Orthogonal polynomials with respect to generalized Jacobi measures

Danka Tivadar

Doktori értekezés

Témavezető:
Totik Vilmos

Matematika-és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

2016

Harold Widom *Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane* című nagy hatású cikkének egyik első mondata úgy szól, hogy *"Minden aszimptotikus formulának van élesítése."* Doktori értekezésem célja, hogy olyan ortogonális polinomokkal kapcsolatos aszimptotikus formulákat élesítsek és bizonyítsak, amelyek ortogonalitási mértéke ún. általánosított Jacobi mérték, vagyis olyan, ami $|x - x_0|^\alpha dx$ típusú algebrai szingularitással rendelkezik valahol a tartóján.

A vizsgálatok fő tárgya a

$$K_n(z, w) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(z)\overline{p_k(w)},$$

formulával definiált Christoffel-Darboux magfüggvény, ahol p_n az n-edik ortonormált polinomot jelöli valamely μ mérték szerint. Másik általam vizsgált mennyiség a

$$\lambda_n(\mu, z_0) = \inf_{\deg P < n} \int \frac{|P(z)|^2}{|P(z_0)|^2} d\mu(z),$$

formulával definiált Christoffel-függvény, ahol az infimum a legfeljebb $n-1$-edfokú nemnulla polinomok halmazán vétetik. Ismert, hogy

$$\lambda_n(\mu, z_0) = \frac{1}{K_n(z_0, z_0)}.$$

A Christoffel-függvények vizsgálata a XX. század elején kezdődött, az egyik legfontosabb korai eredmény Szegő Gábor nevéhez fűződik. Szegő igazolta, hogy ha μ egy abszolút folytonos mérték a $\mathbb{T}$ komplex egységkörön, $d\mu(e^{it}) = w(e^{it})dt$, amelyre az ún. Szegő-feltétel

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log w(e^{it})dt > -\infty$$

teljesül, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(\mu, z) = (1 - |z|^2)e^{\operatorname{Re} D(\mu,z)}, \quad |z| < 1,$$

ahol $D(\mu, z)$ a

$$D(\mu, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log w(e^{it})dt$$

formulával definiált ún. Szegő-függvény. Ezen tétel és Szegő további munkássága elindította az ortogonális polinomok aszimptotikájának komolyabb vizsgálatát, de a Hardy-terekkel kapcsolatos kutatásokat is motiválta.

Ha az egységkör pontjaiban nézzük az aszimptotikát, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(\mu, z) = \mu(\{z\}), \quad |z| = 1,$$

ami például zérus, ha a mérték abszolút folytonos. Ebben az esetben a fő kérdés az aszimptotika rendjének meghatározása és a formula élesítése. Egy nagy hatású cikkben A. Máté, P. Nevai és V. Totik bizonyította [2], hogy ha μ tartója a komplex egységkör és ott $d\mu(e^{it}) = w(e^{it})dt + d\mu_s(e^{it})$, akkor a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log w(e^{it})dt > -\infty$$

Szegő-feltétel teljesülése esetén

$$\lim_{n\to\infty} n\lambda_n(\mu, e^{it}) = 2\pi w(e^{it})$$

igaz $t \in [-\pi, \pi)$ majdnem mindenütt. Ugyanebben a cikkben hasonló eredményeket bizonyítanak $[-1, 1]$ tartójú mértékekre.

Olyan mértékekre, melyek tartója a valós számegyenes egy tetszőleges kompakt részhalmaza, a fenti eredményeket V. Totik terjesztette ki [6]-ban az általa kifejlesztett polinom inverzkép módszer segítségével. Sikerült megmutatnia, hogy ha μ egy Stahl-Totik értelemben vett reguláris mérték amely tartója egy tetszőleges $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, akkor ha az $I \subseteq K$ intervallumra a

$$\int_I \log(w(x))\omega_K(x)dx$$

lokális Szegő-feltétel teljesül, ahol $\omega_K(x)$ a K egyensúlyi mértékének súlyfüggvénye, akkor

$$\lim_{n\to\infty} n\lambda_n(\mu, x) = \frac{w(x)}{\omega_K(x)}$$

igaz $x \in I$ majdnem mindenütt.

Hasonló aszimptotikus eredményeket Jordan-görbék diszjunkt uniójára szintén V. Totik igazolt [7]. Megmutatta, hogy ha μ tartója Jordan-görbék véges és diszjunkt uniója, melyet γ-val jelölünk, akkor ha valamely $z_0 \in \gamma$ esetén μ abszolút folytonos az ívhosszmértékre nézve z_0 egy környezetében és ott $d\mu(z) = w(z)ds_\gamma(z)$ valamely szigorúan pozitív és folytonos $w(z)$ súlyfüggvény esetén, akkor

$$\lim_{n\to\infty} n\lambda_n(\mu, z_0) = \frac{w(z_0)}{\omega_\gamma(z_0)}, \tag{1}$$

teljesül, ahol $\omega_\gamma(z)$ a γ egyensúlyi mértékének súlyfüggvénye és $ds_\gamma(z)$ a γ ívhosszmértékét jelöli.

Azonban ha $w(z)$ nem folytonos vagy nem szigorúan pozitív a vizsgált z_0 pontban, akkor (1) nem marad igaz. A doktori értekezésem első fő eredményeként a fenti eredményt terjesztem ki olyan mértékekre, amelyek $d\mu(z) = w(z)|z-z_0|^\alpha ds_\gamma(z)$ típusú viselkedést mutatnak z_0 valamely környezetében. Az első fő tétel a következő.

1 Tétel. *Legyen γ olyan rektifikálható Jordan-görbék véges uniója, melyek egymáson kívül fekszenek, valamint legyen μ egy Stahl-Totik értelemben reguláris véges Borel mérték, melynek tartója* $\mathrm{supp}(\mu) = \gamma$. *Tegyük fel, hogy valamely $z_0 \in \gamma$ esetén létezik egy U nyílt halmaz, hogy $J = U \cap \gamma$ egy C^2 sima Jordan-ív és μ abszolút folytonos az ívhosszmértékre nézve ott, valamint*

$$d\mu(z) = w(z)|z - z_0|^\alpha ds_\gamma(z), \quad z \in J$$

teljesül valamely $\alpha > -1$ esetén, ahol w folytonos és szigorúan *pozitív z_0-ban. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1}\lambda_n(\mu, z_0) = \frac{w(z_0)}{(\pi\omega_\gamma(z_0))^{\alpha+1}} 2^{\alpha+1}\Gamma\Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\alpha+3}{2}\Big)$$

teljesül, ahol $\Gamma(z)$ a Gamma-függvényt jelöli, $\omega_\gamma(z)$ a γ egyensúlyi mértékének súlyfüggvénye, illetve $ds_\gamma(z)$ az ívhosszmérték.

A Christoffel-Darboux magfüggvény aszimptotikája nem csak a diagonális mentén vizsgálható. Egyik fontos kérdés az ún. univerzalitás létezése, amely egy intenzíven kutatott terület a matematikai fizika területén, változatos alkalmazásokkal.

A $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett mértékek esetén az elmúlt évtizedben D. S. Lubinsky egy új módszert dolgozott ki [3] [4] [5]. [3]-ban megmutatta, hogy ha μ egy véges Borel-mérték a $[-1, 1]$-en, amely abszolút folytonos valamely $x_0 \in (-1, 1)$ környezetében és $d\mu(x) = w(x)dx$ ott, ahol $w(x)$ folytonos és szigorúan pozitív, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{K}_n\Big(x_0 + \frac{a}{\widetilde{K}_n(x_0,x_0)}, x_0 + \frac{b}{\widetilde{K}_n(x_0,x_0)}\Big)}{\widetilde{K}_n(x_0, x_0)} = \frac{\sin\pi(b-a)}{\pi(b-a)}$$

teljesül, ahol a $\widetilde{K}_n(x, y) = \sqrt{w(x)w(y)}K_n(x, y)$ módon definiált függvény a normalizált Christoffel-Darboux magfüggvényt jelöli. Az *univerzalitás* terminológia onnan ered, hogy a fenti formula bal oldalán a határértékben szereplő mennyiség függ a mértéktől, a jobb oldalán pedig szereplő pedig nem. Lubinsky ezen eredménye előtt a súlyfüggvény analitikussága volt megkövetelve, így ez egy hatalmas lépésnek számított.

Ha a mérték az x_0 pontban $|x-x_0|^\alpha dx$ típusú algebrai szingularitással rendelkezik, megváltozik a viselkedés és a sinc magfüggvény helyett más jön elő. Olyan általánosított Jacobi-mértékeket, melyek a

$$d\mu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta h(x)dx, \quad x \in [-1,1]$$

formulával vannak definiálva, ahol $h(x)$ szigorúan pozitív és analitikus, A. B. J. Kuijlaars és tanítványa, M. Vanlessen vizsgáltak. Riemann-Hilbert analízist használva igazolták, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} \widetilde{K}_n\Big(1-\frac{a}{2n^2}, 1-\frac{b}{2n^2}\Big) = \mathbb{J}_\alpha(a,b) \qquad (2)$$

a, b-ben kompakt halmazokon egyenletesen, ahol $\mathbb{J}_\alpha(a,b)$ a

$$\mathbb{J}_\alpha(a,b) = \frac{J_\alpha(\sqrt{a})\sqrt{b}J'_\alpha(\sqrt{b}) - J_\alpha(\sqrt{b})\sqrt{a}J'_\alpha(\sqrt{a})}{2(a-b)} \qquad (3)$$

formulával definiált Bessel magfüggvény és $J_\alpha(x)$ az α-rendű elsőfajú Bessel-függvény. Ezt az eredményt Lubinsky terjesztette ki [4]. Igazolta, hogy ha μ egy véges Borel-mérték $[-1,1]$-en, mely abszolút folytonos $[1-\varepsilon,1]$-en valamely $\varepsilon > 0$ esetén és ott

$$d\mu(x) = w(x)|x-1|^\alpha, \quad x \in [1-\varepsilon, 1],$$

ahol $w(x)$ szigorúan pozitív és folytonos, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^{2\alpha+2}} K_n\Big(1-\frac{a}{2n^2}, 1-\frac{b}{2n^2}\Big) = \mathbb{J}^*_\alpha(a,b)$$

teljesül, ahol $\mathbb{J}^*_\alpha(a,b) = \frac{\mathbb{J}_\alpha(a,b)}{a^{\alpha/2}b^{\alpha/2}}$.

Lubinsky szintén megmutatta, hogy ha K egy tetszőleges kompakt részhalmaz a valós egyenesen és $x_0 \in K$ egy jobb végpontja (azaz létezik olyan $\varepsilon > 0$ melyre $K \cap (x_0, x_0+\varepsilon) = \varnothing$ valamint $K \cap (x_0-\varepsilon, x_0] = (x_0-\varepsilon, x_0]$), akkor ha μ egy Stahl-Totik reguláris véges Borel-mérték, $\mathrm{supp}(\mu) = K$, μ abszolút folytonos $[x_0-\varepsilon, x_0]$-on, ahol $d\mu(x) = |x-x_0|^\alpha dx$ valamely $\alpha > -1$ esetén, akkor ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n(x_0 - a\eta_n, x_0 - a\eta_n)}{K_n(x_0, x_0)} = \frac{\mathbb{J}^*_\alpha(a,a)}{\mathbb{J}^*_\alpha(0,0)} \tag{4}$$

minden $a \in [0,\infty)$ esetén teljesül, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n(x_0 - a\eta_n, x_0 - b\eta_n)}{K_n(x_0, x_0)} = \frac{\mathbb{J}^*_\alpha(a,b)}{\mathbb{J}^*_\alpha(0,0)} \tag{5}$$

igaz $a, b \in \mathbb{C}$-ben kompakt halmazokon egyenletesen. Az azonban eddig nem volt ismert, hogy (4) valóban igaz-e.

A tézis második részében megmutatjuk, hogy (4) valóban teljesül, így (5) is igaz. Másrészről megmutatjuk, hogy hasonló eredmények igazak abban az esetben, amikor az algebrai szingularitás egy belső pontban található.

Hogy kimondjuk a főbb tételeket, definiáljuk az $\mathbb{L}_\alpha(a,b)$ magfüggvényt minden $a,b\in\mathbb{R}$ esetén az

$$\mathbb{L}_\alpha(a,b)=\frac{\sqrt{ab}}{2(a-b)}\Big(J_{\frac{\alpha+1}{2}}(a)J_{\frac{\alpha-1}{2}}(b)-J_{\frac{\alpha+1}{2}}(b)J_{\frac{\alpha-1}{2}}(a)\Big)$$

formulával, ha $a,b\geq 0$, illetve az

$$\mathbb{L}_\alpha(a,b)=\frac{\sqrt{a(-b)}}{2(a-b)}\Big(J_{\frac{\alpha+1}{2}}(a)J_{\frac{\alpha-1}{2}}(-b)+J_{\frac{\alpha+1}{2}}(-b)J_{\frac{\alpha-1}{2}}(a)\Big)$$

formulával, ha $a\geq 0, b<0$, valamint az $\mathbb{L}_\alpha(a,b)=\mathbb{L}_\alpha(-a,-b)$ formulával különben. Mivel $J_\nu(z)=z^\nu G(z)$, ahol $G(z)$ egy egész függvény, definiálhatjuk az $\mathbb{L}_\alpha(a,b)$ magfüggvény egész változatát a

$$\mathbb{L}^*_\alpha(a,b)=\frac{\mathbb{L}_\alpha(a,b)}{a^{\alpha/2}b^{\alpha/2}},\quad \mathbb{L}^*_\alpha(a)=\frac{\mathbb{L}_\alpha(a,a)}{a^\alpha},\quad a,b\in\mathbb{C}. \tag{6}$$

formulával.

A tézis második részében a következő négy tételt bizonyítjuk. Az első kettő a Christoffel-függvények aszimptotikájával foglalkozik, míg a másik kettő az univerzalitás létezésével.

2 Tétel. *Legyen μ egy Stahl-Totik értelemben reguláris véges Borel-mérték, tegyük fel, hogy $K=\mathrm{supp}(\mu)\subseteq\mathbb{R}$ kompakt. Legyen $x_0\in\mathrm{int}(K)$ tetszőleges belső pont, és tegyük fel, hogy valamely kicsi $(x_0-\varepsilon_0,x_0+\varepsilon_0)$ intervallumon μ abszolút folytonos és*

$$d\mu(x)=w(x)|x-x_0|^\alpha dx,\quad x\in(x_0-\varepsilon_0,x_0+\varepsilon_0)$$

ott, ahol $\alpha > -1$, valamint w folytonos és szigorúan pozitív. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1}\lambda_n\Big(\mu, x_0 + \frac{a}{n}\Big) = \frac{w(x_0)}{(\pi\omega_K(x_0))^{\alpha+1}}\Big(\mathbb{L}^*_\alpha\big(\pi\omega_K(x_0)a\big)\Big)^{-1} \quad (7)$$

kompakt halmazokon egyenletesen $a \in \mathbb{R}$-ben.

Végpontokra az alábbi tétel teljesül.

3 Tétel. *Legyen μ egy Stahl-Totik értelemben reguláris véges Borel-mérték, tegyük fel, hogy $K = \operatorname{supp}(\mu) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Legyen $x_0 \in K$ egy jobb végpontja K-nak (azaz létezik olyan $\varepsilon > 0$ melyre $K \cap (x_0, x_0+\varepsilon) = \varnothing$ és $K \cap (x_0-\varepsilon, x_0] = (x_0-\varepsilon, x_0]$), valamint tegyük fel, hogy valamely $(x_0-\varepsilon_0, x_0]$ intervallumon μ abszolút folytonos és*

$$d\mu(x) = w(x)|x-x_0|^\alpha dx, \quad x \in (x_0-\varepsilon_0, x_0]$$

ott, ahol $\alpha > -1$, valamint w balról folytonos és szigorúan pozitív. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} n^{2\alpha+2}\lambda_n\Big(\mu, x_0 - \frac{a}{2n^2}\Big) = \frac{w(x_0)}{M(K,x_0)^{2\alpha+2}}\Big(2^{\alpha+1}\mathbb{J}^*_\alpha\big(M(K,x_0)^2 a\big)\Big)^{-1} \quad (8)$$

teljesül $a \in [0,\infty)$-ben kompakt halmazokon egyenletesen, ahol

$$M(K,x_0) = \lim_{x\to x_0-} \sqrt{2}\pi|x-x_0|^{1/2}\omega_K(x). \quad (9)$$

Hasonló állítás igaz bal végpontokra is. A Christoffel-függvények aszimptotikájából következik az univerzalitás.

4 Tétel. *A 2. Tétel feltételeivel*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n\big(x_0+\frac{a}{n}, x_0+\frac{b}{n}\big)}{K_n(x_0,x_0)} = \frac{\mathbb{L}_\alpha^*(\pi\omega_K(x_0)a, \pi\omega_K(x_0)b)}{\mathbb{L}_\alpha^*(0,0)} \tag{10}$$

teljesül $a, b \in \mathbb{C}$*-ben kompakt halmazokon egyenletesen.*

5 Tétel. *A 3. Tétel feltételeivel*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n\big(x_0-\frac{a}{2n^2}, x_0-\frac{b}{2n^2}\big)}{K_n(x_0,x_0)} = \frac{\mathbb{J}_\alpha^*\big(M(K,x_0)^2 a, M(K,x_0)^2 b\big)}{\mathbb{J}_\alpha^*(0,0)}. \tag{11}$$

teljesül $a, b \in \mathbb{C}$*-ben kompakt halmazokon egyenletesen.*

Ismételten hasonló állítás igaz bal végpontokra is.

A bizonyításokat több lépésben végezzük. Elsőként a $[-1,1]$-en értelmezett,

$$d\mu_\alpha^b(x) = |x|^\alpha, \quad x \in [-1,1]$$

és

$$d\mu_\alpha^e(x) = |x-1|^\alpha, \quad x \in [-1,1].$$

módon definiált μ_α^b és μ_α^e mértékeket vizsgáljuk. Riemann-Hilbert analízis segítségével igazoljuk (7)-et μ_α^b-re és (8)-at μ_α^e-re, amik kiindulási alapként fognak szolgálni. Ezután igazoljuk az 1. Tételt a

$$d\mu_\alpha^{\mathbb{T}}(e^{it}) = |e^{it}-i|^\alpha dt, \quad t \in [-\pi,\pi).$$

módon definiált $\mu_\alpha^{\mathbb{T}}$ mértékre. Mindezeket az eredményeket a polinom inverkép módszer segítségével általánosítjuk, így igazolva az

1., 2. és 3. Tételeket teljes általánosságukban. Végül Lubinsky normális függvénycsaládokat alkalmazó módszerével bebizonyítjuk a 4. és 5. Tételeket.

A doktori disszertáció az alábbi publikációk alapján készült.

[1] T. Danka and V. Totik, Christoffel functions with power type weights, *megjelenés alatt a J. Eur. Math. Soc. folyóiratban*, elérhető az arXivon arXiv:1504.03968 azonosítóval

[2] T. Danka, Universality limits for generalized Jacobi measures, *közlésre benyújtva*, elérhető az arXivon arXiv:1605.04275 azonosítóval

Hivatkozások

[1] A. B. J. Kuijlaars and M. Vanlessen, Universality for eigenvalue correlations at the origin of the spectrum, *Comm. Math. Phys.*, 243(2003), 163-191

[2] A. Máté, P. Nevai and V. Totik, Szegő's extremum problem on the unit circle, *Ann. of Math.*, Vol 134, No. 2. (1991), 433-453

[3] D. S. Lubinsky, A new approach to universality limits involving orthogonal polynomials, *Ann. of Math.*, 170(2009), 915-939

[4] D. S. Lubinsky, A new approach to universality at the edge of the spectrum, *Contemporary Mathematics (60th birthday of Percy Deift)*, 458(2008), 281-290

[5] D. S. Lubinsky, Universality limits at the hard edge of the spectrum for measures with compact support, *Int. Math. Res. Not. 2008*

[6] V. Totik, Asymptotics for Christoffel functions for general measures on the real line, *J. D'Analyse Math.*, 81(2000), 283-303

[7] V. Totik, Christoffel functions on curves and domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 362, Number 4 (2010), 2053-2087.

[8] V. Totik, Polynomial inverse images and polynomial inequalities, *Acta Math.,* **187**(2001), 139-160.