a feladatát.

Nyilván hamis analóg szituációról van szó: mellőzi az összefüggések analizisét, s helyette a felszin alapján dönt, a tárgykör alapján véli a feladat megoldási menetét meghatározni. Ez természetes. Már Menscsinszkaja /50/ 1940-ben végrehajtott kisérleteiben megfigyelte, hogy a gyermekek nem érzik a feladat megoldásakor a követelményt, a feladat a gyermek szemében gyakran elválik a feladatban feltett kérdéstől. Ő az alsó tagozatban végezte a kisérleteit, s ennek a hibának az okát elsősorban abban látja, hogy az erős szemléltetés és a feladatnak müvelet formájában való feladása, amikor a gyermeknek nem kell gondolkodnia azon, hogy melyik müvelettel ér célt, nem irányitják a gyermek figyelmét a szöveg és a kérdés analizise felé.

Ezt a szemléleti gondolkodásból fakadó hibát a szöveges feladatoknál tanár és tanitvány közös munkájával leküzdik, de ahányszor uj feladatformával ismerkedik meg a gyermek, előjön, s ujból le kell küzdeni.

A hiba gyakoriságának meghatározására két kisérletet végeztem.

1. kisérlet.

Előző órán három egyenes arányossági feladatot oldottunk meg piaci gyümölcsvásárlás tárgykörből. A következő órán minden előkészités nélkül feladtam a következő feladatot:

14 kg 8 forintos almát akartam venni. Az alma ára azonban 7 forintra csökkent. Hány kg almát vettem ugyanannyi pénzért?

Eredmény:

Helyesen forditott arányossággal számolt.... 16 tanuló /55 %/
Hibásan egyenes arányossággal számolt....... 13 tanuló /45 %/

Felvetett kérdésemre, hogyan lehet az, hogy ugyanannyi pénzért az olcsóbb almából kevesebbet kaptam, a hibázó tanulók bizonytalan válaszokat adtak, ketten kijelentették, hogy rossz a példa, s amikor a helyes megoldókra hivatkoztam, csak akkor sikerült - igaz, hogy elég gyorsan - egy tanulónak a helyes utat megtalálni.

2. kisérlet.

Előző órán három forditott arányossági feladatot oldottunk meg magtári munkák tárgyköréből. A következő órán minden előkészités nélkül feladtam a következő feladatot:

Három munkás felhordott a magtár padlására 240 mázsa buzát. Ugyanannyi idő alatt négy munkás hány mázsa gabonát hordott volna fel?

Eredmény:

Helyesen egyenes arányossággal számolt... 20 tanuló /69 %/
Hibásan forditott arányossággal számolt.. 9 tanuló /31 %/

Itt is megkérdeztem, hogyan lehetséges, hogy több munkás kevesebb idő alatt végez. Itt viszont hamar észrevették a hibázó tanulók a tévedésüket, s javitottak.

Mindkét esetben elég magas volt a hibázó tanulók száma, de a második kisérletnél alacsonyabb. A különbség okát elsősorban abban látom, hogy az egyenes arányossági feladatot könnyebbnek, gyorsabban áttekinthetőnek és megoldhatónak érzi a gyermek, s szivesebben csinálja. Ez természetesen fejlődéslélektanilag is indokolható. A gyermek az életben többször találkozik olyan jelenségekkel, amelyek egyenes arányosságra vezetnek. Emellett azonban szerepet játszott az is, hogy a két kisérletet ugyanabban az osztályban végeztem két egymás után következő héten, s a gyermekek egyrésze az előző heti tapasztalat alapján gyanut fogott, s a sablon alkalmazása helyett gondolkodott.

A hiba előfordul jó tanári munka mellett is, - különösen ha provokálják, mint én tettem a kisérletben - gyakoriságának azonban az oka a tanár módszertani hibája, hogy sablonosan választja ki a példái szövegét. Ezzel adva van a javitás módja is: miután külön megtanitottuk az egyenes és külön a forditott arányossági feladatokat, a gyakorlást együtt végezzük, s egy tanitási óra keretében ugyanabból a tárgykörből vegyesen adunk egyenes és forditott arányossági feladatokat.

9. hiba.

Az alsó tagozatban és az V. osztályban megszokja a gyermek, hogy az összeadandókat egymás alá irjuk és ugy adjuk össze:

```
 174 +
 283
  69
 526
```

Amikor a tizedestörteket akarja összeadni, a fenti számolási mód analógiájára nem arra gondol, hogy az azonos helyiértékü számokat irja egymás alá, hanem a külső formára vigyáz, hogy az utolsó számjegyek pontosan egymás alá kerüljenek:

```
 17,4 +
 2,83
  6,9
 52,6
```

Nehéz volna eldönteni, hogy a domináns ok jelen esetben az-e, hogy egy megszokott számitási mód analógiájára dolgozik a gyermek, vagy az, hogy a forma elnyomja a mögötte rejlő tartalmat. Igy lehetséges volna ezt a hibát a II. hibacsoportban is tárgyalni. Mindenesetre a gyermek nem gondol az okra, amely miatt a természetes számok összeadásánál a számjegyek egymás alá kerültek, csak a formára.

A hiba igen gyakori. Javitására négy eljárást próbáltam ki.

1. kisérlet.

Megoldottak a gyermekek egy összeadási feladatot tizedestörtekkel, összeszedtem a cédulákat, figyelmeztettem őket, hogy vigyázzanak a helyiértékre, majd feladtam a másik feladatot, amely kb. ugyanolyan nehéz volt, mint az első. Az eredmény:

1.feladat 17 helyes megoldás/63 %/ és 10 hibás megoldás/37 %/

2.feladat 20 helyes megoldás/74 %/ és 7 hibás megoldás/26 %/

2. kisérlet.

Az előző kisérlethez hasonlóan két kb. egyenlő nehéz feladatot kaptak a gyermekek azzal a különbséggel, hogy a két feladat között nem egyszerü figyelmeztetést kaptak, hanem helyiérték szerint elemeztük a második feladat összeadandóit. Az eredmény:

1. feladat 19 helyes megoldás/68 %/ és 9 hibás megoldás/32 %/

2. feladat 23 helyes megoldás/82 %/ és 5 hibás megoldás/18 %/

3. kisérlet.

Két kb. egyenlő nehéz feladatot oldottak meg a gyermekek. Az első feladat megoldásainak összeszedése után a táblán közösen megoldottunk egy mintapéldát, megbeszéltük, hogy a tizedesvonások egymás alá kerültek, mert igy azonos helyiértékü számjegyeket irtunk egymás alá, s csak ezután kapták a második feladatot a gyermekek. Az eredmény:

1.feladat 18 helyes megoldás/72 %/ és 7 hibás megoldás/28 %/

2.feladat 22 helyes megoldás/88 %/ és 3 hibás megoldás/12 %/

4. kisérlet.

Az első feladat megoldása után azonnal feladtam a másodikat is, de mielőtt hozzáfogtak volna, megbecsültük nagyságrendileg a várható eredményt. Ezután oldották meg a feladatot. Az eredmény:

1.feladat 22 helyes megoldás/69 %/ és 10 hibás megoldás/31 %/

2.feladat 28 helyes megoldás/87,5%/és 4 hibás megoldás/12,5%/

A négy eljárás eredményét összehasonlitva megállapithatjuk, hogy mind a négy javitja a hibát, legkevésbé a figyelmeztetés, legeredményesebben a mintapélda és a becslés. Tekintettel arra, hogy a becslés kevesebb időt vesz igénybe a tanitási órából, mint a mintapéldá,a hiba javitására az összeg előzetes becslése tekinthető a legcélravezetőbb eljárásnak. Ugyanakkor gyenge osztályokban célszerünek látszik a mintapélda bemutatása is,de nem a becsléssel keverten, mert nagyon valószinünek látszik a 7. hibánál tapasztalt gátlásos jelenség megismétlődése.

10. hiba

Az aránypár tanitását az egyenes arányossági feladatokkal szoktuk kezdeni, s azután térünk át a forditott arányossági feladatokra. Különösen, ha azonos tárgykörü feladatot kapnak a kétféle tipusu feladatból, várható, hogy a gyermek a forditott arányossági feladatot is az egyenes arányossági feladat analógiájára oldja meg. Például:

A személyvonat és a gyorsvonat sebességének aránya 2:5. Mekkora utat tesz meg a személyvonat azalatt, amig a gyorsvonat 36 km-t tesz meg?

Megoldás: 2:5 = x:36 , ebből x=14,4

A személyvonat és a gyorsvonat sebességének aránya 2:5. Két város közötti távolság megtételére a gyorsvonatnak 30 percre van szüksége. Mennyi időre van szüksége a személyvonatnak?

Megoldásban bekövetkezik a **tipushiba**:

2:5 = x : 30 , tehát x= 12,

azaz a személyvonatnak negyedóra sem kell ahhoz, amihez a gyorsvonatnak félórára volt szüksége.

A hiba olyan gyakori, hogy már tantervi problémát is vetett fel, az 1958. évi Tantervből kimaradt az aránypárok tanitása, s ebben az elhatározásban nem csekély szerepe van annak, hogy a formális eljárás melegágya ennek a hibának, s jelentős mértékben alkalmas arra, hogy a feladat tartalmi elemzése helyett sablont alkalmazzunk. Nem célom ebben az értekezésben az aránypár tanitása szükséges vagy szükségtelen voltáról polemizálni, de megjegyzem, hogy Lietzmann/45/ már a század elején szükségtelennek minősitette az aránypár tanítását azzal, hogy csak Disterweg tekintélye az oka, hogy az aránypár még mindig szerepel a tantervekben, Bragyisz/8/, pedig kifejti, hogy egyetlen olyan feladat sincs, amit aránypár helyett egyszerü logikus gondolkodással meg ne lehetne oldani.

Két kisérletem még az 1958. évi Tanterv életbelépése előttről való.

1. kisérlet.

Előzetes magyarázat nélkül feladtam a gyermekeknek a fent leirt forditott arányossági feladatot számitva arra, hogy a képtelen eredmény gondolkodásra inditja őket az én beavatkozásom nélkül is. Eredmény:

Helyesen számolt aránypárral...........	13 tanuló /45 %/
Hibásan számolt, s a rossz eredmény láttára önállóan javitott....................	10 tanuló /34 %/
Hibásan számolt és a rossz eredményt kritikátlanul elfogadta.................	6 tanuló /21 %/

Érdekes volt megfigyelni, hogyan javitott a 10 tanuló. A többség, 8 tanuló egyszerüen megforditotta az arányt / 2:5 helyett 5:2 /, ujra kezdte a példát, s megoldotta mostmár helyesen, 2 tanuló pedig egyszerüen következtetéssel jutott el a célhoz: A gyorsvonat 2,5-szer olyan gyorsan haladt, 2,5-szer kevesebb időre volt szüksége. A 8 tanulóval való egyéni beszélgetés során kiderült, hogy nem először tévednek már hasonló feladatnál, mindig igy javitották ki, mindig sikerült, tehát igy "kell" javitani. /Ujabb gondolkodási hiba: a matematikát normativ tudománynak tekintik, ahol valamit egy módon kell megoldani./

A 6 tanuló, aki a hibát önállóan nem javitotta, nem is gondolkodott az eredményen, ez jött ki, elfogadta. Mikor megkérdeztem tőlük, hogyan lehetséges az, hogy a gyorsvonatnak több időre volt szüksége, 4 tanuló egyszerüen kijelentette, hogy akkor ez a példa rossz, nem lehet aránypárral megoldani, 2 tanuló pedig tanácstalanul nézett, nem értette, hogy mi a baj.

2. kisérlet.

Az előző kisérletet megismételtem olyan tárgykörrel, amely a gyermekeket kevésbé érdekli, mint a vonat.

Egy munkát 18 géppel 25 nap alatt végzünk el. 20 géppel hány nap alatt lennénk készen?

Az eredmény pontosan azonos volt az előbbivel.

A kisérletek eredménye azt illusztrálja, hogy az aránypár formális megoldó eljárása elrejti a gyermek elől a példa tartalmát, s ez az eredmény rovására megy. Hogy az ilyen szöveges feladatok megoldásánál az aránypár mellőzhető, azt élesen bizonyitja az a két tanuló, aki a hiba felfedezése után nem látott más javitási utat, mint elvetni a sablont, s egyszerü logikus utat keresni. A többség azonban uj sablont csinált magának a tapasztalatából, s jelentős volt azoknak a száma is, akik elakadásukból helytelen következtetést vontak le, s az eljárás jóságába vetett hitük rendült meg. Érdekes a 2. kisérlet eredménye: a tárgy közel- vagy távoleső volta nem befolyásolta az eredményt.

A hiba javitásánál nyilvánvalóan az az első lépés, hogy az eredmény képtelen voltára hivatkozva megindítsuk a gyermek önálló gondolkodását. Ha ez nem járható, akkor a feladat tartalmi elemzése vezet célhoz, ami sajnos hosszabb eljárás. Az 1966-ban életbelépő uj tankönyvekben a VIII. osztályos anyagnál az egyemletek körében kerül tárgyalásra az aránypár. Vizsgálandó feladat, hogy a tanitás időpontjának egy évvel való hátracsusztatása a hiba csökkenését esetleg megszüntetését fogja-e eredményezni.

A hamis analógián alapuló hibák tárgyalásának befejezésekor szükségesnek tartom hangsulyozni, hogy az ilyen hibák nem korlátozódnak az általános iskolai tanulókra. Még a felsőoktatásban is tapasztalható, hogy a hallgatók - leendő matematikatanárok - a probléma elemzése nélkül analóg szituáció helytelen feltételezése alapján tesznek bizonyos megállapitásokat, jutnak helytelen eredményhez. Például a harmadrendü determinánsnál megismert Sarrus-szabályt automatikusan át akarják vinni a negyedrendü determinánsokra is, vagy a véges soroknál tanultakat a konvergencia vizsgálata nélkül átviszik a végtelen sorokra is.

2./ Formalizmuson alapuló hibák

A gondolkodási hibák másik jelentős csoportja a formalizmuson alapuló hibáké. A matematika fogalmait, problémáit, eredményeit már a kezdeti fokon is matematikai jelekkel, formákkal rögzitjük. Ezekkel a jelekkel bizonyos eljárásokat végzünk - pl. a müveleti mechanizmusokat - s ezek az eljárások előbb jártassággá, majd készségekké válnak. Ilyenkor gyakori eset, hogy az eljárások, jelek mögötti tartalom a tudatban elsüllyed, feledésbe merül, s a forma önálló életet kezd: dolgozunk a jelekkel, müveleteket végzünk, eredményeket érünk el, s gyakran kiderül, hogy a szavak mögött nincs tartalom, üres formalizmus az, amit csinálunk. Ilyenkor tapasztaljuk azt, hogy aki formalista módon gondolkodik, az a megértés helyett az emlékezetre támaszkodik, mindenütt sablonokat keres, a matematikát szabálygyüjteménynek tekinti, a valósággal való összefüggését nem látja.

A felszabadulás után a magyar matematikatanitásban szinte vezető szerepet vitt a formalizmus elleni küzdelem. Erről szóltak a továbbképzési előadások, ezt tartották elsősorban szem előtt a Tantervek szerkesztői és a tankönyvek irói. Egyes - főleg konzervativ beállitottságu - pedagógusok köréből gyakran hangzott el a panasz, hogy "tulzásba viszik a formalizmus elleni harcot". Azt értették ezen, hogy elmarad lassacskán a müveletek alapos begyakorlása, a készségek kialakitása, elszáll a szerzett ismeret a tanulók tudatából. Ez a felfogás azt sugallta, hogy van a formalizmus elleni harcnak egy szakasza, amikor a harc már káros, uj hibára vezet. Ez a felfogás téves. A formalizmust, mint minden hibát, teljesen ki kell küszöbölni. Ha valaki a készségek fejlesztését elhanyagolja, az más hiba, ha a szilárdság el-vét figyelmen kivül hagyja, akkor vétkezett az egyik oktatási alapelv ellen, nem pedig a formalizmus ellen harcolt. Cser Andor /12/ azt irja, hogy a formalizmus kérdésében főleg a machisták "gondolattakarékossági elve" a "Denkökonomie" elleni küzdelemről van szó. A mi feladatunk nem az arany középut keresése, hanem a hiba teljes, gyökeres kiküszöbölése.

Gyakran tapasztaljuk azt is, hogy a forma még ki sem alakult eléggé, már eltünik mögüle a tartalom, elnyomja a forma. Ez főleg azokban az esetekben fordul elő, amikor uj fogalommal dolgozunk, s az még nem alakult ki elég világosan. Leggyakrabban tanári hibával állunk itt szemben. Főleg az algebrai jelölés bevezetésekor találkozunk gyakran ilyen hibával: az absztrakt jelölés bevezetése együttjár az absztrakt- konkrét közötti ut megszakadásával. Kellő gondossággal, a hibák ismeretében azonban teljes eredményt érhetünk el, a konkrét és az absztrakt kapcsolata ujból helyreáll, s a hiba megszünik. Ha valahol, itt nagyon fontos a hibák ismerete, mert ha valaki egyszerüen a gyermek butaságának, lustaságának tulajdonitja a hibákat, akkor könnyen beleesik abba a helytelen nézetbe, hogy a matematikához különleges, "matematikus" agyvelő kell már a kezdet kezdetétől fogva.

A formalizmust általában tágabban értelmezik, mint én e tanulmányban teszem, rendszerint beleértik a megszokást, a hamis analógiát és bizonyos előismeretek hiányát is. Tekintettel arra a törekvésemre, hogy a hibákat differenciáltan kezeljem, a formalizmus fogalmát a fentiekre leszükitve értelmezem, s a többieket más helyen tárgyalom. Természetesen a leggondosabb körülhatárolás sem változtat azon, hogy a hibaforrások együttesen hatnak, s az okok szerinti csoportositás itt sem von éles határokat.

11. hiba.

Már az alsó tagozatban is tapasztaljuk, teljes mértékben azonban az V. osztályban látjuk, hogy az u.n. "vizszintes" összeadás sokkal nehezebben megy a gyermekeknek, mint a "függőleges". Nyilvánvalóan arról van itt szó, hogy az összeadás megszokott formája támogatja a tanulót abban, hogy azonos helyiértékü számokat adjon össze, s mikor a más formában felirt feladatnál ez a támogatás megszünik, mindazok a tanulók hibázni fognak, akik nem tudatosan az azonos helyiértékü számok összeadására törekedtek, hanem megelégedtek a forma támogatásának kihasználásával.

Elsősorban a hiba számszerü felmérését tekintettem feladatomnak, első két kisérletem ennek a szolgálatában állott.

1. kisérlet.

A gyermekek a következő két feladat megoldását végezték el:

$$\begin{array}{r} 164 + \\ 49 \\ \underline{1149} \end{array} \qquad 173 + 39 + 1246 =$$

A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
Függőleges összeadás	49 tanuló /87,5 %/	7 tanuló /12,5%/
Vizszintes összeadás	39 tanuló /70 %/	17 tanuló /30 %/

2. kisérlet.

Az előző kisérletet annyiban módositottam, hogy a feladatokat természetes számok helyett tizedestörtekkel adtam fel.

$$\begin{array}{r} 15,3 + \\ 2,83 \\ \underline{5,2} \end{array} \qquad 14,7 + 3,47 + 4,8 =$$

A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
Függőleges összeadás	48 tanuló /86 %/	8 tanuló /14%/
Vizszintes összeadás	44 tanuló /79 %/	12 tanuló /21%/

A két kisérlet eredményének összehasonlitásánál az első szembetünő tapasztalat az, hogy a hibák számának felszökése a tizedestörteknél kisebb, mint a természetes számoknál. A vizszintes összeadás, tehát a forma támogatásának kiesése a természetes számoknál majdnem két és félszeresére emelte a hibázók számát, a tizedestörteknél pedig csak másfélszeresére. Ennek a magyarázatát abban látom, hogy a tizedestörteknél a kiesett formai tényező helyett uj formai tényező jelent meg: a tizedesvonás, s ennek hatására a hibázók számának emelkedése nem volt olyan nagy. A tizedesvonás ugyanis ráirányitotta megoldás közben a tanulók figyelmét a helyiértékre.

A függőleges összeadásnál a hibázók valamennyien számolástechnikai hibát vétettek vagy rosszul másolták le a feladatot. A vizszintes összeadásnál az uj hibázók szinte mindnyájan helyiértékhibát vétettek, néhány esetben a számolástechnikai és helyiértékhibák együttesen jelentkeztek.

Következő két kisérletemmel a helyiértékek elemzésével próbáltam a hibát javitani. Óraeleji fejszámolásban néhány természetes számot illetve tizedestörtet elemeztünk helyiérték szerint és raktunk össze helyiértékek alapján. Az analizis-szintézis alkalmazásában nem ragaszkodtunk a nagysági sorrendhez, hanem pl. ilyen feladatot is oldottunk meg: Melyik az a szám, amely 3 százasból, 2 egyesből, 4 tizedből és 5 tizesből áll? Ezzel reméltem elérni a hiba megszünését illetve a hibázók számának csökkentését.

3. kisérlet.

Természetes számokkal végeztem el. /L.1.kisérlet/

Eredmény:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
Függőleges összeadás	55 tanuló /90 %/	6 tanuló /10 %/
Vizszintes összeadás	44 tanuló /72 %/	17 tanuló /28 %/

4. kisérlet.

Tizedestörtekkel végeztem el./L.2.kisérlet./ Eredmény:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
Függőleges összeadás	59 tanuló /95 %/	3 tanuló / 5%/
Vizszintes összeadás	57 tanuló /92 %/	5 tanuló / 8%/

A két kisérlet azt igazolja, hogy a helyi értékekben való bizonytalankodás, feledés elősegiti ugyan a hibát, de nem döntő tényező, s a forma támogatásának kiesésére nem elegendő a helyiértékek alapján való elemzés óraeleji felujitása. A százalékos arány ugyan jobb, mint az eredeti kisérletnél, ez a különbség azonban már a függőleges összeadásnál is mutatkozik, igy vagy a kisérletezésnél szereplő gyermekek tudása volt a 3. és 4. kisérletnél nagyobb, vagy pedig a helyiértékek elemzésének előnyös hatása nem a függőleges összeadásról a vizszintes összadásra való áttérésnél hatott.

E kisérletek elvégzése után végeztük Geréb Györggyel közös tömegkisérleteinket, s javasoltam, hogy a becslés és a mintapélda hatását V. ill. VI. osztályban ezen a hibán próbáljuk ki. A két tömegkisérlet eredménye:

5.kisérlet.

A tanulók a következő két feladatot kapták:

```
 717 +
2129
  94       836+4317+56+3208+474 =
3136
 303
```

Az első kisérlethez képest annyit változtattunk, hogy az összeadandók számát felemeltük, s 0 is került egy-egy helyen a feladatba. A tanulókat minden iskolában 3 csoportra osztottuk. Az A. csoport tanulói minden külön utasitás és segitség nélkül kapták a feladatot. A B. csoportnál megállapitottuk becslés alapján, hogy a vizszintes összeadás eredménye 8000 és 9000 között lesz. A C. csoport tanulói előtt egy mintapéldát csináltunk a vizszintes összeadásra: 642+4834+79+1484+624=?, majd ezután megbecsültük, hogy a megoldandó vizszintes összeadás eredménye 8000 és 9000 között lesz, s csak azután oldották meg a tanulók a feladatot.

A kisérlet eredménye:

	A. csoport	B.csoport.	C.csoport
Függőleges összeadás:			
Helyes megoldás	235 tanuló/70%/	256 tanuló/74%/	249 tanuló/74%/
Helyiérték hiba	13 tanuló/ 4%/	4 tanuló/ 1 %/	2 tanuló/1%/
Más hiba /számolástechnikai,másolás/	89 tanuló/26%/	88 tanuló/25%/	87 tanuló/25%/
Vizszintes összeadás:			
Helyes megoldás	135 tanuló/40%/	183 tanuló/53%/	204 tanuló/60%/
Helyiérték hiba	22 tanuló/6%/	16 tanuló/5 %/	16 tanuló/5%/
Más hiba/számolástechnikai,másolás/	186 tanuló/54%/	149 tanuló/42%/	118 tanuló/35%/

6. kisérlet.

A tanulók a következő két feladatot kapták:

$$\begin{array}{r} 37,7 \; + \\ 2,24 \\ 584,9 \\ 1,6 \\ \underline{64,32} \end{array} \qquad 32,6+4,41+637,8+3,8+72,52 =$$

A második kisérlethez képest itt csak az összeadandók számának a megemelése a változtatás, a 0 beirását mellőztük, mert nem akartuk a helyi értékekkel kapcsolatos ismereteiket próbára tenni, hiszen teljesen ismeretlen gyermekekről volt szó. A tanulókat az előző kisérlethez hasonlóan három csoportra osztottuk, s a csoportokat az előzővel azonosan kezeltük. Az A. csoport semmi segitséget sem kapott, a B. csoportnál megbecsültük, hogy a vizszintes összeadás eredménye 700 és 800 között lesz, a C. csoporttal megoldottunk egy mintapéldát:

41,6 + 3,52 + 476,8 + 2,7 + 82,66 = ?,

azután megbecsültük, hogy az elvégzendő vizszintes összeadás eredménye 700 és 800 között lesz, s csak ezután került sor a feladat megoldására.

A kisérlet eredménye:

	A.csoport	B.csoport	C.csoport
Függőleges összeadás:			
Helyes megoldás	189 tanuló/64%/	220 tanuló/69%/	210 tanuló/68%/
Helyiérték hiba	12 tanuló/ 4%/	10 tanuló /3%/	4 tanuló/1%/
Más hiba/számolástechnikai,másolás/	96 tanuló/32%/	99 tanuló/28%/	100 tanuló/31%/
Vizszintes összeadás:			
Helyes megoldás	82 tanuló/28%/	104ttanuló/33%/	114 tanuló/36%/
Helyiérték hiba	78 tanuló/26%/	58 tanuló/18%/	56 tanuló/18%/
Más hiba /számolástechnika,másolás/	137 tanuló/46%/	157 tanuló/49%/	144 tanuló/46%/

A két utolsó kisérlet eredményét összehasonlitva az előző kisérletekkel első megállapitásunk a hibázó tanulók számának nagysága. Lényegesen több tanuló hibázott a tömegkisérleteknél, mint az egyes osztályokkal külön végrehajtott kisérleteknél. A hibáknak azonban - főleg a függőleges összeadásoknál - a zöme nem helyiértékhiba volt, hanem számolástechnikai hiba. A több hiba nem egy tényezővel magyarázható: valószinü az osztályok gyengébb nivója, több iskolában még soha sem csináltak vizszintes összeadást, a gyermekek ismeretlenek voltak, a kisérleteket végrehajtó főiskolai hallgatók tapasztalatlanabbak, mint én vagy a többi kisérletet végrehajtó rutinos tanár. A feladat numerikusan nehezebb volt, ezenkivül a kisérletre rendelkezésre álló rövid idő és szokatlan szituáció is befolyásolta a gyermekeket.

A tömegkisérlet eredményének százalékos vizsgálata legtöbb ponton ugyanolyan vagy hasonló képet mutat, mint az osztálykisérletek. A számolástechnikai hibák számának emelkedése a függőlegesről a vizszintesre való áttérésnél közelitőleg olyan arányu, mint az osztálykisérleteknél volt,mind a természetes számoknál, mind a tizedestörteknél. Az egyetlen komoly eltérés, hogy mig az osztálykisérleteknél a tizedesvonás támaszt nyujtott a gyermeknek, s a helyiértékhibák száma kisebb volt a tizedestörteknél, mint a természetes számoknál, itt a tizedestörteknél nagyobb volt a helyiértékhibát vétők százalékaránya. Ez az eredmény cáfolni látszik az előző kisérletnél tett megállapitásomat, ha azonban a hibákat részletesebben elemezzük, mást látunk. A hibázók legtöbbje zavarában rossz helyre tette a tizedesvonást, sőt gyakori volt az olyan szám is, amelyben két tizedesvonást találtunk bizonyságául annak, hogy a tanuló először a feladat leirásakor tett ki tizedesvonást, majd - miután tapasztalatlanságában elemzés nélkül fogott hozzá a vizszintes összeadáshoz, pótlólag beirt mégegy tizedesvonást. Sok hibázónál keveredett a helyiértékhiba számolástechnikai hibával. Mindenesetre a tömegkisérlet után szükségesnek érzem előző kisérleteimet megismételni /1. és 2. kisérlet/ az eredmény ellenőrzése céljából.

A becslés illetve a mintapélda kapcsolatát, javitó hatását illetően szinte teljesen azonos a 7. hibánál tapasztaltakkal. Némelyik osztályban itt is rosszabb volt az eredmény akkor, amikor becslés előtt mintapéldát is kaptak a gyermekek /C.csoport/, mint akkor, ha csak megbecsültük a várható eredményt /B.csoport/, /a Ranschburg féle homogén gátlás tehát itt is fellépett/. Általában azonban a B. csoportnál a C. csoport eredménye valamivel jobb volt.

Összefoglalva: a legsulyosabb hiba az, hogy a tanárok jelentős része nem ad feladatot, amelyben az összeadást "vizszintesen" kellene elvégezni, igy a gyermek az uj helyzetben zavarba jön, s megdöbbentő százalékarányra szökik fel a hibák - ezen belül a számitástechnikai hibák is - száma. A javitásul kipróbált elemzés, becslés és mintapélda beváltak, de javitó hatásuk nem elég erős, s együttes alkalmazásuk esetén gátlás fellépésével is számolni kell. A legfontosabb feladatunk tehát a "vizszintes" összeadás következetes gyakorlása,amit a matematika mindennapos gyakorlati alkalmazása és a továbbtanulás egyaránt megkövetel.

12. hiba.

Nem sok tanulónál, de szinte minden évben előfordul a többjegyü számokkal való osztásnál a következő hiba:

Helyes eljárás:	Hibás eljárás:
209496:348=602 00696 000	209496:348=62 00696 000

A hiba oka a helyiérték nem tudatos volta. Amikor a részletmaradékban a 6 mellé odairja a gyermek a 9-et, s megállapitja, hogy a 69-ben a 348 nincs meg egyszer sem, automatikusan melléirja a 6 egyest, s nem gondol arra, hogy a hányadosban a tizesek helyére odairja a 0-t, hiszen továbbhaladt az egyesekre. A hiba létrejöttét egy nyelvi ok is elősegiti: a gyermek nem azt mondja, hogy 69-ben a 348 nullaszor van meg, hanem azt, hogy nincs meg, s ehhez kapcsolódik a gondolata, hogy a hányadosba nem ir semmit.

A hibával kapcsolatban két kisérletet végeztem.

1.kisérlet.

Két osztályban kommentár nélkül feladtam a tanulóknak a fenti feladatot. Eredmény:

Helyes megoldás...........58 tanuló / 94 %/

Hibás megoldás............ 4 tanuló / 6 %/

Más osztályokban végzett kisérleteim - amelyekről feljegyzéseket nem készitettem - ennél valamivel, de nem lényegesen rosszabb eredményre vezettek. A hiba tehát nem terjed ki sok tanulóra. Második kisérletemet az itt hibázó 4 tanulóval végeztem.

2. kisérlet.

Az előző kisérletnél hibázó 4 tanuló a következő feladatot kapta:

57646:82= ? A helyes eredmény 703, tehát az előző hibát elkövethetik. Két tanulóval előzőleg megbeszéltük,hogy a hányados 500-nál nagyobb lesz, mert 500.80=40000, tehát jóval 57646 alatt van. Ezután kezdtek hozzá a feladathoz. Mindkettő hibázott, azonban a 73 hányadost nem fogadták el, gondolkodni kezdtek, s segitségem nélkül, önállóan javitották.

A másik két tanulónál megköveteltem, hogy mondják ki osztás közben a helyiértéket. /576 százasban a 82 megvan 7-szer. Ez 7 százas, s.i.t./ Zavarta őket, elhagyták, rájuk kellett szólnom, hogy mondják a helyiértéket. A hibát az egyik tanuló nem követte el, a másik elkövette, s a rossz eredményt elfogadta. Elemeztettem vele a hányadost, erre javitotta a hibát. Közben azonban mindkét tanuló számolástechnikai hibákat vétett.

A vizsgált tanulók kis száma miatt a következtetés ugyan bizonytalan eredményt ad, hiszen egyéni képességbeli különbségek is közbeszólhattak, de a kisérlet eredménye határozottan a becslést minősiti jobb eljárásnak. Egyszerübb, jobban nevel önállóságra, kevesebb időt vesz igénybe. A másik eljárás azzal válik nehézkessé, hogy uj, szokatlan elem belekeverésével megzavarja a tanulót, s ez eredményezi pl. a számolástechnikai hibákat.

13. hiba.

Ugyancsak az V. osztályban a többjegyü osztóval való osztásnál valamivel több tanulónál és minden évben következetesen előforduló hiba a következő:

Helyes eljárás:	Hibás eljárás:
47736:78=612 93 156 000	47736:78=5112 87 93 156 000

A hiba közvetlen oka a rossz becslés. A gyermek igy gondolkodik: 477 kevesebb 480-nál, 78 viszont majdnem 80, 480:80=6, itt azonban kisebb osztandónk van, tehát csak 5-ször van meg benne. Mikor megkapja a 87 részmaradékot, nem azt veszi észre, hogy becslése helytelen volt, nem látja a helyiértéket, hanem automatikusan továbboszt, s elköveti a hibát.

Abban, hogy a forma elnyomja a tartalmat, itt segitett az is, hogy a gyermek becslésekben tapasztalatlan. Az egyjegyü osztóval való osztásnál a becslés könnyebb, hiszen a készségi fokon ismert szorzótábla segit, itt azonban a becslés komplikáltabb feladat. Éppen ezért a hiba megelőzése majdnem lehetetlen, hiszen a becslés begyakorlása előre nem oldható meg a kötött iskolai óraszám mellett. Javitásával kapcsolatban az a probléma, hogy az eredmény előzetes becslése javit-e jobban, vagy az óra bevezető részében a helyiértékekről tanultak felfrissitése?

1. kisérlet.

Két osztályban minden kommentár nélkül adtam fel a fenti feladatot önálló megoldásra. Az eredmény:

Helyes megoldás...........................	51 tanuló /80%/
Hibázott, számolás közben helyesbitett.....	6 tanuló /9%/
Eljutott a hibás eredményig, nem fogadta el, átnézte munkáját és javitott...............	1 tanuló /2%/
Hibás eredményt kapott, elfogadta..........	6 tanuló /9%/

2. kisérlet.

Az előző kisérletben a hibát elkövető és a hibás eredményt elfogadó 6 tanulóval végeztem. Hasonló uj példát kaptak, s abban ismét elkövethették ugyanezt a hibát.

3 tanulónál a második példa megoldása előtt nagyságrendileg megbecsültük a várható eredményt. /A hányados 100-nál nagyobb lesz, 1000-nél kisebb./ Egy tanuló nem követte el ujból a hibát, egy elkövette, de még számolás közben helyesbitett, egy eljutott a hibás eredményig, s mivel a becsléssel nem egyezett, átnézte a számitását, helyesbitett.

A másik három tanulóval a második példa számadatait elemeztük helyiértékek szerint, s csak azután láttak munkához. Egy tanuló hibázott, s számolás közben helyesbitett, 2 tanuló azonban ujból elkövette a hibát, s elfogadta a hibás eredményt.

Mint az előző hibánál, itt is kevés tanulót vizsgáltam meg, általános következtetés levonása tehát nehéz. Az eredmény azonban határozottan a becslést minősiti célravezetőbb eljárásnak. Mindenesetre mivel a helyiértékrendszer felujitása az óra előkészitő részében megtörténhet, nem látszik valószinünek, hogy együttes alkalmazásuk bármi gátlást hozhatna.

14. hiba.

Lényegesen megneheziti a pedagógus helyzetét, ha a 12. és a 13. hiba együttesen jelentkezik a többjegyü osztóval való osztásnál egyetlen példán belül.

Helyes eljárás:

```
44092:73=604
   292
   000
```

Hibás eljárás:

```
44092:73=514
 75
  292
  000
```

Az okot keresni nyilvánvalóan felesleges, azonos az előzőekkel. A baj az, hogy az előző hibák javitásánál bevált becslés itt használhatatlan, hiszen a két hiba nagyságrendben kompenzálja egymást, igy a hibás eredmény és a helyes eredmény között nincs akkora különbség, hogy az becsléssel könnyen észlelhető lenne.

A tanár számára - ha ebbe a helyzetbe kerül - az egyetlen ut a helyiértékek alapján való elemzés. Ez azonban hosszas, fárasztó, igy a számolástechnikai hibák számának emelkedése várható. Célszerübb tehát a hosszas elemzést mellőzni, egyszerüen megmutatni, hogy az eredmény rossz, s az itt együttesen jelentkező két hibát külön külön egymástól függetlenül javitani.

15. hiba.

A számtanórákon arra szoktatjuk a gyermekeket, hogy a lehetséges ésszerüsitési alkalmakat mindig ismerjék fel és használják ki. Az V. osztályban a többjegyü osztóval való osztáskor egy ilyen ésszerüsités alkalmával a következő tipikus hibával találkozunk:

```
3240:170= 342: 17 = 19
          154
            1
```

3240-ben a 170 tizenkilencszer van meg, marad 1. /nem látja, hogy a maradék 1 tizes/

A hiba magyarázata egyszerü. A gyermek ténylegesen a 324:17 osztást végzi el, s a maradék meghatározását a megszokott módon ehhez az osztáshoz köti. A hiba gyakran fordul elő és sajnos gyakran siklanak el a pedagógusok javitás nélkül mellette, mivel jelentéktelennek minősitik. Előfordulását még gyakoribbá teszi az a tény, hogy iskoláinkban általában kevesebbet gyakoroltatják a maradékos osztást, mint a maradék nélkülit.

Számszerü felmérést nehéz volna csinálni, hiszen a müvelet elvégzése alkalmával a gyermek nem irja oda a maradék mellé, hogy mit ért alatta, Ha pedig odairatnánk vele, ez a gyermek figyelmét a maradékra irányitaná, igy a kisérlet eredménye nem a spontán hibázók számát tükrözné. Amikor azonban felel a gyermek, kimondja a maradékot szóban is, és ott elég gyakran tapasztaljuk ezt a hibát. Tapasztalataimat a hibával kapcsolatban a következőkben foglalhatom össze:

1./ A hiba gyakrabban jelentkezik akkor, ha a gyermek nem elégszik meg azzal, hogy az osztandó és az osztó végéről lehuzza a 0-t /324$\cancel{0}$:17$\cancel{0}$ /, hanem ujból leirja azokat. /L.fenn./

2./ A hiba tényére rájön a gyermek akkor, ha elvégeztetem vele a próbát /osztó, hányados + maradék/, a hiba okára azonban nem. Legtöbb esetben számolástechnikai hibára gyanakszik, hiszen "az eredmény majdnem jó".

3./ Az eredmény előzetes becslése itt nem segit, hiszen a maradék nem változtat nagyságrendileg az eredményen.

4./ A hibázók száma komoly mértékben emelkedik akkor, amikor a tizedestörttel való osztásnál rendszerré válik, hogy az osztandót és az osztót 10 valamelyik hatványával szorozzuk.

5./ A hiba akkor is előfordul, ha a tanár sablonoktól mentesen, erősen gondolkodtatva tanit. Természetesen ritkábban, de nem elhanyagolható mennyiségben. Pl. 35:8,5= 70:17 = 4
2

Nehezen felmérhető, nehezen javitható és semmiképpen meg nem előzhető hibával állunk szemben, ezt mutatja az utoljára leirt tapasztalat is, hiszen ezt a sablonmentes eljárást csak jó pedagógusok alkalmazzák. Mindenesetre a legcélszerübb javitási eljárásnak az bizonyult, hogy a gyermekkel a próba elvégzése árán észrevétetjük, hogy hibázott, utána azonban nem engedjük szabadjára, hanem figyelmét a helyiértékre irányitjuk, s elemzetéssel kerestetjük meg vele a hibát. Tekintettel a javitás nehézségeire itt mellőzzük azt, hogy szabadon keresse a gyermek a hiba okát, ami az önállóságra való nevelés szempontjából különösen hasznos volna. A legnagyobb hibát természetesen akkor követjük el, ha a hibát jelentéktelennek minősitve a javitást mellőzzük.

Van a hiba javitásával kapcsolatban egy eljárás, amelyet határozottan el kell itélnünk. A tizedestörttel való osztásnál a gyermek elköveti a következő hibát:

38:1,2=
380:12 = 31,
20
8

38-ban az 1,2 megvan 31-szer, marad 8

A tanár a következőképpen válaszol: "Nem lehet jó, mert a próbánál törtet szoroztál, törtet kell szorzatul kapnod, s ha ahhoz egészet adsz, megint tört az eredmény."

Amikor ezt az okoskodást helytelennek minősitem elsősorban nem arra gondolok, hogy tulságosan absztrakt az ut egy konkrét hiba javitására, hanem arra, hogy maga az okoskodás téves. Tört szorzásakor kaphatunk egész számot is szorzatnak, akkor is, ha egész számmal szorozzuk /3,5 . 8 /,akkor is, ha törttel / 3,2 . 2,5 /. A gyermeket egyszerüen félrevezeti az ilyen elméletieskedő, nagyképü okoskodás, amely amellett az elvont fogalmazással is felesleges nehézséget jelent a gyermek számára.

16. hiba.

Mióta a tizedesvonást használjuk a tizedespont helyett, szokásos a nagyobb számok kimondását a számjegyek hármas csoportositásával és helykihagyással megkönnyiteni. Az ilyen hármas csoportositás már az egyjegyü szorzóval való szorzásnál is komoly zavart okozhat, többjegyü szorzóval való szorzásnál pedig már határozott hibaforrás.

```
 14 672 . 34
422016
  562688
4782848
```

A hiba javitható ugyan az eredmény előzetes becslésével is, helyesebb azonban, ha a számok leirásánál csak a szövegben engedjük meg a helykihagyást, a müveletek végzésekor kifejezetten megtiltjuk. Ezt minden következmény nélkül megtehetjük, hiszen a hármas csoportositás és a helykihagyás a szám könnyebb kiolvasásán kivül semmi más célt nem szolgál.

Hasonló hibát okoz néha a tizedesvonás is, de kevesebbet, mert kis helyen elfér. Mikor még tizedespontot használtunk, a könnyebb kiolvasás kedvéért az ezresek után vonást tettünk, s ez kevesebb hibának volt a forrása, mint a helykihagyás.

17. hiba.

A tizedestörtek szorzásakor előfordul, hogy a gyermek elölről "vágja le" a tizedesjegyeket. Például:

Helyes eljárás:	Hibás eljárás:
34,2.4,7	34,2.4,7
1368	1368
2394	2394
160,74	16,074

A formalizmuson kivül a hiba okának tekinthető még a helyiértékek nem kielégitő ismerete, a szabály félreérthető fogalmazása is. /.. a szorzatból annyi tizedesjegyet vágok le, ahány tizedesjegy van összesen a két tényezőben./ Fentieknél is fontosabb azonban az a szemléleti hiba, amely nem tulajdonit komoly jelentőséget a tizedesvonás helye megállapitásának. Más esetekben is gyakran tapasztaljuk, hogy gondosan végzett müvelet után találomra odadobja valahova a gyermek a tizedesvonást, s a figyelmeztetésre azzal reagál, hogy ő jól számolt, "csak" a tizedesvonást tévesztette el.

A javitás módja elsősorban ennek a szemléletnek a megváltoztatásában van. Aláhuzzuk a tizedesvonás nagy jelentőségét azzal, hogy megmutatjuk, hogy egy számolástechnikai hiba gyakran csak filléres hibát jelentene pl. pénzelszámolásnál, a tizedesvonás eltévesztése viszont eredményezheti azt is, hogy ezer forint helyett tévedésből tizezret fizetünk ki. Ezzel a bemutatás megvan, a további eredmény következetesség kérdése. - Az adott konkrét hibánál a javitás legjobb módja az eredmény becslése. A szabály fogalmazása precizebbé nehezen tehető, a tulzott precizitás az érthetőség rovására menne, s különben is a szabálynak a szerepe jó tanitási módszer mellett általános iskolában csak annyi, hogy az értelemszerü megoldás támogatója legyen.

18. hiba.

Néhány évvel ezelőtt még szerepeltek a Tantervben az ugynevezett összetett százalékszámitási feladatok. Ezek tanitásánál fordult elő a következő tipushiba:

1./ A cipő árát ősszel leszállitották 20 %-kal, tavasszal ismét 20 %-kal. Hány százalékkal lett olcsóbb? - Válasz: 40 %-kal.

2./ Egy munkás márciusban 10 %-kal emelte a termelését, áprilisban 15 %-kal. Hány %-kal emelkedett a termelése? - Válasz: 25 %-kal.

A két hibát együtt tárgyalom, hiszen ellenkező irányban ugyan, de ugyanazzal a tévedéssel állunk szemben. A gyermek nem veszi észre, hogy másodszor a csökkentett ár csökkent illetve a megnövekedett termelés nőtt.

A hiba igen gyakran előfordult, s ha a tanár a feladatot nem szerencsésen fogalmazta meg, a hibázók száma még jobban megnőtt. /Pl. Összesen hány százalékkal lett olcsóbb a cipő? Összesen hány százalékkal emelkedett a termelés? Sugalmazta az összesen szó bekapcsolásával az összeadást./

A hiba megelőzése nem lehetséges, javitása azonban egyáltalában nem nehéz feladat. Elegendő a feladatot konkrétabb formában feladni: A cipő ára eredetileg 100 forint volt, az első leszállitás után 80 forint, a második után 64 forint. - Márciusban a termelés 1000 munkadarab helyett 1100, áprilisban 1100 helyett 1265 munkadarab volt. Igy könnyen megállapitja a gyermek, hogy nem lehet egyszerűen összeadni a százaléklábakat.

Már a fenti konkretizáló eljárás teljesen beválik, mégis a helyesebb, ha a gyermek nagyobb önállósága érdekében alkalmazzuk ennél a hibánál az ugynevezett szokratikus eljárást. Az első példánál a válaszra, hogy a cipő 40 %-kal lett olcsóbb, egyszerüen megkérdezzük: "És ha öt árleszállitás volt?" "Akkor 100 %-kal lett olcsóbb!" "Értem, akkor már ingyen adják." A gyermek erre megdöbben, látja, hogy tévedett, gondolkodni kezd, s tanári segitség nélkül kijavitja a saját hibáját - legtöbb esetben a fenti konkretizálás önálló elvégzésével.

19. hiba.

Ugyancsak az összetett százalékszámitásnál fordult elő a következő hiba. - Egy munkás 50 %-kal emelte a munkateljesitményét. Hány %-kal csökkent az egy munkadarab előállitására forditott munkaidő? - Válasz: 50 %-kal.

Az ilyen tipusu feladat a legnehezebb azok közül, amelyeket az összetett százalékszámitás során az általános iskolában a gyermek kapott, elsősorban az elvont fogalmazás miatt. Éppen ezért semmi különös sincs abban, hogy az előbbi hibát sok gyermek követi el, megelőzni nem lehet, javitása viszont egyszerü, hasonlóan az előbbi hibához. Alkalmazhatjuk azt is, hogy konkrétabbé tesszük a feladatot. /A teljesitmény 80 munkadarabról 120 munkadarabra emelkedett. 8 órából a régi teljesitmény mellett 6 perc, az uj mellett 4 perc jutott egy munkadarabra. Az idő $33\frac{1}{3}$ %-kal csökkent./ Kitünően alkalmazható azonban itt is a szokratikus eljárás. "És ha 100 %-kal emelte a munkateljesitményét?" "Akkor 100 %-kal csökkent a munkaidő." "Akkor tehát már dolgozni sem kell, mennek a gépek maguktól?" A gyermek belátja, hogy helytelen uton járt, s egyéni tudásától függ, hogy kell-e a javitáshoz tanári segitség.

Ezzel a hibával kapcsolatban szükségesnek tartom megjegyezni, hogy annak ellenére, hogy a példa nehéz, a hiba tehát várható, a tanár tehet valamit a hibák számának csökkentésére. Mielőtt ilyen elvont fogalmazásban ad százalékszámitási feladatokat, konkrétebb tartalommal is kell hasonló tipusu feladatokat adnia. Pl. a fenti példában megmondja, hogy mennyi volt a régi teljesitmény, mennyi volt a munkaidő. Ha az ilyen nehéz feladatokat kellő előkészités nélkül kapja a gyermek - már pedig a fokozatosság elvének ilyen megsértésével elég gyakran találkoztam - akkor a hiba tömeges bekövetkezése egészen természetes. Az absztrakció utja nemcsak akkor nehéz a gyermek számára, amikor az algebrai jelölést bevezetjük, hanem már a feladatok elvont fogalmazásánál is.

20. hiba.

A számelméleti alapismeretek tanitásánál tapasztaltam egy viszonylag ritka, de igen jellegzetes gondolkodási hibát. A gyermek megtanulta, hogy 2-vel azok a számok oszthatók, amelyeknek az utolsó jegye osztható 2-vel, 4-gyel azok, amelyeknek az utolsó két jegyéből alkotott szám osztható 4-gyel, 8-cal azok, amelyeknek az utolsó 3 jegyéből alkotott szám osztható 8-cal. Ezután kerül sor a 9-cel és 3-mal való oszthatóság szabályára. A tanár szemléletesen bemutatja, hogy azok a számok oszthatók 9-cel illetve 3-mal, amelyeknél a számjegyek összege osztható 9-cel illetve 3-mal. A legszemléletesebb bemutatása mellett is érheti az a meglepetés, hogy a gyermek a 9-cel való oszthatóság szabályát igy fogalmazza meg:

9-cel azok a számok oszthatók, amelyeknél a négy utolsó jegy összege osztható 9-cel.

A hiba nem gyakori, nem jár komoly következményekkel és nagyon könnyen javitható, hiszen egyetlen ellenpélda elég arra, hogy a gyermek meggyőződjék hibájáról. Érdemes azonban megfigyelni a kialakulását,mert az nagyon jellemző arra, hogyan csuszik vakvágányra egy tanuló gondolata, hogyan nyomul a forma a tartalom fölé már a kialakulása idején. A gyermek gyors egymásutánban három szabályt kapott. Az elsőben az utolsó jegy, másodikban az utolsó két jegy, a harmadikban az utolsó három jegy vizsgálata volt szükséges. A negyedik szabálynál, amikor senki sem mondja neki, hogy az utolsó négy jegyet kell vizsgálnia, spontán erre a négy jegyre koncentrálja a figyelmét, hiszen már az óra előtt elhatározta, hogy az utolsó négy jegyet fogja figyelni, ugyis az következik. A szabály, a sablon önálló, tartalmat elnyomó élete már a kialakulásakor megkezdődik.

Mint emlitettem, a hiba javitása nem nehéz. Vigyázzunk azonban, hogy a 9-cel és a 3-mal való oszthatóság szabályát ne négyjegyü vagy kisebb számon illusztráljuk csupán, mert azzal a hiba kialakulását segitjük elő.

Nagyon sok hiba van még a fentieken kivül, amit a köznapi szóhasználat formalista hibának nevez. Ezeket én külön fejezetben tárgyalom a differenciáltabb tárgyalás érdekében. Néhány köztük ide kivánkozna, elsősorban az egyenletek megoldásánál előforduló hibák némelyike. / 35. - 40. hibák/ Hogy mégis a fogalom tisztázatlan voltánál levő hibák között tárgyalom annak az az oka, hogy legalább olyan joggal tárgyalhatók ott is, s az algebrai jelöléssel és az egyenletekkel kapcsolatos gondolkodási hibák egy csoportban való tárgyalása célszerünek látszik a hibák gyakorisága és sok közös vonása miatt.

E hibacsoport befejezésekor is szükségesnek tartom hangsulyozni, hogy a hibás gondolkodásnak ez a változata sem korlátózódik az általános iskolára. Sőt a hibák száma a középiskolában csak szaporodik a képletek és szabályok tucatjainak megtanulásával. Néhány illusztráló példa azokból, amelyeket Beke Manó /6/ gyüjtött össze középiskolás tanulóknál a tartalom eltünése és a forma uralmának bemutatására.

$$/ a + b /^2 = a^2+b^2 \qquad / a - b /^2 = a^2+b^2$$

$$/ a + b / . / c + d / = ac+bd \qquad / a b /. c = ac . bc$$

$$X^m . x^n = x^{mn} \qquad \sin /\alpha+\beta/ = \sin\alpha + \sin\beta$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = 1 \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin$$

Ilyen gyümölcsöket terem a formalizmus a középiskolában, de a hibák alapjai már az általános iskolában kifejlődnek. A mi feladatunk nem annak a keresése, hogy a formalizmus hibáiért mennyiben felelős az általános és a középiskola, hanem az, hogy a formalizmus hibái ellen teljes erőből küzdjünk általános és középiskolában egyaránt.

3. Megszokáson alapuló hibák.

Az élet minden területén nagy sulya van a megszokásnak. "Milliók és tizmilliók szokásainak ereje - a legrettenetesebb erő." - ennek a lenini mondásnak az igazságát lépten-nyomon, az életben mindenütt érezzük. A számtanórákon is tapasztaljuk, hogy a gyermek olyan dolgokat, jelenségeket is megfigyel, amelyeket nem tanitunk neki, lényegesnek vél lényegtelen dolgokat, helyesnek gondol olyan jelenségeket, amelyeket ő maga állapitott meg hamis következtetéssel, de soha ki nem mondott, igy tanára előtt rejtve maradnak. Tapasztaljuk, hogy a gyermek egyes részekből zárt rendszert csinál, amelyet azután később, megszokásból és kényelemszeretetből elzár az ujonan tanult fogalmak elől. Ha ezeket a természetes jelenségeket a tanár módszertani hibái támogatják, a spontán fellépő nehézségek ugy felerősödnek, hogy helyenkint munkánk sikerét veszélyeztetik.

A megszokáson alapuló hibák megelőzése és javitása nehéz feladat. Ellentétben sok más hibával, itt nem segit a frappáns, ötletes megvilágitás, a rossz szokásról leszoktatni a gyermeket csak türelmes, fáradságos, lassu munkával lehet. A hibák ismeretének a jelentőségét ez csak növeli, hiszen önmagunkat is sok nehézségtől kiméljük meg, ha legalább csökkenteni tudjuk a hibák kialakulását és erejének megnövekedését.

21. hiba.

A gyermek az alsó tagozatban megszokja, hogy a szorzásnál a szorzat mindig nagyobb lesz, mint a tényezők, az osztásnál viszont a hányados mindig kisebb az osztandónál. Ezt természetesen nem tanitjuk neki, de mivel mindig természetes számokkal szoroz és oszt, éveken keresztül ezt látja. Semmi csodálkoznivalónk sincs tehát azon, hogy a szorzásban növelő, az osztásnak csökkentő müveletet lát. A felső tagozatban - akár közönséges akár tizedestört formájában találkozik vele - értetlenül, s gyakran ellenérzéssel áll a szorzás és osztás eredménye előtt.

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \qquad 6 : \frac{1}{2} = 12$$

$$6 \cdot 0{,}5 = 3 \qquad 6 : 0{,}5 = 12$$

Ez a bizonytalanság a legjobb tanári munka mellett is fellép. Nem kifogásolható tehát, ha a gyermek hangot ad kételyeinek, sőt az a nagy hiba, ha a gyermek hallgat, mert ez azt jelenti, hogy nem mer őszintén megnyilatkozni. Közvetlenül hibára általában nem vezet ez a bizonytalanság, bár ha párhuzamosan adunk hasonló adatokkal szorzási és osztási feladatot, előfordul, hogy felcseréli az eredményeket. Ugyanakkor azonban mégis komoly hibára vezet ez az el nem oszlatott bizonytalanság: a gyermeknek, aki a matematikát azonositja a saját matematikai ismereteivel, meginog a matematikai ismeretek megbizhatóságába vetett bizalma.

A hiba megelőzésére nem sokat tehetünk. Az egyetlen, hogy a természetes számokkal való szorzás idején igen erős hangsulylyal tanitjuk, hogy az 1-gyel való szorzásnak és a 0-val való szorzásnak mi az eredménye. Ezt feltétlenül meg kell tennünk, sőt hangsulyoznunk kell azt is, hogy ilyen esetekben a szorzat nem lesz nagyobb, mint a szorzandó volt, azonban túl sok reményt nem szabad füznünk ehhez a megelőzéshez. A gyermek ugyanis nemcsak a 0-val és a 1-gyel való szorzást nem érzi "igazi" szorzásnak, de még a 2-vel való szorzásnak sem látja sok értelmét, számára a szorzás a 3-as szorzónál kezdődik.

Ennek ellenére, legalább az önmagunk megnyugtatására, meg kell tennünk ezeket a megfigyeléseket, s hasonlókat a természetes számok osztásánál is.

A javitás első mozzanata a szemléltetés. Ez viszonylag gyors eredményre vezet, a gyermek hamar belátja, hogy 6 darab fél almából össze tudunk rakni 3 egész almát, vagy hogy 6 egész almából 12 félalmát tudunk elvenni. Igaz, hogy ennél a szemléltetésnél megmaradunk a szorzásnak mint sorozatos összeadásnak, az osztásnak, mint sorozatos kivonásnak értelmezése mellett, amit hamarosan el kell vetnünk, de e szemléltetés nélkül nem boldogulnánk. A törttel való szorzás és osztás értelmezése más probléma, amelyet külön fogok vizsgálni / 46.-47. hiba/, az ott használt Jeftusevszkij féle eljárás segitségünkre van e hiba kiküszöbölésében is. Nem szabad azonban elfeledkeznünk arról, hogy a szemléltetés és a nyomában fellépő megértés még nem elég ahhoz, hogy a gyermek teljesen elfogadja a számára szokatlan eredményeket, még hosszu, türelmes szoktatásra is van szükség.

Hasonló hiba tapasztalható a negativ számok bevezetése után is az összeadás és a kivonás müveletével kapcsolatban. Itt sulyosbitja a helyzetet az is, hogy a nagysági relációk tekintetében is zavarok vannak. /L. 3. hiba/ Ez a hiba azonban részint a gyermek magasabb kora, részint a 3. hiba kiküszöbölésére használt eljárások következtében a 3. hibával együtt szünik meg természetesen nem rövid idő alatt.

22. hiba.

Néha egyszerü feladatoknál is előfordul, leggyakrabban azonban összetett feladatnál tapasztaljuk, hogy a helyesen gondolkodó gyermek gondolatait rosszul rögziti füzetében matematikai jelekkel. Igy hibátlanul megkapja a helyes végeredményt, de közben elképesztő dolgokat ir le a füzetébe. Például:

$$3\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4} + 2\frac{2}{5} = 3 + 5 + 2 = 10\ \frac{10}{20} + \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{33}{20} = 1\frac{13}{20} \doteq 11\ \frac{13}{20}$$

A hiba órán is előfordul, de leggyakoribb előfordulási helye a házifeladat és a dolgozat, ugyanis ilyenkor a tanári ellenőrzés utólagos, a tanár nem tud menet közben közbeavatkozni. Még az is előfordul, hogy a hiba pirostintás aláhuzását reklamáció követi: az ő eredménye jó, a szomszédjának is ugyanannyi az eredménye, s az nincs aláhuzva.

A hibával kapcsolatban számszerü felmérést nem végeztem, kisérlet vagy gyüjtőmunka nem történt, de elég gyakori hibával állunk szemben. Az ok világos, a megelőzés illetve a javitás módja adott, kisérletre nem volt szükség.

A bekövetkezett hiba javitása nem nehéz, csak hosszadalmas, a megelőzés azonban sokkal egyszerübb. Nem szabad engedni, hogy a hiba kifejlődjék, s már a legegyszerübb lejegyzési hibánál / 24.3=60=12=72/ közbe kell lépnünk. Különös figyelemmel kell lennünk a maradékos osztásra, hiszen az nem igaz, hogy 30:7 = 4. Hozzá kell szoktatnunk a gyermekeket már az alsó tagozatban, hogy a megoldott példa menetét a megoldás után matematikai jelekkel rögziteni tudják. Például igy:

Vettem 3 kg 4 forintos almát és 5 forintért dinnyét. Mennyit fizettem? A gyermek kiszámitja, hogy 17 forintot, s azután leirja.

$$3.4 + 5 = 17$$

A leirás megkövetelésének nemcsak a fenti hiba kiküszöbölése a célja, hanem az egyenletek előkészitése is. Ugyanis csak egy kis módositás kell a szövegen, s már iskolában használható egyenletté válik a feladat.

Vettem 3 kg almát és 5 Ft-ért dinnyét. Fizettem 17 forintot. Mennyibe került az alma kilója?

$$3x + 5 = 17$$

Ha már elköveti a gyermek a hibát, a javitás módja a hibás részletek bemutatása. / Igaz-e, hogy $1 \frac{13}{20} = 11 \frac{13}{20}$?/. A javitásnak tartalmaznia kell annak elismerését, hogy a gyermek helyesen számolt, de le kell szögezni, hogy a leirás is fontos, nemcsak a számolás. Szükséges, hogy párhuzamosan bemutassuk a helyes leirást. Nagyon fontos, hogy ne fogadjuk el a hiba lekicsinylését, hiszen a hiba állandósulása a továbbtanulás akadálya.

Ennél a hibánál a tanár felelőssége igen nagy, főleg ha az sok gyermeknél fordul elő. Nem szabad a rossz szokást kialakülni engedni, mert a kialakulást megakadályozni sokkal könnyebb feladat, mint egy már beidegződött rossz szokást elhagyni.

23. hiba.

Az előjeles számok kivonásánál komoly gondot okoz a gyermeknek az az eset, amikor két negativ szám különbsége pozitiv szám. Például:

$$/-3/ - /-5/ = /+2/$$

A negativ számok szemléltetése iskoláinkban a pozitiv számmal ellentétes mennyiségként történik. Pozitiv számmal jelöljük a magasságot, készpénzt, meleget, ennek megfelelően negativ számmal a mélységet, adósságot, hideget. A gyermek nem érti a szemléletes bevezetés után, hogyan lehetséges, hogy adósságból adósságot vettem el, s mégis készpénzem maradt.

A probléma felbukkanása természetes, s igen nehéz azt megoldani. Nem okolható érte a tanár, hiszen szemléletes képet nyujtott arról, amit tanitott. A gyermek törekvése, hogy a kivonásnak szemléletes tartalmat akar adni, nemcsak természetes, hanem dicsérendő is, az a hiba, ha ez a törekvés hiányzik.

A hiba gyökere ott van, hogy a gyermek tudatában külön él a pozitiv szám, amellyel éveken át foglalkozott, s külön a negativ szám, amelyet most frissen ismert meg. A két halmaz nem olvadt egybe az egész számok halmazába, s a gyermek a negativ számokkal való müveleteket a negativ számok "belügyének" tekinti. Nem veszi észre, hogy eddig a kivonás nem volt korlátlanul elvégezhető, s most azzá vált, csak azt látja, hogy évek során szerzett tapasztalatként két pozitiv szám különbsége mindig pozitiv volt /esetleg 0./

A javitás módja tehát az, hogy a két halmazt olvasszuk egybe azzal, hogy a pozitiv számról alkotott eddigi fogalmunkat is módositsuk. A gyakorlatban ez az ugynevezett "vagyonmérleg" eljárással történik: 5 Ft-om nemcsak ugy lehet , hogy van a zsebemben 5 forint, hanem ugy is, hogy pl. 8 Ft készpénz mellett 3 Ft adósságom is van, 11 Ft készpénz mellett 6 Ft adósságom, s.i.t. Ha ezen a módon sokféleképen el tudja képzelni a gyermek a /-3/ forintot, 5 Ft készpénz és 8 Ft adósság összegének, 2 Ft készpénz és 5 Ft adósság összegének s.i.t. akkor nem lesz a számára szemléletellenes, hogy ha 2 Ft készpénz mellől elengedik az 5 Ft adósságot, akkor 2 Ft készpénzem marad.

24. hiba.

Az előbbi hibával mindenben azonos jellegü az a hiba, amikor a gyermek nem érti, hogyan lehet két negativ szám szorzata pozitiv szám. Itt is arról van szó, hogy a negativ számok szorzását a negativ számok "belügyének" tekinti, s nem érti, hogyan kerül oda a másik halmaz egy eleme szorzatként.

A matematika tanitásával foglalkozó szakembereknek régi problémája ez, amelyet teljesen megnyugtató módon eddig még nem sikerült megoldani. Éveken át az irányokkal, a számegyenesen való szemléltetéssel tanitottuk ezt az anyagot. A számegyenest vasuti sinnek tekintettük, amelyen az egyik irány a pozitiv számokat, a másik irány a negativ számokat jelentette. A vonat pozitiv vagy negativ irányban mozgott állandó sebességgel, amelyik az iránytól függően pozitiv vagy negativ volt. Az időt is előjellel láttuk el, a jövő volt a pozitiv, a mult a negativ, s igy mutattuk be, hogy a jelenleg 0 ponton álló negativ irányban haladó vonat a multban a pozitiv számok között volt.

Az eljárás szemléletesnek, de nagyon hosszadalmasnak bizonyult, legtöbbször azt eredményezte, hogy a gyermek ráunt a kérdésre, s boldogan fogadta el az egyszerü szabályt /egyenlő előjelek szorzata pozitiv,.../. Sok tanitási óránkba került, mig a gyermek nem meggyőzve, hanem elfáradva elfogadta az eredményt. Ez inditotta az OPI-ban dolgozó metodikusokat uj ut keresésére, amely ma is szerepel tankönyveinkben és iskolai gyakorlatunkban. Az uj eljárás a monotonitáson alapszik. A természetes számok szorzásából indul ki, az egyik tényező fokozatos csökkentésével eljut a 0-ig, megállapitja a szorzat csökkenésének szabályszerüségét, majd tovább csökkenti a 0 tényezőt, s vele együtt a szorzatot a negativ számok közé. Ezután pozitiv számmal szorozva negativ számot, hasonló eljárással jut el ismét a 0-ig, de a szorzat a negativ számoktól halad felfelé, s jut el két negativ szám szorzatával a pozitiv számok közé.

Az uj eljárás matematikai szempontból feltétlenül kifogásolható, hiszen több helyen önkényesen jár el, a kommutativitást is egy-két példán illusztrálva mondja ki, de a gyakorlatban az előbbinél jobban bevált. Mindenesetre a kérdés nem tekinthető lezártnak, a jelenleginél jobb eljárás kidolgozását kell, hogy feladatunknak tekintsük.

25. hiba.

Az előbbi két hibával rokon hibát vét a gyermek a tizedestörtek szorzásánál, amikor nem érti, hogyan lehet két tizedestört szorzata egész szám.

```
 22,5.2,4
450
 900
54,00
```

Előfordul ez a hiba a közönséges törteknél is, de leggyakrabban a tizedestörteknél találkozunk vele. Itt még azt is megteszi néha a gyermek, hogy a fenti példában elrontja az eredményt azzal, hogy a tizedesvonás áttételével 5,4-re alakitja át, vállalva inkább a szemmelláthatóan képtelen eredményt, mint a nagyságrendben megfelelő egész számot.

Itt is arról van szó, mint a negativ számoknál: az egész szám és a törtszám mint két különálló, egymástól szinte független fogalom él a gyermek tudatában, nincs meg köztük a kellő kapcsolat. Azt elfogadja, hogy egész szám és törtszám összege törtszám, vagy egész szám, hiszen vegyesen használta a két halmaz elemeit, de hogy két törtszám szorzata egész legyen, azt nehezen. Még a közönséges tört alakban esetleg, hiszen ott előfordult már, hogy az áltört egész számnak bizonyult, s az egyszerüsités nyomai ott vannak a papiron, de a tizedestörteknél ki sincs irva a nevező.

A hiba javitását elő kell késziteniink azzal, hogy a törtszámok összeadásánál / és kivonásánál / rendszeresen adunk olyan feladatokat, amelyeknél két törtszám összeget /különbsége/ egész szám. Itt elemezzük, hogy a törtrészek összeadása "véletlenül" egy egészet adott. A gyermek ott ezt szemléletesen belátja, s a törtek szorzásakor is könnyebben megérti, hogy a részszorzatok törtjeit összeadva egész számot kaphatunk. Mindenesetre használ az is, ha a törtszámok összeadásakor nem elégszünk meg csupán ilyen feladatok nyujtásával, hanem annak variálásával mélyebbé tesszük ezt az ismeretet. /Mennyit kell hozzáadni $1\frac{3}{5}$-höz, hogy egész szám legyen az összeg? Melyik számokból lesz egész szám, ha $\frac{1}{4}$ -et hozzáadunk? /

26. hiba.

Az előző hibáknál fellépő szemléleti tévedéssel állunk szemben gyakran a közönséges és tizedes törtek esetében is. A tizedestört alakban nem a törtszám olyan leirását látja, amely számolás közben technikai könnyitéseket jelent a számára, hanem egy külön fogalmat, amely talán van valami összefüggésben a közönséges törtekkel, de alapjában véve mégis más. Ezt a felfogását gyakran nyelvi szempontok és módszertani hibák támasztják alá. Még tankönyvben is előfordult egyidőben, hogy a tizedestörtet tizedesszámnak nevezték, azt sugalmazva, hogy itt nem törtről van szó. A 2. hibánál emlitettem, hogy sok pedagógus elnézi a gyermeknek azt a tévedését, hogy a tizedestörtnek nincs nevezője, nem ragaszkodik a nevező kimondásához, s ezzel az eddig emlitetteken kivül ennek a hibának is tápot ad. Gyakori eset, hogy a gyermek elvégzi az általános iskolát anélkül, hogy egyetlen olyan feladatot megoldott volna, amelynek adatai között vegyesen szerepelnek közönséges és tizedestörtek. Azt is tapasztaljuk, hogy a számitás végeredményeként kapott közönséges törtet átirják tizedestört alakra még akkor is, ha az átirás a pontos eredményt közelitőre alakitja át. / ... $= \frac{3}{7} = 0{,}428$ /, ugyanis a tizedestört eredményt érzik csak megnyugtatónak. A közönséges és tizedestört mesterséges szétválasztását támogatja az is, ha a közönséges törtnek tizedestörtté való átalakitását "átváltoztatásnak" nevezik, mintha ezt a feladatot megoldani varázslat lenne.

A hibával kapcsolatban a következő két kisérletet végeztem:

1.kisérlet.

Két feladatot kapott az osztály. Közönséges törteket kellett összeadni a gyermekeknek. A feladat nem állitotta a tanulókat komoly nehézség elé, az első feladat végeredménye $3\frac{1}{2}$, a második $3\frac{2}{11}$ volt. A feladat feladásakor és megoldásakor a gyermekek a tizedestört szót nem is hallották, s azt akartam megtudni, hányan irják át a végeredményt tizedestört alakra. A 34 helyesen számoló tanuló eredménye:

Az első eredményt /$3\frac{1}{2}$/ átirta tizedestört alakra 15 tanuló /44 %/

A második eredményt /$3\frac{2}{11}$/ átirta tizedestört alakra 7 tanuló /21 %/

A kisérlet után megkérdeztem a tanulóktól, hogy miért irták át, hiszen én azt nem adtam feladatul. A válaszok egybehangzóan arra utaltak, hogy csak igy érezték a feladat megoldását befejezettnek. Még az is előfordult, hogy az a tanuló mentegetődzött, aki nem irta át az eredményt, hogy nem volt rá ideje. Arra a kérdésre, hogy miért irták át a $3\frac{2}{11}$-et, 3,18-ra, hiszen az nem egyenlő vele, azt válaszolták, hogy az mindegy, ilyen kis eltérés nem számit. Az osztályban tanitó kartárs elmondta, hogy ő nem kivánta meg a gyermekektől az eredmények átirását, de az a kartárs, aki az osztályt az előző évben tanitotta, azoknál a törteknél, amelyek pontosan átirhatók voltak, az átirást rendszeresen megkövetelte. A közelitő egyenlőség jelét /$\approx$/ a gyermekek nem ismerték.

Tekintettel arra, hogy itt tanári hibával álltam szemben, a kisérletet megismételtem egy másik osztályban, ahol ilyenirányu befolyásolás nem állott fenn. Ugyanezeket a feladatokat kapták a gyermekek, a 31 helyesen számoló tanuló eredménye a következő volt:

Az első eredményt $/3\frac{1}{2}/$ átirta tizedestört alakra 9 tanuló/29 %/
A második eredményt $/3\frac{2}{11}/$ átirta tizedestört alakra 5 tanuló /16 %/
A két eredményt összehasonlitva megállapithatjuk, hogy a gyermek akkor is hajlamos a tizedestört eredményt tekinteni "igazi" eredménynek, ha a tanár ezt nem tanitja neki. Amennyiben a tanár befolyásolja ilyen irányban, a hatás mutatkozik, de a befolyásolás megszüntével nem bizonyul tartósnak, hiszen pár hónappal a tanárváltozás után már a tanulók nagyrésze nem követte az azelőtt kötelező utat. Az a tény, hogy a tizedestört alak nem pontosan egyenlő a közönséges tört alakkal, a gyermekeknek körülbelül felét téríti el a tizedestörtre való átirás tervétől.

2. kisérlet.

Két osztályban két feladatot kaptak a tanulók. Az A. osztályban rendszeresen kaptak feladatokat a tanulók, amelyekben az adatok vegyesen közönséges és tizedestört alakban voltak megadva. A B. osztályban is kaptak ilyen feladatot, azonban keveset, a tankönyvből házifeladatnak, azt is csak az ismétlések során. A két feladat a következő volt.

1./ $0,3+\frac{2}{5}=$ 2./ $0,4+\frac{2}{9}=$

A számolástechnikai hibát vétő tanulók száma nem volt jelentős, igy az figyelmen kivül hagyható. A kisérlet eredménye:

1. feladat.	A. iskola	B. iskola
Közönséges tört alakban számolt	4 tanuló /13 %/	3 tanuló /9 %/
Tizedestört alakban számolt	26 tanuló/87 %/	30 tanuló /91 %/
2.feladat.		
Közönséges tört alak ban számolt	17 tanuló /57 %/	4 tanuló /12 %/
Tizedestört alakban számolt	13 tanuló /43 %/	20 tanuló /61 %/
Megoldhatatlannak minősitette a feladatot nem számolt	-------	9 tanuló /27 %/

Az 1. feladatnál a két iskola eredménye között az eltérés jelentéktelen, a másodiknál viszont nagyon nagy. Az első feladatnál mindkét iskolában a tanulók tulnyomó többsége a kényelmesebb, gyors eredménnyel járó utat választotta, ami várható is volt. A második feladatnál azonban az A. iskola tanuléinak több mint a fele észrevette, hogy a tizedestörttel való számolás nem vezet pontos eredményre, s a közönséges törttel való számolást választotta annak ellenére, hogy az mind számolástechnikailag, mind logikailag nehezebb volt. Jelentős volt azoknak a tanulóknak a száma is, akik a pontatlanság ellenére megmaradtak a kényelmesebb ut mellett /két tizedes pontosságig számoltak/ viszont figyelemreméltó, hogy egyetlen tanuló sem minősitette megoldhatatlannak a feladatot. Kétségtelen, hogy ebben az osztályban azok a tanulók, akik akik mindkét példában a pontos eredményt számolták ki, az első példában tudatosan a könnyités miatt választották a tizedestört alakban való számolást. A 13 tanuló közül, aki mindkét példában tizedestört alakban számolt, 6 tanuló jelölte, hogy közelitő egyenlőségről van szó. A B. iskolában viszont csak 4 tanuló számolt precizen, /ezek közül is csak 1 tanuló volt, aki az első feladatot tizedestört alakban számolta ki, tehát tudatosan változtatott alakot/, a többség megmaradt a kényelmes, nem pontos ut mellett, egy sem jelölte, hogy az eredmény közelitő, 9 tanuló pedig megoldhatatlannak minősitette a közönséges és tizedestört összeadását ebben az esetben. Ezek a tanulók azt mondták kérdésemre, hogy az előbbi példát meg lehetett oldani, mert $\frac{2}{5}$ pontosan átalakitható tizedestörtté, de $\frac{2}{9}$ nem. Mikor megkérdeztem, hogy miért nem kisérelték meg közönséges tört alakban számolni, zavaros válaszokat adtak. /Ugy is lehet? Ugy nagyon nehéz. Erre nem gondoltam./

A kisérletek világosan mutatják a tanár egyszerü feladatát mind a megelőzés, mind a javitás terén: Állandóan adni kell olyan feladatokat, amelyekben közönséges és tizedestörtek együtt szerepelnek, s a megoldásnál meg kell mutatni mindkét utat, vizsgálni kell a megoldásokat mind a pontosság, mind a célszerüség szempontjából.

27. hiba.

Az előző hibáknál a gyermekek bizonyos beidegződött megszokásokat nem tudtak levetkőzni, s ez akadályt jelentett a számukra. Előfordul azonban az, hogy a jó szokásokat nem tudja a gyermek felvenni, például a számolásban lehetséges ésszerüsitéseket nem alkalmazza, egyszerüen azért, mert nem veszi észre. Igy például több tag összeadását vagy több tényező összeszorzását nem a legcélszerübb sorrendben végzi el, hanem a leirás sorrendjében. Igy számolnak:

$$487 + 274 + 513 = 761 + 513 = 1274,$$

$$8 \cdot 27 \cdot 25 = 216 \cdot 25 = 5400,$$

ahelyett, hogy ésszerüsitenének:

$$487 + 274 + 513 = 1000 + 274 = 1274,$$

$$8 \cdot 27 \cdot 25 = 200.27 = 5400,$$

A következő két kisérletet végeztem el:

1. kisérlet.

Két osztályban feladtam a fenti két feladatot. Leirták a tanulók, de a számolást fejben kellett elvégezni. Az A.osztályban a tanár következetesen szoktatta a gyermekeket az ésszerüsitési lehetőségek keresésére, a B. osztály tanára viszont nem helyezett erre sulyt. Az A. osztály csak annyi utasitást kapott, hogy előbb két számot adjanak össze, irják le a részletösszeget, azutána dják hozzá a harmadikat. A B. osztályban ezen felül még annyit megjegyeztem, hogy a sorrendet rájuk bizom. A kisérlet eredménye:

A példa megoldásának utja	A.osztály	B. osztály
Összeadási példa:		
1000+274...............	16 tanuló /84%/	-------
761 + 513..............	3 tanuló /16%/	15 tanuló/100%/
Szorzási példa:		
200.27.................	14 tanuló /74%/	-------
216.25.................	5 tanuló /26%/	15 tanuló/100%/

A B. osztályban mutatkozó teljes csőd a kis tanulólétszám ellenére is világosan mutatja, hogy a könnyitések észrevétetése és használata kifejezetten a tanártól függ, szoktatás kérdése. Ez nem elsősorban oktatási, hanem inkább nevelési feladat, rászoktatni a gyermekeket, hogy minden esetben keressék az egyszerübb, célravezetőbb utat, ne kössék magukat a sablonhoz.

2. kisérlet.

Az előző kisérlet B. osztályában megnéztem, milyen gyorsan nevelhetők a gyermekek, akiknek a figyelmét erre még senki sem hivta fel, az ésszerüsitési lehetőségek felismerésére és alkalmazására.

Elsőnek összeadási feladatot kaptak, az előző kisérlet feladatánál numerikusan könnyebbet:

$$68 + 57 + 32 = ?$$

Kijelentettem, hogy ha egy kicsit gondolkodnak azon, hogy milyen sorrendben adják össze a tagokat, nagyon könnyü a feladatot fejben is elvégezni. A 15 tanulóból néhány percen belül 3 tanuló jött rá az ésszerüsitési lehetőségre. /Hogy egymást ne befolyásolják, csendben mondták meg, hogyan számolták ki. Azt viszont hangosan közöltem velük, hogy a megoldásuk helyes./

Miután egy tanuló megmutatta, hogyan könnyitett a feladaton, kapták a numerikusan az előző kisérleténél szintén könnyebb szorzási feladatot:

$$8 \cdot 7 \cdot 15 = ?$$

Kérdésükre kijelentettem, hogy itt is lehet könnyiteni. Az előbbi három tanuló azonnal meglátta a könnyités lehetőségét, alkalmazta azt, rövidesen még 2 tanuló könnyitett, a többi tanuló azonban nem mozdult el a sablon mellől.

Az eredmény: a tanulók harmadrészénél már az első alkalommal eredményt értem el. Ez kétségkivül komoly százalékarány, azonban nem szabad tulzott következtetésekre ragadtatnunk magunkat, hiszen ezek nyilvánvalóan a leggyorsabb észjárásu tanulók voltak, s a nem mozduló 10 tanulóban nemcsak a gyenge tanulók, de a közepesek is benne voltak. Későbbi megfigyeléseim is arról győztek meg, hogy az ésszerüsitésre, könnyitésre való szoktatás állandó jellegü, sok türelmet igénylő, gyors sikert nem igérő feladat. Viszont azt is megfigyeltem, hogy aki egyszer rászokott, az állandóan keresni fogja a lehetőségeket, tehát a nehezen elért eredmény tartósnak szokott bizonyulni.

28. hiba.

A törtek egész számmal való szorzására és osztására két utunk is van, az egyik mindig célhoz vezet, a másik csak bizonyos esetekben. A törtet egész számmal mindig meg tudjuk szorozni ugy, hogy a számlálót szorozzuk az egész számmal, a nevezőt változatlanul aláirjuk, ugy azonban csak speciális esetekben, hogy a nevezőt osztjuk az egész számmal. /t.i. csak ha osztható./ Például

$$\frac{3}{28} \cdot 7 = \frac{21}{28} = \frac{3}{4} \quad \text{vagy} \quad \frac{3}{28} \cdot 7 = \frac{3}{4}$$

Hasonlóképpen az egész számmal való osztás ugy mindig elvégezhető, hogy a nevezőt szorozzuk az egész számmal, ugy azonban, hogy a számlálót osztjuk csak abban az esetben, ha osztható. Például:

$$\frac{14}{15} : 7 = \frac{14}{105} = \frac{2}{15} \quad \text{vagy} \quad \frac{14}{15} : 7 = \frac{2}{15}$$

Ha a gyermek nem az egyszerübb eljárást választja, az az előző értelmezésben nem tekinthető gondolkodási hibának, hiszen nem vezet helytelen eredményre, csak lényegesen hosszabb uton, több munkával éri el a gyermek ugyanazt az eredményt. Tekintettel azonban arra törekvésre, hogy a gyermek a sablon elkerülésével mindig keresse az egyszerübb, ötletesebb megoldást, mégis foglalkozom ezzel az esettel is. A szemléltetés mindkét eljárásnál ugyanolyan egyszerü és ugyanolyan eredményes, csak a párhuzamos eljárások közül az egyik mindig célhoz vezet, a másik csak speciális esetekben. Természetes tehát az első eljárás sablonná merevedése, s - bármennyire paradoxonnak hangzik is - a gondolkodás ökonomiája az, ami odavezet, hogy a gyermek a komplikáltabb ut kedvéért az egyszerübbet mellőzi. Jelentős következménye nincs ennek, viszont kell olyan igényesnek lennünk, hogy szoktatással, az egyszerübb ut következetes megkövetelésével téritsük el a gyermeket a sablontól.

Érdekes megfigyelni, hogy az osztásnál könnyebben megszokja a gyermek az ésszerüsitést /a számláló osztását/, mint a szorzásnál a nevező osztását. Ennek a magyarázatát abban látom, hogy az osztás szó maga után vonja a gondolatot, hogy esetleg a számláló osztásával is célhoz érhetünk, mig a szorzás szó semmiképpen sem utal a nevező elosztásának lehetőségére.

A tizedestörtek osztásánál ugyanez a jelenség más hibára vezet /4. hiba/, hiszen ott megkerüljük tulajdonképpeni feladatunkat azzal, hogy az osztandót és az osztót szorozzuk 10 valamelyik hatványával. A fentiekhez hasonlóan több munkával helyes végeredményhez jut a gyermek, ha azt akarja, hogy necsak az osztó, hanem az osztandó is egész szám legyen.

25,811:5,3 osztásnál
258,11:53 osztás helyett
25811:5300 osztást végzi el a gyermek.

A sablon elkerülése és a felesleges irási, számolási munkák kikapcsolása itt is türelmes szoktatás és konzekvens követelés utján lehetséges.

29. hiba.

Sok pedagógus egybehangzó tapasztalata az, hogy a gyermek nem szivesen egyszerüsitt ugy, hogy a füzetében lehuzza a megfelelő számokat és odairja fölé vagy mellé az egyszerüsités után szükséges számot. Például:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{16}}} = \frac{5}{6}$$

Annak, hogy sok gyermek nem szivesen alkalmazza az ilyen éssserüsitést, inkább elvégzia szorzást: $\frac{120}{144}$, vállalva a numerikus nehezitést, azután egyszerüsit, két oka van. Az egyik az, hogy az ilyen számolási könnyités a külalak rovására megy, a másik az, hogy gyakran nem veszi észre a könnyitési lehetőségeket. Valószinüleg az első ok a magyarázata annak, hogy ennél az egyetlen hibánál komoly különbséget láttam a nemek között: a fiuk könnyebben rászánják magukat a külalak elrontására, mint a lányok.

A hibával kapcsolatban a következő kisérletet végeztem: Hatodik osztályos gyermekeknek két osztályban öt feladatot adtam minden megjegyzés nélkül.

1./ $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{7} = ?$ 2./ $\frac{15}{16} \cdot \frac{8}{17} = ?$ 3./ $\frac{24}{25} \cdot \frac{5}{6} = ?$

4./ $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = ?$ 5./ $\frac{12}{35} \cdot \frac{14}{27} \cdot \frac{15}{16} = ?$

Az öt feladat numerikus illetve logikai nehezitéseket tartalmazott a következő elgondolással. Az 1. feladatnál csak egyetlen primszámmal lehetett előre egyszerüsiteni, a 2. feladatnál az egyszerüsités 2-vel, 4-gyel vagy 8-cal volt lehetséges, a 3. feladatnál mindkét számpárban volt egyszerüsitési lehetőség a 4. feladatnál a tényezők száma háromra emelkedett s az egyszerüsitési lehetőségek azonnal láthaték voltak, végül az 5. feladat ugyancsak háromtényezős volt, de az egyszerüsitési lehetőségek megtalálása numerikusan nehezebb feladatot jelentett. A kisérlethez meg kell még annyit jegyeznem, hogy mindkét osztályban ugyanaz a tanár tanitott, s rendszeresen nevelte a tanulókat és ésszerüsitési lehetőségek keresésére és alkalmazására.

A kisérlet eredményének értékelésénél a jobb áttekinthetőség kedvéért nem tettem különbséget a tanulók között aszerint, hogy akik nem használták ki az összes ésszerüsitési lehetőségeket előre, azok milyen mértékben hajtották végre előre és milyen mértékben utólag az egyszerüsitéseket. Ezeket a következő táblázat második sorába irtam akkor is, ha csak egyetlen prímszámmal osztottak előre, akkor is, ha csak egyetlen egyszerüsitési lehetőség maradt a müveletek elvégzése utánra.

A kisérlet eredménye:

	1.feladat	2.feladat	3.feladat	4. feladat	5.feladat
Valamennyi egyszerüsitést előre elvégezte	41 tanuló 67 %	38 tanuló 62 %	30 tanuló 49 %	43 tanuló 70 %	22 tanuló 36 %
Részben elvégezte előre az egyszerüsitéseket	----	5 tanuló 8 %	12 tanuló 20 %	----	28 tanuló 46 %
Előre nem egyszerüsitett, a kapott szorzatot egyszerüsitette	16 tanuló 26 %	14 tanuló 23 %	18 tanuló 29 %	17 tanuló 28 %	10 tanuló 16 %
Sem előre, sem a szorzás elvégzése után nem egyszerüsitett	4 tanuló 7 %	4 tanuló 7 %	1 tanuló 2 %	1 tanuló 2 %	1 tanuló 2 %

Részben előre elvégzett egyszerüsitésekhez meg kell jegyezni, hogy az 1. feladatnál nem is volt lehetőség részbeni egyszerüsitésre, a 4. feladatnál lett volna rá lehetőség, sőt valószinünek látszott, hogy a 4-gyel és 5-tel való egyszerüsitést meglátják, de a 3-mal való egyszerüsités elmarad. Meglepő, hogy egy esetben sem következett be. Az utólagos egyszerüsitéseknek körülbelül harmadrésze nem volt teljes, abból a 11 esetből pedig, ahol sem előre, sem utólag nem egyszerüsitett a gyermek, 10 esetben számolástechnikai hiba miatt utólag az egyszerüsités nem is volt lehetséges.

A kisérlet eredménye alapján meg lehet állapitani, hogy a numerikus nehezitések nem csökkentették, ellenkezőleg növelték az előzetes egyszerüsitések számát. Az előre egyszerüsitő tanulók száma az 5. feladatnál volt a legnagyobb, 82 %. Ez azzal magyarázható, hogy a numerikus nehézségek felkeltik a gyermek igényét, hogy előre egyszerüsitsen, mig egyszerübb esetekben, mikor a szorzótábla ismerete is elég, az ilyen igény nem elég erős. Ugyanakkor a teljes és a részbeni egyszerüsitések aránya a numerikusan egyszerübb esetekben volt a legkedvezőbb, a legnehezebb esetben /5.feladat/ az egyszerüsitő gyermekeknek fele sem végezte el teljesen az egyszerüsitést.

Azt a tényt, hogy a gyermekek az egyszerüsitésben nem mennek el a relativ primszámokig, hanem hajlamosak féluton megállni, nemcsak az önálló irásbeli feladatoknál tapasztaljuk, hanem például a feleléseknél is. Megelégszik azzal, hogy $\frac{240}{270}$ -et $\frac{24}{27}$ -re egyszerüsiti, s ha a tanár további egyszerüsitést kiván, azt válaszolja, hogy már egyszerüsitett. Igen sok gyermeknél tapasztaljuk, hogy nincs olyan igénye, hogy a végeredményt szemléletesen el tudja képzelni, megelégszik annyival, hogy a számláló és a nevező ne legyenek tulságosan nagyok.

A kérdés módszertani szempontból elég nehéz, mert a tanár ellentétes irányu törekvései befolyásolják. Egyrészt gondolnia kell arra, hogy a törtek szorzata csak kivételes esetben lesz egyszerüsithető tört, amelyből kis számlálót és nevezőt kapunk, adnia kell olyan feladatokat is, amelyeknek eredményét nem lehet egyszerüsiteni. Másrészt törekednie kell arra, hogy a végeredményt szemléletesen el lehessen képzelni, s a gyermekeket rá kell szoktatni, hogy a felesleges numerikus nehezitések kiküszöbölésére a lehetőségeket megkeresse. Végül tekintetbe kell venni azt is, hogy nem mindig a legegyszerübb alak a legcélszerübb, legkönnyebben elképzelhető, például az 1000 nevező gyakran egyszerübben elképzelhető, mint a 125 nevező. Az ellentétes tendenciák között minden egyes esetben a tanárnak kell döntenie, hogy osztálya jelenlegi tudása mellett melyik tendencia hangsulyozása a célszerü, a tankönyvirónak pedig az a feladata, hogy a tanárnak mindenre lehetőséget adjon.

30. hiba.

Ugyancsak az ésszerüsités mellőzésének tekinthető az az eset, amikor a gyermek ragaszkodik ahhoz, hogy az arányossági feladatokat akkor is az egységen keresztül oldja meg következtetéssel, amikor a közös osztón vagy közös többszörösön keresztül való következtetés lényegesen kevesebb számolással ugyanarra az eredményre vezetne. Például:

18 kg burgonya ára 39,60 Ft,mennyibe kerül 27 kg burgonya?

A gyermek ragaszkodik a megszokott uthoz:

18 kg burgonya ára	39,60 Ft
1 kg burgonya ára	2,20 Ft
27 kg burgonya ára	59,40 Ft

Ezt a feladatot sokkal kevesebb számolással két másik uton is megoldhatta volna.

18 kg burgonya ára	39,60 Ft
9 kg burgonya ára	19,80 Ft
27 kg burgonya ára	59,40 Ft

Vagy

18 kg burgonya ára	39,60 Ft
54 kg burgonya ára	118,80 Ft
27 kg burgonya ára	59,40 Ft

A megszokott uton haladva a gyermeknek előbb 18-cal kellett osztania, azután 27-tel szoroznia, a két másik uton - sorrendcserével - 2-vel osztania és 3-mal szoroznia. Hogy mégis a numerikusan nehezebb utat választja az egyrészt azért van, mert a sablonos utat már megszokta s tudja, hogy ha numerikus nehézségek árán is, de biztosan célhoz ér, másrészt pedig azért,mert a könnyebb numerikus megoldásnak az az ára, hogy fel kell ismernie 18 - 9 - 27 illetve 18 - 54 - 27 számok közötti összefüggést. Ez a felismerés nem nehéz, megkövetelhető, de mindenesetre gondolkodást kiván a sablon alkalmazása helyett.

Az előző ésszerüsités mellőzésekhez hasonlóan itt is túlzás lenne gondolkodási hibáról beszélni, hiszen az eredmény jó, csak a hozzá vezető ut feleslegesen fáradságos. Annyit mindenesetre megállapithatunk, hogy különösen a közös többszörösön keresztül való számolás nagyon népszerütlen a gyermekek körében, hiszen a számok átmenetileg megnövekszenek.

Arra, hogy a gyermekeket a sablontól eltéritsük és a könnyités keresésére rászoktassuk, jól bevált eljárás a numerikus nehézségek fokozása olyan módon, hogy a sablonos uton a gyermek kénytelen legyen közönséges törtekkel számolni, vagy tizedestörtekkel megelégedni a közelitő eredménnyel. Például:

21 üveg befőtt sulya 33 kg. Milyen nehéz 35 üveg befőtt?

A sablonos ut:	21 üveg befőtt	33 kg.
	1 üveg befőtt	$1\frac{4}{7}$ kg
	35 üveg befőtt	55 kg

Ha tizedestörttel számol 2 tizedes pontossággal, 54,95 kg-ot kap.

A közös osztón át következtetve:

21 üveg befőtt	33 kg
7 üveg befőtt	11 kg
35 üveg befőtt	55 kg.

Ugyanilyen egyszerü a közös többszörösön /105 üveg/ át való következtetés, csak ott nagyobbak lesznek a számok. Éppen ezért a tanárnak célszerü a közös osztón át való következtetés mellett maradnia és sok olyan példát adnia, amelyekben a sablonos ut aránytalanul nagy numerikus nehezitést jelent.

Mindenben azonos a helyzet, ha egyenes arányosság helyett forditott arányossági a feladat. A gyermek itt is szereti sablonosan az egységen keresztül való következtetést még abban az esetben is, ha igy olyan részleteredményeken át halad, amelyek a gyakorlatban irreálisak. Például:

Az üzemi konyhán 192 dolgozó étkezik, s a burgonyakészlet 54 napra elég. Hány napra volna elég, ha csak 144-en étkeznének ott?

Hasonlitsuk össze a sablonos utat és a közös osztón át való következtetést:

Sablonos ut:	Közös osztó:
192 embernek 54 napra elég	192 embernek 54 napra elég
1 embernek 10368 napra elég	48 embernek 216 napra elég
144 embernek 72 napra elég	144 embernek 72 napra elég

A kép ugyanaz, mint az egyenes arányossági feladatnál: a sablonos ut mellett szól a megszokás, az a tudat, hogy biztosan célhoz ér, ára az, hogy a megoldás numerikusan sokkal nehezebb, a közös osztón át való számolásnak előfeltétele a 192 - 48 - 144 összefüggés felismerése, a numerikus nehézségek viszont szinte lényegtelenekké válnak. Itt is jő eljárás, az, ha a numerikus nehézségeket a sablonos uton felfokozzuk, itt azonban a tört bekapcsolása csak egészen speciális esetekben lehetséges, igy a numerikus nehezités utja inkább a számok megnövelése.

A megszokáson alapuló hibák legtöbb esetben nem járnak s sulyos következménnyel, s nem befolyásolják az eredmény helyességét. Ezt tapasztaljuk akkor is, ha a középiskolában figyeljük a megszokás hatását. /Pl. a gyermek ragaszkodik ahhoz, hogy az egyenletben az ismeretlen mindig a baloldalon legyen./ Ha azonban a megszokás egy másik, domináns ok mellett hat /pl. fogalomzavar vagy formalizmus/ akkor komoly hibákat okožhat. A megszokás okozta hibáknál általában könnyebb feladat a megelőzés, mint a javitás, mert könnyebb a rossz szokást nem kialakulni hagyni, mint a beidegződött rossz szokást leküzdeni. A megszokás okozta hibákhoz lehet sorolni azokat a kényelemszeretet okozta hibákat, hogy a gyermek nem szivesen helyettesit be az azonosságokba negativ számot vagy törtet, szivesebben számol tizedestörttel közönséges tört helyett akkor is, ha az eredmény ezzel elveszti pontosságát. Ezeknél a hibáknál vigyáznunk kell, hol a határ a kényelemszeretetből kialakuló egyoldalu nézetek és fejlődést gátló jelenségek között és a feladatokban mindig keresendő ésszerüsitési lehetőségek felhasználása között.

4. Fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák.

A hibáknak ez a csoportja meglehetősen sok hibát tartalmaz, s ezek gyakoriak az iskolában. Minden esetben a tanár hibájából erednek, azonban nem egy helytelen eljárás eredményeként, hanem a tanár szemléleti hibájából. Sok tanár felületesen alakitja ki a fogalmat, elsőrendü feladatának a müveletek megtanitását és a feladatok megoldását tekinti, az aprólékos, sok "babramunkával" járó fogalomalakitást lényegtelen feladatnak tekinti, nem szivesen csinálja.

A matematika már az I. osztályban absztrakt fogalmakkal dolgozik, hiszen a természetes szám már absztrakció eredménye. Az életben seholsem látunk pl. 4-et, csak 4 almát, 4 levelet, 4 széket, 4 gyermeket, s.i.t. Az absztrakt anyag, amiben dolgozunk, azt a kötelezettséget rójja ránk, hogy a fogalmakat nagyon gondosan, körültekintéssel alakitsuk ki, kapcsolatukat a régebben megismert fogalmakkal összekössük, sőt a gyakorlás, szoktatás munkájának nagyobbik részét is a tanitási órán végezzük el.

Iskoláink tulnyomó részében az I. osztály tanitója ennek a kötelezettségnek maradéktalanul eleget tesz. A természetes szám fogalmát jól alakitják ki, a számképekről szóló tanitás már régi gyakorlatává vált a magyar oktatásügynek, mindenki számára természetes, probléma vele kapcsolatban nincs. Amikor azonban a felső tagozatban a természetes szám fogalmának a bővitésére sor kerül, a fogalombővités korántsem történik iskoláink többségében olyan gondossággal, mint az I. osztályban. A betüjelölés bevezetésekor pedig egészen megdöbbentő felületességet tapasztalunk némely esetben a fogalomalkotás terén. Komoly hibákat tapasztalunk néha a mértantanitásnál is.

A fogalomzavaron alapuló hibáknál mindig arról van szó, hogy a forma elnyomja a tartalmat, de a 2. hibacsoport hibáitól abban különböznek, hogy itt nem a forma ereje miatt következik be a hiba, hanem a tartalom gyengesége miatt. Némely hibánál rikitóan ötlik a szemünkbe, hogy a használt szavak mögött nincs tartalom, a verbalizmus jellegzetes példáival állunk szemben.

A fentiekből következik, hogy a hibák javitása nem szoritkozhatik arra, hogy az egyes hibákat megfigyeljük, s az ott előforduló eseteket gondosan javitsuk. Esetről esetre haladva csak tüneti kezelést végezhetünk, a hibák gyökeres orvossága a pedagógus helytelen szemléletének feladása és a fogalmak kialakitásának gondos, körültekintő elvégzése.

Különösen szembeötlően sok a fogalomzavar által okozott hiba a VIII. osztályban, ha a betüjelölés bevezetése felületesen, nem kellő gondossággal történt. A szöveges egyenletek megoldását általában nehéznek tartják, az emberek jelentős része rossz emlékkel emlékszik vissza tanulmányainak erre a részére, pedig nem az anyag nehéz, hanem az algebrai alapfogalmak voltak tisztázatlanok, s ez okozta a bajt. Faragó László három cikket irt erről a témáról /21,23,27/, sőt szinte egy egész könyvet /25/ forditott erre a problémára. Kifejti, hogy miért szükséges az algebrai alapfogalmak gondos megalapozása, hogy "a szöveges egyenletek megoldásának tanitása csak akkor kecsegtet sikerrel,...ha a megoldási terv célképzete állandóan a tanulók előtt lebeg, és gondolkodási folyamataikat végig irányitja. Ha azonban a tanulók a megoldás utját járva minden kis göröngyben megbotlanak, ha figyelmüket az egyes részletekkel kapcsolatban lépten nyomon felbukkanó nehézségek vonják magukra, akkor nem láthatják a fáktól az erdőt, nem ragadhatják meg a gondolatmenetet a maguk egészében.." "Ha el akarjuk érni, hogy a szöveges egyenletek tanitása... elveszitse kinkeserves, egy helyben topogó vagy állandóan botladozó jellegét, nyilvánvaló módon arra kell törekednünk, hogy a szóban forgó feladatok megoldásához szükséges bizonyos ismeretek... funkcionálisakká, eszközi jellegüekké váljanak magasabbrendü céljaink szolgálatában."

Faragó könyvében idézi azokat a módszertannal foglalkozó cikkeket, amelyek szerzői ugyanabban látják a szöveges egyenletek tanitásának megjavitását, amiben ő. A szovjet Barszukov /5/ a következőket irja. "Tagadhatatlan és vitathatatlan,hogy az algebrai kifejezések előállitásában való jártasság kialakitása szükséges feltétele annak, hogy a tanulók elsajátithassák a szöveges feladatok egyenlettel való megoldásának módszerét." "...az algebrai kifejezések előállitásával kapcsolatban egy speciális gyakorlási rendszer bevezetésére van szükség." Helyesléssel ir a használatban levő VIII. osztályos tankönyv eljárásáról, s ezzel kapcsolatban idéz régebbi cikkemből /55/: "Ha nem adunk fel ilyen kérdéseket a gyermeknek: Melyik szám nagyobb 4-gyel a-nál ? c mázsa buza hány kg, s.i.t., hanem megelégszünk a müveletek formális betanitásával, akkor ne csodálkozzunk azon,ha a gyermek azt hiszi, hogy a matematika különleges agyu embereknek való, átlagember azt sohasem értheti meg."

Az előrebocsátottakban kellőképpen hangsulyoztam a fogalom gondos kialakitásának szükségességét, nézzük most konkréten az egyes hibákat.

31. hiba.

A közönséges tört leirásakor két számot ir le a gyermek: a számlálót és a nevezőt. Könnyen előfordul tehát, hogy a gyermek nem egy, hanem két számnak látja a törtszámot, s ugy is bánik vele. Igy áll elő a törtek összeadásánál a következő hiba:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

A hiba domináns oka nyilván az, hogy a tört fogalma nem világos a gyermek előtt: nem törteket ad össze, hanem egész számokat. A külső forma is támogatja a hiba kialakulását, hiszen a gyermek a nevezők között is ott látja az összeadás jelét. A hiba mindig előjön, előfordulásának aránya azonban iskolánként és osztályonként meglehetősen nagy ingadozást mutat. Van osztály, amelyben a hibázók száma 10 százalék alatt marad, van, ahol eléri a 60 %-ot. Ez a nagy ingadozás azt mutatja, hogy a hiba nagymértékben a tanár módszerbeni hibája, különben nem volna azonos körülmények között tanuló gyermekek között ilyen nagy a különbség.

A hibával kapcsolatban a következő kisérleteket végeztem:

1. kisérlet.

A gyermekek három feladatot kaptak, hogy végezzék el:

1./ $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$ 2./ 2 heted + 3 heted 3./ $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} =$

A feladatok között nincs lényeges különbség, a csekély numerikus nehezités a gyakorlékonyság ellensulyozását célozta. A feladatokat külön cédulákon oldották meg a gyermekek, azonnal beadták, igy a második feladat elvégzése alkalmával nem volt módjuk, hogy az első feladat eredményét kijavitsák. A feladatok elvégzéséhez semmi tanácsot, kommentárt sem kaptak a gyermekek. A kisérlet eredménye:

	1.feladat	2.feladat	3.feladat
Helyes válasz	25 tanuló /82%/	29 tanuló /94%/	29 tanuló /94%/
Hibás válasz	6 tanuló /18%/	---------	1 tanuló /3%/
Nem válaszolt	-----------	2 tanuló /6 %/	1 tanuló /3%/

Erős osztályban folyt le a kisérlet, igy a hibázó tanulók átlagos tanulmányi eredménye más tárgyakból is alacsonyabb volt. Ezeknél a tanulóknál is elég volt ennyi segitség, hogy 6-ból 4-en öntevékenyen javitsák hibájukat. Két tanulónál sulyosabb esettel álltam szemben, itt a szemléletes magyarázat segitett. A kisérlet mindenesetre megmutatta, hogy a fogalom tisztázatlan volta a hiba domináns oka.

2. kisérlet.

Az előző kisérlet folytatásaként egyéni beszélgetést folytattam a hibázó 6 tanulóval a hibázás okának elemzése céljából. Csak 2 gyermek tudott indokolást füzni eljárásához. Én azt hittem, hogy mindent össze kell adni. "Mi az a minden?" "A számlálók és a nevezők." "Miért hitted ezt?" "Mert ott volt a +." A többi négy gyermektől zavart, kusza választ kaptam, de lényegében ezek is az előbbi elgondolást tükrözték, csak a kifejezésmódjuk nem volt ilyen világos. Ezeknek a tanulóknak a válaszaiból azonban egy másik mozzanat is kiderült, ugyanis arra hivatkoztak, hogy eltévesztették a szabályt. Ez a válasz arra utal, hogy a gyenge tanulók nem a szemléletes tartalomra, hanem a szabályra gondolnak, amikor a müveletet végzik. A szabály pedig a számláló és nevező elkülönülését sugalmazza, hiszen külön ad utasitást a számlálóra és a nevezőre.

Felvetődik tehát a gondolat: mekkora szerepe van a hiba bekövetkezésében a tanult szabálynak. A szabályt másképpen, jobban megfogalmazni nem tudjuk, mellőzése veszélyes volna, hiszen - bár nem építünk a szabályok mechanikus alkalmazására - a szabályok megtanulása a megértés után a rögzités célszerü utjának bizonyul. Igy arra a következtetésre jutottam, hogy - mint általában a szabályok alkalmazásakor - állandóan ellenőriznünk kell, hogy a szabályt alkalmazó gyermek érti-e, mit csinál akkor, amikor a szabály által előirt utat követi.

3. kisérlet.

Egy hét mulva ugyanabban az osztályban minden kommentár nélkül feladtam a következő feladatot: $\frac{3}{11} + \frac{1}{11} = ?$ Az eredmény 29 helyes válasz /94 %/ és 2 hibás válasz /6 %/ volt. A 4 gyermek hibájának kiküszöbölése tehát tartósnak bizonyult.

4. kisérlet.

Mennyiben befolyásolja a numerikus nehezités a hiba bekövetkezését? Ezt a kérdést két párhuzamos VI. osztályban ugyanazon a napon végzett kisérlettel vizsgáltam meg. A gyermekek a következő két feladatot kapták:

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \qquad\qquad \frac{1}{4} + \frac{2}{7} =$$

Az A. osztályban az egyenlő nevezőjü törtek összeadása volt az első feladat, a B. osztályban megforditva, hogy a sorrend befolyását is kiküszöböljem. A kisérlet eredménye mindkét feladatnál ugyanaz volt:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
A. osztály.........	26 tanuló /87 %/	4 tanuló /13 %/
B. osztály.........	24 tanuló /86 %/	4 tanuló / 14 %/

A kisérlet eredménye meglepett, hiszen azt tanusitotta, hogy a numerikus nehezités és az a tény, hogy egyenlő vagy különböző nevezőjü törteket kell összeadni, a hiba előfordulásának gyakoriságát egyáltalán nem befolyásolja. Jelentéktelen a százalékos eltérés a két osztály eredménye között is, tehát a feladat sorrendje is hatástalannak tekinthető. Az eredmény meglepő volta miatt terveztem a kisérlet megismétlését is,de mivel általam jól ismert tapasztalt gyakorló pedagógusok megerősitették megfigyelésemet saját tapasztalatuk alapján, a megismétléstől eltekintettem.

Megállapithatjuk, hogy azok a tanulók, akiknél a törtszám fogalma világos, nem zavartatják már magukat numerikus nehezitéstől, az ilyesmi számukra nem olyan erős tényező;hogy a hiba elkövetése irányában befolyásolhassa őket. A fogalom tisztázatlansága esetén viszont a könnyü feladatoknál is elkövetik a gyermekek a hibát.

5. kisérlet.

Ennek a kisérletnek a célja az volt, hogy megállapitsam, milyen mértékben lehet a javitást a tanuló önálló munkájára bizni, mennyiben szükséges a tanár közvetlen irányitása a hiba javitásánál.

Szakfelügyelői minőségben látogattam egy iskolát, ahol 8 gyermek követte el a következő hibát:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Leegyszerüsittettem velük a kapott eredményt: $\frac{1}{3}$. Felvetettem a kérdést: $\frac{1}{3}$-hoz hozzáadtunk valamit, s ugy anannyi maradt. Lehetséges ez? Nem. Valahol hibáztunk - állapitották meg a gyermekek egyértelmüleg.

Próbáljunk meg egy ujabb feladatot!

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} =$$

Az előbbi 8 gyermek közül csak egy jött rá a helyes megoldásra: $\frac{2}{5}$. 2 tanuló ujból elkövette a hibát, 5 tanuló pedig egyszerüen nem csinálta meg a feladatot. A 2 ujból hibázó tanuló ragaszkodott a $\frac{2}{10}$ -hez, azt mondták hogy ne egyszerüsitsünk, akkor jó az eredmény. 5 tanuló azt mondta, hogy nem tudja, hogy kell megoldani a feladatot.

A kisérletből azt a következtetést kellett levonnom, hogy a javitást nem lehet a gyermekre bizni, a szemléltetést nem lehet mellőzni. Ha csak azt mutatjuk meg, hogy az eredmény matematikai szempontból képtelenség, csak zavart okozunk vele, de a problémát nem oldjuk meg. A helytelen nézet megingatására elég, a helyes ut megtalálásához azonban a tanár segitsége kell. A gyermek inkább hajlandó megkerülni a kérdést, olyan kivánsággal előállni, hogy mellőzzük a tört egyszerüsitését, hajlandó inkább elvetni egy előzőleg megértett és megtanult ismeretet - a tört egyszerüsitését-, minthogy elfogadja azt, amit nem lát át szemléletesen.

32. hiba.

Bizonyos mértékig az előző hibához hasonló gondolkodásra mutat a tizedestörtek összeadásánál fellépő következő hiba.

$$0{,}9 + 0{,}5 = 0{,}14$$

Gyakorlatban ritkán tapasztaltam ezt a hibát, tömeges előfordulásával nem találkoztam, viszont más pedagógusok állitják, hogy ők gyakori hibaként ismerik. Az előző hibához hasonlóan itt is a fogalom tisztázatlan volta a döntő tényező, de nem teljesen azonosan az előző hibával. Ott ugyanis a kiirt két nevezőt összeadta a gyermek, itt pedig a ki nem irt két nevezőt szorozta össze. Ha pedig a feladat két különböző nevezőjü tizedestört összeadása /pl. 0,16 + 0,7/, akkor az uj nevező a nagyobbik nevező lesz, s a számláló helyiértékeinél következik be a hiba /=0,23/

A domináns ok kétségtelenül a tisztázatlan fogalom: nem látja a 0,9-ben a törtet, a nevező nincs kiirva, azt hiszi, hogy nincs is. Mellette azonban nagy sullyal esik latba a külső forma nyomasztó hatása: "fetisizálja" a gyermek a tizedesvonást, nem meri átlépni. Más esetekben is tapasztaljuk, hogy az a mozzanat, amikor a tizedestörtek összeadásánál a tizedes részekből uj egész lesz, a gyermekben mindig a bizonytalansági érzés megjelenésével jár, mig meg nem szokja.

Mivel én nem tapasztaltam ezt a hibát tömegméretekben előfordulni, kisérletemet egyéni vizsgálatként végeztem el. Az 1963-as Tanterv más felfogásban tárgyalja a törteket, mint az eddigi Tantervek, párhuzamosan tanitja a közönséges és a tizedestörteket, igy a hiba előfordulásának százalékos aránya az uj elrendezéssel különben is módosulna.

Kisérlet.

Egyéni beszélgetést folytattam 4 tanulóval, akik a hibát elkövették. A négy gyermek /A,B,C és D/ különböző osztályokban, sőt különböző községekben tanult, igy az alábbiakban a négy beszélgetés összesitését közlöm.

1./ Miért ennyi? - Mind a négyen ugyanazt válaszolták: Mert 9+5=14

2./ Olvasd el, amit irtál! - Mind a négyen a nevező kimondása nélkül olvasták el. /Nulla egész kilenc meg nulla egész öt az nulla egész tizennégy.

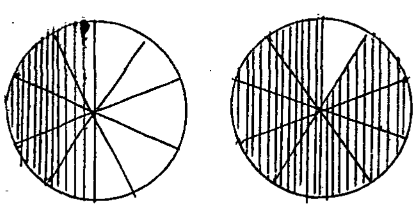
3./ Ugy olvasd el, hogy a nevezőt is kimondod! - Itt oszlottak meg a gyermekek válaszai. A: rájött, hogy 14 tized az 1,4, helyesbitette az eredményt. Vele a kisérletet ezzel befejeztem. B: kijelentette, hogy igy nem lehet összeadni. C és D: kimondták, hogy 14 tized, de 0,14-nak irták le.

4./ Ird le az összeadást közönséges tört alakban is. - Kivánságomat nehezen értették meg, a felirásnál segitenem kellett.

$$\frac{9}{10} + \frac{5}{10} = \frac{14}{10}$$

Érdekes megjegyezni, hogy egy tanuló sem követte el a 31. hibát ennél a lépésnél, ami mutatja, hogy a két hiba semmiesetre sem tekinthető azonosnak hasonlóságuk ellenére sem. B. tanuló itt megértette, hol hibázott és helyesbitett: 0,9+0,5=1,4 , C. és D. azonban, bár a közönséges tört alakban való összeadást helyesen végezte el, a tizedestört alaknál akkor is ragaszkodott a 0,14-hoz, amikor megállapitottuk, hogy $\frac{14}{10}$ nagyobb 1-nél. Innen kezdve csak velük folytattam tovább a kisérletet.

5./ Rajzoljuk le 0,9-et és 0,5-et!



3.ábra.

Ez a lépés mind a két tanulónál segitett, helyesbitették az eredményt.

Az utolsónak tervezett lépésre ilyenformán már nem került sor. Azt terveztem, hogy ha a körszemléltetés kevésnek bizonyul, akkor a méterrudon fogok szemléltetni /9 dm és 5 dm összege/ Nagyon valószinü, hogy a körszemléltetés helyett a méterrud szemléltetés is jó lett volna, hiszen olyan szemléltető eszköz, amelynél az átváltásban a gyermekeknek többéves gyakorlatuk van. Az viszont nyitott kérdés maradt, hogy ha olyan tanuló került volna a kisérleti személyek közé, akinél a körszemléltetés nem segitett volna, a méter részeivel való szemléltetés elegendőnek bizonyult volna-e?

Megállapithatjuk, hogy a gyenge tanulóknál a törtszám két alakja, a közönséges és a tizedestört elég élesen elkülönül egymástól. A fenti hiba javitására elsősorban a szemléltetés alkalmas, hiszen C. és D. az 5. lépésnél gyorsabb átlátták a hibájukat, előzőleg viszont meglehetősen lassunak, sőt bizonyos mértékig makacsnak bizonyultak.

33. hiba.

Az előző hiba sulyosbitott kiadása, amely csak egészen gyenge tanulóknál tapasztalható. Tizedestörtek összeadásánál a következő hibát véti a gyermek:

$$0,8 + 0,17 = 0,817$$

A hiba egészen ritka, a "trial and error" módszerének tipikus példája. Az előző hibához hasonlóan itt is a tört fogalmának tisztázatlan volta a domináns ok, amit itt is a tizedesvonás fetisizálása, tehát a formának a tartalom fölötti uralma támogat. Itt azonban még sulyosabb a helyzet, hiszen a gyermek a természetes számoknál tanult, s régen készséggé vált összeadási eljárást sem használja, hanem a számok egymás mellé irását tekinti összeadásnak. Fel kell ezenkivül téteteleznünk, hogy ezeknél a tanulóknál sulyos hiányosságok vannak az előismeretek terén is, hiszen különben ennyire nem kapkodnának.

Kisérletemet itt is egyéni beszélgetés formájában hajtottam végre. Gyakorlatomban összesen 5 ilyen esettel találkoztam, s - az előző hibával ellentétben, ahol egy-egy kiragadott tanulót vizsgáltam - itt valamennyi esetben megpróbáltam a gondolkodási hiba végére járni.

Kisérlet.

Egyéni beszélgetés a hibázó A., B., C., D. és E. tanulókkal. /4 községben 5 különböző osztályból való tanulókról van szó, az alábbiak az öt beszélgetés összefoglalását jelentik./

1./ Miért ennyi? - Mert össze kellett adni.

2./ Add össze ezt is! 0,5+0,3

E. tanuló 0,53 eredményt ir le. A vele való beszélgetés innen kezdve más. A többiek helyesen adják össze: 0,8

3./Ezt másképpen adtad össze! - Igen. /Illetve hallgat./

4./Melyik a helyes? Ez. /0,5+0,3=0,8 összeadásra mutat/

5./Add össze a másikat is helyesen! - A válaszok megoszlanak:

A: 0,8 +0,17 = 0,97 - B: 0,8 + 0,17 = 0,25

C. és D.: Nem tudom.

További kérdések:

A. tanulónál: 6./ Add össze ezt is! 0,29+0,5=0,79

8./ Ezt is! 0,3 + 0,206 = 0,506

B. tanulónál: 6./ Miért ennyi? Mert 8 + 17 = 25

7./ 0,8 méter hány centiméter? 8 centiméter.

Nézd meg a méterrudon! /Megnézi/ 80 centiméter.

0,17 méter hány centiméter? - /Hosszas gondolkodás után/ 17 centiméter

8./Add össze centiméterekben! 80 cm + 17 cm = 97 cm

9./Add össze tizedestörtekkel is. - Belezavarodik, nem tudja.

B. tanulónál: 6./ Add össze ezeket: 0,36+0,41 - Válasz 0,77

7./ Most ezeket: 0,37 + 0,48 - Válasz: 0,85

8./ Most ezeket: 0,3 + 0,45 - Válasz: 0,48

9./ 0,3 méter hány centiméter? - 3 centiméter.

Nézd meg a méterrudon! - Megnézi. 3 centiméter.

Nem annyi. Nézd meg jobban! - Hallgat, azután: 3 méter

D. tanulónál: 6./ Add össze ezeket: 0,36+0,41 - Hallgat.

7./ Ugy add össze, ahogy ezt csináltad! /0,5+0,3=0,8/ - Hallgat, elfáradt, fél, abba kell hagyni a kérdezést.

E. tanulónál. 3./ 0,5 liter hány deciliter? - Hallgat.

/Üveget mutatok/ Nézd meg! - Nem tudom.

4./ 0,5 méter hány deciméter? - Hallgat.

Nézd meg! - /Nézi./ Nem tudom.

Kétségtelen, hogy a fogalomzavar mellett más tényezők is közrejátszottak a sulyos hiba elkövetésénél. Igy A. tanuló kivételével mindenütt sulyos előismereti hiányossággal álltunk szemben. A hiba forrása előbb van, amit itt láttunk, az már csak következmény. Itt nem is javitható, elsősorban az előismereti hiányosságokat kell pótolni. Legfeljebb arra a kérdésre kell válaszolnunk, hogy az öt tanulónál elérkeztünk-e képességeik felső határához, vagy a pedagógus hibájával állunk szemben?

Kétségtelen, hogy - mivel különböző osztályokból egy-egy tanulóval állunk szemben - nem lehet szó a jelenlegi tanárok hibájáról. Azt ellenben, hogy a tanulók képességei felső határánál állunk, nem merem feltételezni. A. tanuló - tanára közlése szerint nem buta, de szeles, meggondolatlan, minden tettét elhamarkodja, kapkod. A többiek általában gyenge tanulók, van köztük terhelt is, de - és ez jellemző - mindegyikük ismételt az alsó tagozatban egy- két osztályt, s mindegyikük váltogatta alsó tagozatban az osztályt illetve az iskolát. /Elköltözés, pedagógussal való szembefordulás, stb./ Igy nem a pedagógus hibájával, nem a képességek felső határával állunk szemben, inkább a körülmények és a családi "nevelés" vakvágánya vezette ezeket a gyermekeket idáig.

34. hiba.

A törtszám fogalmának tisztázatlan voltán alapszik az a hiba, amikor a gyermek a tört szorzását összetéveszti a tört bővitésével.

$$\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{15}$$

A hiba erősen emlékeztet a 31. hibára, s ha az okot keressük, valóban közös gyökerekre bukkanunk. A domináns okot itt is a fogalom tisztázatlan voltában kell keresnünk sulyosbitva azzal, hogy a szorzás tanitásakor a törtszám bővitését és egyszerüsitését már jól kellene ismernie a gyermeknek, s a hiba ennek az ismeretnek a hiányáról is tanuskodik. A matematikai jelölésmód /a külső forma/ itt is a hiba bekövetkezését támogatja, hiszen ennek alapján itt is mondhatja - és mondja is - a gyermek, hogy ő azt hitte, hogy mindent meg kell szorozni. Komoly eltérést tapasztaltam viszont a két hiba gyakoriságában: mig a 31. hiba előfordulásánál - megfigyelésem szerint - nagy az ingadozás osztályok illetve tanárok között, ennél a hibánál az a tapasztalatom, hogy a jó módszerrel dolgozó tanároknál is gyakoriak, és ritka eset az, amikor az osztályban senki sem követi el. Ennek az oka az, hogy a szorzás nyilván nagyobb erőfeszitést kiván a gyermektől, mint az összeadás, igy erősebben támaszkodik a külső formára, a szabályra.

A hibával kapcsolatban a következő kisérleteket végeztem:

<u>1.kisérlet.</u>

A gyermekek három feladatot kaptak, hogy végezzék el:

1./ $\frac{2}{3}\cdot 5$ 2./ 3 ötöd . 7   3./ $\frac{5}{7}\cdot 9$

A csekély numerikus nehezités itt is a gyakorlékonyság tényezőjének ellensulyozását célozta. A feladatokat külön cédulán oldották meg a gyermekek, igy nem volt alkalmuk, hogy a második feladat után az első eredményét helyesbitsék. Utasitást, segitséget nem kaptak. A kisérlet eredménye:

	1.feladat	2.feladat	3.feladat
Helyes válasz	40 tanuló/71%/	52 tanuló/92%/	50 tanuló/89%/
Hibás válasz	16 tanuló/29 %/	2 tanuló/4 %/	4 tanuló/ 7%/
Nem válaszolt	---------	2 tanuló/4 %/	2 tanuló/ 4 %/

A kisérlet két osztályban folyt le, a fenti eredmények a két eredmény összesitését jelentik. Lényeges különbség a két osztály eredménye között nem volt. Összehasonlitva a 31. hiba megfelelő kisérletével megállapithatjuk, hogy a hibázók számaránya itt nagyobb volt /ugyanaz volt az egyik osztály/, ami egyáltalán nem meglepő. A közbeiktatott lépés a forma kikapcsolására itt is gyors eredményre vezetett, azonban - ellentétben a 31. hibánál tapasztaltakkal - a forma ujbóli megjelenése visszaesést okozott. Mindenesetre a kisérlet megmutatta, hogy a hiba okai valóban a feltételezettek.

2. kisérlet.

A hiba javitására a becslést kiséreltem meg, mivel a fogalomhoz a nagysági reláció is hozzátartozik, s remélhető volt a nagysági reláció tisztázásával a hiba elmaradása illetve helyesbitése. Az előző kisérletben hibázó 16 tanulóval végeztem el a kisérletet a következőképpen. Feladtam a feladatot: $\frac{3}{5} \cdot 8 = ?$ Megállapitottuk, hogy a $\frac{3}{5}$ nagyobb $\frac{1}{2}$-nél, tehát a szorzat nagyobb lesz $\frac{1}{2}$ nyolcszorosánál, azaz 4-nél. Ezután oldották meg a feladatot a következő eredménynyel.

Helyes megoldás	6 tanuló /38 %/
Hibázott, nem fogadta el a hibás eredményt és utólag javitott	7 tanuló /44 %/
Ragaszkodott a hibás eredményhez	1 tanuló / 6 %/
Nem oldotta meg	2 tanuló /12 %/

Az eredmény azt igazolta, hogy a becslés jól beválik, mint a hiba javitása. Ez az eredmény eléggé meglepő, hiszen a 31. hibának a javitását nem lehetett a tanulók önálló munkájára bizni, szükség volt a szemléltetésre, itt pedig az összes hibázók 82 %-a önállóan javitott, s ha az eredményt az 1. kisérlet eredményével összevetjük, azt kapjuk, hogy a becslés után az 56 tanulóból csak 3 tanuló /5%/ hibázik tovább.

A tapasztaltak magyarázatát abban látom, hogy a 31. hiba komolyabb hiányosságokat árul el, mint a 34. hiba /kevesebben is követik el/, igy az ~~ott~~ hibázó a gyengébb tanulóknak erősebb tanári támogatásra van szükségük. Ezenkivül azt is tekintetbe kell vennünk, hogy a szorzásra későbbi időpontban kerül sor, amikor a törtekkel való számolásban is komolyabb a gyermekek gyakorlata, s természetesen a törtszám fogalma is több oldalról világosodott meg a lassubb gondolkodásu gyermekek előtt is.

35. hiba.

Bevezetésül emlitettem, hogy a betüjelölés nem kellő gondossággal történő bevezetése igen sok hibának a forrása. Ezek a hibák a gondos bevezetés esetén is jelentkeznek, de előfordulásuk ritkasága vagy sürüsége már a tanár jó vagy hiányos munkájának a tükre. A hibák gyakorisága talán egyetlen más területen sem olyan hullámzó, mint az algebrai szimbolika bevezetésénél. Faragó fejti ki, /23/ hogy "az algebrai szimbolika idegen világában a tanulók egy része megtorpan, a logikai gondolkodás követelményével ezen a területen nem tud megbirkózni, s olyan jellegü tipushibákat követ el, amilyeneket az aritmetikai gondolkodásbanvaló behatoláskor észleltünk", s amelyeket az aritmetika tanulása során már leküzdöttünk. Ugyancsak ő állapitja meg, hogy a gyermekek" az algebrai szimbolika rendkivüli érzékenysége / 23, 2+3 , 2.3, 2^3 különbsége/ iránt szinte teljesen érzéketlenek."

Ilyen hiba az, hogy a gyermek nem tekinti egy számnak azokat a kifejezéseket, amelyet nem egy számmal jelölünk. Igy pl. ha azt hallja, hogy két gyermeknek összesen 20 forintja van, arra még hajlandó, hogy az egyik pénzét x-szel jelölje, arra azonban nem jön rá, hogy akkor a másiknak /20-x/ forintja van. Ugyanez a probléma az aritmetika keretein belül számára már jelentéktelen, semmi nehézséget nem okoz. /pl. egyiknek 7 Ft-ja van, a másiknak 13 Ft-ja./ A nehézség magyarázatát elsősorban abban látom, hogy a gyermek megszokta, hogy egy mennyiséget mindig egy számmal jelöljön. Az aritmetikában nem kellett neki 20 és 7 különbségét /20-7/-tel jelölni, a 13-ban egy számot lát, de képtelen az algebrában a /20-x/-ben is egy számot látni.

A hiba az algebrai alapfogalmak tanitása során, a betüjelölésnél kiütközik, s ott még egyszerü gyakorlással, szoktatással könnyen javitható. Ha azonban a tanár figyelmét ez elkerüli, akkor csak az alkalmazás során, az egyenlet felállitásakor kerül rá a sor, s akkor már a nehézségek felfokozódtak. Például:

Két fiunak együtt 20 Ft-ja van. Jancsi ad Pistának egy forintot, s igy Pistának háromszor annyi pénze lesz. Hány forintjuk volt?

- A gyermek egyszerüen képtelen megindulni, nem tudja leirni, hogy az egyik fiunak x Ft-ja, a másiknak /20-x/ Ft-ja volt. Megbotlott "egy kis göröngyben", amit idejében el lehetett volna távolitani, ha a betüjelölés bevezetésekor a tanár gondot forditott volna rá. Itt már funkcionálisnak, eszköz jellegünek kellene lennie annak az ismeretnek, amit magyaráznunk kell, s a helyes magyarázattal is csak annyit érhetünk el, hogy a gyermek figyelmét fő feladatáról, az egyenlet által megoldandó feladatról, mellékes dologra tereljük, sulyos időveszteséggel és kapkodó tanitással drága árat fizetve a pár héttel előbb megtakaritott néhány percért.

Ennek a hibának a megelőzése tehát hasonlithatatlanul könnyebb, mint a javitása. A megelőzés esetén ugyanis ez az egyetlen gondunk, itt viszont a felállitás miatt más problémák is adódnak /l. később a 40. hibát/, s az előtt a szinte megoldhatatlan feladat előtt állunk, hogy egyszerre két vagy több hibát javitsunk. Természetesen à feladat azért itt is megoldható, csak drága áron: abba kell hagyni az egyenletek tárgyalását, vissza kell térni az algebrai alapfogalmaknál elmulasztottakhoz, ami egyrészt időveszteség, másrészt a rendszeresség ellen való vétség.

36. hiba.

Az előbbi hiba sulyosabb kiadása az, amikor a gyermek nem tekinti egy számnak azokat a kifejezéseket, amelyeket még 2-nél is több jellel irunk le. Például nem egy szám részére az $\frac{x - 40}{4}$ tört.

Az előbbiek alapján ezt természetesnek kell tartanunk. Ha a gyermeknek 400-ból kell elvennie 40-et és a maradékot elosztani 4-gyel, nincs rá szüksége, hogy az eredményt $\frac{400-40}{4}$-gyel jelölje, hiszen kiszámithatja, s irhatja 90-nek. Az aritmetika területén itt is egyetlen számmal jelöli az eredményt /előfordul, hogy törtszámmal, de ezt kellő gondossággal elfogadtatjuk vele/, az algebrai jelölés esetén azonban arra kell szoktatnunk a gyermeket, hogy $\frac{x-40}{4}$ -ben és hasonló kifejezésekben egy számot lásson, ne hármat. Ez komoly és nem könnyü feladat,de elmulasztása már nemcsak az egyenlet felállitása, hanem megoldása esetén /37.hiba/ is nehézséget jelent tehát fokozott mértékben szükséges, hogy a bevezetés idején elvégezzük.

Lássuk, milyen hibára vezethet a fent elmondottak elmulasztása az egyenlet felállitása terén.

40 forintos könyvet vettem, a maradék pénzem negyedrészéért egy inget vettem, igy 240 forintom maradt. Mennyi pénzem volt? -

Az egyenlet felállitása:

$$x - 40 - \frac{x - 40}{4} = 240$$

Ha a gyermek nem szokta meg annakidején, hogy az algebrai törtben egy számot lásson, akkor nehezen fogja megérteni, hogy az ing $\frac{x-40}{4}$ forintba került. A legtöbb esetben $\frac{x}{4}$ forintot akar fizetni az ingért, mert ugy érzi, hogy a -40 másodszori leirásával kétszer fizette ki a könyv árát. Tapasztalatom szerint a gyermek meggyőzésére nagyon kevés, ha arról győződik meg, hogy az általa felállitott módon az egyenlet rossz eredményre vezet, mert a rossz eredmény okát másban, esetleg az egyenlettel való megoldás elitélésében keresi. Ha a hiba az egyenlet felállitásánál előjön, nincs a számunkra más, mint az előző hibához hasonlóan időt veszteni, s visszamenni a betüjelölés bevezetéséhez, pótolni az ott elmulasztottakat.

Mind a 36. mind a 35. hiba megelőzésére célszerü, ha az algebrai alapfogalmak gondos tanitásán kivül amikor az egyenletekből a megfelelő részhez jutunk, ezeket az ismereteket az óra elején a fejszámolás keretében felujitjuk. Ez mindössze háromnégy percet vesz el az órából, hatása azonban igen nagy, igen hasznos.

37. hiba.

A három vagy több jellel leirt algebrai kifejezés /tört/ nem egy számként való kezelése azzal a komoly következménnyel is jár, hogy nemcsak az egyenletek felállitása, de az egyenletek "levezetése" /precizebben: ekvivalens átalakitásai/ során is hibaforrásként szerepel. Nézzük az előbbi hibánál szereplő egyenletet. Az egyenlet helyes megoldása:

$$x - 40 - \frac{x - 40}{4} = 240$$
$$4x - 160 - /x-40/ = 960$$
$$4x - 160 - x + 40 = 960$$
$$3x - 120 = 960$$
$$3x = 1080$$
$$\underline{x = 360}$$

360 Ft-om volt, 40 Ft-ért könyvet, 80 Ft-ért inget vettem, 240 Ft-om maradt.

Az egyenlet megoldása közben a következő hibára számithatunk:

$$x - 40 - \frac{x - 40}{4} = 240$$
$$4x - 160 - x - 40 = 960$$
$$3x - 200 = 960$$
$$3x = 1160$$
$$\underline{x = 336\frac{2}{3}}$$

Ezzel az eredménnyel nem kapjuk meg a 240 forintos maradékot. A hibás megoldást vizsgálva azonnal láthatjuk, hogy előjelhiba történt: az egyenlet két oldala megszorzásánál nem vigyázott a gyermek arra, hogy a tört egy számot jelent, igy egységesként kell tovább kezelni, zárójelbe kell tenni.

A hiba eléggé közismert, a több éve tanitó gyakorló pedagógusok saját tapasztalatuk alapján is ismerik, módszertani cikkek is foglalkoztak vele. Megelőzésének első lépése itt is az kell hogy legyen, hogy az algebrai alapfogalmak bevezetésekor egy számként kezeltessük a hasonló törteket. A másik fontos mozzanat, hogy az egyenletek tanitásakor kellő gonddal ügyeljünk erre a lépésre, a hibánál azonnal avatkozzunk be. A beavatkozás alkalmával azonban ügyeljünk arra, hogy milyen indoklással tetetjük/x-40/-et zárójelbe. Sok pedagógus azért iratja ki a zárójelet, mert igy nem tévesztjük el az előjelet. Ez az okoskodás - bár célszerü - nem fogadható el. A matematikatanitásban csak a kauzális okoskodás indokolt, nem pedig a célszerüségi. Ha a kauzális okoskodást mellőzzük, a világnézeti nevelés terén vétünk hibát, hiszen a matematikatanitásban a világnézeti nevelést igen nagy mértékben azzal szolgáljuk, hogy a gyermekeket rászoktatjuk az ok- okozat összefüggések felkutatására és a kritikus szemléletre, mindenütt a bizonyitott igazságok keresésére. Ezért ne azzal indokoljuk a zárójelbe tételt, hogy igy nem lesz baj az előjellel /jól gondolkodó tanitványaik még azt a kérdést is nekünk szegezhetik, hogy miért nem lesz baj ? /, hanem azzal, hogy zárójelbe kell tenni, mert ez egy szám.

38. hiba.

A betüjelölés bevezetése alkalmával elkövetett hibák közül az általános iskolában uj hibának a forrása lesz az, ha a gyermek azt hiszi, hogy

$$4x - x = 4$$

A fogalmak tisztázatlan voltát itt erősen támogatja a külső forma is. Elvettem a 4x <u>mellől</u> az x-et, maradt 4. A domináns ok mégis a fogalom tisztázatlan volta, az hogy nem látja 4x-ben az $x+x+x+x$ -et.

A hiba viszonylag könnyen javitható. A javitás egyik módja az, hogy kiirjuk a 4x fenti összeadandókra való felbontást. Ha a gyermeket nagyobbfoku önállóságra akarjuk nevelni, feladhatjuk neki a feladatot, hogy 6x-ből vegyen el 2x-et, vagy 5x-et, a legtöbb esetben már itt rájön, hogy nem jól gondolkodott.

Gyengébb gyermekeknél azonban célszerübb az első eljárást alkalmazni, mert az szemléletesebb.

A hiba az egyenlet megoldásakor jelentkezik, s vagy képtelen eredményre vezet, vagy azonosságra.

$$4x - x = 4 \qquad\qquad 4x - x = 20$$

$$4 = 4 \qquad\qquad 4 = 20$$

Mindkét esetben azonnal belátja a gyermek, hogy hibázott, de hogy a hiba miben áll, azt meg kell magyaráznunk, ritkán jön rá önállóan. Mindenesetre ennél a hibánál is könnyebb a megelőzés, mint a javitás, bár az előző három hiba sokkal nehezebb feladat elé állitja a tanárt, mint ez.

A betüjelölés bevezetésekor a gyermek még sok más téves gondolatot is felvet, amit a tanárnak gondosan le kell szerelnie. Ezek egyrésze nem az általános iskolában hoz majd a fentiekhez hasonló fanyar gyümölcsöt, hanem csak a középiskolában, de természetesen célszerü a középiskolai tanár gondjait már az általános iskolában megelőzni. Igy vigyázzunk arra, hogy ne gondolhassa a gyermek azt, hogy $x^3=x.x.x.x.$ - legtöbbször hibás fogalmazás miatt /háromszor kell az x-et önmagával megszorozni/, hogy meg tudja a gyermek különböztetni x^3-t és 3x-et. Tapasztaltam olyan komikusan hangzó hibákat is, hogy a -nál 1-gyel nagyobb b, a-nál 4-gyel nagyobb szám e, az ábécé önkényes algebrai értelmezésével. Hogy ez a tapasztalatom nem egyoldalu és véletlen, azt mutatja, hogy Faragó ugyanezt, illetve hasonlókat tapasztalt budapesti iskolákban /21/. A tanulók egyrésze szerint α kiegészitő szöge mindig β, n mindig közepes nagyságu szám, mert az ábécé közepe körül van, arra a kérdésre pedig, hogy ha egy munkás t óra alatt a munkadarabot készit el, akkor s óra alatt hányat készit el, egy gimnázista lány azt válaszolta, hogy 5s darabot, s válaszát azzal indokolta, hogy s az m-től az ötödik szám. /Faragó megjegyzi, hogy s+5 válasz indokoltabb lett volna, de a gyermek ugy gondolta, hogy az absztrakt feladat megoldásához jobban illik az absztraktabb müvelet./

39. hiba.

Gyakran előfordul, hogy a tanárnak az okoz nehézséget, ha a szülő a régi iskolai emlékei alapján segiteni akar gyermekének az egyenletek megoldásában, s a segitség - a jelentős mértékben elhomályosult, esetleg már annakidején is formális ismeret - lesz a tisztázatlan fogalmak mellett a másodlagos hibaforrás.

Tipikusan ez az eset, amikor a szülő "megtanitja" otthon a gyermeknek, hogy az egyenletet "mindig ugy kell" megoldani, hogy az egyes számokat ellenkező müvelettel /esetleg ellenkező előjellel/ átvisszük a tuloldalra. Ma már az iskolában ezt a "szabályt" kifejezetten tiltja a módszertan, de valamikor széltében hosszában tanitották. Mi ma az ugynevezett "mérlegelv" segitségével oldhatjuk meg az egyenleteket: az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk ugyanazt a számot, elvesszük ugyanazt a számot, megszorozzuk, elosztjuk ugyanazzal a számmal. Ez szemléletesen érthető a gyermek számára, hiszen a mérleg egyensulya sem bomlik meg, ha mindkét serpenyőjébe ugyanannyit teszünk, s.i.t. Ha azonban a pedagógus a "régi jól bevált szabályra" épit, vagy a szülő segit a fenti módon, több változatban is találkozunk tipushibával. Nézzük a leggyakoribb eseteket!

Helyes megoldás:		Hibás megoldás:	
	$2x - 6 = 10$		$2x - 6 = 10$
	$2x = 16$		$x - 6 = 5$
	$\underline{x = 8}$		$\underline{x = 11}$

A hiba érdekessége az, hogy az eredmény befolyásolja a gyermeket abban, hogy elfogadja-e a hibás eredményt. Igy ha a hibás eredmény negativ szám vagy tört, gyakran ellenőrzi, hogy jól számolt-e, ugyanakkor, ha a helyes eredmény lett volna negativ szám vagy tört, s a hibás eredmény véletlenül természetes szám, akkor még a tanári javitás és a behelyettesités ellenére is nehezen válik meg a hibás eredménytől.

Helyes megoldás:

$$\begin{aligned} 3/2x-1/-9 &= 6 \\ 3/2x-1/ &= 15 \\ 2x-1 &= 5 \\ 2x &= 6 \\ \underline{x} &\underline{= 3} \end{aligned}$$

Hibás megoldás:

$$\begin{aligned} 3/2x-1/-9 &= 6 \\ /2x-1/-9 &= 2 \\ 2x-1 &= 11 \\ 2x &= 12 \\ \underline{x} &\underline{= 6} \end{aligned}$$

Ebben az esetben is ugyanazt tapasztaljuk, hogy az eredmény hasonlóképpen befolyásolja a gyermeket a hibás megoldás felülvizsgálatában vagy a hozzá való ragaszkodásban.

Helyes megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3}+5 &= 12 \\ 2x+1+15 &= 36 \\ 2x+16 &= 36 \\ 2x &= 20 \\ \underline{x} &\underline{= 10} \end{aligned}$$

Hibás megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3}+5 &= 12 \\ 2x+1+5 &= 36 \\ 2x+6 &= 36 \\ 2x &= 30 \\ \underline{x} &\underline{= 15} \end{aligned}$$

Ez a hiba ritkán áll elő gyakorlatban ilyen tisztán, leginkább csak akkor, ha negativ előjelek nem zavarják meg a tanulót. A könnyen becsuszó előjelhibák bonyolultabbá teszik a hibát, s nehezebbé a tanár munkáját.

A hiba orvossága elsősorban az, hogy a gyermekeket ne a "szabályalkalmazás" szemléletében neveljük. Az egyenletben ne lásson a gyermek semmi misztikusan nehéz "magas" matematikát, hanem szöveges feladatok megoldásának jól alkalmazható módszerét, mindig a józan logikáját alkalmazza, ne pedig tanult szabályokat. A rossz külső hatásokat kellő tapintattal ki kell küszöbölnünk, főleg azonban nekünk nem szabad a gyermeket gondolkodás helyett a sablon útjára terelnünk.

40. hiba.

Az egyenletek felállitásánál gyakori hiba, hogy a fogalmazás helytelen sugalmazó hatására a gyermek az egyenlet felállitásakor azt a mennyiséget kivánja növelni, amelyik amugy is nagyobb már. Vegyük példának a 35. hibánál szereplő egyenletet!

Két fiunak együtt 20 forintja van. Jancsi ad Pistának egy forintot, s igy Pistának háromszor annyi pénze lesz. Hány forintjuk van?

Tételezzük fel, hogy a gyermek nem követi el a 35. hibát, helyesen indul ki: Jancsinak x forintja van, Pistának /20-x/ forintja. Jancsi ad Pistának egy forintot, lesz x-1, illetve /20-x/+1 forintjuk. Most követi el a hibát: mivel Pistának háromszor annyi pénze van, a Pista pénzét szimbolizáló kifejezést akarja megszorozni 3-mal. Igy a következő hiba áll elő:

Helyes megoldás:	Hibás megoldás:
3/x-1/ = /20-x/+1	x-1 = 3~~/~~/20-x/+1/
3x -3 = 20-x+1	x-1 = 60-3x+3
3x -3 = 21-x	x-1 = 63-3x
4x = 24	4x = 64
x = 6	x = 16
Jancsinak 6 forintja, Pistának 14 forintja volt.	Jancsinak 16 forintja, Pistának 4 forintja volt.

Az eredmény azonnal meggyőzi a gyermeket, hogy hibát követett el, hiszen ha 16 Ft-ból ad át Jancsi 1 forintot, neki marad háromszor annyi pénze, mint Pistának és nem megforditva. Nem szükséges azonban eddig elmennünk, hiszen a célunk az, hogy a gyermek ne kövesse el ezt a primitiv, de gyakori hibát. Elegendő anynyi, hogy amikor a gyermek meg akarja szorozni a Pista pénzét 3-mal, megjegyezzük: "Akkor kilencszer annyi pénze lesz.". Ha a gyermek nagyon megdöbben, megmagyarázzuk: "Háromszor annyi volt, te megszoroztad hárommal, mostmár kilencszer annyi." Ez a magyarázat mindig elég a gyermek belátja, hogy a kevesebb pénzt kell megszorozni, hogy egyenlők legyenek.

Ugyanezt a hibát olyan egyenletnél is elkövetheti a gyermek, ahol szorzás helyett összeadást kell végeznie. Például:

A Mókus Őrs ötször annyi vasat gyüjtött, mint rezet. A gyüjtött vas 56 kg-mal több, mint a gyüjtött réz. Hány kg vasat és rezet gyüjtöttek?

A feladatot jól kezdi megoldani a gyermek: x kg réz és 5x kg vas gyült össze. Az egyenlet felállitásakor azonban a vas sulyához akarja hozzáadni az 56 kg különbséget.

Helyes megoldás:	Hibás megoldás:
$5x = x + 56$	$5x + 56 = x$
$\underline{x = 14}$	$\underline{x = -14}$

Az eredmény azonnal mutatja a hibát: negativ szám nem lehet a gyüjtés eredménye. Itt is célszerübb azonban a felállitáskor a hiba elkövetésénél megjegyezni: "Akkor 112 kg-mal lesz több." Éppen ugy, mint az előbb, itt is mindig belátja a gyermek, hogy a kevesebbhez kell hozzáadni, hogy a két mennyiség közé egyenlőségjelet irhassunk.

41. hiba.

Az általános és középiskolai matematikatanitásnak közismerten nehéz része az egyenletek felállitása. Láttunk eddig néhány esetet, amikor az egyenlet felállitását nehezíti az, hogy az algebrai alapfogalmak megismertetésekor a tanár felületes munkáját egyaránt. Vannak azonban olyan esetek is, amikor az egyenletek felállitása kellőképpen előkészitett gyermekeknek is komoly nehézséget okoz. Az ilyen esetek külön figyelmet érdemelnek a tanár részéről, s indokolttá teszik az egyenletek pedagógiai szempontból való osztályozását. Az elsőfoku egyenletek osztályozását a Szovjetunióban Barszukov/5/ a szerkezetük szerint végezte el, Nyikolajeva/58/ pedig a feladatok tárgyi tartalma szerint. Polszkij/64/ is végzett csoportositást, de ez - saját közlése szerint - még nem teljes. Nálunk a nehezebben megoldható egyenletek szerkezet szerinti osztályozását én végeztem el Kelemen Jánosnéval és Stéger Ferenccel közösen irt, 1959-ben használatba került VIII. osztályos tankönyvünkben, s az 1966-ban megjelent uj VIII. osztályos tankönyvben ki is bővitettem az eddigi tapasztalatok alapján.

Komoly nehézséget szokott okozni a kémiai tárgyu u.n. keverési feladatok egyenlettel való megoldása. Tapasztalatom az volt, hogy a hibák számát befolyásolja az, hogy szilárd anyagot, folyadékot vagy gázt kell egy oldószerben feloldani. Első kisérletem ennek a tapasztalatnak kvantitativ felmérését célozta:

<u>1. kisérlet:</u>

Egy osztály két egyenletet kapott önálló megoldásra minden segitség nélkül.

1./ 300 gram 8 %-os konyhasóoldathoz hány gram vizet kell öntenünk, hogy 6 %-os oldatot kapjunk?

2./ 200 gram 26 %-os sósavat hány gram vizzel kell kevernünk, hogy 20 %-os sósavat kapjunk?

A nagyobb % arány a tárgykör miatt elkerülhetetlen volt, a gyakorlékonyság viszont a 2. példának kedvezett, hiszen a felállitás az első feladat analógiájára lehetséges volt:

$$\frac{300.8}{100} = \frac{/300+x/.6}{100} \qquad \frac{200.26}{100} = \frac{/200+x/.20}{100}$$

A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
1.feladat	24 tanuló /80 %/	6 tanuló /20 %/
2.feladat	19 tanuló /63 %/	11 tanuló /37 %/

Az analógia és a gyakorlékonyság kedvező hatása ellenére a hibázók száma majdnem kétszeresére emelkedett. A magyarázat csak a tárgykörrel lehetséges: a konyhasó kézbevehető, minden nap látott anyag, semmi különöset sem jelent még a tapasztalat-szegény gyermekeknek sem, ezzel szemben a sósav gáz, a sósav-oldatot sósavnak szokták nevezni, tehát a fogalom terén is lehet zavar, nem fogható meg, nem a mindennapos életben, hanem iskolában, laboratoriumban - esetleg egyes tanulóknál - gyárban használt anyag.

A nagy arány, amit a kisérlet mutat, mindenesetre arra figyelmeztet bennünket, hogy a gyermeknek ezt a problémáját az óravázlat elkészitésénél vegyük figyelembe: az első példákban szilárd anyagok oldásáról legyen szó, s az alkohollal, savakkal, stb. való oldatokról szóló példáknál erősen használjuk ki az analógiát.

A keverési feladatok egyrésze nem kémiai, hanem fizikai jellegü, felállitásakor kalóriában kell gondolkodnia a gyermeknek. A fenti kisérlet eredményeként felvetődik a probléma: a fizikai tárgyu egyenlet könnyebb vagy nehezebb a gyermek számára, mint a kémiai tárgyu? A kérdést kisérlettel próbáltam eldönteni.

2. kisérlet.

Három feladatot készitettem, a következőket:

1./ Hány gram 15 %-os és 10 %-os rézgálicoldatot kell összekevernünk, hogy 500 gram 12 %-os oldatot kapjunk?

2./ Hány gram 25 %-os és 10 %-os sósavat kell összekevernünk, hogy 500 gram 16 %-os oldatot kapjunk?

3./ Hány gram 45°-os és 20°-os vizet kell összekvernünk, hogy 500 gram 30°-os vizet kapjunk?

Szándékosan vettem mind a három feladatba 500 gr végösszeget, az is szándékos volt, hogy mindhárom feladatnak 200,300 a megoldása, hogy a gyakorlékonysági tényező segitse a tanulókat, ugyanis a kalóriás egyenletet - bár fel lehetne analóg módon állitani - más módon szoktuk felállitani. A kisérletet két osztályban folytattam le., Az A. osztályban az 1. és 3., a B. osztályban a 2. és 3. egyenletet adtam fel.

A kisérlet eredménye:

A. osztály.	Helyes megoldás:	Hibás megoldás:
1. egyenlet	21 tanuló /70 %/	9 tanuló /30 %/
3. egyenlet	11 tanuló /37 %/	19 tanuló /63 %/
B. osztály.		
2. egyenlet	15 tanuló /52 %/	14 tanuló /48 %/
3. egyenlet	12 tanuló /42 %/	17 tanuló /58 %/

A kisérlet eredménye azt igazolja, hogy a hőtani tárgykör nehezebb a gyermek számára, mint az anyagok keverése, még abban az esetben is, ha az oldott anyag gáz. Ezt természetesnek kell tartanunk, hiszen a kalória absztraktabb fogalom a gyermek számára, mint a gáz. Feltünő, hogy a B. osztályban a hőtani egyenlet eredménye valamivel jobb, a mit azzal magyarázok, hogy az absztraktabb előkészités /2.egyenlet/ és a hőtani egyenlet között könnyebb volt a gyermekeknek az analógiát megtalálniok.

Mindenesetre a keverési feladatoknak tanmenetünkben meg kell előzniök a hőtani egyenletet.

42. hiba.

Szinte a legkomolyabb nehézséget jelenti a gyermek számára az általános iskola VIII. osztályában az együttes munkára vonatkozó feladatot egyenlettel való megoldása. /Közhasználatu szóval: a vizcsapos példák./ A nehézséget elsősorban az jelenti, hogy a gyermek nem látja az egész munkának a jelölésénél indokolva az absztrakt 1-gyel való jelölést. Nézzük a nehézséget egy konkrét példán:

János bácsi 10 óra alatt ássa fel a kertjét, a felesége 15 óra alatt. Hány óra alatt ássák fel együtt?

Az egyenlet felállitásánál a következő hiba várható:

Helyes megoldás	Hibás megoldás
$\frac{x}{10}+\frac{x}{15}=1$	$\frac{x}{10}+\frac{x}{15}=x$
Ebből: x= 6	Ebből x = 0, vagy ellentmondás.

A hiba okát Faragó László a következőképpen magyarázza: /25/ "Lélektani és módszertani szempontból is teljesen helytelen lenne abból kiindulni, hogy "válasszuk a kert területét egységnyinek", mert a tanulók számára korántsem természetes, hogy az "egész kert" konkrét képzetéhez az absztrakt egységet /az 1-et/ kapcsolják! Minden tanár, aki megpróbálta ezt az utat járni, közvetlenül tapasztalhatta, hogy a tanulók milyen értetlenséggel és "szellemi ellenállással" fogadják ezt az eljárást."

A hiba javitására kidolgoztam egy eljárást, amely már hét éve az általános iskolai tankönyvben is szerepel, s a tapasztalat jónak minősitette. A kert területe n négyzetméter, a férfi $\frac{nx}{10}$ négyzetmétert, a felesége $\frac{nx}{15}$ négyzetmétert ás fel. Együtt felássák az egész kertet:

$\frac{nx}{10} + \frac{nx}{15} = n$ Egyszerüsitünk n-nel: $\frac{x}{10} + \frac{x}{10} = 1$

A megoldás után megbeszéljük, hogy ha a kert területét négyzetméterek helyett négyszögölekben adtuk volna meg, akkor az egyenlet felállitása $\frac{mx}{10} + \frac{mx}{15} = m$ lenne, egyszerüsités után ismét az $\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 1$ alakot kapnánk. Az a gyermek számára világos, hogy a munka ideje nem függ attól, hogy milyen mértékegységgel mérünk, szivesen elfogadja tehát, hogy a jövőben az ilyen egyenleteket egyenesen az egyszerüsitett alakban fogjuk irni.

Saját 4 éves tapasztalatom után 7 éve van az eljárás használatban az egész országban, ez a 11 év megnyugtatott, hogy az eljárás jó.

43. hiba.

A harmadik egyenlettipus, amely az általános iskolás gyermeknek nagy gondot okoz, a helyiértékrendszeren alapuló egyenletek tipusa. Az ilyen egyenleteknél természetesen a felállitás az, ami gondot okoz a gyermeknek. Nézzük egy példán!

Egy kétjegyü szám jegyeinek összege 7. Ha a számjegyeket felcseréljük, az uj szám az eredeti kétszeresénél 2-vel nagyobb lesz. Melyik ez a szám?

Az egyenlet felállitása és megoldása:

2./10x+/7-x// +2 = 10/7-x/+x

Ebből: x=2 , /7-x/=5 , tehát a szám 25.

Miért okoz az egyenlet felállitása különlegesen sok nehézséget a gyermeknek? Több okból. Az első nehézséget az jelenti, hogy nehezen jön rá, hogy a kétjegyü szám egyik jegye x, a másik /7-x/. Erről a nehézségről már volt szó/35.hiba/ igy ezt most feleslegeg részleteznünk. A legsulyosabb problémát az okozza, hogy a gyermek nem érti meg, hogy ha az x áll elöl, akkor a szám értéke 10x+/7-x/, ha pedig az x áll hátul, akkor a szám értéke 10/7-x/+x . Végül - mint sok más esetben - nehézségek lehetnek abból, hogy a felállitásnál az amugy igy nagyobb számot akarja megszorozni a gyermek, illetve ahhoz akar hozzáadni /40.hiba./

Három hibaok együttes hatása esetén semmi okunk csodálkozni azon, hogy a gyermek fokozottan nehéznek érzi az ilyen feladatokat. Annyira, hogy a helyiértékes egyenletek közötti numerikus illetve logikai nehezitések a fentiekhez képest nem lesznek jelentősek. A három hibaokot természetesen elkülönitve kell vizsgálnunk és hatásukat ellensulyoznunk. Mindenesetre sokat segitünk, ha a 35. és 40. hibákat előre kiküszöböljük, igy a helyiértékes feladatoknál már csak egy hibaforrással állunkszemben. A három ok közül ugyanis az a domináns, hogy a gyermek a kétjegyü számot nem tudja 10x+y alakban felirni.

Az alsóbb osztályokban tanitottunk a gyermekeknek a tizes számrendszert, elemeztük a számokat helyiértékük szerint, raktuk össze helyiértékek alapján, természetes tehát, hogy felbukkan a gondolat, hogy ezen az előkészitésen mulik minden. A tapasztalat azonban ezt a feltételezést cáfolja: a legjobban előkészitett osztályban is komoly nehézségekkel állunk szemben a helyiértékes egyenletek felállitása terén. A tanárok munkája közötti különbség nem okoz jelentős eltérést a hiba gyakorisága szempontjából. Ennek a magyarázatát abban találom, hogy a helyiérték alapos ismerete aritmetikai szinten kevés ahhoz, hogy a gyermek algebrai szintre át tudja vinni. Ha a gyermek jól tudja, hogy a 83= 10.8+3, abból még nem tudja, hogy azt a kétjegyü számot, amely jegyeinek összege 11, fel lehet irni 10/11-x/+x vagy 10x +/11-x/ alakban.

A fentiek figyelembevételével a hiba megelőzésének illetve javitásának módját abban látom, hogy az óra elején előkészitésként ne csak elemeztessünk kétjegyü számokat helyiértékek alapján, hanem irassuk is le. 62=10.6+2, 43 =10.4+3, 28= 10.2+8, s.i.t. Még azt is fontosnak találom, hogy a tizeseket ugy irjuk le szorzatként, hogy a 10-et előre irjuk, s ezáltal az analógia jobban kihasználható legyen. Tapasztalatom szerint nagyon jó hatással vannak az olyan feladatok is az előkészitő részben, hogy irják le a gyermekek azokat a kétjegyü számokat, amelyeknél a jegyek összege 9, a jegyek különbsége 2, az egyik jegy a másik kétszerese, harmadrésze, s.i.t. Egyszerüen arról van szó, hogy az ismereteknek aritmetikai szintről absztraktabb algebrai szintre való emelésekor erősebben igénybe kell vennünk az analógia segitségét, mint általában szoktuk.

A fenti hibákon kivül sok esetben tapasztaljuk még, hogy a fogalomzavar komoly hibaforrás. Teljességre törekedni a tárgykör kimeritésében szinte lehetetlen. Az egyenleteknél nehézséget jelent még, ha arányos mennyiségekkel számolván egyik mennyiséget sem jelöljük x-szel, hanem annak többszörösével. Pl. Két testvér életkorának aránya 4:5, együtt 36 évesek. Milyen idősek? Az ilyen egyenletnél gyakran nehézséget jelent, hogy az egyik életkorát 4x, a másikat 5x jelöli a felállitásban. Ebben az esetben a megszokás tényezője is erősen "bedolgozik" a gyermek nehézségeinek kialakulásába.

A mértanban előforduló fogalomzavarok legtöbb esetben szemléltetési hibára vezethetők vissza. Igy pl. gyakori eset, hogy a merőleges fogalmát azonositják a vizszintes és függőleges fogalmával. Még az is előfordult, hogy egy kartárs csak hosszu magyarázat után fogadta el, hogy a vizszintes és függőleges nem matematikai, hanem fizikai fogalom. Egy alkalommal tapasztaltam, hogy egy tanár éppen 6 dm élü kockán szemléltette a kocka felszinét és térfogatát /valószinü, hogy éppen ekkora dobozt kapott véletlenül/, s a gyermekek megállapitották, hogy a kocka térfogata ugyanannyi dm^3, ahány dm^2 a felszine. Minden más kocka alkalmas lett volna a szemléltetésre, csak éppen a 6 egység élü nem. Valószinüleg ugyanilyen hiba várható, ha 4 egység élü négyzeten szemléltetjük a négyzet területét és kerületét.

A rossz szemléltetés miatt előálló fogalomzavarnak érdekes esetét láttam egy alkalommal, amikor egy tanár szépen elkészitett 2 mm vastag repülőmodellező lécből készült kerettel szemléltette a területegységeket. Az óra végén a gyermekek megállapitották, hogy 1 m^2= 40 dm^2, majd tanáruk elképedését látva javitották, hogy 1 m^2= 36 dm^2. A rossz szemléltetés miatt a gyermek terület helyett keretet látott, s azt hitte, hogy 1 m^2-ben 40 dm^2 van - t.i. minden oldalán 10 dm^2, majd észrevette, hogy a sarkokat kétszer számolta, igy 4 dm^2-t levont.

A fogalomzavar okozta hibák sem korlátozódnak az általános iskolára, sőt - mivel a középiskolában sok uj fogalmat ismer meg a tanuló, számuk ott csak fokozódik. Faragó László /22/ vizsgálataiban részletesen ismerteti, a középiskolában melyik hibák alapszanak a fogalom leszükitésén, a fogalom felületes általánositásán, félreértésén, az algebrai jelölés önkényességén, konkrét tartalmától való megfosztásán. s.i.t. Magam is tapasztaltam néhányszor,hogy középiskolás tanulók olyan kérdést tesznek fel, amely világosan utal a fogalom tisztázatlan voltára./"A sinus és a cosinus oldal vagy szög?" "$\alpha + \beta + \gamma$ mindig 180^o" "Nem lehet a=8, b=9, c=10, mert $a^2+b^2=c^2$" s.i.t./

A fogalomzavar okozta hibák nagyon könnyen megelőzhetők, ha a tanár olyan gonddal bőviti a régi fogalmat, alakitja ki az uj fogalmat, ahogy az I.osztály tanitója teszi a természetes számok fogalmának kialakitásakor. A gondos fogalomalakitás elmulasztása mindig komoly következményekkel jár, s ezek a következmények rendszerint időben jóval később jelentkeznek, igy javitásuk a tanitásunk rendjének, tervszerüségének felborulását veszélyezteti. Éppen ezért nagyon fontos, hogy ezeknek a hibáknak ne a javitását, hanem a megelőzését tekintsük feladatunknak.

5. Hiányos előismereteken alapuló hibák.

Természetes dolog, hogy ha a gyermek hiányos előismeretekkel áll egy matematika probléma előtt, - legyen az uj ismeret, alkalmazás - a hiány hibaforrásként fog szerepelni akkor is, ha kellőképpen meg nem értett fogalomról, akkor is, ha nem rögzitett, készségi vagy jártassági fokra nem emelt és éppen ezért elfelejtett ismeretről van szó. Az ilyen hibák jelentős részben függenek az előző osztályokban végzett tanári munkától, hiszen a megértett, begyakorolt anyag nehezebben merül feledésbe és könnyebben ujitható fel. Nyilvánvaló viszont, hogy pl. a szorzótábla nem ismerése komoly akadálya a szorzásnak és az osztásnak a természetes számok, törtszámok körében, az algebrai alapfogalmak ismeretének a hiánya az egyenletek megoldása terén, s.i.t. Az ilyen hibáknak se szeri, se száma, nem is érdemes velük külön foglalkozni, hiszen függetlenül attól, hogy hol bukkannak fel, a megelőzés módja az ismeretek értelemszerü elsajátitása és gondos rögzitése, a készségek és jártasságok kialakitása, a javitás módja pedig a hiányzó előismeretek utólagos megtanitása.

Vannak azonban olyan előismereti hiányosságok, amelyek vagy egyáltalán nem függenek a tanár jó vagy gyengébb munkájától, vagy csak kisebb mértékben. Az ilyen hibaokok viszont megérdemlik teljes figyelmünket, mert ellensulyozásuk gyakran komoly gondot és kipróbált eljárást igényel. Természetessen ezek az okok is más okokkal együtt hatnak, mint pl. a formalizmussal, a fogalom tisztázatlan voltával - ami egyébként szintén hiányos előismeret kategoriájába sorozható,-, megszokással, illetve a kifejezések zavaró hatásával. Leggyakrabban a gyermek tapasztalatlansága vagy életkori sajátosságai miatt állnak elő a hiányos előismeretek.

44. hiba.

A formalista hibák csoportjában hat olyan hibát is tárgyaltunk /12.- 17. hibák/, amelyekben a forma elnyomta a tartalmat a müveleti mechanizmus begyakorlásánál. A természetes számok /és a tizedestörtek/ szorzásánál is gyakran előfordul, hogy hibát követ el a gyermek a tartalom háttérbe szorulása miatt. Itt azonban egy ismeret hiánya okozza a hibát: a helyiértékek szerepének figyelembe nem vétele.

Helyes megoldás:	Hibás megoldás:
324.23	324.23
972	972
648	648
7452	10368

Az történt, hogy a gyermek a helyiértékek felcserélésével nem 23-mal, hanem 32-vel szorzott. A hibával kapcsolatban végzett első kisérletem annak a felmérését célozta, hogy milyen mértékben felelős a hiba bekövetkezéséért a tanár, a másik két kisérlet pedig a hiba javitásának módjára irányult.

1. kisérlet.

Öt különböző osztályban /falusi ill.városi iskolában/ végeztem a kisérleteket, öt különböző tanár vezette az osztályokat. Az A. és B. osztályokban olyan tanárok tanitottak, akik igen komoly, módszeres munkát végeztek, a helyiérték tudatositására jelentőségükhöz mért nagy gondot forditottak. A C.osztály kezdő, szorgalmas, de tapasztalatszegény tanár kezében volt, az osztály előképzettsége más területeken is hiányos volt. A D. és E. osztályban tanító kartársak viszont a müveletek mechanikus begyakoroltatását tekintették feladatuknak, a tanitásuknak volt bizonyos idomitás jellege, a tudatositással szinte semmit sem törődtek, A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás	Számolástechnikai hiba	Összesen
A. osztály	30 tanuló/91%/	2 tanuló/6%/	1tanuló/3%/	33 tanuló
B. osztály	28 tanuló/90%/	2 tanuló/7%/	1 tanuló/3%/	31 tanuló
C. osztály	19 tanuló/55%/	10 tanuló/28%/	6 tanuló/17%/	35 tanuló
D. osztály	9 tanuló/36%/	8 tanuló/32%/	8 tanuló/32%/	25 tanuló
E. osztály	8 tanuló/28%/	9 tanuló/31%/	12 tanuló/41%/	29 tanuló

Az egyes osztályok eredménye élesen mutat rá arra, hogy a hiba alapja a tudatositás hiánya. Nem lehet büntetlenül elhanyagolni a tizes számrendszer és a helyiérték tudatositását. A D. és E. osztályok tanárai utjának csődjét nem is az mutatja legélesebben, hogy a gyermekek kb. fele-fele arányban választották a helyes illetve hibás sorrendet, hanem a számolástechnikai hibát vétő gyermekek megdöbbentően magas száma. Ezek a kartársak ugyanis azzal az indokolással választották a mechanikus begyakorlás utját, hogy a müveleti mechanizmus hibátlan elvégzését tekintik legfontosabb feladatuknak. A C. osztály minden szempontból rosszabb helyzetben volt náluk, tanára is kezdő, eredménye mégis lényegesen jobb. A tudatos tanitás sikeres voltát azonban az A. és B. osztály illusztrálja a legszebben.

2.kisérlet.

Egy osztályban két fenti tipusu szorzási feladatot kaptak a gyermekek. Az első feladathoz nem kaptak semmi segitséget, a másodiknál viszont a megoldás megkezdése előtt helyiérték szerint elemeztük a szorzandót és a szorzót, a megbeszéltük, hogy a részletszorzatoknak mi lesz a helyiértéke. A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás	Számolástechnikai hiba
1.példa	20 tanuló/57%/	10 tanuló/29 %/	5 tanuló/14%/
2.példa	27 tanuló/77%/	5 tanuló/14%/	5 tanuló/9%/

3.kisérlet.

Az előbbinél gyengébb osztályban három hasonló szorzási feladatot kaptak a gyermekek. Az elsőhöz nem kaptak segitséget, a második feladatnál megbecsültük a várható eredményt ugy, hogy az a hibás eredménynél nagyobb, a helyes eredménynél kisebb legyen, közel a helyes eredményhez. A harmadik feladatnál az előző feladathoz hasonlóan a helyiérték alapján is elemeztünk a becslés mellett. A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás	Számolástechnikai hiba.
1.példa	16 tanuló/50%/	8 tanuló/25%/	8 tanuló/25 %/
2.példa	19 tanuló/59%/	4 tanukó/13%/	9 tanuló/28%/
3.példa	22 tanuló/68%/	4 tanuló/13%/	6 tanuló/19%/

Mind a becslés, mind a helyiérték elemzése bevált, mint javitási eljárás, azonban figyelemreméltó, hogy ennél a hibánál nem mutatkozik a becslés javára annyi előny, mint pl. a 7.hibánál.

A 3. kisérlet gyenge osztályában a becslés kevés javulást hozott, az elemzés eredményesebbnek bizonyult. Az eredmény értékelésénél azonban azt is tekintetbe kell venni, hogy csak a gyenge osztályban hozott ilyen kevés eredményt a becslés, és hogy a 3. példánál tapasztalt javulásban benne van a gyakorlékonyság tényezője is. Itt is a becslés javára szolgál az a tény, hogy igen kevés időt vesz igénybe, viszont ellene szól az, hogy pl. a 78-cal vagy 87-tel való szorzás eredménye között a különbség becsléssel nem könnyen észlelhető. Igy azt a következtetést kell levonnunk, hogy ennél a hibánál a becslés mellett a helyiértékek alapján való elemzésnek nagy a szerepe. Nem elhanyagolható az sem, hogy a számolástechnikai hibák száma hogyan változott: a 2.kisérletnél a becslés hatására csökkent, amit azzal magyarázok, hogy a becslés a gyermekek érdeklődését felrázta, s figyelmesebbek voltak, a 3. kisérletnél viszont emelkedett, de az emelkédés a hibás megoldók számának csökkenéséből következik: elvetették a hibás utat, s zavarukban vagy izgalmukban számolástechnikai hibát vétettek, amely - mellesleg - egy példával később már nagyjából eltünt.

45. hiba.

A matematikában sok dolgot ugynevezett megállapodások szabályoznak, például a jelöléseket, müveletek sorrendjét s.i.t. A megállapodás szó kissé megtévesztő, sehol nem ültek össze az emberek azért, hogy megállapodjanak bizonyos jelölések bevezetésében, legtöbb esetben megszokásokról van szó, amelyeket esetleg évszázadok óta igy csinálnak, s mivel megváltoztatásuk semmi előnnyel sem járna, betartásuk kötelező jellegü. Ezeket a megállapodásokat a matematikus ismeri, éppen ezért számára semmi gondot sem okoznak, a laikus - és köztük természetesen a gyermek is - gyakran nem ismeri, ha tanitották is az iskolában, nem vésődött be mélyen a tudatába, s könnyen elfelejti.

Ilyen megállapodás pl. az, hogy ha zárójelek beirásával másként nem irjuk elő, először a szorzást és az osztást kell elvégeznünk, azután az összeadást és kivonást. E megállapodás ismeretének hiánya okozza a következő hibát:

Helyes megoldás: $47 + 8.22 = 47 + 176 = 223$

Hibás megoldás: $47 + 8.22 = 55 \,.\, 22 = 1210$

A hiba elég gyakori és analóg hibák fordulnak elő szorzás és kivonás, osztás és összeadás, osztás és kivonás viszonylatában is. Kisérleteimet szorzás és összeadás müveletével végeztem, hogy az indirekt müveletek bekapcsolása ne okozzon zavart.

1.kisérlet.

Egy osztály két feladatot kapott. Az első a fenti volt, felirtam a táblára, s rábiztam a gyermekekre, hogy oldják meg. A második feladatot viszont diktáltam, erősen hangsulyozva, tagoltan a következőképpen:

32 /szünet/ + /szünet/ 8.12
gyorsan
kimondva

A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás	Hibás megoldás
1.feladat	18 tanuló /58%/	13 tanuló /42%/
2.feladat	21 tanuló /68%/	10 tanuló /32%/

A hibázók minden esetben a fent jelzett hibát követték el, a csekély számolástechnikai hibát figyelmen kivül hagytam. A 3 gyermek közül, aki javitott, egy kérte, hogy adjam vissza az első céduláját is, hogy a hibáját kijavithassa. Valószinü, hogy ez a gyermek az első feladatnál is bizonytalan volt abban, hogy melyik utat válassza, s a hangsulyozásom alapján állapitotta meg, hogy tévedett.

2. kisérlet.

A kisérlet célja annak a megállapitása, hogy a leirás sorrendje mennyiben befolyásolja a gyermekeket a hiba elkövetésében. A tanulók két feladatot kaptak minden utbaigazitás nélkül:

1./ 26 + 4.8 =   2./ 9.7 + 43 =

Szándékosan választottam olyan számadatokat, hogy mindkét feladatnál a hibás ut egyben numerikus könnyitést is jelentsen, mert a több hiba egyben a különbség élesebb kidomborodását is jelenti. A kisérlet eredménye:

	Helyes eredmény	Hibás eredmény
1. feladat	17 tanuló /57%/	13 tanuló /43 %/
2. feladat	26 tanuló /87%/	4 tanuló /13 %/

Számitottam arra, hogy az első feladatnál rosszabb lesz a százalékos arány, de a nagy különbség meglepett. Az első feladatnál a hibázók száma több, mint háromszoros: ez csak azzal magyarázható, hogy a megállapodás ismeretének hiánya mellett még egy tényező játszik szerepet, a gyermek a leirás sorrendjében kivánja elvégezni a müveleteket. Ahogy az olvasáskor a betüket, szavakat a leirás sorrendjében olvassa, ugy itt is a müveleteket a leirás sorrendjében végzi el.

3. kisérlet.

Ennek a kisérletnek a célja megvizsgálni, hogy a numerikus nehezitések mennyiben befolyásolják a hiba létrejöttét. A tanulók a következő öt feladatot kapták:

1./ 8 + 6.9 = 2./ 7.8 + 6 = 3./ 14 + 6.18 =

4./ 17+ 9.13 = 5./ 17.12 + 24 =

A kisérlet eredménye:

	Helyes megoldás:	Hibás megoldás:
1. feladat	5 tanuló /19 %/	21 tanuló /81 %/
2. feladat	24 tanuló /92 %/	2 tanuló /8 %/
3. feladat	4 tanuló /15 %	22 tanuló /85 %
4. feladat	4 tanuló /15 %/	22 tanuló /85 %/
5. feladat	22 tanuló /85 %/	4 tanuló /15 %/

A 3. és 4. feladat azonos tipusu és közel egyenlő numerikus nehézségü volt, azért iktattam be, hogy ellenőrizzem, szilárdaknak tekinthetők-e az adatok, vagy azonos fokon belül is lehetségesek hullámzások. A kisérletnél viszonylag sok volt a számolástechnikai apró hiba /valószinüleg a sok feladat miatt siettek/, ezeket figyelmen kivül hagytam az eredmény értékelésénél, csak a müveletek sorrendjére figyeltem. - A kisérlet markánsan igazolja, hogy a numerikus nehezités alig van befolyással a hiba létrejöttére illetve elmaradására. Ezt már a második kisérlet is sejteni engedte, a harmadik azonban nem állt meg a sejtésnél, hanem igazolt.

Leszögezhetjük tehát, hogy a hiba létrejöttének elsődleges oka az, hogy a gyermekek nem ismerik a megállapodást, hogy előbb a szorzást-osztást végezzük el, azután az összeadást-kivonást, ha zárójelek más sorrendet nem irnak elő. Erősen befolyásolja őket a feladat leirásának a sorrendje, természetes a számukra, hogy a leirás sorrendjében végezzék el a müveleteket. Ugyanakkor a numerikus nehezitésnek jelentéktelen a szerepe a hibák elkövetésében. Az emlitettek mellett meg kell még jegyeznem, hogy van egy tanári hiba is, amely a hiba létrejöttét támogatja. Gyakran halljuk, hogy az összeadást és a kivonást elsőrendü, a szorzást és az osztást másodrendü müveletnek nevezik. Ez az elnevezés matematikai szempontból sem hibátlan, pedagógiai szempontból pedig kifejezetten káros, mert azt sugalmazza, hogy az elsőrendü müveletet először végezzük el, a másodrendüt másodszor. A helyes elnevezés; magasabbrendü és alacsonyabbrendü müvelet.

A tanár feladata, tehát a megállapodás tudatositása és a helytelen elnevezés mellőzése. A hiba előfordulása esetén nagy türelemre van szükség, hogy a gyermek megszokja a megállapodás betartását. Ezenkivül természetesen arra, hogy a tanár tudja, hogy ilyen hiba bekövetkezésére számitani kell.

46. hiba.

Az általános iskolai matematikatanitás egyik legnagyobb problémája a törtszámmal való szorzás értelmezése. A természetes számok körében a szorzást, mint sorozatos összeadást értelmeztük, s ez a definició nem tartható tovább, amikor a törtszámokkal akarunk szorozni. Milyen definiciót adjunk a használhatatlanná vált sorozatos összeadás helyett? Nyilvánvaló, hogy nem adhatjuk a Cauchy féle definiciót, hiszen az a gyermek életkorát magasan meghaladó fejlettséget kivánna meg. Dogmatikus volna az eljárásunk, ha a törtek szorzatát egyszerűen $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

módon definiálnánk. Arról sem szabad megfeledkeznünk, hogy az általános iskolában általánosan az az álláspontunk, hogy nem definiálunk, hanem szemléltetünk, s a tapasztaltakat értelmesen megfogalmazzuk.

A probléma érdekessége az ,hogy a tanár oldaláról, pontosabban a matematika oldaláról vetődik fel, a gyermek oldaláról nem. A gyermek természetesnek veszi, hogy ha törtszámok vannak, akkor azokkal szorozni is lehet, osztani is lehet, s eszébe sem jut azon gondolkodni, hogy mit értünk két törtszám szorzatán vagy hányadosán. Sok képesités nélküli, illetve kellő tudás nélküli pedagógus sem érti, hogy mit fontoskodik a tankönyv ezen a számára jelentéktelen kérdésen.

A gyakorlatban a törttel való szorzást a Jeftusevszkij féle eljárás alapján ismertetjük, amely a törttel való szorzást ugy értelmezi, mint a törtrész kiszámitását az egészből./ $\frac{3}{4}$-del szorozni annyit jelent, mint $\frac{3}{4}$ részt kiszámitani./ Példasorozatot kap a gyermek, hogy ha pl. 1 kg kockacukor ára 12 Ft, mennyibe kerül 2, 3, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $1\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{5}$ kiló. Összekapcsoljuk a gyermeknek azt az ismeretét, hogy az egységárat szorozni kell a mennyiséggel, azzal a tapasztalatával, hogy kevesebb áruért kevesebbet kell fizetni, s a példasor ügyes megválasztásával, a fokozatok szigoru betartásával elérjük, hogy a gyermek elfogadja a szorzás fenti módon leirt értelmezését, mellékesen hozzászoktatjuk a gyermeket, hogy a szorzás nem feltétlenül növelő müvelet. /21. hiba./

Annak ellenére, hogy a Jeftusevszkij féle eljárás bevált, tapasztaljuk, hogy a törttel való szorzást és a törtrész kiszámitását a gyermek nem azonositja egymással, s ebben tulajdonképpen igaza is van. Ha 6-nak a $\frac{2}{3}$ részét akarjuk kiszámitani, akkor egy az életben előforduló matematikai feladatot akarunk megoldani, a $6 \cdot \frac{2}{3}$ szorzás viszont azt jelenti, hogy két racionális számhoz hozzárendelünk egy harmadikat. Ilyenképpen a gyermek számára a szöveges feladat megoldásánál mindig a következtetés marad a természetes ut, a törttel való szorzás, mint a feladat megoldásának a módszere szekundér jellegü marad, s az iskola befejezése után hamar feledésbe merül

1. kisérlet.

Két osztályban a törttel való szorzás és osztás megtanitása után feladtam a gyermekeknek a következő feladatot: 288 mázsa cukorrépa $\frac{3}{4}$ részét beszállitották a gyárba. Hány mázsa cukorrépát vittek a gyárba?

55 gyermek /89 %/ következtetéssel számolt /kiszámitotta negyedrészét és szorozta 3-mal./ Közben 2 gyermek számolástechnikai hibát vétett.

7 gyermek elosztotta a 288-at $\frac{3}{4}$ -del. /11 %/ A kapott 384 hányadost, mint a feladat megoldását 4 gyermek elfogadta, 3 azonban lehuzta és nem dolgozott tovább.

2. kisérlet.

Egyéni vizsgálat azzal a 4 tanulóval /A,B,C,D/, akik az előző kisérletnél elfogadták a hibás eredményt és azzal a 3 tanulóval /E,F,G/ akik az eredményt lehuzták.

A,B,C,D tanulókkal:

Mennyi az eredményed? 384.

Hány mázsa répát szállitottak a gyárba? 384 mázsát.

Mennyi volt összesen? /Több-kevesebb bizonytalansággal/ 288 mázsa.

Hogyan tudtak több cukorrépát bevinni, mint amennyijük volt?

A. Nem tudom. - B. /Hallgat, azután/ 384-ből szállitottak be 288-at.

C. és D. Akkor nem jó a példa.

E, F, G tanulókkal:

Miért huztad át? Mert nem jó.

Akkor számitsd ki jól! Nem tudom.

Miért? Mert nem lehet kiszámitani.

288 mázsának nincs 3/4 része? E hallgat. F: Van, de nem tudom kiszámitani. G: Van, de nem lehet kiszámitani.

400-nak számitsd ki a 3/4 részét! E. nem tudja F. és G. kiszámitja. Most 288-nak számitsd ki a 3/4 részét. F és G kiszámitja következtetéssel.

3. kisérlet.

$\frac{3}{4}$ zsák burgonya $\frac{2}{3}$ részét megettük. Hány zsák burgonyát ettünk meg?

A feladatot az első kisérletben szereplő két osztály kapta. az 1. kisérlettel egyidőben. Eredmény:

Szorzással számolt helyesen..............2 tanuló /3 %/

Következtetéssel számolt helyesen........53 tanuló /86%/

Osztással számolt hibásan és a rossz eredményt elfogadta..........................7 tanuló /11%/

A következtetéssel okoskodók igy gondolkodtak: $\frac{3}{5}$ zsák $\frac{1}{3}$ része $\frac{1}{3}$ zsák, $\frac{2}{3}$ része $\frac{2}{5}$ zsák burgonya. osztással ugyanaz a 7 gyermek dolgozott, mint az előző kisérletnél, de itt mind elfogadta a hibás eredményt. $/\frac{9}{10}/$

A feladatot a természetes számok körében egyetlen tanuló sem akarta szorzással megoldani, a törtek körében is csak 3%. Ez a két jó tanuló is a törtszámokhoz kötötte a törttel való szorzás fenti értelmezését. A 11 %, aki osztással számolt, bizonyos mértékig nyelvi okokból /részt kiszámitani=osztani/ hibázott, s meg kell jegyezni, hogy ezek gyenge tanulók lévén nem az elegánsabb megoldást, hanem a sablont keresték.

47. hiba.

A törttel való szorzáshoz hasonló problémákat vet fel a törttel való osztás is. A pedagógiai gyakorlat itt is azonos a törttel való szorzás bevezetésénél használt gyakorlattal, a hibázási lehetőségek és a számolástechnikai nehézségek azonban megnövekszenek,mert az osztás a szorzás inverz müvelete, s igy természetszerüleg nehezebb.

A gyermek a törttel való osztást még nehezebben hajlandó ugy értelmezni, mint a törtrészből az egész kiszámitását, s álláspontja teljesen érthető. Egyrészt igaza van, mert a szorzáshoz hasonlóan itt is más egy szöveges feladat megoldása és más egy szám hozzárendelése két racionális számhoz. Ezenfelül itt nehéziti az értelmezés elfogadását az is, hogy mig a törttel való szorzást szemléletesen magyarázva jutottunk el a törtrész kiszámitásához, itt a bennfoglaló osztás szemléletes magyarázatot ad a törttel való osztásra, s ez a magyarázat nem vezet az egész kiszámitásához tört részéből.

/ $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$, mert $\frac{2}{3}$ kg sóból $\frac{1}{6}$ kg-ot éppen 4-szer tudunk kimérni./

Mindezek ismeretében várható, hogy ha a gyermek feladatot kap, amelyben törtrészéből kell az egészet kiszámitania, következtetéssel fog okoskodni, nem pedig törttel való osztással.

1. kisérlet.

A 46. hibánál vizsgált két osztállyal folytattam le a kisérleteket. A tanulók minden külön utasitás nélkül kapták a következő feladatot:

A tej $\frac{3}{8}$ részét, 210 litert vajnak dolgozták fel. Menynyi tejet fejtek összesen? - Az eredmény:

54 gyermek /89 %/ következtetéssel számolt. /Kiszámitotta $\frac{1}{8}$ részt, majd az egészet.

5 gyermek /8 %/ helyesen osztással számitotta ki a feladatot.

2 gyermek /3 %/ szorzott, de mivel látta, hogy az eredmény képtelenség, hozzáadta a szorzatot a 210 literhez, hogy nagyobb számot kapjon.

2. kisérlet.

Ugyanazok a tanulók ugyancsak utasitás nélkül kapták a következő feladatot: A lekváros üveg $\frac{3}{4}$ kg lekvárral $\frac{2}{3}$ részéig telt meg. Mennyivel lenne tele? - A kisérlet eredménye:

47 gyermek /77 %/ számolt következtetéssel. /Kiszámitották $\frac{1}{3}$ részt, majd ennek a háromszorosát./

Helyesen osztással dolgozott 5 tanuló /8 %/

Osztással dolgozott, de az osztandót és az osztót felcserélte 4 tanuló /7 %/ Nem osztott, hanem szorzott 5 tanuló / 8 %/

A két kisérlet eredményeként megállapithatjuk, hogy valóban a gyermekek tulnyomó többsége következtetéssel számolt. A 46. hiba kisérleteivel összehasonlitva azonban ér bennünket meglepetés. Az 1. kisérletnél a hibázók száma jelentősen csökkent, s a két hibázó magatartása a "trial and error" módszerre vall, tehát valószinüleg a leggyengébb képességü gyermekekről van szó, Ez a javulás feltétlenül az eredményes tanitás és a példamegoldásokban való jártasság kifejlődésével magyarázható. Pontosabb azonban, az, hogy mig a szorzás 1. kisérleténél senki sem számolt törttel való szorzással, itt 5 tanuló választotta a törttel való osztás utját, s ugyanez az 5 gyermek a 2. kisérletnél is kifogástalan munkát végzett. Ha ez nem is nagy százalék, mégis fejlettebb gondolkodást sejtet. Az 5 tanulóval való egyéni beszélgetés azonban szétoszlatta az ilyen illuziókat, mert a kapott válaszok nem a megértésről, inkább a sablon kialakulásáról tanuskodtak: "Mert most az osztást tanuljuk." "Mert 3/8 részről van szó." "Mert osztani kell." Volt olyan tanuló, aki arra utalt, hogy a 46. hibánál végzett 3. kisérletnél megdicsértem azt a két tanulót, aki szorzott a törttel, most az osztást tanuljuk, gondolta, hogy most az osztásért jár dicséret. Hogy a tudás mennyire bizonytalan, arra mutat a 2. kisérletnél a hibák számának emelkedése és a jellegzetes sablonhiba /osztandó-osztó felcserélése/ megjelenése.

A 46. és 47. hibáknál tapasztaltak el kell hogy gondolkodtassanak bennünket, s szét kell, hogy oszlassák azokat az illuzióinkat, hogy a törttel való szorzás és osztás kérdése véglegesen megoldottnak tekinthető. Jelenleg a mi törekvéseink csak annyit érnek el, hogy a gyermek kap egy megfelelő értelmezést a szorzásra és az osztásra, a hasonló feladatok megoldására azonban csak kivételes esetekben, tanári behatásra alkalmazza a törttel való szorzást és osztást.

Az emlitett hibákon kivül még sok esetben tapasztaljuk,hogy a gyermek életkora miatt, előismeretei miatt tévutra megy, rosszul gondolkodik. Igy pl. tapasztalható, hogy a nagy számokról alkotott fogalmai nem világosak. Ameddig a közvetlen szemlélettel el tudunk menni, nincs baj, hiszen a gyermek el tudja ujból képzelni azt, amit látott. A fantáziája azonban nem elég tapasztalt és fegyelmezett ahhoz,hogy pl. a millióban és a billióban egymástól nagy mértékben különböző számot lásson. Soha nem akad a kezébe millió forint vagy billió forint, igy a két számot nagynak, éppen ezért közel egyenlő értékünek tekinti. Pedig pl. 1 millió másodperc nincs egészen 12 nap, 1 billió másodperc pedig közel 32 ezer év. Hasonló példákat tucatszámra lehetne felhozni, s a nyelvünkben élő kifejezések is támogatják a téves gondolkodást. "Ezerszer megmondtam neki!" "milliószor csókol", "szunyogok milliárdjai" stb. kifejezések mindennaposak, pedig pl. ha egy "megmondás" 1 percig tart, akkor napi 8 órai munkaidővel az ezerszer való megmondás két napig, a milliószor való megmondás pedig közel 6 évig tartana. Ugyanakkor az ilyen kifejezések elmaradása nyelvünk elszintelenedését, elszegényedését vonná maga után, igy nem tekinthetjük célunknak az ilyen kifejezések megszüntetését.

Gyakran vannak a gyermeknek - elsősorban életkora miatt - elképzelési nehézségei a mértanórákon. Igy pl. a szög fogalmának kialakitásánál tapasztalható, hogy a gyermek azt a szöget tekinti nagyobbnak, amelynek hosszabbra rajzolták a szárait, s igy a 30 fokos szög jó hosszura rajzolt szárakkal nagyobb a számára még egy rövid szárakkal rajzolt derékszögnél is. A magyarázat természetesen az, hogy a gyermek nem tudja megérteni, hogy a szög szára végtelen hosszu, s csak a szár egy tetszőleges hosszu részét rajzoljuk le. Módszertani hibák is támogathatják ezt az álláspontot, pl. ha a szög másolásakor a keletkezett háromszögekben nem elégszünk meg a szögek egyenlőségének bemutatásával, hanem a két háromszög egybevágóságát is hangsulyozzuk.

A szögek tanitásánál nagyon fontos a jó szemléltetés. Egyidőben még a tankönyvbe is belekerült a szögeknek papirtépéssel való szemléltetése, ami arra az eredményre vezetett, hogy a gyermek pl. csak a 45 fokos szöget tekintette hegyesszögnek. Ha ehelyett pl a körző szárainak kinyitásával a szöget változásában mutatjuk be, dialektikus képet nyujtunk a papirtépésnél bemutatott metafizikus kép helyett. Gyakran tapasztalható, hogy a térmértanban még a középiskolásoknak, főiskolásoknak is nehéz egyes dolgokat elképzelni. A térérzék nem fejlődik magától, fejlesztéséről gondoskodni megfelelő gyakorlatokkal először az általános iskolának kötelessége. E tekintetben tapasztalunk törekvéseket, vannak eredmények, de korántsem kielégitők.

A gyermek későbbi tanulmányai során a hiányos előismeretek által okozott hibák száma az ismeretek emelkedésével fokozódik, de jellege megváltozik. Egyre inkább háttérbe szorul az életkori szempont, helyette a feledés, a különböző mértékü előképzettség, a képességek differenciálódása és a tanári munka különböző foku eredményessége kap nagyobb szerepet.

6. Matematikai müszavakból, kifejezésekből eredő hibák.

A matematikai müszavak és kifejezések főleg abban az esetben válnak hibaforrássá, ha a matematikai tartalmuk nem azonos azzal, amit a szó a mindennapi életben jelent, ha a szót a matematikán kivül az élet más területén nem használják, ha a szó nem elég szemléletes. Ezekben az esetekben a müszót vagy kifejezést egy matematikai fogalom jelöléséhez köti a gyermek, s nem gondol arra, hogy ezt a jelölésen kivül bármi másra is használni lehetne. Ha azután például egy feladat szövegébe belefogalmazzuk a müszót, a gyermeknek komoly nehézséget okozunk vele.

A müszavakat tanitanunk kell, az általános iskolai tananyag elsajátitásához is, a továbbtanuláshoz is szükségesek. Ilyen formán ez a hibaforrás nem küszöbölhető ki. Az N.D.K. iskolai tankönyveiben láttam, hogy ők az általános iskolában még az összeadás, kivonás, szorzás és osztás szó helyett is a megfelelő latin kifejezéseket használják /additio, substractio, multiplicatio, divisio/. Kérdésemre Dietz potsdami módszertan professzor ezt azzal indokolta, hogy a müszavakat a kezdet kezdetén kell megtanitanunk, s ők inkább vállalják az általános iskolában a hibák elszaporodásával járó többletmunkát, minthogy ezt a feladatot későbbre hagyják, s ne legyenek precizek. Hogy valóban precizitásra törekszenek, azt mutatja, hogy a differenciálhányadost viszont nem Differentialquotientnek nevezik, hanem Ableitungnak, mert az nem hányados, hanem hányadosok sorozatának határértéke. - Ha az N.D.K. metodikusainak ezt az álláspontját tulzásnak is minősitjük, mindenesetre a müszó szükséges, a várható hibákat ismernünk kell, hogy kiküszöbölésükről gondoskodhassunk.

48. hiba.

A "hányados" müszót csak az iskolában hallja a gyermek, az életben ezt a szót semmi más fogalom jelölésére sem használjuk. Az iskolában az osztás eredményét jelöljük vele, szemléletes tartalma, hogy t.i. azt jelöli, hogy az osztandó hányszorosa az osztónak, vagy az osztó hányadrésze az osztandónak ritkán kerül elő. Várható tehát, hogy a gyermek, amikor a szöveges feladat szövegében találkozik ezzel a szóval, zavarba jön.

1.kisérlet.

Két párhuzamos V.osztályban, amelyek megközelitően ugyanazon a szinvonalon álltak és ugyanaz a tanár tanitotta őket, két egymás után következő órán feladtam egy feladatot két fogalmazásban:

A. osztály. Két szám összege 10, az egyik négyszer akkora, mint a másik. Melyik ez a két szám?

B.osztály. Két szám összege 10, hányadosa 4. Melyik ez a két szám?

Nyilvánvaló, hogy ugyanazt a feladatot a B. osztály sokkal nehezebb fogalmazásban kapta, hiszen a feladat megértéséhez fel kellett ismerniök, hogy az, hogy a két szám hányadosa 4 azt jelenti, hogy az egyik szám négyszer akkora, mint a másik. Várható volt tehát, hogy a B. osztály rosszabb eredményt mutat. A kisérlet eredménye:

	A.osztály	B. osztály
Helyes megoldás	25 tanuló /83 %/	4 tanuló /14 %/
Hibás megoldás	3 tanuló /10 %/	7 tanuló/ 25 %/
Nem oldotta meg	2 tanuló / 7 %/	17 tanuló /61 %/

Előzetes feltevésemet a kisérlet szinte megdöbbentő mértékben igazolta. Nem számitottam arra, hogy a helyes megoldók száma hatodrészére fog csökkenni, s a B. osztályban az osztálynak több, mint a fele hozzá sem fog a példa megoldásához. Az elkövetett hibák különböző jellegüek voltak, de nem minősithetők számolástechnikai hibának, mert a megoldás utját nem látták, kapkodva kerestek valami megoldást.

A nagyméretü különbség arra inditott, hogy másnap forditva adjak fel hasonló feladatot, az A. osztály kap nehezebb fogalmazást. El kellett ugyanis döntenem, befolyásolta-e az eredményt a két osztály között esetleg meglevő szinvonalkülönbség.

A. osztály: Két szám összege 18, hányadosa 5. Melyik ez a két szám?

B. osztály: Két szám összege 18, az egyik ötször akkora, mint a másik. Melyik ez a két szám?

A kisérlet eredménye:

	A.osztály	B. osztály
Helyes megoldás	4. tanuló /13 %/	23 tanuló /80 %/
Hibás megoldás	8 tanuló /27 %/	1 tanuló /3 %/
Nem oldotta meg	18 tanuló /60 %/	5 tanuló /17 %/

Az eredmény igazolta, azt, hogy az osztályok között nincs számottevő szinvonalkülönbség, a hiba oka kizárólag a hányados szó által okozott zavar.

2. kisérlet.

A következő évben egy osztályban három időpontban végeztem kisérletet. Az év során rendszeresen hozzáfüzték az osztályban minden osztás eredményéhez a hányados szó magyarázatát. Elosztották pl. 1027 79-szer akkora, mint a 13. /Esetleg: mert a 13 79- része 1027-nek./ Ezenkivül az óra elején a fejszámolásban is gyakori volt az ilyen feladat: 63:9=7, mert a 63 7-szer akkora, mint a 9. 91 hétszer akkora mint a 13, tehát a hányadosuk 7. Ez az előkészités és tudatositás rendszeres volt. A három időpontban feladott három példa:

Október: Két szám összege 10, hányadosa 4. Melyik ez a két szám?

November: Két szám összege 21, hányadosa 6. Melyik ez a két szám?

Február: Két szám összege 45, hányadosa 4. Melyik ez a két szám?

A csekély numerikus nehezités a gyakorlékonysági tényező ellensulyozását célozta. A kisérlet eredménye:

	Október	November	Február
Helyes megoldás	5 tanuló /17%/	7 tanuló /23%/	17 tanuló/59%/
Hibás megoldás	9 tanuló/30%/	15 tanuló /50%/	11 tanuló/38%/
Nem oldotta meg	16 tanuló/53%/	8 tanuló /27%/	1 tanuló/3%/

A hányados szó rendszeres tudatositása, tartalommal való megtöltése nem hozott száz százalékos sikert, de nem is volt eredménytelen. Feltünő, hogy 1 hónap mulva a helyes megoldók száma még alig emelkedett valamit, a feladathoz hozzá sem kezdők reménytelennek látszó tömege azonban megbolydult, s ha hibás eredményt is produkált, de megkisérelte a feladatot megoldani. A februári eredmény azután megmutatja, hogy a probléma - bár mindig nehéz marad - türelmes szoktatással, következetességgel megoldható.

A hányados - mint annyi más matematikai müszó - jellegzetesen nyelvujitás korabeli szó. Egyáltalán nem szemléletes, de mivel a magyar nyelvben nincs jobb szavunk, számunkra nem marad más, mint vállalni a hiba kiküszöbölésével, illetve korlátok közé szoritásával járó többletmunkát.

49. hiba.

A hányados müszóhoz hasonlóan nehézséget jelent a gyermek számára a különbség müszó is. A különbség szónak már van a mindennapi életben is tartalma, amely nem esik közvetlenül a matematikai fogalomba, s ha ez a tartalom nem is azonos a matematikai tartalommal, hasonló vonásai vannak. Várható tehát, hogy a különbség müszó belefogalmazása a feladatba szintén gondot fog jelenteni, de nem akkorát, amekkorát a hányados jelentett.

Kisérlet.

Két párhuzamos V.osztályban, amelyek ugyanannak a tanárnak a kezében voltak, a közelitőleg ugyanazon a nivón álltak adtam fel egy feladatot két fogalmazásban:

A. osztály: Két szám összege 125, az egyik 35-tel nagyobb a másiknál. Melyik ez a két szám?

B. osztály. Két szám összege 125, különbsége 35. Melyik ez a két szám?

A probléma ugyanaz, mint a 48. hiba l. kisérleténél, csak most a különbség müszó zavaró hatását vizsgáljuk.

A kisérlet eredménye:

	A. osztály	B. osztály
Helyes megoldás	25 tanuló/83%/	19 tanuló /66%/
Hibás megoldás	5 tanuló/17%/	9 tanuló/31%/
Nem oldotta meg	------------	1 tanuló/3 %/

A tapasztalat hasonlit a 48. hibánál tapasztaltakra: a müszó bekapcsolása zavart okozott, megnövelte a hibás megoldások számát. A százalékarányt vizsgálva azonban itt sokkal kedvezőbb a kép,amit csak azzal magyaázhatunk, hogy a különbség müszó kisebb zavart okoz a hányadosnál.

A különbség szó helyett valószinüleg célszerübb volna ennél a müveletnél a maradék műszót használni, mert a kivonás szempontjából is szemléletesebb, kifejezőbb, s valószinüleg még kevesebb volna a hibázók száma. Ezt azonban nem tehetjük meg, mert a maradék szó le van kötve az osztás maradékának jelölésére, s ha a szót két értelemben is használnánk, az osztásnál fellépő nehézségek megnövekednének, s az itt lecsökkent zavaró hatás ott felfokozottan jelentkezne.

A hibával kapcsolatban több kisérletet nem tartottam szükségesnek végezni, hiszen a javitás utja nyilvánvalóan itt is azonos az előzőnél meghatározottal: türelmes és következetes nevelő munka.

50. hiba.

A mindennapi életben igen gyakran találkozunk az egyes arányossággal. Valamely áruból többet vásárolunk, arányosan többet fizetünk érte, valamely anyagból nagyobb térfogatunak arányosan nagyobb a sulya, valamely munkából több idő alatt arányosan többet tudunk elvégezni s.i.t. A gyermek már az alsó tagozatban tucatszámra kap olyan feladatot, amelyek egyenes arányossággal oldhatók meg, s amikor a felső tagozatban az egyenes arányosságot tanulja, tulajdonképpen a régebbi ismereteit, tapasztalatait tudatositjuk.

Éppen azért, mert a gyermek, állandóan ilyen jelenségeket tapasztalt, lép fel az egyenes arányosság tanitásakor az a hiba, hogy a gyermek azt hiszi, ha egy mennyiség növekedése maga után vonja a másik mennyiség növekedését, akkor ez a növekedés feltétlenül egyenes arányosság. Ugyanez áll a csökkenésre is. A gyermek egyszerüen azonositja a növekedést az arányos növekedéssel, a csökkenést az arányos csökkenéssel. Ez a hiba kisérlettel nehezen volna lemérhető, de tapasztalatom szerint igen gyakori, a gyermek már nem is mondja az "arányos" szót.

Az elmult években volt olyan kezdeményezés, hogy a kérdést fogalmazási eszközökkel oldjuk meg: irjuk körül az arányosságot. Ez a kisérlet azonban nem hozta meg a várt sikert. Nézzük egy konkrét példán: 1 kg burgonya ára 2,80 Ft, mennyibe kerül 2,3,4...kg.burgonya? Kétszer, háromszor, négyszer... többe. A gyermek megérti a konkrét feladat megoldását, de ha általánosan akarjuk ugyanezt megfogalmaztatni vele: kétszer,háromszor,... annyi burgonya kétszer, háromszor,... annyiba kerül - akkor ezt hosszadalmasnak tartja, s az első alkalommal, amikor ugy véli, hogy a tanára nem figyel oda, egyszerüen annyit mond, hogy több burgonya többe kerül.

Kitünően bevált viszont az az eljárás, amikor ellenpéldával mutatjuk be, hogy abból, hogy az egyik mennyiség növekedése maga után vonja a másik növekedését, korántsem következik, hogy a növekedés egyenes arányosságot jelent. Néhány ilyen ellenpélda:

1./ Az ujszülött sulya 3 kg, egy éves korára 9 kg lesz. Ebből nem következik, hogy évente 6 kg-mal lesz nehezebb, azaz nem lesz 10 éves korára 63 kg, még kevésbé 50 éves korára 303 kg.

2./ Az ujszülött magassága 50 cm, ötéves korára 1 méter lesz. Nem lesz viszont 10 cm-rel minden évben magasabb, hiszen akkor 20 éves korában 2,5 méter, 45 éves korában pedig 5 méter magas lenne.

3./ Ha egy négyzet oldalát kétszeresére, háromszorosára növeljük, a területe nem kétszer, háromszor akkora lesz, hanem négyszer, kilencszer akkora. Ez az ellenpélda különösen azért jó, mert ugyanakkor a kerület arányosan növekszik a négyzet oldalával. Azonkivül általában helyes, ha számtani feladat illusztrálására mértani eszközt használunk fel.

4./ Rajzoljuk egy derékszögü háromszöget és mérjük meg az oldalait. Az egyik befogót hagyjuk változatlanul, a másik befogót és az átfogót növeljük. Nyilvánvaló, hogy a befogó növekedésével nő az átfogó is, a növekedés azonban nem lesz arányos, Ennek a példának ugyanazok az előnyei, mint az előzőnek, hátránya viszont, hogy a növekedés közelitőleg egyre inkább arányossá válik.

Az ellenpéldával való plasztikus megvilágitásnak előnye az , hogy kevés időt vesz igénybe, önállóságra nevel, szemléletes és ezért eredményes.

51. hiba.

A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös tanitásánál még egyetlen egyszer sem fordult elő, hogy valamelyik általános iskolai tanitványom meg ne kérdezze: hogy lehet a legnagyobb közös osztó kisebb a legkisebb közös többszörösnél. Más kartársakkal való beszélgetésekből és szakfelügyelői tapasztalataimból az derült ki, hogy ez a kérdés nem véletlenül nálam vetődött fel, hanem mindenütt felmerül, hacsak a tanár tulzott keménységével a megfélemlités légkörét meg nem teremti maga körül, s a gyermekek félelmükben nem mernek kérdezni.

A probléma oka nyelvi és lélektani jellegü. A gyermeknek igen erős hajlama van szuperlativuszokban gondolkodni, neki minden a legjobb, legszebb, legrosszabb, legnagyobb, stb. a világon. Természetes tehát, hogy a legnagyobb közös osztó kifejezést hallva, a három szóból a legnagyobb vésődik be legerősebben a tudatába, s hasonlóképpen a legkisebb közös többszörös kifejezésből a legkisebb szó ragad meg benne a legjobban. Ezek után érthető, hogy felvetődik benne a kérdés, hogy lehet a legnagyobb kisebb a legkisebbnél.

Tekintettel arra, hogy a jelenleg érvényben levő Tanterv a számelméleti alapismeretek tanitását kihagyta az általános iskolai tananyagból, a probléma jelenleg szünetel az általános iskolában. A kihagyás oka azonban a számtan-mértan óraszámának a csökkentése volt, s igy remélhető, hogy a heti 1 óra remélt visszaadásával /jelenleg a szocialista országok közül hazánkban a legalacsonyabb a számtan-mértanórák száma/ és a matematikatanitás modernizálásával a számelméleti alapismeretek visszakapják az iskolai tananyagban a helyüket, s igy a kérdés tárgyalása ma sem felesleges.

A kérdés végleges megoldása az lenne, ha a két kifejezés helyett - amelyek szolgai forditások németből /Grösster gemeinsamer Teiler, kleiner gemeinsamer Vielfache/ - valami jobb magyar kifejezést találnánk. Ez azonban eddig nem sikerült. Próbálkoztak a legnagyobb közös osztó helyett az "egyszerüsitő szám" a legkisebb közös többszörös helyett a "közös nevező" kifejezéssel, ezek a törekvések azonban eleve kudarcra voltak itélve, mert csak egy gyakorlati alkalmazásra utaltak, nem pedig a fogalom matematikai tartalmára, igy a tudományosság elve ellen is vétettünk, a továbbtanulást sem segitettük elő. Jobb kifejezés hiányában más utat kellett keresnünk.

Általános iskoláinkban a következő gyakorlat alakult ki:

1./ Közösen megállapitjuk, hogy minden számnak végtelen sok többszöröse van, osztója pedig csak néhány, rendszerint kevés.

2./ Megállapitjuk, hogy a valódi osztók mind kisebbek a számnál, a többszörösök pedig mind nagyobbak, akár milliós nagyságrendüek is.

3./ Megállapitjuk, hogy az osztók mindig kisebbek a többszörösöknél, még a legnagyobb is.

Ezt az előkészitést minden szempontból kifogástalannak kell minősitenünk, hatása azonban ennek ellenére sem száz százalékos. Egészen gyenge tanulóknál a probléma megmarad, s a kérdés elhangzására mindig készen kell lennünk. Ebben az esetben tehát egyéni foglalkozásra, korrepetálásszerü magyarázatra van szükség.

A közepes és annál jobb tanulók számára az előkészítés mindig elég.

52. hiba.

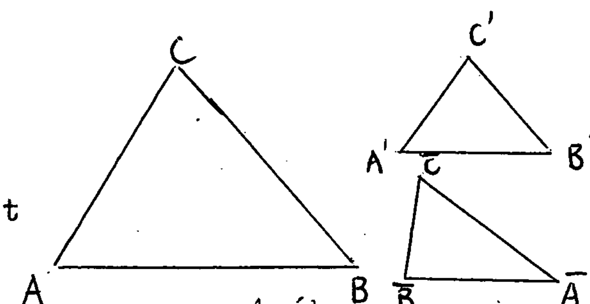
Mértanórán sok gondot okoz tanárnak, tanulónak egyaránt a hasonlóság szó, mert más a matematikai tartalma, mint a mindennapi életben használt tartalma. A matematikában precizen definiáljuk a hasonlóságot, ebből az általános iskolában megelégszünk a poligonok hasonlóságának definiciójával, az életben a hasonlóság szubjektiv megitélést tükröz, hasonló-e a fiu az apjához, egy szindarab egy könyvhöz stb, s a szubjektiv megitélést az sem zavarja, ha az apának pl. arcsérülése van, a fiunak nincs.

Az emlitett pontosan definiált fogalom - szubjektiv megitélés eltérésen kivül zavarja a gyermeket az is, hogy a hasonlóságot legtöbbször nagyitással, kicsinyitéssel magyarázzuk, s vetitéssel szemléltetjük. Ez a szemléltetés kézenfekvő, hiszen a moziban a film vetitéssel való felnagyitása ma már az emberek számára semmi különlegeset sem jelent. Ugyanakkor azonban azt eredményezheti, hogy a gyermek a hasonlóságot összekeveri a hasonlósági helyzettel: csak azok az idomok hasonlók a számára, amelyek centrálisan perspektivak, de azok mindig, akkor is ha az oldalak aránya és a szögek nem egyenlők, viszont az elforgatás már szerintük elrontja a hasonlóságot.

A hasonlósággal kapcsolatban a következő kisérleteket végeztem:

1.kisérlet.

Az ábra szerint felrajzoltam a táblára egy háromszöget

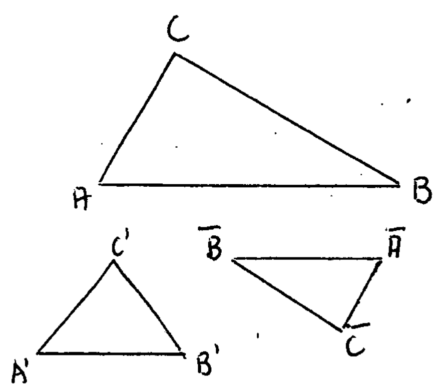


4.ábra.

és két kisebb háromszöget, amelyek közül csak a felső volt a nagy háromszöghöz hasonló. Megkérdeztem a gyermekeket, hasonló-e a nagy háromszöghöz mindkét kis háromszög, vagy csak az egyik, s melyik?

Annak ellenére, hogy az alsó háromszögben nemcsak sorrendi, de nagysági eltérés is volt az oldalak aránya és a szögek között, 19 tanuló /66 %/ mind a két kis háromszöget hasonlónak minősitette a nagyhoz, s csak 10 tanuló /34 %/ mondta, hogy csak a felső. Olyan tanuló nem volt, aki csak az alsót minősitette volna hasonlónak. A kisérlet azt mutatja, hogy a gyermek hajlandó bővebben és szubjektiven értelmezni a hasonlóságot, mint ahogy mértanórán tehetné.

2. kisérlet.

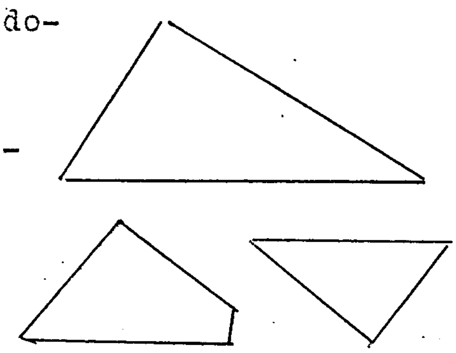


5. ábra

Ismét három háromszöget rajzoltam fel a táblára, egy nagyobbat és két kisebbet. A két kicsi közül az első formai hasonlatosságot mutatott a naggyal, mert alul levő oldala párhuzamos volt vele, de az oldalak aránya és a szögek nem egyeztek meg, a másikat elforgattam, de hasonló volt a nagy háromszöghöz. Hosszas meggondolás után a háromszögek csucsait megbetüztem, hogy ezzel a helyes döntés irányában befolyásoljam a tanulókat, a kérdést viszont csak ugy vetettem fel, hogy melyik kis háromszög hasonló a nagy háromszöghöz, s nem tájékoztattam a gyermekeket arról, hogy csak az egyik hasonló A kisérlet eredménye: Helyes választ adott 13 tanuló /45 %/, a hasonlót nem minősitette hasonlónak, hanem a másikat ugyancsak 13 tanuló /45 %/, 1 tanuló szerint /3 %/ egyik háromszög sem hasonló a nagyhoz, 2 tanuló szerint mind a kettő. /7 %/ Mivel ennél a kisérletnél nehezebb volt a hasonlóságot felismerni, s az eredmény mégis jobb, fel kell tételeznem, hogy az előző kisérlet hatására néhány gyermek gyanut fogott, s sejtette, hogy a formai hasonlatosság nem döntő, azaz az előző kisérlet befolyással volt ennek az eredményére is. Mindenesetre ez a kisérlet is mutatja, hogy a hasonlóság értelmezésében bizonytalanság áll fenn. Ezt a bizonytalanságot kivántam próbára tenni a következő kisérlettel.

3. kisérlet.

A második kisérlet ábráját módositottam ugy, hogy a nem hasonló kis háromszög egyik csucsánál levágtam egy kis háromszöget, igy azt négyszöggé alakitottam át. Ezzel a hasonlóság lehetősége eleve kikapcsolódott.

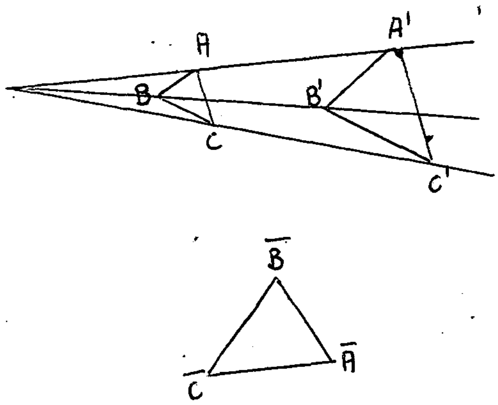


6.ábra.

A kisérlet eredménye:

Helyes választ adott 13 tanuló /45 %/, személy szerint ugyanazok, akik az előző kisérletnél helyesen válaszoltak. A négyszöget mondta hasonlónak 6 tanuló /21 %/, egyiket sem tartotta hasonlónak 9 tanuló /31 %/, 1 tanuló pedig / 3 %/ mindkét kis idomot hasonlónak tartotta a nagy háromszöghöz. Az előző kisérlettel összevetve megfigyelhetjük, hogy az ott jól gondolkodó 13 tanulót nem mozditotta ki a kapott módositás a helyes álláspontjából, a tévedők viszont megoszlottak: egyrészük belátta, hogy a négyszög nem lehet a háromszöghöz hasonló, másrészük - nem is jelentéktelen százalékarány azonban olyan erősen odatapadt a hasonlóság matematikán kivüli értelmezéséhez, hogy még a négyszögnek a háromszöghöz való hasonlóságát is hajlandó volt elfogadni. Arra a kérdésemre, hogyan lehet a négyszög és a háromszög hasonló, szinte egyhanguan azt válaszolták, hogy olyan kicsit vágtam le belőle, hogy az nem számit.

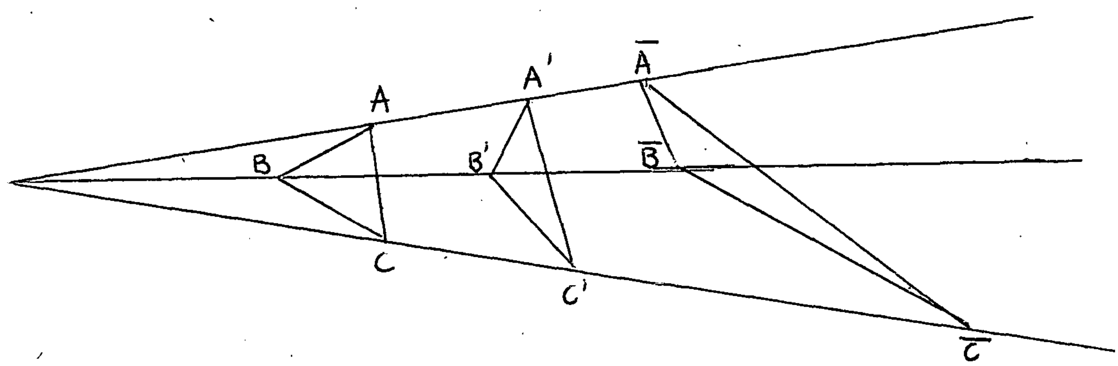
4. kisérlet.



7. ábra.

Az iskolai órán tanult rajzból indultam ki: egy háromszög nagyitásából. Kérdésemre, hogy a két háromszög között van-e valami kapcsolat, mind a 30 tanuló azt válaszolta, hogy igen, a két háromszög hasonló. Miért? Mert nagyitással kaptuk a nagyobbikat. Helybenhagytam a választ, majd a nagy háromszöget elforgatva külön lerajzoltam. Ez a háromszög hasonló-e a kis háromszöghöz? 21 tanuló /70 %/ igennel válaszolt, 9 tanuló /30 %/ azonban nemmel, mert - szerintük - ezt már nem nagyitással kaptam, hanem elforgatással. A 9 tanuló hibás gondolkodását még aláhuzza az a tény, hogy előttük szerkesztettük meg előzőleg nagyitással a háromszöget. Valószinü, hogy ha a szerkesztés mozzanata nem az órán történt volna, még több tanuló hibázott volna. Igy elkötelezve érezték magukat, mert egyszer már leadták a szavazatot a hasonlóság mellett. A kisérlet igazolta, hogy sok gyermek csak hasonlósági helyzetben tudott hasonló háromszögeket elképzelni. Következő kisérletem azt kivánta eldönteni, hogy centrális perspektivítás esetén hasonlónak minősit-e a gyermek nem hasonló háromszögeket?

5. kisérlet.



8. ábra.

Először csak az ABC és A'B'C' háromszögeket rajzoltam fel, s megkérdeztem, hogy hasonlók-e? A 30 gyermekből csak 2 gyermek /7 %/ tagadta meg a hasonlóság elismerését, 28 tanuló /93 %/ hasonlónak minősitette, hiszen nagyitással kaptuk, Hogy ezt a megdöbbentően nagy hibaarányt javitsam illetve próbára tegyem, megrajzoltam - mostmár egészen torzan - az $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ háromszöget, kérdezve, hogy ez hasonló-e a kis háromszöghöz. Hála a torzitásnak itt már csak 12 gyermek vállalta a hasonlóságot /40 %/, 18 gyermek /60 %/ azzal az indokolással mondta ki a nem hasonló itéletet, hogy ez a háromszög már nagyon hegyes. Ha nem betüztem volna meg a csucsokat, akkor felrajzoltam volna még egy háromszöget, amelyen a körüljárási irány az óramutató járásával megegyező lett volna, de igy a betüzés eleve befolyásolta volna a gyermekeket a hasonlóság megtagadására, s az eredmény nem lett volna reális.

A hasonlóság tanitásánál nagy gonddal kell ügyelnünk a fenti kettős hiba kiküszöbölésére. Ezt ugy tudjuk elérni, ha a nagyitással-kicsinyitéssel való bevezetés,- szemléltetés után elszakadunk a nagyitás és kicsinyités fogalmától, s nemcsak elforgatott helyzetben levő háromszögeket mutatunk be, hanem más sikban fekvő hasonló háromszögek et is. A nagyitás-kicsinyités jó bevezető szemléltetés, de nem maradhatunk meg állandóan mellette, el kell szakadnunk tőle, különben kettős hibát is támogatunk.

+

A fentieken kivül más müszavak és kifejezések is okozhatnak zavart, az előzőkben tárgyaltak a legfontosabbak, mert a legnagyobb hatásuak és leggyakoribbak. Előfordul például, hogy sok tanár az idegen szavak kerülése céljából a tört reciprok értéke helyett a tört megforditott értékéről beszél. Célja nemcsak a stilus magyarositása, hanem az is, hogy szemléletes legyen, hiszen a reciprok szó nem mond semmit, a megforditott szó pedig /formálisan/ szemléletes. Ennek a törekvésnek két esetben furcsa eredményét tapasztaltam. A helyiértékes egyenletnél /1. 43. hiba/ történt, hogy a felállitást igy kezdte a gyermek. A kétjegyü szám x. Ha a jegyeket felcserélem, $\frac{1}{x}$ lesz,...s.i.t. és az egyik esetben nem tudta folytatni, a másik esetben pedig elképesztően hibás eredményt kapott. Bár ez a hiba nem gyakori, mégis le kell szögeznünk, hogy a reciprok szó nem felesleges, kiküszöbölése nem helyes.

Tapasztaljuk, hogy a törtszám megismerése után a számláló és a nevező szavakat felcseréli a gyermek. Komoly következménye ennek csak akkor van, ha a tanár a szemlélet kialakitása helyett a szabály alkalmazása szellemében vezeti a gyermekeket, tehát helytelen uton jár. Mindenesetre a hibát javitanunk kell, mégpedig egyszerüen szoktatással. Gyakran látjuk, hogy egyes kartársak magyarázni próbálják a szavakat: a számláló megszámlálja, hogy hány részt veszünk, a nevező megnevezi, hány részre osztottuk az egészet, Erőltetett magyarázat, ezen az alapon a forditott elnevezés is indokolható lenne. /A számláló megszámlálja, hogy hány részre osztottuk az egészet, a nevező megnevezi, hogy hány részt veszünk./ Itt is egyszerüen forditás utján lett a német Zähler és Nenner szavakból számláló és nevező, a magyarázat felesleges, az elnevezés megállapodás.

Azt lehetne gondolnunk, hogy a müszavak, kifejezések által okozott gondolkodási hibák jelentősége a tanuló életkorának növekedésével csökken, később megszünik. Ez sajnos nem igy van, még a felsőoktatásban is tapasztalunk elnevezésből eredő zavart. Főiskolai hallgatók egy csoportjának gyakorlaton bebizonyitottam, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám, nem irható fel $\frac{p}{q}$ alakban. Utána kértem, hogy hasonlóan bizonyitsák be $\sqrt{3}$ irracionalitását. Viszonylag kevés hallgatónak sikerült, a többség nem boldogult a feladattal. Ugyanaznap egy másik - ugyanolyan erős - csoportnál a $\sqrt{3}$ irracionális voltát bizonyitottam be és kértem, hogy hasonlóan bizonyitsák be $\sqrt{5}$ irracionalitását. Ezt viszont majdnem mindenki meg tudta csinálni. Az ok: bizonyitás közben az első esetben azt vizsgáltam, hogy p és q páros vagy páratlan szám lesz-e, a második esetben pedig azt, hogy p és q osztható-e 3-mal. Mig a hallgatók a 3-mal való oszthatóság analogiájára azonnal az 5-tel való oszthatóságot vizsgálták az önálló feladatnál, a párosság analógiájára nem a 3-mal való oszthatóságot vizsgálták, hanem az önálló feladatnál is a párosság- páratlanság fogalmával bajlódtak. A páros kifejezést nem azonositották azzal, hogy osztható 2-vel. Más hasonló tapasztalatom is van arra, hogy a müszavak zavaró hatása a gyermekkor elmultával nem szünik meg.

Következtetések.

Értekezésem végén szükségesnek érzem, hogy összefoglaljam azokat a legfontosabb általános jellegü következtetéseket, amelyeket, tapasztalataimból és kisérleteimből levonhatunk. Tekintettel arra, hogy az egyes hibák elemzésekor a következtetéseket azonnal levontam, nem kivánván ismétlésekbe bocsátkozni, az egyes hibák speciális kivánalmait itt nem irom le, csupán azokra a megállapitásokra szoritkozom, amelyeket több hibánál tapasztaltak általánositásából vonhatok le, s amelyeket a gyakorlati pedagógus illetve a pedagógiai kutató munkájában felhasználhat illetve ellenőrizhet. A rendszerésség azt kivánja, hogy e megállapitásokat abban a logikai sorrendben irjam le, amelyet az egyes hibák elemzésénél követtem, tehát előre a hibák okaira, azután a megelőzésükre, végül a javitásukra szóló általános jellegü megállapitásokat.

Az alant következő következtetések leszürése előtt hangsulyozni kivánom, hogy megállapitásaimat nem tartom sem befejezetteknek, sem tökéleteseknek, és nagyon örülnék, ha más kutatók ellenőriznék azokat, jó gyakorlati pedagógusok hozzáadnák tapasztalataikat. Ha valahol, akkor ezen a területen sokat jelent a több szem többet lát megállapitás, s a cél az, hogy az általános iskolai matematikatanitásunk jobb legyen.

A kisérleteim, tapasztalataim aláhuzzák Weimernek /82/ azt a megállapitását, hogy a gondolkodási hibák legtöbb esetben több okra vezethetők vissza, Ezek közül a legerősebben hatót neveztem domináns oknak, a többit nevezzük kisérő okoknak, s nézzük kölcsönhatásukat.

Ha a hiba domináns oka a hamis analog szituáció feltételezése, s ehhez kisérő okként a megszokás és esetleg még a fogalomzavar járul, a hiba általában nem előzhető meg /1.-4. hibák/, a kutatónak célszerü energiáját a hiba javitása irányában lekötni. Ha viszont a hamis analogiát a formalizmus támogatja, mint kisérő ok, a hiba legtöbb esetben megelőzhető /6. és 8. hiba/ vagy legalább gyakorisága csökkenthető /10.hiba./

Mint az algebra bevezetésekor láttuk, a forma már kialakulásakor a tartalom elfedésére, a sablonok kialakitására tendál. Természetesen szükség van a képletek, szabályok megismerésére, alkalmazására, de a tartalmat elhomályosulni nem engedhetjük. A formalizmus hibái általában jó tanári munkával megelőzhetők vagy legalábbis csökkenthetők. A megelőzés terén a legnagyobbak a nehézségeink, ha kisérő okként a hiányos előismeret befolyásolja a hiba kialakulását /12.-15. hibák/, mig a megszokás mint kisérő ok ebben az esetben nem olyan hatékony, mint a hamis analógia mellett volt.

Ha a domináns oka a megszokás, akkor a hiba általában nemcsak megelőzhető, de a megelőzése hasonlithatatlanul kevesebb munkával jár, mint a már kialakult megszokás megváltoztatása. Ugyancsak megelőzhetők - kisérő októl függetlenül azok a hibák, amelyeknek domináns oka a fogalomzavar. A hiányos előismereteken alapuló hibák közül azok, amelyeket e tanulmányban tárgyalok, nem előzhetők meg, hiszen nem tanári felületességből vagy módszertani hibából táplálkoznak, hanem pl. életkori sajátosságokból. Természetesen ha egy hiba azért alakul ki, mert a tanár valamely anyagrész tanitását elnagyolta, akkor az ilyen hiányos előismeret által okozott hiba megelőzhető. Nem előzhetők meg végül a matematikai müszavak, szakkifejezések által okozott hibák sem.

A hibák megitélésekor természetesen energiánk nagyobb részét azokra a hibákra kell összpontositanunk, amelyek gyakoriak, illetve amelyeknek nagy a hatásuk, ujabb hibák forrásai lehetnek. Helytelen azonban a kis hibák vagy ritka hibák jelentőségét lebecsülnünk /pl. 5. vagy 20. hiba./ Ezek gyakran jellemzők a gondolkodásra, s elárulják nekünk azt is, hogy más esetben milyen gondolkodási hiba bëkövetkezésére kell számitanunk.

A hibakutatások azt igazolják, hogy helyes, ha a tanár igényes önmagával és tanitványaival szemben egyaránt. A gyermek gondolkodását, önállóságát előnyösen befolyásolja a vele szemben való igényesség /6., 7., 19., 20. hibák elemzése./. Tapasztaljuk, hogy a numerikus nehezitések legtöbb esetben nem járnak a hibák számának emelkedésével. A feleslegesen hosszu uton való számolás, amely végeredményben helyes eredményhez vezet, nem minősithető ugyan hibának, de mégsem engedhető meg, az e téren való igényesé ség határozottan hasznos.

Két olyan tendenciáról kell megemlékeznem, amelyeknek érvényesitésénél a tanárnak kell adott körülmények között a mértéket megtalálni, mert szükségesek, s ugyanakkor hibaforrássá válhatnak. Az egyik a precizitásra való törekvés. A tulzott precizitás káros lehet, pl. a müveleti mechanizmusok tanitásakor gátolhatja a készségek kialakulását, ugyanakkor a precizitás hiánya hibaforrássá válhat, mint a maradékos osztással kapcsolatban fellépő hibák mutatják. Általában nagyobbfoku precizitást engedhetünk meg magunknak, ha a tanitott anyagot plasztikusan mutathatjuk be, s a fogalom tiszta. Mindenesetre általában nem definicióval dolgozunk, hanem jó szemléltetéssel, s a tapasztaltak értelmes megfogalmazásával.

A másik ilyen tendencia a felesleges mellékszámitások, hoszszu utak elkerülésére, az ésszerüsitésekre való törekvés, Ez a törekvés tápot adhat a kényelemszeretetnek, s előfordul,hogy pl. a gyermek nem akar az algebrai kifejezésekbe törtet vagy negativ számot helyettesiteni, stb. A tanárnak kell a helyi körülményektől függően meghatároznia, mit tegyen az ésszerüsitésekre való törekvés gyakorlati megvalósitása terén.

Értekezésemben emlitek néhány - a gyakorlatban nagyon elterjedt rossz módszert - amelyek a gyermek gondolkodását károsan befolyásolják. /Összeadásnál mindkét tag szétbontása, egyenletek megoldásának formálissá tétele, stb./ Ezeket az eljárásokat rendelet tiltja, s fontos, hogy e rendeletek érvényesüléséért a gyakorlatban mindent megtegyünk. Ugyanilyen fontos, hogy ne tanitson senki idomitás jelleggel, mert ezzel nemcsak a matematikus gondolkodásra nevelés, a logikus gondolkodás kifejlesztés jut csődbe, de még kitüzött célját, a számolástechnika elsajátitását sem éri el. /44.hiba./

Kutatásaim legfontosabb eredményének azt tartom, hogy azok hangsulyozottan igazolták a fogalomalkotás illetve a fogalom bővitésének rendkivüli nagy jelentőségét. Ez a terület kell,hogy oktatásunkban jelentőségéhez méltó szerepet kapjon, s gyakorlatiasság ürügyén senki el ne hanyagolhassa. Különösen hangsulyozni kivánom a törtszám fogalmának gondos kialakitását és az algebrai jelölés bevezetésének nagy körültekintéssel, gondos előkészitéssel, a fokozatosság szigoru betartásával való tanitását. Az ezekre forditott órák sok utólagos kellemetlenségtől, nehézségtől, bosszuságtól kimélik meg a tanulót és a tanárt egyaránt. Az algebrai alapfogalmak tanitása már ott kezdődik, amikor az aritmetikai feladatokat megoldásuk után mindig leiratjuk és amikor a maradékos osztás hányadosánál preciz beszédre szoktatjuk tanitványainkat.

A fogalombővitésnek fontos velejárója, hogy a gyermek hajlamos a halmazok szeparálására, nem olvasztja egy halmazba a pozitiv és negativ számokat, az egész számokat és a törteket, sőt a közönséges és tizedestörteket sem, hanem külön külön fogalomként kezeli, s ezzel megnehezíti saját utját. /6., 23.24. 25.26.32. hibák/ A halmazok szeparálásának megakadályozását többek között azzal is szolgálhatjuk, hogy a nagysági relációk gondos tárgyalásával, soralkotásokkal hozzászoktatjuk a gyermeket a kibővitett fogalomhoz, az uj fogalomnak a régivel való egybeolvasztásához.

Szükséges, hogy a számtantanár feladatának tekintse a sablon egyeduralma kialakulásának meggátlását /27.28.29.30.39. hiba/ és a mechanikusan megoldott feladatok matematikai tartalmának állandó szem előtt tartását. Még ennél is fontosabb, hogy a rossz szokások kialakulását meggátolja, hiszen ezek nagyon nehezen kijavitható hibák /8.9.10.21.22.hiba/ lesznek.

A hiba javitásánál mindenekelőtt tudatában kell lennünk annak, hogy a gyermek azonositja a matematikát a saját matematikai ismereteivel, ha tehát valahol bizonytalannak érzi magát, hajlamos azt a matematika hibájául felróni. Ezért a hiba felismerése még nem jelenti a hiba javitását is. Gyakran halljuk a hibára rádöbbenő gyermek szájából, hogy rossz a példa, nem lehet megoldani, legalábbis egyenlettel nem, tapasztaljuk, hogy hajlamos arra, hogy előző matematikai ismereteit önkényesen "korrigálni" kisérelje meg. A fentiekből következik, hogy a hiba felismerése és a hiba javitása két különálló mozzanat, amelyek gyakran elég élesen elválnak egymástól. A hiba felismerése gyakran csak egy frappáns megjegyzésen mulik /18.,19.,40.,51. hiba/, a hiba javitása viszont általában türelmes, szivós, aprólékos munkát igényel.

Ne kerülje el a figyelmünket azoknak a tanulóknak a tudása sem, akik nem követnek el hibát, hanem a problémát valami kerülő uton oldják meg./7.hiba./ Az ilyen tanulók, ha a kerülő ut valamilyen módon bezárul előttük, sokkal gyakrabban billennek ki a hibás ut, mint a helyes ut irányába. Ezeknek a tanulóknak a tudásuk bizonytalan, s csak annyi előnyük van a hibázó tanulókkal szemben, hogy a hiba javitásakor jobban lehet épiteni az önállóságukra. Az önállóságra való nevelésnek érvényesülnie kell, de elsősorban a hiba felismerésénél, ahol az önálló gondolkodás meginditása döntő fontosságu. A hiba javitásánál legtöbbször a tanár közvetlen vezető munkája, szemléltetése kell, az önállóságot itt korlátok között kell tartanunk. Különösen áll ez a trial and error esetére, amikor a kapkodó gyermeket fegyelmezett gondolkodásra szoktatni csak határozott tanári irányitással lehet.

Legnehezebb a javitás akkor, ha a gyermek több hibát követ el ugyanabban a feladatban. A hibákat csak differenciáltan tudjuk javitani, éppen ezért gondoskodni kell arról, hogy a példák alkalmas megválasztásával a hibákat egymástól elszigeteljük, Itt nem lehet egy csapásra több legyet ütni. A javitás mindig konkretizáljon, még akkor is, ha az absztraháló képességet kivánjuk fejleszteni. Számolnunk kell azzal is, hogy egy egy hiba javitásakor a számolástechnikai hibák száma emelkedni fog. Átmeneti jelenség ez, vigyázni kell rá, de nem veszélyes, a számolástechnikai hibák számának átmeneti emelkedése a figyelem elterelődése okozza, mihelyt a gyermek megszokta a helyes utat, a számolástechnikai hibák száma esni fog.

A hibajavitás módszerei közül legtökéletesebb kétségkivül a jó szemléltetés. A szemléltetés akkor jó, ha semmi mellékkörülmény nem tereli vakvágányra a gyermek gondolkodását. Az egyetlen hibája, hogy általában sok időt vesz igénybe.- Az eredmény előzetes becslése nagy előnye éppen az, hogy 1-2 percet igényel csak, s hatása gyakran a szemléltetéssel vetekszik. Éppen ezért minden esetben, ahol alkalmazható, jobban ajánlható, mint pl. a mintapélda, amely sokkal több időt vesz igénybe. A becslés abban az esetben jó, ha elég élesen vetiti a gyermek elé az esetleg elkövetett hibát. Például a 44. hibánál jó a becslés, ha 29 helyett 92-vel szoroz a gyermek, de nem jó, ha 45 helyett 54-gyel, Gyakran hasznos, ha a szükséges ismereteket az óraeleji fejszámolás során felujitjuk.

A javitás terén hibát követünk el, ha időben nem eléggé távol egymástól két eljárással is javitjuk a hibát. Ilyenkor számolni kell a Ranschburg féle homogén gátlás fellépésével. Hogy mennyi ez az időben való elszigeteltség, az esetenkint különböző. A 7.hiba javitásánál pl. elegendő, ha nem egy tanitási órán mutatjuk be a becslést és a mintapéldát, hanem két egymást követő órán. Ezzel szemben a törtszám kétféle értelmezésének egy hét leforgása alatt való tárgyalása annyi zavart okozott, hogy szükségessé vált tantervileg való különválasztásuk, s jelenleg egyiket az V., másikat a VII. osztályban tanitjuk. - Minden körülmények között rossz eljárás a hiba hosszadalmas magyarázattal való javitása. Az ilyen kisérletek feltétlenül negativ eredménnyel járnak.

Néhány nyitott kérdésre rámutattam a megfelelő helyeken. Egyrészüknél nem kaptam megfelelő választ a felvetett kérdésre, másokkal várni kell, hogy az uj tantervi elrendezés mellett hogyan módosulnak. Nyitott kérdés a fenti tipusu hibák szerepe a középiskolában és a felső oktatásban, ez azonban külön tanulmányt igényelne. Végül nyitott kérdések azok is, amiket én e tanulmányban lezártként kezelek, hiszen a kontrollra minden kutatónak és minden gyakorlati pedagógusnak módja van, s minél többen vizsgálunk meg egy kérdést "sine ira et studio", annál nagyobb a valószinüsége, hogy eredményünk hüen tükrözi a valóságot. A magam részéről csupán annyit kivántam ezzel az értekezéssel tenni, hogy a jelenségek megjelenési formája és lényege közötti összefüggést felderiteni és a gyakorlati pedagógus számára hasznositani igyekeztem.

Felhasznált irodalom.

1./ N. Ach : Über die Begriffsbildung./ A fogalomképzésről./ Bamberg, 1921.

2./ Ágoston György: A nevelés elmélete. Pedagógia I. Budapest 1965.

3./ O. Altmannspracher: Zahlen- und Rechnenpsychologie. /Szám- és számoláslélektan/ 1928.

4./ B.I.Arjaszov: O resenyii zadacs aritmatyicseszkim i algebraicseszkim szposzobami. /A feladatok aritmetikai és algebrai módszerekkel való megoldásáról./ Matyematyika v skole 1954. 3.szám.

5./ A.N. Barszukov:Uravnyenyija pervoj sztyepeni v szrednyej skole. /Az elsőfoku egyenletek tanitása a középiskolában./

A "Resenyije zadacs b szrednyej skole" /Feladatmegoldások a középiskolában/ c. kötetben. Moszkva, 1952.

6./ Beke Manó: Typikus hibák a matematikai tanitásban. Magyar Pedagógia, 1900.

7./ P.F.Bezmaternih: Arifmetyicseszkoje i algebraicseszkoje resenyije zadacs sz nagljadnimi illusztracijami. /Feladatok aritmetikai és algebrai alakban való megoldása szemléltetés segitségével./ 5./ alatti tanulmánykötetben. Moszkva 1952.

8./ V.M.Bragyisz: A középiskolai matematikatanitás módszertana. Budapest, 1954.

9./ W.Breidenbach: Methodik des mathematischen Unterrichts. /A matematikatanitás módszertana./ Stuttgart, 1957.

10./ Bruecknek-Grossnickle-Reckzeh: Developing mathematical understandings in the upper grades. /A matematikai megértés fejlődése felsőbb fokon./ Philadelphia, 1957.

11./ Ch.H. Butler - F.L.Wren: The teaching of Secondary Matematics. /Középiskolai matematika tanitása./ New York, 1951.

12./ Cser Andor: Formalizmus a matematikatanitásban. Köznevelés. 1952.

13./ Cser Andor: A tanulói aktivitás helyzete a jelenlegi matematikatanitásban. Budapest, 1962.

14./ Cser Andor: A betüabsztrakcióra való nevelés képességéről. Kézirat.

15./ Cser Andor-Lénárd Ferenc: Mennyiségek a matematikában. Budapest, 1960.

16./ G. Deuchler: Beiträge zur Psychologie der Rechenübung und Rechenfertigkeit./ Adalékok a számolási gyakorlat és a számolási készség lélektanához./ Zeitschrift für pädagogische Psychologie, 1916.

17./ Dénes Magda: A számfogalom kialakitása. A "Tanitás és értelmi fejlődés" c. kötetben. Budapest, 1947.

18./ I.I.Dircsenko: Szosztavlenyije uravnyenyij po uszloviam zadacs. /Szöveges egyenletek felállitása./ Matyematyka v skole, 1954. 1.szám.

19./ M.F.Dobrinyina: Miszlityelnyije processzi pri szosztavlenyii uravnyenyij. /Az egyenletek felállitása során végbemenő gondolkodási folyamatok. / 5./ alatti tanulmánykötetben, Moszkva. 1952.

20./ K.Duncker: Zur Psychologie des produktives Denkens./Az alkotó gondolkodás lélektanához./ Berlin.1935.

21./ Faragó László: I.gimnáziumi tanulók matematikai absztrakcióképessége. Pedagógiai Szemle.1958.7.-8.szám.

22./ Faragó László: A logikus gondolkodásra való nevelés terén elkövetett didaktikai hibák a középiskolai matematikatanitásban. Tanulmányok a neveléstudomány köréből. Budapest, 1958.

23./ Faragó László: Aritmetikai feladatok általános /algebrai/ alakban való megoldás során elkövetett tanulóhibák. Tanulmányok a neveléstudomány köréből.Budapest, 1959.

24./ Faragó László: A matematikatanitás feladatai a világnézeti nevelés terén. A Matematika Tanitása 1959. 2-3-4. szám.

25./ Faragó László: Szöveges feladatok megoldása egyenlettel. Budapest, 1960.

26./ Faragó László: A törtek osztásával kapcsolatos nehézségek lélektani okairól. Pszichologiai Tanulmányok III. Budapest,1961.

27./ Faragó László: Az absztrakció és az elemzés nehézségei az algebra tanulásának kezdeti szakaszában. Pszichologiai tanulmányok IV. Budapest, 1962.

28./ Faragó László: Lélektani szempontok érvényesitése a matematikatanitás metódikájában. Tanulmányok a neveléstudomány köréből. Budapest. 1961.

29./ E.Fettweiss: Psychologische Fragen des mathematischen Unterrichts. /A matematikatanitás lélektani kérdései./ Zeitschrift für pädagogische Psychologie, 1929.

30./ Geréb György-Mosonyi Kálmán: A müveleti készség és fáradékonyság alakulása 10-14 éves gyermekeknél. Pedagógiai Főiskola évkönyve, Szeged 1960.

31./ Geréb György - Mosonyi Kálmán: Fáradékonysági tényezők befolyása egyszerü számolási feladatokra oligofrén gyermekeknél. Pedagógiai Főiskola évkönyve, Szeged, 1961.

32./ Gyarmati Á. Aktivitás a számolás és mérés tanitásában. Néptanitók Lapja, 1935.

33./ Herrmann Imre: Hibátlan gondolkodás, hibás gondolkodás. Pszichologiai tanulmányok I. Budapest, 1958.

34./ E Hylla: Analyse der Rechenfehler. /A számolási hibák elemzése./ Zeitschrift für pädagogische Psychologie. 1916.

35./ E.J. James: The teaching of Modern Scool Algebra. /A modern iskolai matematika tanitása./ Oxford,1958.

36./ L.Johannot: Recherches sur le raisonnement mathématique de l'adolescent. /Kutatások a fiatalok matematikai gondolkodásáról./ Neuchatel, 1947.

37./ Justné Kéri Hedvig: A számtani gondolkodásról. Pszichologiai tanulmányok II.Budapest,1959.

38./ Kelemen Jánosné-Mosonyi Kálmán: Az általános iskolai számtantanitás tapasztalatai. Budapest, 1956.

39./ Kelemen Jánosné-Mosonyi Kálmán: Néhány tapasztalat az általános iskolai mértantanitásban. A Matematika Tanitása 1956. 3.-4. szám.

40. Kelemen László: A gondolkodás neveléséről. Pedagógiai Szemle, 1954.

41./ Kelemen László: Neveléslélektani kutatások feladatairól. Pedagógiai Szemle, 1959.

42./ G.Korn: Über Rechenleistung und Rechenfehler. /Számolási teljesitményekről és számolási hibákról./ Zeitschrift für angewandte Psychologie,1926.

43./ N.N. Krulikovszkij: K voprpszu obiszledovannyii zadacs na kvadratnije uravnyenyija. /A másodfoku egyenletre vezető feladatok diszkussziójának kérdéséről. / Matyematyika v skole, 1952. 1.szám.

44./ Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás .Budapest. 1963.

45./ W.Lietzmann: Methodik des mathematischen Unterrichts./ A matematika tanitás módszertana./ Leipzig, 1924.

46./ Sz.E.Ljapin: Metodika prepodavannyija matyematyiki. /A matematikatanitás módszertana./ Leningrad, 1955.

47./ A.R.Lurija: K patologii szcsotnik operucsj. /Számolási müveletek patologiájához./ Izvesztija APN 1946. 3.szám.

48./ V.K.Matisuk: O resenyii zadacs na isszledovannyije uravnyenyij v X. klassze. /Egyenletek diszkusszióját igénylő feladatok megoldása a X. osztályban./ Matyematyika v skole, 1952. 1.szám.

49./ N.A. Menscsinszkaja: A gyermeki gondolkodás fejlődése. Moszkva, 1941. /Országos Pedagógiai Könyvtár, Budapest/

50./ N.A.Menscsinszkaja: A matematikatanitás lélektana.Moszkva, 1955. /Országos Pedagógiai Könyvtár,Budapest./

51./ Meringer: Versprechen und Verlesen. /Hibás beszéd, hibás gondolkodás/ 1895.

52./ G.Miaralet: Nouvelle pédagogie scientifique. /Uj pedagógiai tudomány/ Paris, 1954.

53./ G.Mialaret: Education et pedagogie scientifique. /Nevelés és pedagógiai tudomány./ Neuchatel-Paris,1957.

54./ S.Monavon: La psychopedagogie des mathématiques dans l' enseignement du second degré. /A matematika lélektani pedagógiája a középfoku oktatásban./ Paris, 1953.

55./ Mosonyi Kálmán: Néhány jellegzetes hiba az általános iskolai tanulók számolásában. A Matematika Tanitása, 1954. 2.szám.

56./ Mosonyi Kálmán: Az általános iskolai matematikatanitás módszertana, Budapest, 1961.

57./ N.N. Nyikityin: Szöveges feladatok megoldása az általános iskolában. Budapest, 19.

58./ N.N. Nyikolajeva: Uravnyenyija pervoj sztyepenyi az odnyim nyeizvesztnyim. /Elsőfoku egyismeretlenes egyenletek./ Moszkva, 1955.

59./ Pajor E. Az egyenletfelállitás nehézségei a pedagógiai lélektan megvilágitásában. Nevelésügyi Szemle,1938.

60./ Pénzes Z.Néhány észrevétel a törtszámok tanitásához. Cselekvés Iskolája 5.évf.

61./ Péter Rózsa: A számok világa. Budapest, 1948.

62./ Pólya György: A gondolkodás iskolája. Budapest, 1957.

63./ Pólya György: Teaching of matematics in Schwitzerland. /A matematika tanitása Svájcban./ The Matematics Teacher. 1960.

64./ I.G.Polszkij: Szosztavlenyije uravnyenyije po uszloviam zadacs. /A szöveges egyenletek felállitása./ 5./ alatti tanulmánykötetben. Moszkva. 1952.

65./ Radnai Béla: Fogalmak megértése az általános iskola felső tagozatában. A "Tanulmányok a megértés lélektanából" c. kötetben. Budapest, 1959.

66./ Ranschburg Pál: Die Leseschwäche und Rechenschwäche der Schulkinder im Lichte des Experiments. /Az iskolás-gyermekek olvasási és számolási nehézségei a kisérletek fényében./ Budapest, 1917.

67./ Rókusfalvi Pál: Ábrák szerepe a matematikai problémamegoldó gondolkodásban. Pszichologiai tanulmányok II. Budapest, 1959.

68./ Sz.I.Rubinstein: Gondolkodáslélektani vizsgálatok. Budapest, 1960.

69./ A.Ruznyeckij: O szosztavlenyii uravnyenyija k teksztu zadacsi. /Szöveges feladatok egyenletének feladatához./ Matyematyika v skole 1958. 5.szám.

70./ B.Schanoff: Die Vorgänge des Rechens. /A számolás folyamatai/ Pädagogische Monographien, 1911.

71./ Seemann: Die Rechenfehler. /A számolási hibák/ 1931.

72./ Surányi Gábor: Tipikus számtanhibák az általános iskola I.-IV. osztályában. 65./alatti kötetben. Budapest, 1959.

73./ Surányi Gábor: Nagyságbecslés emlékezet után. Pedagógiai Szemle. 1952.

74./ Szeliánszky Ferenc: A hibakutatás neveléslélektani problémái. Szeged, 1938.

75./ Szeliánszky Ferenc: Matematikai tanulóteljesitmények neveléslélektani hibadiagnosztizálásáról és tanulságaiból részletek. Embernevelés II. Győr 1965.

76./ Szenes Adolf: A tanulók tipikus számolási hibái és az elháritás módja. Szeged, 1934.

77./ K.P.Szikorszkij: O szosztavlenyii uravnyenyij po uszloviam zadacs. /Szöveges egyenletek felállitásáról./ Matyematyika v skole, 1954. 1.szám.

78./ I.I. Szmirnov: O resenyii i iszledovannyii uravnyenyij v kursze skoli /Egyenletek megoldása és diszkussziója az iskolai tananyagban./ Matyematyika v skole, 1954. 1.szám.

79./ I.I. Szmirnov: Iszledovanyije resenyij zadacs sz bukvennimi dannimi. /Paraméteres feladatok megoldásának diszkussziója./ 5./ alatti tanulmánykötetben. Moszkva. 1952.

80./ E.I.Thorndike: Educational Psychology. /Neveléslélektan/ New York. 1913.

81./ Werner Walsch: Betrachtungen zur Einführung allgemeiner Zahlsymbol. /Adalékok az általános számszimbolum bevezetéséhez/ Mathematik und Physik in der Schule. 1959. 6.sz.

82./ H. Weimer: Psychologie der Fehler. /A hiba lélektana/ 1929.

83./ 82./ birálata. Magyar Pedagógia, 1930.

84./ H. Weimer: Fehlerbehandlung und Fehlerbewertung. /Hibakezelés és hibaértékelés/ 1931.

85./ H. Wertheimer: Productive Thinking. /Alkotó gondolkodás/ New York, 1945.

Tartalomjegyzék:

38-26/1966-67. bksz.

Dr. Ágoston György elvtársnak
tanszékvezető egyetemi tanár

Tárgy : Mosonyi Kálmán
doktori szigorlata
Mell.sz. : 1 db. disszertáció

Helyben

Professzor Elvtárs !

Mellékelve Mosonyi Kálmán "Tipikus gondolkodási hibák számolásból és mérésből az általános iskola felső tagozatában"

cimü doktori értekezését tisztelettel felkérem, hogy azt megbirálni sziveskedjék. Legyen szabad Professzor Elvtárs szives figyelmét felhivnom tanácsülésünk ama határozatára, amely a birálat elkészitésének és benyujtásának legkésőbbi határidejét a kézhezvételtől számitott harmadik hónap utolsó napjában állapitotta meg.

A mellékelt értekezést a birálat elkészitése után sziveskedjék átadni tanszéke könyvtárosának leltárba vétel és a könyvtárban való elhelyezése céljából.

Szeged, 1967. május 15.

dékán

A kiadmány hiteles :

József Attila Tudományegyetem Bölcsészettudományi Kar Dékáni Hiv. Szeged

dékáni hiv. vezető

Kapták : Dr. Ágoston György prof.
Dr. Szendrei János tszv. főisk. tanár tanszékvezető
Dr. Jónás Antal tanszéki könyvtáros
tanszéki könyvtáros

Sorsz. 224/1966. psz. 400 db.