Hilbert térbeli operátorok aszimptotikus viselkedése, alkalmazásokkal

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Gehér György Pál

Témavazető:
Dr. Kérchy László
Tanszékvezető egyetemi tanár

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

Szeged, 2014

1. Bevezetés

A komplex Hilbert tereken ható, nem-normális operátorok vizsgálatának egyik fő iránya a kontrakciók elmélete. Az operátorelmélet ezen területét Szőkefalvi-Nagy Béla és Ciprian Foias fejlesztették ki az Sz.-Nagy-féle dilatációs tételből kiindulva. Azt mondjuk, hogy egy $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ korlátos, lineáris opperátor kontrakció, ha $\|T\| \leq 1$ teljesül, ahol $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ jelöli a $\mathcal{H}$ Hilbert téren ható korlátos, lineáris operátorok halmazát.

Sz.-Nagy és Foias aszimptotikus viselkedés szerint osztályozták a kontrakciókat. Ezt az osztályozást meg lehet tenni az úgynevezett hatványkorlátos operátorok osztályán is. A $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátort hatványkorlátosnak hívjuk, ha $\sup\{\|T^n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ teljesül. Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{H}$ vektor stabil T-re, ha $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$. Jelölje $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(T)$ a stabil vektorok halmazát. Könnyen belátható, hogy a $\mathcal{H}_0$ halmaz T hiperinvariáns altere ([**11**]), ami azt jelenti, hogy $\mathcal{H}_0$ invariáns altere minden olyan operátornak, mely T-vel felcserélhető. Ezért $\mathcal{H}_0$-at a T operátor stabil alterének hívjuk. A fentebb említett osztályozás a következő:

- a T hatványkorlátos operátort $C_{1\cdot}$-osztályúnak vagy aszimptotikusan nem-eltűnőnek hívjuk, ha $\mathcal{H}_0(T) = \{0\}$;
- a T hatványkorlátos operátort $C_{0\cdot}$-osztályúnak vagy stabilnak nevezzük, ha $\mathcal{H}_0(T) = \mathcal{H}$, azaz ha $T^n \to 0$ az erős operátortopológiában (EOT) teljesül;
- azt mondjuk, hogy a T hatványkorlátos operátor $C_{\cdot j}$-osztályú ($j \in \{0, 1\}$), ha a T^* $C_{j\cdot}$-osztályú;
- a C_{jk} ($j, k \in \{0, 1\}$) osztály azon operátorokat tartalmazza, melyek benne vannak a $C_{j\cdot}$ és $C_{\cdot k}$ osztályokban is.

Sz.-Nagy 1947-ben karakterizálta azon operátorokat, melyek hasonlóak egy unitér operátorhoz. Ez a tétel az operátorok hasonlóságának témakörében ma is az egyik legismertebb és legfontossabb eredmény. A tétel a következő:

1.1. Tétel (Sz.-Nagy [**15**]). *A $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátor pontosan akkor hasonló egy unitér operátorohoz, ha invertálható továbbá T és T^{-1} is hatványkorlátos.*

A bizonyításhoz Sz.-Nagy definiálta a T hatványkorlátos operátor egy úgynevezett L-szimptotikus limeszét, ami általában függ az adott L Banach limesztől. Abban az esetben, ha T kontrakció, akkor ez a definíció független L-től, sőt, ekkor ez tulajdonképpen az EOT-limesze a T

önadjungált iteráltjainak $\{T^{*n}T^n\}_{n=1}^{\infty}$. Ezt a határértéket A_T-vel jelöljük, és a T aszimptotikus limeszének hívjuk. Azonban ha T hatványkorlátos, akkor a fenti sorozat általában nem konvergens. Ebben az esetben az alábbi másfél-lineáris funkcionált tekintjük:

$$w_{T,L}\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C},\quad w_{T,L}(x,y):=\operatorname*{L\text{-}lim}_{n\to\infty}\langle T^{*n}T^n x,y\rangle.$$

Mivel ez korlátos és pozitív, ezért egyértelműen létezik egy reprezentáló $A_{T,L}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor, melyre

$$w_{T,L}(x,y)=\langle A_{T,L}x,y\rangle\quad (x,y\in\mathcal{H})$$

teljesül. Az $A_{T,L}$ operátort T L-aszimptotikus határértékének hívjuk. Egyszerűen megmutatható, hogy ha T és T^{-1} is hatványkorlátos, akkor $A_{T,L}$ invertálható, és létezik pontosan egy olyan $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitér operátor, melyre $A_{T,L}^{1/2}T=UA_{T,L}^{1/2}$ teljesül. Könnyen látható, hogy $\ker A_{T,L}=\mathcal{H}_0(T)$ is teljesül minden L Banach limesszel.

Megjegyezzük, hogy érvényes az 1.1. Tétel alábbi megfogalmazása is ([**13**]).

1.2. Tétel (Sz.-Nagy). *Tekintsünk egy $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátort és egy L Banach limeszt. Az alábbi állítások ekvivalensek egymással:*

(i) *T hasonló egy unitér operátorhoz;*
(ii) *T ráképezés és hasonló egy izometriához;*
(iii) *T hatványkorlátos és létezik egy $c>0$ szám, mellyel $\|T^nx\|\geq c\|x\|$ és $\|T^{*n}x\|\geq c\|x\|$ teljesül minden $n\in\mathbb{N}$ és $x\in\mathcal{H}$ esetén;*
(iv) *T ráképezés, hatványkorlátos és létezik egy $c>0$ szám, mellyel $\|T^nx\|\geq c\|x\|$ teljesül minden $n\in\mathbb{N}$ és $x\in\mathcal{H}$ esetén;*
(v) *T hatványkorlátos és az $A_{T,L}$, $A_{T^*,L}$ operátorok invertálhatóak;*
(vi) *T invertáható, valamint a T^{-1} és T operátorok hatványkorlátosak.*

Ha a $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátorról feltesszük, hogy hatványkorlátos is, akkor az alábbi három feltétel is ekvivalens egymással:

(i') *T hasonló egy izometriához;*
(ii') *létezik egy $c>0$ konstans, mellyel $\|T^nx\|\geq c\|x\|$ teljesül minden $n\in\mathbb{N}$ és $x\in\mathcal{H}$ esetén;*
(iii') *az $A_{T,L}$ operátor invertálható.*

Sz.-Nagy módszere természetesen vezet el minket egy általánosabb definícióhoz. Ez az úgynevezett izometrikus- és unitér aszimptoták fogalma. Tekintsük az $X_{T,L}^+\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_T^+)$ operátort, ahol $\mathcal{H}_T^+=(\operatorname{ran}A_{T,L})^-=(\ker A_{T,L})^\perp=\mathcal{H}_0^\perp$ és $X_{T,L}^+x=A_{T,L}^{1/2}x$ igaz minden $x\in\mathcal{H}$

vektorra. Mivel $\|X^+_{T,L}Tx\| = \|X^+_{T,L}x\|$ teljesül ($x \in \mathcal{H}$), ezért létezik egy egyértelműen meghatározott $V_{T,L} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+_T)$ izometria, mellyel teljesül az $X^+_{T,L}T = V_{T,L}X^+_{T,L}$ összefűzési egyenlőség. A $V_{T,L}$ operátort (vagy sokszor a $(V_{T,L}, X^+_{T,L})$ párt) hívjuk a T izometrikus aszimptotájának. Tekintsük a $V_{T,L}$ izometria $W_{T,L} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{T,L})$ minimális unitér dilatációját, és az $X_{T,L} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{T,L}), X_{T,L}x = X^+_{T,L}x$ ($x \in \mathcal{H}$) operátort. Nyilván $X_{T,L}T = W_{T,L}X_{T,L}$ is teljesül. A $W_{T,L}$ operátort (vagy sokszor a $(W_{T,L}, X_{T,L})$ párt) nevezzük a T unitér aszimptotájának. Ezek az aszimptoták és általánosításaik fontos szerepet játszanak az operátorelmélet különböző területein, például a hiperinvariáns altér probléma, hasonlósági problémák, operátor modellek esetében.

Ha $T \notin C_{1\cdot}(\mathcal{H}) \cup C_{0\cdot}(\mathcal{H})$, akkor az alábbi felbontási tétel igaz, melyet kontrakciókra Sz.-Nagy és Foias láttak be, hatványkorlátos operátorokra pedig Kérchy László.

1.3. Lemma (Kérchy [**12**]). *Legyen $T \notin C_{1\cdot}(\mathcal{H}) \cup C_{0\cdot}(\mathcal{H})$, és tekintsük a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$ ortogonális felbontást. Ebben a felbontásban a T blokk-mátrix alakja a következőképpen néz ki:*

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & R \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp), \tag{1.1}$$

ahol a T_0 elem $C_{0\cdot}$-, a T_1 pedig $C_{1\cdot}$-osztályú.

A fenti Lemmát sokszor használtam disszertációmban.

Disszertációmban hatványkorlátos operátorok aszimptotikus viselkedését tanulmányoztam. Bemutattam néhány alkalmazást is, nevezetesen bebizonyítottam egy hasonlósági tételt, aszimptotikusan nemeltűnő kontrakciók kommutáns leképezését vizsgáltam, illetve egy újfajta operátorosztály ciklikussági tulajdonságairól nyertem új információkat. A dolgozat öt cikket dolgoz fel: [**3, 4, 5, 6, 7**]. A következő fejezetekben bemutatom dolgozatom főbb eredményeit.

2. Kontrakciók aszimptotikus határértékei

A dolgozat második fejezetében karakterizáltam azon pozitív $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátorokat, melyekhez található olyan $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kontrakció, hogy $A_T = A$ teljesül. Az ebben a fejezetben bemutatott eredményeimet a [**4**] cikkben közöltem le. Először azt láttam be, hogy az L-aszimptotikus limesze bármely hatványkorlátos operátornak vagy 0, vagy a normája legalább 1.

2.1. Tétel. *Legyen L Banach limesz és T egy hatványkorlátos operátor, melyre $A_{T,L} \neq 0$ teljesül. Ekkor igaz az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\|A_{T,L}\| \geq 1. \tag{2.1}$$

Speciális esetben, ha T kontrakció, akkor $\|A_T\| = 1$ teljesül.

Ezután bebizonyítottam az alábbi karakterizációt véges dimenzióban.

2.2. Tétel. *Legyen $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ kontrakció. Ekkor $A_T = A_T^2 = A_{T^*}$, azaz A_T pontosan az az ortogonális projekció, melynek képtere $\mathcal{H}_0(T)^\perp$. Ezen felül $\mathcal{H}_0(T) = \mathcal{H}_0(T^*)$ is teljesül.*

Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátor aszimptotikusan előáll a T kontrakcióból az egyenletes konvergenciára nézve, ha $\lim_{n\to\infty} \|T^{*n}T^n - A\| = 0$. Természetesen ekkor $A = A_T$ teljesül. Megjegyezzük, hogy kontrakciók esetén általában a $\lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n = A$ csak az EOT-ban teljesül. A σ_e és r_e szimbólumok jelölik a lényeges spektrumot és a lényeges spektrálsugarat. A jellemzés szeparábilis, végtelen dimenziós terekben a következőképpen szól.

2.3. Tétel. *Legyen $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$, és $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy kontrakció. Az alábbiak ekvivalensek egymással:*

(i) *A aszimptotikusan előáll egy kontrakcióból;*
(ii) *A aszimptotikusan előáll egy kontrakcióból az egyenletes konvergenciában;*
(iii) *$r_e(A) = 1$ teljesül vagy pedig A egy véges rangú projekció;*
(iv) *$\dim \mathcal{H}(]0,1]) = \dim \mathcal{H}(]\delta,1])$ igaz minden $0 \leq \delta < 1$ számra, ahol $\mathcal{H}(\omega)$ jelöli az A operátor $\omega \subseteq \mathbb{R}$ Borel halmazhoz tartozó spektrálalterét.*

Sőt, ha a fenti teljesül, és $\dim\ker(A - I) \in \{0, \aleph_0\}$, akkor T választható olyan $C_{\cdot 0}$-kontrakciónak, hogy vele (ii) *teljesül.*

A nem-szeparábilis esetben is bizonyítottam egy hasonló jellemzést. Legyen κ egy olyan számosság, melyre $\kappa \leq \dim \mathcal{H}$ teljesül. Ekkor az $\mathcal{E}_\kappa := \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon \dim(\mathcal{R}(S))^- < \kappa\}$ halmaz lezártja egy valódi két-oldali ideál, melyet $\mathcal{C}_\kappa$-val jelölünk. Tekintsük az $\mathcal{F}_\kappa := \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}_\kappa$ faktor algebrát. A $\pi_\kappa\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_\kappa$ jelölje a faktor-leképezést, és $\|\cdot\|_\kappa$ a faktor-normát $\mathcal{F}_\kappa$-án. Tetszőleges $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátor esetén használni fogjuk a következő jelöléseket: $\|A\|_\kappa := \|\pi_\kappa(A)\|_\kappa$, $\sigma_\kappa(A) := \sigma(\pi_\kappa(A))$ és $r_\kappa(A) := r(\pi_\kappa(A))$. (Ha $\kappa = \aleph_0$, akkor a kompakt operátorok ideálját kapjuk, $\|A\|_{\aleph_0} = \|A\|_e$ a lényeges norma, $\sigma_{\aleph_0}(A) = \sigma_e(A)$ és $r_{\aleph_0}(A) = r_e(A)$.) Részletek ezen ideálokkal kapcsolatban a [**2**] vagy [**14**] publikációkban találhatóak. A jellemzés nem-szeparábilis tereken a következő.

2.4. TÉTEL. *Legyen* $\dim \mathcal{H} > \aleph_0$ *és* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *egy pozitív kontrakció. Ekkor a következő négy feltétel ekvivalens egymással:*

(i) *A aszimptotikusan előáll egy kontrakcióból;*
(ii) *A aszimptotikusan előáll egy kontrakcióból egyenletes konvergenciában;*
(iii) *A egy véges rangú projekció, vagy pedig* $r_\kappa(A) = 1$ *teljesül* $\kappa = \dim \mathcal{H}(]0,1]) \geq \aleph_0$*-val;*
(iv) $\dim \mathcal{H}(]0,1]) = \dim \mathcal{H}(]\delta,1])$ *igaz minden* $0 \leq \delta < 1$ *számra.*

Sőt, ha a fenti teljesül, és $\dim \ker(A - I) \in \{0, \infty\}$*, akkor T választható olyan* $C_{\cdot 0}$*-kontrakciónak, hogy vele* (ii) *teljesül.*

Azt mondjuk, hogy egy T kontrakció teljesen nem-unitér, ha nincs olyan nem-nulla invariáns altere, melyra való megszorítása T-nek unitér operátor. Természetesen vetődik fel a kérdés: két $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kontrakció esetén mely feltételek teljesülése biztosítja, hogy $A_{T_1} = A_{T_2}$, vagy visszafele, a T_1 és T_2 kontrakciókról mit tudunk mondani, ha tudjuk, hogy rájuk $A_{T_1} = A_{T_2}$ teljesül. A második fejezet utolsó tétele erről a problémáról szól.

2.5. TÉTEL. *Legyen* $\mathcal{H}$ *tetszőleges Hilbert tér,* $T, T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *pedig kontrakciók. A következők teljesülnek:*

(i) *ha* T_1, T_2 *felcserélhető, akkor* $A_{T_1T_2} \leq A_{T_1}$ *és* $A_{T_1T_2} \leq A_{T_2}$*;*
(ii) *ha* $u \in H^\infty$ *egy nem-konstans belső függvény, és T egy teljesen nem-unitér kontrakció, akkor* $A_T = A_{u(T)}$*;*
(iii) *az* $A_{T_1} = A_{T_2} = A$ *egyenlőségből* $A \leq A_{T_1T_2}$ *következik;*
(iv) *ha* T_1 *és* T_2 *felcserélhetőek, és* $A_{T_1} = A_{T_2}$ *teljesül, akkor szükségképpen* $A_{T_1T_2} = A_{T_1} = A_{T_2}$ *is igaz.*

3. Hatványkorlátos mátrixok Cesàro aszimptotikus limeszei

A harmadik fejezet célja az volt, hogy karakterizáljam azon pozitív szemi-definit mátrixokat, melyek előállnak, mint egy hatványkorlátos mátrix L-aszimptotikus limesze. A fejezet bemutatja az [**5**] publikációm eredményeit. Az első fontos lépés az volt, hogy megmutattam, nem kell Banach limeszekkel számolnuk, ugyanis hatványkorlátos mátrixok esetén az L-aszimptotikus limesz mindig az önadjungált hatványok Cesàro értelemben vett határértéke. Erről szól az alábbi tétel.

3.1. TÉTEL. *Legyen $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ hatávnykorlátos. Ekkor*

$$A_{T,L} = A_{T,C} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T^{*j} T^j$$

teljesül minden L Banach limesszel.

Az $A_{T,C} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T^{*j} T^j$ mátrixot T Cesàro aszimptotikus limeszének hívjuk. A bizonyításban először T Jordan felbontását vizsgáltam. Ezután megadtam a C_{11}-osztályú mátrixok Cesàro aszimptotikus limeszeit az alábbi módon.

3.2. TÉTEL. *A következő állítások ekvivalensek minden pozitív definit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ esetén:*

(i) *A a Cesàro aszimptotikus limesze egy $T \in C_{11}(\mathbb{C}^d)$ hatványkorlátos mátrixnak;*

(ii) *ha az A sajátértékei $t_1, \ldots, t_d > 0$, multiplicitással számolva, akkor*

$$\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_d} = d \tag{3.1}$$

teljesül;

(iii) *létezik egy olyan invertálható $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ mátrix, melynek oszlopvektorai mind egységvektorok, és fenáll az*

$$A = S^{*-1} S^{-1} = (SS^*)^{-1}$$

egyenlőség.

Az általános eset karakterizálása felhasználja a fenti C_{11} esetben megadott karakterizációt. Ugyancsak felhasználtam az 1.3. Lemmát, és egy speciális alakú blokk-mátrix blokk-diagonalizálását. A hatványkorlátos $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ mátrixot l-stabilnak hívjuk ($0 \le l \le d$), ha $\dim \mathcal{H}_0 = l$. A következő tételben I_l jelöli az $l \times l$-es identikus mátrixot, $0_k \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^k)$ pedig a zéró mátrixot.

3.3. TÉTEL. *A következő három feltétel ekvivalens egymással bármely $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ szinguláris pozitív szemi-definit mátrix és $1 \le l < d$ egész szám esetén:*

(i) *létezik egy hatványkorlátos és l-stabil $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ mátrix, mellyel $A_{T,C} = A$ teljesül;*

(ii) *legyen $k = d - l$, ha $t_1, \ldots t_k$ jelöli az A nem-zéró sajátértékeit, multiplicitással számolva, akkor*

$$\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_k} \le k$$

teljesül;

(iii) *létezik egy olyan invertálható $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ mátrix, melynek oszlopvektorai mind egységvektorok és fenáll az*

$$A = S^{*-1}(I_l \oplus 0_k)S^{-1}$$

egyenlőség.

Természetes kérdés, hogy van-e bármilyen összefüggés $A_{T,C}$ és $A_{T^*,C}$ közt? Ha $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ kontrakció, akkor amint azt már láttuk $A_{T^*} = A_T$ teljesül (2.2. Tétel). Azonban ha T hatványkorlátos, akkor általában még a $\mathcal{H}_0(T)$ és $\mathcal{H}_0(T^*)$ stabil alterek sem egyeznek meg, és így $A_{T^*,C}$ és $A_{T,C}$ is különbözők. Az alábbi összefüggést láttam be C_{11}-osztályú 2×2-es hatványkorlátos mátrixokra.

3.4. TÉTEL. *Minden $T \in C_{11}(\mathbb{C}^2)$ mátrixra teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$A_{T,C}^{-1} + A_{T^*,C}^{-1} = 2I_2. \tag{3.2}$$

A fenti tétel már nem igaz három dimenzióban. Ezt disszertációmban egy konkrét példán mutattam meg.

4. Normálishoz hasonló operátorok aszimptotikus limesze

A negyedik fejezet a [**6**] publikációm eredményeit tartalmazza. Először az Sz.-Nagy hasonlósági tétel szükségességi részének egy általánosítását bizonyítottam be (1.1. és 1.2. Tétel). Tekintsünk egy $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normális, hatványkorlátos operátort. Mivel $r(N)^n = r(N^n) = \|N^n\|$ ($n \in \mathbb{N}$) teljesül, azt kapjuk, hogy N kontrakció. A normális operátorok függvénymodelljének alkalmazásával könnyedén kapjuk, hogy $A_N = I_{\mathcal{H}_0(N)^\perp} \oplus 0_{\mathcal{H}_0(N)}$ teljesül, ahol $N|(\operatorname{ran} A_N)^-$ az N unitér része. Az 1.2. Tétel miatt jogos azt sejtenünk, hogy ha egy hatványkorlátos T operátor hasonló egy normális operátorohoz, akkor az $A_{T,L}|(\operatorname{ran} A_{T,L})^-$ megszorítás invertálható kell, hogy legyen. Az $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nem-zéró operátor redukált minimum modulusa a következő mennyiség: $\gamma(A) := \inf\{\|Ax\| : x \in (\ker A)^\perp, \|x\| = 1\}$. Speciálisan ha A pozitív operátor, akkor a $\gamma(A) > 0$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $A|(\operatorname{ran} A)^-$ invertálható. Első eredményem két egymáshoz hasonló hatványkorlátos operátor kapcsolatáról szól.

4.1. TÉTEL. *Tekintsünk két hatványkorlátos $T, S \notin C_{0\cdot}(\mathcal{H})$ operátort, melyek hasonlóak egymáshoz. Ekkor $\gamma(A_{T,L}) > 0$ pontosan akkor teljesül valamely (következésképpen minden) L Banach limeszre, ha $\gamma(A_{S,L}) > 0$ igaz.*

A $\gamma(A_{T,L}) > 0$ feltétel ekvivalens azzal, hogy T hatványai a $\mathcal{H}_0(T)^\perp$ altéren egyenletesen alulról korlátosak, azaz létezik olyan $c > 0$ konstans, mellyel

$$c\|x\| \leq \|T^n x\| \quad (x \in \mathcal{H}_0(T)^\perp, n \in \mathbb{N})$$

teljesül.

Következésképpen ha T hasonló egy normális operátorhoz, akkor $\gamma(A_{T,L}) > 0$ és $\gamma(A_{T^*,L}) > 0$ teljesül.

A fenti tétel bizonyítása az 1.3. Lemmát használja. A 4.1. Tétel tulajdonképpen az Sz.-Nagy hasonlósági tétel szükségességi részének egy általánosítása, mely bizonyos esetekben segíthet eldönteni, hogy egy adott operátor hasonló-e normális operátorhoz. Fontos megjegyezni, hogy a 4.1. Tétel utolsó pontja nem megfordítható, mely könnyen látható egyszerű példákon.

Ahogy már azt láttuk, az Sz.-Nagy tétel kimondja, hogy $A_{T,L}$ invertálható, ha T hasonló egy unitér operátorhoz. Kontrakciók esetén ennél többet tudunk belátni A_T-ről. Nevezetesen bebizonyítottam az alábbi tételt, ahol az (i) csupán egyirányú következtetés, melynek (ii) a fordítottja szeparábilis esetben. Egy A önadjungált operátor spektrumának minimális elemét $\underline{r}(A)$-vel jelöljük.

4.2. Tétel.

(i) *Legyen* $\dim \mathcal{H} \geq \aleph_0$ *és $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy olyan kontrakció, mely hasonló egy unitér operátorhoz. Ekkor* $\dim \ker(A_T - \underline{r}(A_T)I) \in \{0, \infty\}$ *teljesül. Következésképpen $\underline{r}(A_T) \in \sigma_e(A_T)$ teljesül.*

(ii) *Tegyük fel, hogy* $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$, *$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy invertálható, pozitív kontrakció, $1 \in \sigma_e(A)$ és* $\dim \ker(A - \underline{r}(A)I) \in \{0, \aleph_0\}$ *teljesül. Ekkor létezik egy $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kontrakció, mely hasonló egy unitér operátorhoz és $A_T = A$.*

Ez a tétel tekinthető az Sz.-Nagy tétel egy általánosításának kontrakciók esetén. A szeparábilis esetben karakterizálja az unitér operátorokhoz hasonló kontrakciók lehetséges aszimptotikus határértékeit. Megjegyezzük, hogy a probléma hatványkorlátos operátorok esetén nem megoldott.

5. A kommutáns-leképezés

Tekintsünk egy $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kontrakciót. Minden $C \in \{T\}'$ esetén létezik pontosan egy $D \in \{W_T\}'$ úgy, hogy $X_T C = D X_T$ teljesül. Ez definiálja a

T kommutáns-leképezését, melyet γ_T jelöl:

$$\gamma = \gamma_T \colon \{T\}' \to \{W_T\}',\ C \mapsto D, \text{ ahol } X_T C = D X_T.$$

Megmutatható, hogy γ egy kontraktív algebra-homomorfizmus ([**16**, Section IX.1]). Ez a leképezés azért fontos, mert összekapcsolja a kontrakciót egy unitér operátorral, melyet jól ismerünk. Segítségével struktúrális és stabilitási eredményeket is bizonyíthatunk. Célunk a [**3**] publikációban az volt, hogy γ injektivitását vizsgáljuk, és a disszertáció ötödik fejezete ezen eredményeket foglalja össze. Ha $T \in C_{1\cdot}(\mathcal{H})$, akkor X_T és ezért γ_T is biztosan injektív. Természetesen adódik a kérdés, hogy lehet-e a kommutáns-leképezés injektív, ha $T \notin C_{1\cdot}(\mathcal{H})$? Kiderült, hogy lehet, s ezt az ötödik fejezetben egy konkrét példával igazoltam. Bebizonyítottam azt is, hogy γ injektivitása esetén szükségképpen teljesülnie kell négy feltételnek T-re. Egy T kontrakció esetén jelölje P_0 a stabil altérre való ortogonális projekciót. A $P_0 T|\mathcal{H}_0$ és $(I-P_0)T|\mathcal{H}_0^\perp$ kompressziókat T_{00} és T_{11} jelöli.

5.1. Tétel. *Ha a γ_T injektív, akkor*

(i) *az $XT_{11} = T_{00}X$ egyenlőség csak zéró X esetén teljesülhet,*
(ii) $\overline{\sigma_{ap}(T_{00}^*)} \cap \sigma_{ap}(T_{11}) \neq \emptyset$,
(iii) $\sigma_p(T) \cap \overline{\sigma_p(T^*)} \cap \mathbb{D} = \emptyset$, *és*
(iv) *nem létezik olyan $\mathcal{H} = \mathcal{M}_0 \dotplus \mathcal{M}_1$ direktfelbontás, ahol $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ invariánsak T-re és $\{0\} \neq \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{H}_0$.*

Legyen $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ operátor és $\lambda \in \mathbb{C}$, ekkor az A operátor λ-hoz tartozó gyöktere a $\widetilde{\ker}(A-\lambda I) := \vee_{j=1}^\infty \ker(A-\lambda I)^j$ altér. Azt mondjuk, hogy az A-nak generáló a gyöktérrendszere, ha $\mathcal{F} = \vee\left\{\widetilde{\ker}(A-\lambda I) : \lambda \in \sigma_p(A)\right\}$ teljesül.

A fejezet második eredménye elégséges feltételek megadásáról szól. Nevezetesen, bizonyos feltételek mellett az 5.1. Tétel (iii) része elegendő is γ_T injektivitásához.

5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy T_{00} kielégíti a következő feltételeket:*

(i) $\sigma_p(T_{00}^*) \subset \overline{\sigma_p(T_{00})}$;
(ii) *T_{00}^* gyöktérrendszere generáló.*

Ekkor γ pontosan akkor injektív, ha $\sigma_p(T) \cap \overline{\sigma_p(T^*)} \cap \mathbb{D} = \emptyset$ teljesül.

Megjegyezzük, hogy az előbbi tétel feltételei az úgynevezett C_0-kontrakciók egy nagy osztályára teljesülnek.

Ezután példát mutattam olyan kontrakcióra, mely nem $C_{1\cdot}$-osztályú, mégis a kommutáns-leképezése injektív. Ezt követően kvázihasonló kontrakciók és ortogonális összegek kommutáns-leképezését vizsgáltam. Azt mondjuk, hogy az $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátorok kvázihasonlóak, ha léteznek olyan $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ és $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ injektív, sűrű képterű operátorok, melyekre $XB = AX$ és $YA = BY$ teljesül. A $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kontrakció stabil kapcsolatban áll a $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ kontrakcióval, ha a $CT = T'C$ és $\operatorname{ran} C \subset \mathcal{H}_0'(T')$ feltételekből $C = 0$ következik, és ha $C'T' = TC'$ és $\operatorname{ran} C' \subset \mathcal{H}_0(T)$ a $C' = 0$ egyenlőséget implikálja.

5.3. Tétel. *Legyen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ és $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ két kontrakció.*

(i) *Ha T és T' kvázihasonlóak, akkor γ_T pontosan akkor injektív, ha $\gamma_{T'}$ is az.*

(ii) *A $\widetilde{\gamma} := \gamma_{T \oplus T'}$ kommutáns-leképezés pontosan akkor injektív, ha γ_T és $\gamma_{T'}$ is az, továbbá T stabil kapcsolatban áll T'-vel.*

(iii) *Tegyük fel, hogy $T = T'$, ekkor $\widetilde{\gamma} = \gamma_{T \oplus T}$ injektivitása ekvivalens a γ_T injektivitásával.*

Megjegyezzük, hogy a fenti (ii)-(iii) állítások kiterjeszthetők megszámlálható ortogonális összegekre is. Dolgozatomban példát mutattam arra az esetre, amikor γ_T és $\gamma_{T'}$ injektivitása nem implikálja $\widetilde{\gamma}$ injektivitását.

Végül eltolás-operátorok segítségével megmutattam, hogy az 5.1. Tétel négy pontja együtt sem biztosítja γ_T injektivitását. A γ_T injektivitásának teljes jellemzése nyitva maradt.

6. Irányított fákon való eltolások ciklikussága

Az irányított fákon való eltolás-operátorok osztályát nemrég vezette be Z. J. Jabłonski, I. B. Jung és J. Stochel. Ez az osztály a jól ismert súlyozott kétirányú, egyirányú és csonkító visszafele tolás operátorok egy természetesen adódó általánosítása. A [**10**] monográfia szerzői ezzel az új operátor osztállyal addig nyitott problémákat válaszoltak meg.

Disszertációm utolsó fejezetében ilyen típusú korlátos operátorok ciklikussági tulajdonságait vizsgáltam. Ehhez először aszimptotikus viselkedésüket vizsgáltam meg, majd ennek alkalmazásaként nyertem a ciklikussági eredményeket. A fejezetben a [**7**] benyújtott cikk eredményeit ismertettem.

Most felelevenítünk pár szükséges definíciót a [**10**] monográfiából. A $\mathcal{T} = (V, E)$ rendezett párt irányított gráfnak hívjuk, ha V egy tetszőleges (általában végtelen) halmaz és $E \subseteq (V \times V) \setminus \{(v, v) : v \in V\}$. A V elemeit csúcsoknak, E elemeit pedig (irányított) élekenek hívjuk. A $\mathcal{T}$ gráf összefüggő, ha bármely két különböző $u, v \in V$ csúcs összeköthető irányítatlan úttal, azaz létezik véges sok $u = v_0, v_1, \ldots v_n = v \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ csúcs úgy, hogy $(v_{j-1}, v_j) \in E$ vagy $(v_j, v_{j-1}) \in E$ teljesül minden

$1 \leq j \leq n$ esetén. A $v_0, v_1, \dots v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ véges csúcs-sorozatot (irányított) körnek nevezzük, ha $(v_{j-1}, v_j) \in E$ teljesül minden $1 \leq j \leq n$ esetén, és $(v_n, v_0) \in E$. A $\mathcal{T} = (V, E)$ irányított gráfot irányított fának hívjuk, ha az alábbi három feltételt teljesíti:

(i) $\mathcal{T}$ összefüggő;
(ii) minden $v \in V$-hez legfeljebb egy olyan $u \in V$ található, mellyel $(u, v) \in E$ teljesül;
(iii) $\mathcal{T}$-ben nincs irányított kör.

Ettől kezdve $\mathcal{T}$ mindig egy irányított fát fog jelölni. A v csúcs gyereke az $u \in V$-nek, ha $(u, v) \in E$. Az u összes gyerekének halmazát $\mathrm{Chi}_{\mathcal{T}}(u) = \mathrm{Chi}(u)$-val jelöljük. Fordítva, ha a v csúcshoz található olyan u (mely ekkor egyértelműen meghatározott), mellyel $(u, v) \in E$ igaz, akkor azt mondjuk, hogy u a v szülője, és az $u = \mathrm{par}_{\mathcal{T}}(v) = \mathrm{par}(v)$ jelölést használjuk. A par egy parciális leképezés, ezért értelmezhetők az iteráltjai is, melyeket $\mathrm{par}^k(v) = \underbrace{\mathrm{par}(\dots(\mathrm{par}}_{k\text{-times}}(v))\dots)$ jelöl, a par^0 függvény pedig legyen az identikus függvény.

Ha egy csúcsnak nincs szülője, akkor gyökérnek hívjuk. Könnyű látni, hogy $\mathcal{T}$-nek legfeljebb egy gyökere lehet ([**10**, Proposition 2.1.1.]), és ha ez létezik, akkor ezt $\mathrm{root}_{\mathcal{T}} = \mathrm{root}$ fogja jelölni. Egy olyan részgráfot, mely maga is irányított fa, $\mathcal{T}$ részfájának nevezünk. Bevezetjük a $V^\circ = V \setminus \{\mathrm{root}\}$ jelölést is. Ha egy csúcsnak nincs gyereke, akkor azt levélnek hívjuk. A levelek összes halmazát $\mathrm{Lea}(\mathcal{T})$ jelöli. Tetszőleges $W \subseteq V$ részhalmaz esetén legyen $\mathrm{Chi}(W) = \cup_{v \in W} \mathrm{Chi}(v)$, $\mathrm{Chi}^0(W) = W$, $\mathrm{Chi}^{n+1}(W) = \mathrm{Chi}(\mathrm{Chi}^n(W))$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\mathrm{Des}_{\mathcal{T}}(W) = \mathrm{Des}(W) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Chi}^n(W)$, ahol $\mathrm{Des}(W)$-t a W halmaz leszármazottjának hívjuk, és ha $W = \{u\}$, akkor egyszerűen csak $\mathrm{Des}(u)$-t írunk.

Egy $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén a $\mathrm{Gen}_{n,\mathcal{T}}(u) = \mathrm{Gen}_n(u) = \bigcup_{j=0}^{n} \mathrm{Chi}^j(\mathrm{par}^j(u))$ halmazt u n-edik generációjának hívjuk (legfeljebb n-szer mehetünk felfele, majd pedig ugyanannyit lefele) és a $\mathrm{Gen}_{\mathcal{T}}(u) = \mathrm{Gen}(u) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Gen}_n(u)$ halmazt u generációjának/szintjének hívjuk. Az alábbi egyenlőségből ([**10**, Proposition 2.1.6])

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Des}(\mathrm{par}^n(u)) \tag{6.1}$$

könnyen látható, hogy a különböző szinteket indexelhetjük az egész számok egy részhalmazával úgy, hogy ha v a k-adik szinten van, akkor szülője a $(k-1)$-ediken, gyerekei pedig a $(k+1)$-ediken lesz.

Tekintsük az $\ell^2(V)$ komplex Hilbert teret, azaz a V-n definiált nágyzetesen összegezhető függvények terét, ahol a belső szorzatot a követező módon definiáljuk:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{u\in V} f(u)\overline{g(u)}, \quad f, g \in \ell^2(V).$$

Minden $u \in V$ esetén legyen $e_u(v) = \delta_{u,v} \in \ell^2(V)$, ahol $\delta_{u,v}$ a Kronecker-delta szimbólumot jelöli. Nyilvánvalóan az $\{e_u : u \in V\}$ rendszer egy ortonormált bázist alkot. Használni fogjuk az $\ell^2(W) = \vee\{e_w : w \in W\}$ jelölést, ha $W \subseteq V$.

Legyen most $\underline{\lambda} = \{\lambda_v : v \in V^\circ\} \subseteq \mathbb{C}$ egy súlyhalmaz, mely kielégíti az alábbi feltételt:

$$\sup\left\{\sqrt{\sum_{v\in \mathrm{Chi}(u)} |\lambda_v|^2} : u \in V\right\} < \infty.$$

Ekkor a $\mathcal{T}$-n való súlyozott eltolás-operátort a következőképpen definiáljuk:

$$S_{\underline{\lambda}} : \ell^2(V) \to \ell^2(V), \quad e_u \mapsto \sum_{v\in \mathrm{Chi}(u)} \lambda_v e_v.$$

A [**10**, Proposition 3.1.8.] miatt ez egy korlátos operátort definiál, melynek normája $\|S_{\underline{\lambda}}\| = \sup\left\{\sqrt{\sum_{v\in \mathrm{Chi}(u)} |\lambda_v|^2} : u \in V\right\}$.

Kizárólag korlátos eltolásokat tekintettem, sőt, a fejezet nagy részében kontrakciókat. Ismert, hogy minden $S_{\underline{\lambda}}$ unitér ekvivalens az $S_{|\underline{\lambda}|}$ eltolás-operátorral, ahol $|\underline{\lambda}| := \{|\lambda_v| : v \in V^\circ\} \subseteq [0, \infty[$. Ha egy súly zéró, akkor a fán való eltolás-operátor unitér ekvivalens két másik fán való eltolás ortogonális összegével ([**10**, Theorem 3.2.1 és Proposition 3.1.6]. Erre való tekintettel csak olyan fán vett eltolás-operátorokat vizsgáltam, melyeknél a súlyok mind pozitívak.

A $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátort ciklikusnak hívjuk, ha létezik olyan $h \in \mathcal{H}$ vektor, hogy

$$\mathcal{H}_{T,h} = \mathcal{H}_h := \vee\{T^n h : n \in \mathbb{N}_0\} = \{p(T)h : p \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}\}^- = \mathcal{H},$$

ahol $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ jelöli a komplex polinomok halmazát. Egy ilyen $h \in \mathcal{H}$ vektort a T egy ciklikus vektorának hívunk. A fejezet első tétele csonkító visszatolás-operátorok egy megszámlálható ortogonális összegéről szól.

6.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\{e_{j,k} : j \in \mathcal{J}, k \in \mathbb{N}_0\}$ egy ortonormált bázis a $\mathcal{H}$ Hilbert térben, ahol $\mathcal{J} \neq \emptyset$ egy megszámlálható halmaz, és*

$\{w_{j,k}\colon j \in \mathcal{J}, k \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{C}$ *egy korlátos súly-halmaz. Tekintsük a következő korlátos operátort:*

$$Be_{j,k} = \begin{cases} 0 & \textit{ha } k = 0 \\ w_{j,k-1}e_{j,k-1} & \textit{egyébként} \end{cases}.$$

(i) *Ha nincs a súlyok közt zéró, akkor B ciklikus.*

(ii) *Tegyük fel, hogy nincs zéró súly, és létezik egy olyan $g \in \cap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran}(B^n)$ vektor, mely minden fix $j \in \mathcal{J}$ esetén a $\langle g, e_{j,k}\rangle \neq 0$ feltételt végtelen sok $k \in \mathbb{N}_0$ esetén teljesíti. Ekkor található olyan ciklikus vektor, mely a $\cap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran}(B^n)$ lineáris sokaság eleme.*

(iii) *A B operátor pontosan akkor ciklikus, ha legfeljebb egy zéró súly szerepel.*

A 6.1. Tétel bizonyítását a [**8**, Problem 160] megoldása motiválta. Szeretném megjegyezni, hogy a (iii)-ban az az eset, amikor $\#\mathcal{J} = 1$, már be volt bizonyítva a [**9**] cikkben. Azonban a cikk kínaiul íródott, s így azt nem tudtam elolvasni. A fenti tétel tekinthető a [**9**] cikk általánosításának.

Ezután bebizonyítottam az irányított fákon való eltolás-operátorokkal kapcsolatban pár ciklikussági eredményt. A

$$\operatorname{Br}(\mathcal{T}) = \sum_{u \in V \setminus \operatorname{Lea}(\mathcal{T})} (\#\operatorname{Chi}(u) - 1)$$

számot a $\mathcal{T}$ elágazási indexének hívjuk. A [**10**, Proposition 3.5.1] következménye, hogy

$$\dim(\operatorname{ran}(S_{\underline{\lambda}})^{\perp}) = \begin{cases} 1 + \operatorname{Br}(\mathcal{T}) & \text{ha } \mathcal{T}\text{-nek van gyökere,} \\ \operatorname{Br}(\mathcal{T}) & \text{ha } \mathcal{T}\text{-nek nincs gyökere.} \end{cases} \tag{6.2}$$

Könnyű látni, hogy minden ciklikus $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátor esetén teljesül a $\dim(\operatorname{ran}(T)^{\perp}) \leq 1$ egyenlőtlenség. Ezért a ciklikussági probléma csak abban az esetben érdekes, ha $S_{\underline{\lambda}}$ egy olyan fán definiált, melynek nincs gyökere, és $\operatorname{Br}\mathcal{T} = 1$. (Ha $\operatorname{Br}\mathcal{T} = 0$, akkor a szokásos eltolás-operátorokat kapjuk.)

Ha $\#\operatorname{Lea}(\mathcal{T}) = 2$, akkor a $\mathcal{T}$ irányított fát az alábbi módon definiáljuk: $V = \{j \in \mathbb{Z}\colon j \leq j_0\} \cup \{k'\colon 1 \leq k \leq k_0\}$, ahol feltesszük, hogy $1 \leq k_0 \leq j_0 < \infty$, és $E = \{(j-1, j)\colon j \leq j_0\} \cup \{(0, 1')\} \cup \{((j-1)', j')\colon 1 < j \leq k_0\}$. A súlyok pedig a következők: $\underline{\lambda} = \{\lambda_v\colon v \in V\}$. Ha $\#\operatorname{Lea}(\mathcal{T}) = 1$ vagy 0, akkor teljesen hasonló módon reprezentáljuk $\mathcal{T}$-t. A következő eredmény az $S_{\underline{\lambda}}$ operátor ciklikusságáról szól.

6.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\mathcal{T} = (V, E)$ irányított fának nincs gyökere, és* $\operatorname{Br}(\mathcal{T}) = 1$.

(i) *Ha* $\#\mathrm{Lea}(\mathcal{T}) = 2$*, akkor minden* $\mathcal{T}$*-n vett eltolás-operátor ciklikus.*

(ii) *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{T} = (V, E)$*-nek egy levele van. Ekkor az* $S_{\underline{\lambda}}$ *operátor pontosan akkor ciklikus, ha a* $W \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ *kétirányú eltolás-operátor, mely a* $\mathcal{T}' := (\mathbb{Z}, E \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$ *részfán definiált a* $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{\lambda_v \colon \in V \cap \mathbb{Z}\}$ *súlyokkal, ciklikus. Speciálisan, ha* $S_{\underline{\lambda}} \notin C_{\cdot 0}(\ell^2(V))$ *kontrakció, akkor* $S_{\underline{\lambda}}$ *szükségképpen ciklikus.*

(iii) *Ha* $S_{\underline{\lambda}} \in C_{1\cdot}(\ell^2(V))$ *kontrakció (következésképpen* $\mathrm{Lea}(\mathcal{T}) = \emptyset$*), akkor* $S_{\underline{\lambda}}$*-nek nem létezik ciklikus vektora.*

(iv) *Ha* $\mathcal{T}$*-nek nincs levele, akkor létezik rajta olyan eltolás-operátor, mely ciklikus.*

Úgy tudjuk, hogy a kétirányú eltolás-operátorok ciklikusságának teljes jellemzése nyitott probléma. Utolsó eredményem az irányított fákon való eltolás-operátorok adjungáltjának ciklikusságáról szól.

6.3. Tétel.

(i) *Ha a* $\mathcal{T}$*-nek van gyökere és a kontraktív* $S_{\underline{\lambda}}$ *operátor* $C_{1\cdot}$*-osztályú, akkor* $S_{\underline{\lambda}}^*$ *ciklikus.*

(ii) *Ha a* $\mathcal{T}$*-nek nincs gyökere,* $\mathrm{Br}(\mathcal{T}) < \infty$ *és a* $S_{\underline{\lambda}}$ *operátor* $C_{1\cdot}$*-kontrakció, akkor* $S_{\underline{\lambda}}^*$ *ciklikus.*

A fenti tételt úgy bizonyítottam, hogy előtte beláttam, hogy az $S \oplus (S_k^+)^*$ ($k \in \mathbb{N}$) operátor ciklikus, ahol S jelöli a súlyozatlan kétirányú eltolás-operátort és S_k^+ pedig k darab egyirányú súlyozatlan eltolás-operátor ortogonális összegét. Természetesen adódik a kérdés, hogy a fenti (ii) pontban a $\mathrm{Br}(\mathcal{T}) < \infty$ feltétel elhagyható-e? Ha be tudnánk bizonyítani, hogy $S \oplus (S_{\aleph_0}^+)^*$ ciklikus, akkor az említett feltétel eldobható. Ezt a kérdést azonban nyitva hagytam disszertációmban.

Irodalomjegyzék

1. H. Bercovici and L. Kérchy, Spectral behaviour of C_{10}-contractions, *Operator Theory Live*, Theta Ser. Adv. Math. 12, Theta, Bucharest, 2010, 17–33.
2. A. F. M. ter Elst, Antinormal operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **54** (1990), 151–158.
3. Gy. P. Gehér and L. Kérchy, On the commutant of asymptotically non-vanishing contractions, *Period. Math. Hungar.*, **63** (2011), no. 2, 191–203.
4. Gy. P. Gehér, Positive operators arising asymptotically from contractions, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **79** (2013), 273–287.
   ArXiv version: `http://arxiv.org/abs/1407.1278`
5. Gy. P. Gehér, Characterization of Cesàro- and L-asymptotic limits of matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, to appear (published online).
   `http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03081087.2014.899359#.U7pVEEC8SHg`.
   ArXiv version: `http://arxiv.org/abs/1407.1275`
6. Gy. P. Gehér, Asymptotic limits of operators similar to normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, accepted.
   ArXiv version: `http://arxiv.org/abs/1407.0525`
7. Gy. P. Gehér, Asymptotic behaviour and cyclic properties of weighted shifts on directed trees,
   submitted.
   ArXiv version: `http://arxiv.org/abs/1401.5927`
8. P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Second Edition, Springer Verlag, 1982.
9. Z. Guang Hua, On cyclic vectors of backward weighted shifts. (Chinese), *J. Math. Res. Exposition*, **4** (1984), no. 3, 1–6.
10. Z. J. Jabłonski, I. B. Jung and J. Stochel, *Weighted Shifts on Directed Trees*, Memoirs of the American Mathematical Society, Number 1017, 2012.
11. L. Kérchy, *Hilbert Terek Operátorai*, POLYGON, Szeged, 2003.
12. L. Kérchy, Isometric asymptotes of power bounded operators, *Indiana Univ. Math. J.*, **38** (1989), 173–188.
13. C. S. Kubrusly, *An Introduction to Models and Decompositions in Operator Theory*, Birkhäuser, 1997.
14. E. Luft, The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of a Hilbert space, *Czechoslovak Math. J.*, **18** (1968), 595–605.
15. B. Sz.-Nagy, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, **11** (1947), 152–157.

16. B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici and L. Kérchy, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, Revised and enlarged edition, Springer, 2010.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Gehér György Pál Ph.D. fokozatra pályázó "Asymptotic behaviour of Hilbert space operators with applications" című disszertációját, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be. A következő cikkből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

Gy. P. Gehér and L. Kérchy, On the commutant of asymptotically non-vanishing contractions, *Period. Math. Hungar.*, **63** (2011), no. 2, 191–203.

Gehér György Pál hozzájárulása ehhez a cikkhez 50%.

Kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2014. szeptember 29.

Dr. Kérchy lászló
Tanszékvezető egyetemi tanár
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
Analízis tanszék