Hilbert térbeli kontrakciók aszimptotikus viselkedése

Doktori értekezés tézisei

Szalai Attila

Témavezető:
Dr. Kérchy László
egyetemi tanár

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Szeged, 2015

1. Bevezetés

A Szőkefalvi-Nagy Béla és Ciprian Foias által kidolgozott, Sz.-Nagy dilatációs tételén alapuló kontrakcióelmélet a nem-normális operátorok vizsgálatának egyik fő eszköze. A disszertáció két különböző abszolút folytonos kontrakciókkal kapcsolatos témát tartalmaz. Az első részben a kontrakciók stabilitását, míg a nagyobb második részben a kvázianalitikus kontrakciókat vizsgáltuk.

A doktori értekezés a szerző következő publikációin alapul.

- L. Kérchy and A. Szalai, Characterization of stability of contractions, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **79** (2013), 325–332.
- L. Kérchy and A. Szalai, Asymptotically cyclic quasianalytic contractions, *Studia Math.*, **223** (2014), 53–75.
- L. Kérchy and A. Szalai, Spectral behaviour of quasianalytic contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, elfogadva.

A tézisfüzet számozása és jelölései megegyeznek a disszertációban találhatókkal.

Az értekezés anyagát képező kutatásokat elsősorban a Hilbert téren értelmezett korlátos lineáris operátorokkal kapcsolatos legnagyobb erőpróbát jelentő és legnagyobb érdeklődésre számot tartó problémák inspirálták, nevezetesen az invariáns- és hiperinvariáns altér problémák. A következőkben jelölje $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ a komplex, szeparábilis $\mathcal{H}$ Hilbert téren ható korlátos lineáris operátorok C^*-algebráját. Az invariáns altér probléma (ISP) azt kérdezi, hogy tetszőleges $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operátornak létezik-e valódi $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ invariáns altere, a hiperinvariáns altér probléma (HSP) pedig valódi $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ hiperinvariáns altér létezését kérdezi tetszőleges $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \setminus \mathbb{C}I$ operátor esetén. Az $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ altér (zárt lineáris sokaság) *invariáns* T-re, ha $T\mathcal{M} = \{Tx : x \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{M}$ teljesül, és *valódi*, ha $\mathcal{M} \neq \{0\}$ és $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$. Az $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ altér *hiperinvariáns* T-re, ha invariáns minden T-vel felcserélhető operátorra. Ezen problémák vizsgálatánál feltehető, hogy a kérdéses T operátor abszolút folytonos (lásd [NFBK, II.2.3. Tétel] és [Dou60, 5.1. Következmény ill. 3. Tétel])). Emlékeztetünk arra, hogy egy $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operátort *kontrakciónak* nevezünk, ha $\|T\| \leq 1$, és arra is, hogy bármely kontrakció egyértelműen felbomlik a $T = T_1 \oplus U_a \oplus U_s$

ortogonális összegre, ahol T_1 egy teljesen nem-unitér kontrakció, U_a egy abszolút folytonos (a.f.) unitér operátor, U_s pedig egy szinguláris unitér operátor (lásd [NFBK, I.3.2. Tétel] és [Hal51]). Egy kontrakció *teljesen nem-unitér*, ha semelyik nem-zéró redukáló alterére megszorítva sem unitér. Egy unitér operátor *a.f.* ill. *szinguláris*, ha spektrálmértéke a.f. ill. szinguláris az egységkörvonal Lebesgue mértékére nézve. A T kontrakció *abszolút folytonos*, ha szinguláris unitér része zéró. Az ilyen T kontrakcióra minimális U unitér dilatációja szokásos függvénykalkulusának segítségével definiálható a Φ_T ún. Sz.-Nagy–Foias függvénykalkulus, ami központi szerepet játszik a kontrakcióelméletben:

$$\Phi_T\colon H^\infty \to \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ f \mapsto f(T) := P_{\mathcal{H}} f(U)|\mathcal{H}.$$

Itt H^∞ a $\mathbb{D}$ nyílt egységkörlapon értelmezett összes korlátos lineáris operátor Hardy-terét jelöli (ami azonosítható a $\mathbb{T}$ egységkörvonalon értelmezett azon korlátos mérhető függvények terével, melyek negatív indexű Fourier együtthatói eltűnnek). Ez a Φ_T függvénykalkulus egy olyan kontraktív, egységelemes algebra-homomorfizmus, amely folytonos a gyenge-* topológiákban és melyre $T = \Phi_T(\chi) = \chi(T)$, ahol $\chi(z) = z$ az identikus függvényt jelöli.

Másik fontos eszköz a T kontrakció vizsgálatában unitér aszimptotája. Az (X, V) pár T *unitér aszimptotája*, ha V egy $\mathcal{K}$ Hilbert téren ható unitér operátor és $X\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ egy lineáris transzformáció, melyekre $\vee_{n=1}^\infty V^{-n} X\mathcal{H} = \mathcal{K}$, $\|Xh\| = \lim_{n\to\infty} \|T^n h\|$ minden $h \in \mathcal{H}$-ra, továbbá $XT = VX$. Az unitér aszimptotával kapcsolatos további tudnivalók megtalálhatók a [Kér13] cikkben és az [NFBK] könyv IX. fejezetében. Könnyű igazolni, hogy X nulltere hiperinvariáns T-re, ez az ún. *stabil altere* T-nek:

$$\mathcal{H}_0(T) = \left\{ h \in \mathcal{H} : \lim_{n\to\infty} \|T^n h\| = 0 \right\}.$$

A kontrakciók aszimptotikus viselkedése szerint Sz.-Nagy és Foias a következő osztályokat vezette be:

- $T \in C_{0\cdot}$, ha $\mathcal{H}_0(T) = \mathcal{H}$, azaz, ha $T^n \to 0$ az erős operátor-topológiában (SOT). Ebben az esetben a T kontrakciót *stabilnak* nevezzük, míg a nem stabil kontrakcióra azt mondjuk, hogy *aszimptotikusan nem-eltűnő*.
- $T \in C_{1\cdot}$, ha $\mathcal{H}_0(T) = \{0\}$. Ekkor azt mondjuk, hogy T *aszimptotikusan erősen nem-eltűnő*.

- $T \in C_{\cdot 0}$ ha $T^* \in C_{0\cdot}$;
- $T \in C_{\cdot 1}$ ha $T^* \in C_{1\cdot}$;
- $C_{ij} = C_{i\cdot} \cap C_{\cdot j}$ $(i, j = 0, 1)$.

A 2. fejezetben a kontrakciók stabilitását karakterizáltuk, a további fejezetekben pedig bizonyos aszimptotikusan nem-eltűnő kontrakciókkal foglalkoztunk.

2. Stabilitási eredmények

A 2. fejezetben a kontrakciók és a polinomiálisan korlátos operátorok stabilitási tulajdonságait vizsgáltuk. A 2.1. alfejezetben karakterizáltuk a korlátos analitikus függvények azon $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatait, melyekkel tesztelhető az a.f. kontrakciók stabilitása. Ezzel M. Dritschel kérdését válaszoltuk meg.

2.4. Definíció. Korlátos analitikus függvények egy $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^{\infty}$ sorozata *az a.f. kontrakciók stabilitásának teszt-sorozata*, ha bármely a.f. T kontrakció esetén $T^n \to 0$ (SOT) akkor és csak akkor teljesül, ha $h_n(T) \to 0$ (SOT).

A fejezet fő eredménye a következő állítás.

2.5. Tétel. *Korlátos analitikus függvények egy $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^{\infty}$ sorozata az a.f. kontrakciók stabilitásának pontosan akkor teszt-sorozata, ha a nyílt egységkörlapon exkluzívan konvergál a nullához, azaz, ha*

(i) $\lim_{n\to\infty} h_n(z) = 0$ *minden* $z \in \mathbb{D}$*-re,*

(ii) $\sup\{||h_n||_{\infty} : n \in \mathbb{N}\} < \infty$,

(iii) $\limsup_{n\to\infty} ||\chi_{\alpha} h_n||_2 > 0$ *minden* $\alpha \subset \mathbb{T}$ *pozitív mértékű Borel halmazra.*

A szükségesség igazolásához az $S \in \mathcal{L}\left(H^2\right)$, $Sf = \chi f$ egyirányú eltolás-operátort és további szorzás-operátorokat hívtunk segítségül. Az elegendőségi rész bizonyításához használtuk a kontrakciók Rota modelljét, a nem stabil kontrakciók trianguláris mátrix alakját, valamint unitér aszimptotáját. A bizonyítás egy része a következő állítást adja.

2.6. Propozíció. *Adott* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^{\infty}$ *sorozat esetén* $h_n(T)$ *pontosan akkor konvergál a zéró operátorhoz az erős operátor-topológiában minden stabil* T *kontrakció esetén, ha* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ *teljesíti az* (i) *és* (ii) *tulajdonságokat.*

Az Sz.-Nagy–Foias függvénykalkulus egy jól ismert tulajdonsága szerint $h_n(T) \to 0$ (SOT) minden a.f. T kontrakció esetén, ha $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ korlátosan konvergál a nullához a $\mathbb{T}$ egységkörvonalon majdnem mindenhol (lásd [NFBK, Chapter III]). A következő állításunk mutatja, hogy a szükséges és elegendő feltétel gyengébb.

2.7. Propozíció. *Adott* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^{\infty}$ *sorozat esetén* $h_n(T)$ *pontosan akkor konvergál a zéró operátorhoz az erős operátor-topológiában minden a.f.* T *kontrakció esetén, ha* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* H^{∞} *tér egy korlátos sorozata és* $\lim_{n\to\infty} ||h_n||_2 = 0$.

A 2.2. alfejezetben az előzőekkel analóg kérdéseket vizsgálunk polinomiálisan korlátos operátorok esetén. A $\mathbb{T}$ egységkörvonalon értelmezett analitikus polinomok halmazát jelölje $\mathcal{P}(\mathbb{T})$, a folytonos függvények $C(\mathbb{T})$ Banach-algebrájában vett lezártját, azaz a diszk-algebrát pedig $A = A(\mathbb{T})$. A $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operátor *polinomiálisan korlátos*, ha létezik egy valós K_T szám úgy, hogy $\|p(T)\| \leq K_T\|p\|$ minden $p \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ esetén, ahol $\|p\| = \max\{|p(\zeta)| : \zeta \in \mathbb{T}\}$. Polinomiálisan korlátos T esetén a $\Phi_{T,0} \colon \mathcal{P}(\mathbb{T}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $p \mapsto p(T)$ leképezés olyan korlátos algebra-homomorfizmus, mely folytonosan kiterjeszthető a diszk-algebrára: $\Phi_{T,1} \colon A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $f \mapsto f(T)$. A polinomiálisan korlátos operátorokat W. Mlak több cikken keresztül vizsgálta ún. elemi mértékeket használva. Definiálta a polinomiálisan korlátos operátor abszolút folytonosságát és szingularitását, és igazolta, hogy pontosan az a.f. polinomiálisan korlátos T operátorok rendelkeznek H^{∞}-függvénykalkulussal, azaz olyan gyenge-* folytonos, egységelemes $\Phi_T \colon H^{\infty} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ algebra-homomorfizmussal, melyre $\Phi_T(\chi) = T$ (lásd [Mla74a, 68. oldal]). Tehát a következő definíció értelmes.

2.9. Definíció. Korlátos analitikus függvények egy $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^{\infty}$ sorozata *az a.f. polinomiálisan korlátos operátorok stabilitásának teszt-sorozata*, ha bármely a.f. polinomiálisan korlátos T operátor esetén $T^n \to 0$ (SOT) akkor és csak akkor teljesül, ha $h_n(T) \to 0$ (SOT).

Vegyük észre, hogy a definíciókból nem következik, hogy az a.f. kontrakciók stabilitásának egy teszt-sorozata egyúttal az a.f. polinomiálisan korlátos operátoroknak is teszt-sorozata. Ennek ellenére a következő állítást sikerült igazolni.

2.10. Tétel. *Korlátos analitikus függvények egy $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^{\infty}$ sorozata az a.f. polinomiálisan korlátos operátorok stabilitásának pontosan akkor teszt-sorozata, ha a nyílt egységkörlapon exkluzívan konvergál a nullához.*

A fejezetet egy a szinguláris polinomiálisan korlátos operátorokról szóló állítással zártuk.

2.11. Propozíció. *Legyen $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ a diszk-algebra egy korlátos sorozata. Ekkor $h_n(T)$ pontosan akkor konvergál nullához az erős operátor-topológiában minden szinguláris polinomiálisan korlátos operátor esetén, ha $\lim_{n\to\infty} h_n(\zeta) = 0$ minden $\zeta \in \mathbb{T}$ pontban. Ebben az esetben $h_n(T) \to 0$ (SOT) minden polinomiálisan korlátos T operátorra.*

3. Kvázianalitikus kontrakciók hiperinvariáns alterei

Legyen $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ egy a.f. kontrakció (X, V) unitér aszimptotával. Ekkor $V \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ is a.f. és E spektrálmértékének mérhető tartóját T *reziduális halmazának* nevezzük és $\omega(T)$-vel jelöljük. Ez azt jelenti, hogy $E(\alpha) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $m(\alpha \cap \omega(T)) = 0$. Tetszőleges $x, y \in \mathcal{H}$ vektorokra, $w_{x,y} \in L^1(\mathbb{T})$ a T x és y pontokhoz tartozó *aszimptotikus sűrűségfüggvénye*: $E_{Xx,Xy} = w_{x,y}\, dm$. A mérhető $\omega(T, x) = \{\zeta \in \mathbb{T} : w_{x,x}(\zeta) > 0\}$ halmaz a T kontrakció x pontbeli *lokális reziduális halmaza.*

Az Sz.-Nagy–Foias függvénykalkulus segítségével definiálható a kvázianalitikus spektrálhalmaz. A Φ_T kalkulus monoton a következő értelemben: $\|f(T)x\| \leq \|g(T)x\|$ minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra (jelölésben: $f(T) \overset{a}{\prec} g(T)$) valahányszor $|f(z)| \leq |g(z)|$ minden $z \in \mathbb{D}$ pontban (jelölésben: $f \overset{a}{\prec} g$). Tetszőleges H^{∞}-beli csökkenő $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatra ($f_{n+1} \overset{a}{\prec} f_n$ minden n-re), tekintsük a m.m. $\zeta \in \mathbb{T}$-re definiált $\varphi_F(\zeta) = \lim_{n\to\infty} |f_n(\zeta)|$ határértékfüggvényt, és a mérhető $N_F = \{\zeta \in \mathbb{T} : \varphi_F(\zeta) > 0\}$ halmazt. Ekkor az operátorok

$F(T) = \{f_n(T)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata is csökkenő ($f_{n+1}(T) \overset{a}{\prec} f_n(T)$ minden n-re) és az $F(T)$-re nézve stabil vektorokból álló

$$\mathcal{H}_0(T,F) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \lim_{n\to\infty} \|f_n(T)x\| = 0 \right\}$$

halmaz hiperinvariáns T-re. A $\mathbb{T}$ egységkörvonal mérhető α és β részhalmazaira az $\alpha = \beta$, $\alpha \neq \beta$ ill. $\alpha \subset \beta$ jelöléseket használjuk, ha $m(\alpha \triangle \beta) = 0$, $m(\alpha \triangle \beta) > 0$ ill. $m(\alpha \setminus \beta) = 0$ teljesül, azaz, ha $\chi_\alpha = \chi_\beta$, $\chi_\alpha \neq \chi_\beta$ ill. $\chi_\alpha \leq \chi_\beta$ teljesül a megfelelő karakterisztikus függvényekre, mint az $L^1(\mathbb{T})$ Banach-tér elemeire. Azt mondjuk, hogy T *kvázianalitikus a mérhető $\alpha \subset \mathbb{T}$ halmazon az $x \in \mathcal{H}$ pontban*, ha $x \notin \mathcal{H}_0(T,F)$ valahányszor F nem tűnik el α-n, azaz $N_F \cap \alpha \neq \emptyset$. Jelölje $\mathcal{A}(T,x)$ az ilyen α halmazok rendszerét. A T kontrakció $\pi(T,x)$ *lokális kvázianalitikus spektrálhalmaza* az x pontban $\mathcal{A}(T,x)$ legnagyobb eleme. (Megjegyezzük, hogy $\pi(T,x)$ egyértelműen meghatározott 0 mértékű halmaztól eltekintve.) Emlékeztetünk, hogy T kvázianalitikus α-n, ha $\mathcal{H}_0(T,F) = \{0\}$ valahányszor $N_F \cap \alpha \neq \emptyset$ (lásd [Kér11]); a $\pi(T)$ (globális) kvázianalitikus spektrálhalmaz a legnagyobb olyan halmaz, ahol T kvázianalitikus.

A következő lemma szerint a lokális stabilitást meghatározza az aszimptotikus sűrűségfüggvény.

3.2. Lemma. *Legyen $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy csökkenő sorozat a H^∞ térben és $x \in \mathcal{H}$.*

(a) *Ha $\lim_{n\to\infty} \|f_n(T)x\| = 0$, akkor $\varphi_F w_{x,x} = 0$.*

(b) *Ha $\varphi_F w_{x,x} = 0$, akkor létezik egy olyan monoton növő $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $\lim_{n\to\infty} \|T^{\tau(n)} f_n(T)x\| = 0$.*

A következő tétel a lokális- ill. globális spektrálinvariánsok közötti kapcsolatot írja le.

3.3. Tétel. *Tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ esetén*

$$\pi(T) \subset \pi(T,x) = \omega(T,x) \subset \omega(T).$$

Az előző állítás következményeként hiperinvariáns alterek létezésére vonatkozó feltételt kaphatunk. (A (b) állítás már a [Kér01]) cikkben is szerepelt.)

3.4. Következmény.

(a) *Ha $\omega(T,x) \neq \omega(T)$ valamely nem nulla $x \in \mathcal{H}$ vektorra és $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy csökkenő sorozat úgy, hogy $N_F = \omega(T) \setminus \omega(T,x)$, akkor létezik egy olyan monoton növő $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $G = \left\{\chi^{\tau(n)} f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ is egy csökkenő sorozat, melyre $\varphi_G = \varphi_F$, $x \in \mathcal{H}_0(T,G)$ és $\mathcal{H}_0(T,G) \cap \mathcal{H}_\omega(T) = \emptyset$. Tehát a valódi $\mathcal{H}_0(T,G)$ altér hiperinvariáns T-re.*

(b) *Ha $\pi(T) \neq \omega(T)$, akkor* $\operatorname{Hlat} T$ *nem triviális.*

Az a.f. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kontrakció *kvázianalitikus*, ha $\pi(T) = \omega(T) \neq \emptyset$. Az előbbiek szerint az aszimptotikusan nem-eltűnő kontrakciók körében (HSP) a kvázianalitikus esetre redukálható.

A 3.8. Tételben megmutattuk, hogy a kvázianalitikusság meghatározza az aszimptotikus viselkedést, nevezetesen, ha T egy kvázianalitikus kontrakció, akkor $T \in C_{10}$.

Az a.f. T kontrakció *aszimptotikusan ciklikus*, ha $V \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitér aszimptotája ciklikus, azaz, ha $\vee_{n=0}^{\infty} V^n y = \mathcal{K}$ teljesül valamely $y \in \mathcal{K}$ vektorra. Az aszimptotikusan ciklikus kvázianalitikus kontrakciók halmazát jelölje $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$. Ha T ciklikus, akkor V is az (fordítva nem igaz), így (ISP) a kvázianalitikus esetben az $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$ osztályra redukálható. Ha a reziduális halmaz lefedi az egységkörvonalat, akkor a kontrakció szerkezetéről sokat tudunk, ezért érdemes az $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{L}_0(\mathcal{H}) : \pi(T) = \mathbb{T}\}$ osztályt vizsgálni. Ezen kontrakciókra $\vee \operatorname{Lat_s} T = \mathcal{H}$ teljesül, ahol $\operatorname{Lat_s} T$ azon $\mathcal{M}$ invariáns alterek halmazát jelöli, melyekre való $T|\mathcal{M}$ megszorítás hasonló az S egyirányú eltolás-operátorhoz.

$\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$-beli kontrakciókra a következő állítás ad példákat. Először rögzítsünk néhány jelölést. A korábbiaknak megfelelően $S \in \mathcal{L}(H^2), Sf = \chi f$ az egyszerű egyirányú eltolás-operator. Az $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operátor *kváziaffin transzformáltja* a $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ operátornak, jelölésben: $A \prec B$, ha létezik egy olyan $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ *kváziaffinitás* (azaz sűrű képterű injektív transzformáció), melyre $QA = BQ$.

3.13. Propozíció. *Ha a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kontrakcióra $T \prec S$, akkor $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ és $H^{\infty}(T) = \{T\}'$.*

A [KT12] cikk 1. Tétele szerint (HSP) az $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$ osztályban visszavezethető az $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ osztályra. Ha $\{T\}' = H^{\infty}(T)$, akkor $\operatorname{Hlat} T = \operatorname{Lat} T$ nem triviális.

Azonban, ha $\{T\}' \neq H^\infty(T)$ akkor az eltolás típusú invariáns alterek nem hiperinvariánsak.

3.16. Propozíció. *Legyen $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ olyan, melyre $\{T\}' \neq H^\infty(T)$. Ekkor bármely $C \in \{T\}' \setminus H^\infty(T)$ esetén $\operatorname{Lat} C \cap \operatorname{Lat_s} T = \emptyset$ teljesül.*

Ugyanakkor igazoltuk, hogy ha létezik valódi hiperinvariáns altér, akkor ilyen az eltolás típusú invariáns alterekből is származtatható.

3.18. Tétel. *Legyen $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ olyan, melyre $\{T\}' \neq H^\infty(T)$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) $\operatorname{Hlat} T$ *nem-triviális;*

(ii) *létezik $\mathcal{M} \in \operatorname{Lat_s} T$ úgy, hogy $\vee\{C\mathcal{M} : C \in \{T\}'\} \neq \mathcal{H}$;*

(iii) *létezik $\mathcal{S} \subset \operatorname{Lat_s} T$ úgy, hogy $\mathcal{H} \neq \vee\mathcal{S} \in \operatorname{Hlat} T$.*

A 3.19. Propozíció szerint a $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ kontrakció pontosan akkor kváziaffin transzformáltja S-nek, ha T nem kváziunitér, így ebben az osztályban (HSP) a kváziunitér esetre redukálható. Ha $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ kváziunitér, akkor léteznek olyan $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \operatorname{Lat_s} T$ eltolás típusú invariáns alterek, melyekre $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$ (lásd a 3.20. Propozíciót).

Legyen $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ aszimptotikusan ciklikus a.f. kontrakció és tegyük fel, hogy $T \in C_{1\cdot}$, valamint $\omega(T) = \mathbb{T}$. Az (X, V) unitér aszimptota univerzális tulajdonságából következik, hogy bármely $C \in \{T\}'$ operátorhoz egyértelműen létezik $D \in \{V\}'$ operátor, melyre $XC = DX$ és a $\gamma\colon \{T\}' \to \{V\}', C \mapsto D$ leképezés egy olyan kontraktív, egységelemes algebra-homomorfizmus, mely injektív, hiszen $T \in C_{1\cdot}$. A $\Phi\colon L^\infty(\mathbb{T}) \to \{V\}', f \mapsto f(V)$ függvénykalkulus a megfelelő Banach-algebrák közti izomorfizmus. Így a $\widehat{\gamma}_T = \Phi^{-1} \circ \gamma\colon \{T\}' \to L^\infty(\mathbb{T})$ kompozíció is egy injektív, kontraktív, egységelemes algebra-homomorfizmus. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\widehat{\gamma}_T$ független az (X, V) unitér aszimptota speciális választásától.

Az egyértelműen meghatározott $\widehat{\gamma}_T$ leképezést T *függvény-leképezésének* nevezzük, $\mathcal{F}(T)$ képterét pedig T *függvénykommutánsának* hívjuk. Mivel $\widehat{\gamma}_T(f(T)) = f$ teljesül, minden $f \in H^\infty$ függvényre, így $\mathcal{F}(T)$ az $L^\infty(\mathbb{T})$ algebra H^∞-t tartalmazó részalgebrája. A következő kérdések természetes módon vetődnek fel. Melyik $H^\infty \subset \mathcal{A} \subset L^\infty(\mathbb{T})$ algebrák érhetők el függvénykommutánsként és milyen információkat tudhatunk meg T viselkedéséről $\widehat{\gamma}_T$ és $\mathcal{F}(T)$ tulajdonságaiból? Emlékeztetünk, hogy egy $\mathcal{A}$ függvényalgebrát *kvázianalitikusnak* nevezünk, ha $f(\zeta) \neq 0$ teljesül m.m. $\zeta \in \mathbb{T}$ esetén valahányszor f $\mathcal{A}$-nak nem-zéró eleme. A [Kér11] cikkben található 4.2. Propozíció szerint ha $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, akkor $\mathcal{F}(T)$ kvázianalitikus.

Világos, hogy $\mathcal{F}(T)$ akkor és csak akkor egyezik meg a H^∞ térrel, ha $\{T\}' = H^\infty(T)$, ami például a $T \prec S$ esetben teljesül. (Ennek az esetnek részletes karakterizációját adja a [Kér11] cikk 5.2. Tétele.)

Ha $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ és $\mathcal{F}(T) \neq H^\infty$, akkor az $\mathcal{F}(T)^-$ lezárt tartalmazza a $H^\infty + C(\mathbb{T})$ algebrát (lásd [Gar07, IX.1.4. ill. IX.2.2. Tételek]); így $\mathcal{F}(T)^-$ nem kvázianalitikus, tehát $\mathcal{F}(T)$ nem zárt, ami ekvivalens azzal, hogy $\widehat{\gamma}_T$ alulról nem korlátos.

Emlékeztetünk, hogy $\eta \in H^\infty$ *belső függvény*, ha $|\eta(\zeta)| = 1$ m.m. $\zeta \in \mathbb{T}$ pontban. Jelölje H^∞_{i} az összes belső függvényből álló multiplikatív félcsoportot. H^∞_{i} adott $\mathcal{B}$ részfélcsoportja esetén a $\overline{\mathcal{B}} \cdot H^\infty$ algebra nyilvánvalóan kvázianalitikus, ahol $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$-beli függvények konjugáltjainak halmaza. A $\left(\overline{\mathcal{B}} \cdot H^\infty\right)^-$ algebrát a $\mathcal{B}$ által indukált *Douglas-algebrának* nevezzük. Az ünnepelt Chang–Marshall tétel szerint minden zárt, H^∞-t tartalmazó $\mathcal{A} \subset L^\infty(\mathbb{T})$ részalgebra Douglas-algebra (lásd [Gar07, IX.3.1. Tétel]). Így $\mathcal{F}(T)^- = \left(\overline{\mathcal{B}} \cdot H^\infty\right)^-$ teljesül a $\mathcal{B} = \{\eta \in \mathcal{F}(T)^- \cap H^\infty_{\mathrm{i}} : \overline{\eta} \in \mathcal{F}(T)^-\}$ esetben. Következő tételünk azt a [Kér11] cikkben felvetett kérdést válaszolja meg, hogy melyik $\overline{\mathcal{B}} \cdot H^\infty$ pre-Douglas algebra kapható meg $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$-beli kontrakció függvénykommutánsaként.

3.22. Tétel. *H^∞ az egyetlen elérhető pre-Douglas algebra.*

A függvénykommutáns következő tulajdonságának speciális esetét kihasználtuk az előző tételben.

3.23. Propozíció. *Ha $f \in \mathcal{F}(T)$, $r > \|\widehat{\gamma}_T^{-1}(f)\|$ és φ analitikus $r\mathbb{D}$-n, akkor $\varphi \circ f \in \mathcal{F}(T)$.*

Megmutattuk, hogy a hasonló kontrakciók függvénykommutánsa megegyezik. Valójában a következő általánosabb állítást igazoltuk.

3.25. Tétel. *Legyenek adottak a $T_j \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_j), j = 1,2$ kontrakciók (X_j, V_j) unitér aszimptotákkal. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $Y \in \mathcal{I}(T_1, T_2)$ és $Z \in \mathcal{I}(T_2, T_1)$ összefűző transzformációk melyekre $ZY \neq 0$. Ekkor*

(a) *Y és Z is injektív;*

(b) *$0 \neq \widehat{\gamma}_{T_1}(ZY) = \widehat{\gamma}_{T_2}(YZ) =: g$ benne van az $\mathcal{F}(T_1) \cap \mathcal{F}(T_2)$ metszetben és $g\mathcal{F}(T_1) \subset \mathcal{F}(T_2)$, $g\mathcal{F}(T_2) \subset \mathcal{F}(T_1)$;*

(c) *speciálisan, ha $ZY = I$, azaz, ha $T_1 \approx T_2$, akkor $g = \mathbb{1}$ és $\mathcal{F}(T_1) = \mathcal{F}(T_2)$.*

A 3. fejezetet a $\widehat{\gamma}_T$ függvény-leképezés függvény-modellben való reprezentációjával zártuk, a részletek tárgyalásától itt eltekintünk.

4. Speciális kvázianalitikus kontrakciók

A 4. fejezetet olyan speciális operátorosztályoknak szenteltük, melyekben természetes módon vetődnek fel kvázianalitikus kontrakciók. Nevezetesen, analitikus kontrakciókat és súlyozott kétirányú eltolás-operátorokat vizsgáltunk.

Az [ARS07] cikkben a szerzőhármas a nyílt egységkörlapon értelmezett analitikus függvények egy általános $\mathcal{H}_a$ Hilbert-terén értelmezett $M_a \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_a)$, $M_a f = \chi f$ analitikus szorzás-operátort vizsgálta. A $\mathcal{H}_a$ tér függvényeinek határon való viselkedését meghatározza a

$$\Delta(\mathcal{H}_a) = \{\zeta \in \mathbb{T} : \text{nt-}\varliminf_{\lambda \to \zeta} \left(1 - |\lambda|^2\right)^{-1} \|k_\lambda\|^{-2} > 0\}$$

halmaz, ahol $k_\lambda \in \mathcal{H}_a$ az az egyértelműen meghatározott magfüggvény, melyre $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle \quad (f \in \mathcal{H}_a)$. A 4.1. alfejezetben megmutattuk, hogy a mérhető $\Delta(\mathcal{H}_a)$ halmaz mindig része M_a kvázianalitikus spektrálhalmazának (lásd 4.1. Propozíció), így az [ARS07] cikkben a $\Delta(\mathcal{H}_a) = \omega(M_a)$ egyenlőségre adott feltételek teljesülése biztosítja M_a kvázianalitikusságát. Nem nyilvánvaló, hogy egy általános analitikus szorzás-operátor unitér aszimptotája hogyan néz ki, azonban abban a speciális esetben le tudtuk írni, amikor $\mathcal{H}_a$ egy az [ARS09] cikkbeli feltételeket teljesítő mérték által indukált.

A 4.2. alfejezetben olyan kétirányú súlyozott eltolás-operátorokkal foglalkozunk, melyek benne vannak a C_{10} osztályban. Javarészt a [Shi74] könyvben található ötleteket használjuk, azonban formális sorok helyett valódi függvényekkel dolgozunk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a vizsgált eltolás-operátoraink aszimptotikusan ciklikusak és kváziunitérek. Egy T_β súlyozott kétirányú eltolás-operátorra egy bizonyos $L^2(\beta)$ függvénytéren értelmezett, az identikus függvénnyel való szorzás-operátorként tekintünk. Tudomásunk szerint a C_{10}-beli kétirányú súlyozott eltolások körében a hiperinvariáns altér probléma abban az esetben nyitott, amikor

$$0 < \delta_\beta \leq r_\beta < R_\beta = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \beta(-n)}{n^2} = \infty.$$

Itt a $\delta_\beta > 0$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy T_β invertálható, r_β jelöli T_β belső spektrálsugarát, a $\beta(-n)$-re vonatkozó növekedési feltétel pedig az $L^2(\beta)$ függvényalgebra kvázianalitikusságát biztosítja. Ezen feltételek teljesülése esetén a függvénykommutáns bizonyos körgyűrűkön értelmezett korlátos analitikus függvényekkel hozható kapcsolatba.

5. A kvázianalitikus kontrakciók spektrális viselkedése

Habár az invariáns- és hiperinvariáns altér problémák nyitottak az aszimptotikusan nem-eltűnő kontrakciók körében, a 3.4. Következmény mutatja, hogy a nem kvázianalitikus esetben mindkét kérdés megoldott. Ezen tény ismeretében fontos lenne meghatározni a kvázianalitikus kontrakciók spektrális tulajdonságait, hiszen ha egy aszimptotikusan nem-eltűnő kontrakció nem rendelkezne ezekkel a tulajdonságokkal, akkor nem lehetne kvázianalitikus, és így létezne valódi hiperinvariáns altere.

Amennyiben egy T kontrakció kvázianalitikus, akkor a C_{10} osztályba tartozik. Ezen aszimptotikus viselkedés esetén a T kontrakció $\sigma(T)$ spektruma és V unitér aszimptotájának $\sigma(V)$ spektruma között kapcsolat figyelhető meg. Nevezetesen, a $\sigma(V)$ spektrum $\omega(T)$ lényeges tartójával egyezik meg ($\sigma(V) = \mathrm{es}(\omega(T))$) a $\mathbb{T}$ egységkörvonal legnagyobb olyan nyílt részhalmazának komplementere, melyre $m(\mathcal{O} \cap \omega(T)) = 0$ teljesül), továbbá $\sigma(V)$ *rendes része* $\sigma(T)$-nek, azaz $\sigma(V) \subset \sigma(T)$, és $m(\sigma(V) \cap \sigma') > 0$ teljesül minden olyan nem-üres zárt $\sigma' \subset \sigma(T)$ részhalmazra, melyre $\sigma(T) \setminus \sigma'$ is zárt. Sőt, más megszorítás nincs a C_{10} kontrakciók spektrumára, még a ciklikus esetben sem; lásd az [NFBK] könyv IX. fejezetét. A záró fejezetben azt vizsgáltuk, hogy van-e további megszorítás a kvázianalitikus kontrakciók spektrumára.

1. Kérdés. Legyen adott egy pozitív mértékű $\omega_0 \subset \mathbb{T}$ halmaz és a $\mathbb{D}^-$ zárt egységkörlap egy kompakt σ részhalmaza, úgy hogy $\mathrm{es}(\omega_0)$ rendes része σ-nak. Létezik-e olyan T kvázianalitikus kontrakció, melyre $\sigma(T) = \sigma$ és $\omega(T) = \omega_0$ teljesül?

A C_{10} osztályban a konstrukció egy olyan kontrakció megadásával kezdődik, melyre $\omega(T) = \omega_0$ és $\sigma(T) = \mathrm{es}(\omega_0)$ teljesül. Ott ezt egy W kétirányú súlyozott eltolás-operátor egy alkalmasan választott invariáns alterére való megszorításával kapjuk, azonban az így kapott kontrakció nem lehet kvázianalitikus, így más módot kell találnunk egy olyan T kvázianalitikus kontrakció megkonstruálására, melynek $\sigma(T)$ spektruma valódi része a $\mathbb{T}$ egységkörvonalnak, ha egyáltalán létezik ilyen. Mindenekelőtt a következő egyszerűbb kérdést kellene megválaszolni.

2. Kérdés. Létezik-e minden pozitív mértékű zárt J ívhez és $c > 0$ számhoz olyan T kvázianalitikus kontrakció, melyre $\sigma(T) = \pi(T) = J$ és $\|T^{-1}\| > c$ teljesül?

Tudjuk, hogy bármely a.f. T kontrakciónak vannak eltolás típusú invariáns alterei, ha $\omega(T) = \mathbb{T}$. Sőt, $\mathcal{H} = \vee \operatorname{Lat_s} T$. Bármely kvázianalitikus kontrakció köthető egy ilyen gazdag invariáns altér hálóval rendelkező kontrakcióhoz.

5.1. Tétel. *Bármely kvázianalitikus T_1 kontrakcióhoz létezik olyan T_2 kvázianalitikus kontrakció, melyre $\pi(T_2) = \mathbb{T}$, $\{T_2\}' \supset \{T_1\}'$ és így $\operatorname{Hlat} T_2 \subset \operatorname{Hlat} T_1$ teljesül.*

Tehát az aszimptotikusan nem-eltűnő kontrakciók esetén (HSP) arra az esetre redukálható, amikor T kvázianalitikus és $\pi(T) = \mathbb{T}$. Ekkor $\mathbb{T}$ pontosan akkor rendes része $\sigma(T)$-nek, ha a $\sigma(T)$ spektrum összefüggő. Így, ebben az osztályban az 1. Kérdés a következő alakot ölti.

3. Kérdés. Adott, a $\mathbb{T}$ egységkörvonalat tartalmazó, összefüggő, kompakt σ halmazhoz létezik-e olyan kvázianalitikus T kontrakció, melyre $\sigma(T) = \sigma$ és $\pi(T) = \mathbb{T}$?

Következő eredményünk mutatja, hogy az előbbi két kérdés összefügg. Legyen $\mathbb{D}_+ := \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{T}_+ := \{\zeta \in \mathbb{T} : \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$, és bármely $K \subset \mathbb{C}$ halmazra $K^2 := \{z^2 : z \in K\}$.

5.2. Tétel. *A 2. Kérdésre adott pozitív válasz maga után vonná a 3. Kérdés pozitivitását abban a speciális esetben, amikor $\sigma = K^2$ valamely összefüggő, kompakt K halmazzal, melyre $\mathbb{T}_+ \subset K \subset \mathbb{D}_+^-$.*

A bizonyítás során az [NFBK] könyv IX.2. alfejezetében található módszert alkalmazva konstruálunk egy olyan kvázianalitikus $\widetilde{T}$ kontrakciót, melyre $\sigma(\widetilde{T}) = K$ és $\pi(\widetilde{T}) = \mathbb{T}_+$. Az 5.3. Megjegyzésben megmutattuk, hogy sajnos nem minden összefüggő, kompakt $\mathbb{T} \subset \sigma \subset \mathbb{D}^-$ halmaz írható $\sigma = K^2$ alakba valamely összefüggő, kompakt $\mathbb{T}_+ \subset K \subset \mathbb{D}_+^-$ halmazra.

Világos, hogy (ISP) az aszimptotikusan ciklikus esetre redukálható, így fontos lenne ezen esetben is a spektrális viselkedés ismerete. Az aszimptotikusan ciklikus kvázianalitikus kontrakciók $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$ osztályában és annak $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{L}_0(\mathcal{H}) : \pi(T) = \mathbb{T}\}$ részhalmazában ugyanazok a kommutánsok lépnek fel [KT12] 1. Tétele szerint, így (HSP) az $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ osztályra redukálható. Ezen tény ismeretében különösen fontos a következő kérdés megválaszolása.

4. Kérdés. Milyen lehet az $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ osztályba tartozó kontrakciók spektruma?

A 3.24. Példa szerint, bármely $0 \leq \delta < 1$ számhoz létezik olyan $T_\delta \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ kontrakció, melyre $\sigma(T_\delta) = \{z \in \mathbb{C} : \delta \leq |z| \leq 1\}$. Következő tételünk mutatja, hogy a spektrum lehet a $\mathbb{T}$ egységkörvonal is, továbbá pozitív választ ad a 2. Kérdésre is abban az esetben, amikor a J ív az egész $\mathbb{T}$ körvonallal egyezik meg.

5.4. Tétel. *Bármely $c > 1$ számhoz létezik olyan $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ kontrakció, melyre $\sigma(T) = \mathbb{T}$ és $\|T^{-1}\| \geq c$ teljesül.*

A bizonyítás során minden $c > 1$ számhoz konstruálunk egy kétirányú súlyozott eltolás-operátort a megadott feltételekkel.

Ezen állítás segítségével konstruálhatunk kifinomultabb spektrummal rendelkező $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ osztálybeli kontrakciókat is. Az 5.5.(a) példában adott T_δ kontrakció spektruma $\sigma(T_\delta) = \mathbb{T} \cup \delta\mathbb{T} \cup [\delta, 1]$. Figyeljük meg, hogy a $\mathbb{D} \setminus \sigma(T_\delta)$ halmaz nem összefüggő. Az 5.5.(b) példában megadtunk egy olyan $\widetilde{T} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ kontrakciót, melyre $\sigma(\widetilde{T}) = \mathbb{T} \cup \{r\zeta : \zeta \in H, \rho(\zeta) \leq r < 1\}$ valamilyen $\rho\colon H \to (0,1)$ függvényre és sűrű $H \subset \mathbb{T}$ halmazra.

Hivatkozások

[ARS07] A. Aleman, S. Richter, and C. Sundberg, Analytic contractions, nontangential limits, and the index of invariant subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359** (2007), 3369–3407.

[ARS09] A. Aleman, S. Richter, and C. Sundberg, Nontangential limits in $P^t(\mu)$-spaces and the index of invariant subspaces, *Ann. of Math. (2)*, **169** (2009), 449–490.

[Dou60] R. G. Douglas, On the operator equation $S^*XT = X$ and related topics, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **30** (1960), 19–32.

[Gar07] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2007.

[Hal51] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, New York, 1951.

[Kér01] L. Kérchy, On the hyperinvariant subspace problem for asymptotically nonvanishing contractions, *Operator Theory Adv. Appl.*, **127** (2001), 399–422.

[Kér07] L. Kérchy, Shift-type invariant subspaces of contractions, *J. Funct. Anal.*, **246** (2007), 281–301.

[Kér11] L. Kérchy, Quasianalytic contractions and function algebras, *Indiana Univ. Math. J.*, **60** (2011), 21–40.

[Kér13] L. Kérchy, Unitary asymptotes and quasianalycity, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **79** (2013), 253–271.

[KSz13] L. Kérchy and A. Szalai, Characterization of stability of contractions, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **79** (2013), 325–332.

[KSz14] L. Kérchy and A. Szalai, Asymptotically cyclic quasianalytic contractions, *Studia Math.*, **223** (2014), 53–75.

[KSz15] L. Kérchy and A. Szalai, Spectral behaviour of quasianalytic contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, accepted.

[KT12] L. Kérchy and V. Totik, Compression of quasianalytic spectral sets of cyclic contractions, *J. Funct. Anal.*, **263** (2012), 2754–2769.

[Mla73] W. Mlak, Decompositions of polynomially bounded operators, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **21** (1973), 317–322.

[Mla74a] W. Mlak, Operator valued representations of function algebras, *Linear Operators and Approximation. II*, (Proc. Conf., Oberwolfach Math. Res. Inst., 1974), Internat. Ser. Numer. Math. **25**, Birkhäuser, Basel, 1974, 49–79.

[Mla74b] W. Mlak, Algebraic polynomially bounded operators, *Ann. Polon. Math.*, **29** (1974), 133–139.

[NFBK] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space, Revised and Enlarged Edition*, Universitext, Springer, New York, 2010.

[Shi74] A. L. Shields, Weighted shift operators and analytic function theory, *Topics in Operator Theory* (ed. C. Pearcy), Amer. Math. Soc., Providence, 1974.