Rácsséták bijektív leszámlálása

Doktori értekezés tézisei

NAGY GÁBOR

Témavezető:
DR. HAJNAL PÉTER
egyetemi docens

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Szeged
2014

1. Bevezetés

Az értekezésben két olyan problémakört vizsgálunk a bijektív kombinatorika eszközeivel, melyek rácssétákra vonatkozó összeszámlálási feladatokhoz vezetnek.

A 2. fejezet fő eredménye Shapiro páros indexű Catalan-számokra vonatkozó konvolúciós formulájának bijektív bizonyítása, amelyet Stanley is feladatként tűzött ki. Bizonyításunk egyik következményeként a középső binomiális együtthatók alternáló konvolúciós formulájának elemi levezetését is megkapjuk.

A 3. fejezetben síkbeli szimmetrikus véletlen séták egy – az x-tengellyel vett első metszéspont eloszlására vonatkozó – konvexitási tulajdonságát igazoljuk, majd tekintjük a probléma magasabb dimenziós megfelelőjét is. Vizsgálataink motivációja az, hogy az alaptételből egy harmonikus mértékek sűrűségfüggvényére vonatkozó friss eredmény új bizonyítása nyerhető.

A disszertáció a szerző [1]–[4] publikációin alapul. A tézisfüzetben található számozások és jelölések megegyeznek az értekezésben használtakkal (a hivatkozások számozását leszámítva).

2. Páros indexű Catalan-számok konvolúciója

Az n-edik Catalan-számon az $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ számot értjük, melyet C_n-nel jelölünk a továbbiakban. Stanley több mint 200 ekvivalens kombinatorikus definíciót gyűjtött össze [16, 15]. Ez a szám is mutatja, hogy a Catalan-számok alapvető kombinatorikus mennyiségek [10], többek között köszönhetően a közöttük fennálló

$$C_0 = 1; \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

rekurzív összefüggésnek, mely az összeszámlálási problémákban gyakran megjelenik.

Shapiro 2002-ben észrevette, hogy a Catalan-számok generátorfüggvényének zárt alakjából könnyen adódik [10; 123. o.] az alábbi tetszetős konvolúciós azonosság:

2.1. Tétel. (Shapiro [15; 6.C18], Nagy [2], Hajnal–Nagy [1])

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2k} C_{2n-2k} = 4^n C_n. \tag{2.2}$$

Azonban az egyszerű alak és a nem elemi bizonyítások tömörsége ellenére ezt nehéz kombinatorikus eszközökkel igazolni, Stanley Bijective Proof Problems gyűjteményében is megoldatlanként szerepel [14]. (Megjegyezzük, hogy Andrews 2011-ben megfogalmazta a formula egy q-analógját, melyet kombinatorikusan is igazolt [5].) A 2. fejezet fő eredménye, hogy a (2.2) azonosságot először belátjuk elemi kombinatorikus eszközökkel a 2.2. alfejezetben a [2] publikáció gondolatmenetét követve, majd teljesen bijektív bizonyítást adunk rá a 2.3. alfejezetben Hajnal Péterrel közös [1] cikkünk alapján.

Utak kettős leszámlálásával fogunk érvelni, ahol egy *út* alatt felfelé és lefelé lépések sorozatát értjük. Bár ezzel formálisan 1-dimenziós sétákat definiáltunk, útjainkat a síkon szemléltetjük a szokásos módon: Amennyiben másként nem jelezzük, az utak az origóból indulnak, és egy felfelé lépésnek az $(1,1)$ lépés, egy lefelé lépésnek pedig az $(1,-1)$ lépés felel meg. Szükségünk lesz a következő fogalomra is: Egy út *páros-metsző*, ha soha nem lép $(4k+2,0)$ alakú pontban az x-tengelyre ($k \in \mathbb{Z}$). A Shapiro-azonossághoz társított összeszámlálási probléma alapja az az észrevétel, hogy az origóból a $(4n,0)$ pontba menő páros-metsző utak számát éppen a C_{2n} Catalan-szám adja meg (ld. 2.4. Lemma). Ez egy 1981-ben kitűzött American Mathematical Monthly feladat [12], melynek 1987-ben publikálták egy bijektív bizonyítását [11], amiben megadnak egy bijekciót a megszámolandó utak halmaza és a $4n$ hosszú Dyck-utak halmaza között. Az utóbbi halmaz elemszáma pedig közismerten C_{2n}. (Egy út *Dyck-út*, ha az origóból indítva az x-tengelyen végződik, de soha nem megy az x-tengely alá. Továbbá egy út hossza alatt mindig a lépései számát értjük.) Ebből könnyen következik (2.2) bal oldalának egy kombinatorikus értelmezése, egy analóg állítással együtt (itt és a későbbiekben is élünk a $B_n := \binom{2n}{n}$ jelöléssel):

2.5. Következmény. (Nagy [2])

a) $\sum_{k=0}^{n} C_{2k}C_{2n-2k}$ *az origóból a* $(4n+1,1)$ *pontba menő páros-metsző utakat számolja meg.*

b) $\sum_{k=0}^{n} C_{2k}B_{2n-2k}$ *a* $4n$ *hosszú páros-metsző utakat számolja meg.*

Tehát (2.2) bizonyításához azt kell megmutatni, hogy a jobb oldal, a $4^n C_n$ mennyiség is a következmény a) pontjában szereplő utakat számolja meg. Először a következmény két pontja közötti kapcsolatra világítunk rá. Egyszerű számolás mutatja, hogy a b) pontban szereplő konvolúció éppen az a) pontban szereplő konvolúció $(n+1)$-szerese:

2.6. Lemma. (Nagy [2])

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2k}B_{2n-2k} = (n+1)\sum_{k=0}^{n} C_{2k}C_{2n-2k}.$$

Másszóval, a 2.5. Következmény egyszerre interpretálja kombinatorikusan a Shapiro-azonosság bal oldalát, és annak $(n+1)$-szeresét. Ebből rekurzív módon összeszámlálhatjuk a következményben szereplő utakat:

2.7. Lemma. (Nagy [2])

a) *Az origóból a* $(4n+1,1)$ *pontba menő páros-metsző utak száma* $4^n C_n$.

b) *A* $4n$ *hosszú páros-metsző utak száma* $4^n B_n$.

A 2.5. Következmény, a 2.6. Lemma és a $B_n = (n+1)C_n$ összefüggés alapján a két állítás ekvivalens. A b) pontot nem nehéz teljes indukcióval bizonyítani a két pont ekvivalenciát is felhasználva. Összefoglalva, tehát kettős leszámlással igazoltuk Shapiro formuláját; és egyúttal az alábbi ekvivalens alakját is, melyet algebrailag a két oldal $(n+1)$-gyel való szorzásával kapunk (2.2)-ből:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2k} B_{2n-2k} = 4^n B_n. \tag{2.4}$$

A 2.3. alfejezetben áttérünk a Shapiro-azonosság bijektív bizonyítására. (A C_n Catalan-számra a $2n$ hosszú Dyck-utak számaként tekintünk.) Figyelembe véve, hogy a 2.5. Következményt bijektíven igazoltuk, célunk eléréséhez elegendő közvetlen bijektív bizonyítással igazolni a 2.7.a Lemmát, vagyis megmutatni, hogy a 2.5. Következmény a) pontjában szereplő $(0,0) \rightsquigarrow (4n+1,1)$ páros-metsző utak száma $4^n C_n$. Ezen utak halmazát $\mathcal{H}$-val jelölve, az alfejezetben konstruálunk egy $\psi\colon \mathcal{H} \to \mathcal{D}_4$ bijekciót, ahol $\mathcal{D}_4$ egy alkalmas $4^n C_n$ elemű halmaz: $\mathcal{D}_4$ a $2n$ hosszú 4-címkézett Dyck-utak halmaza, ahol a *4-címkézett Dyck-út* olyan Dyck-út, amelynek párosadik pozícióban álló lépései címkézettek az $0,1,2,3$ címkék valamelyikével, a páratlanadik lépések pedig címkézetlenek. A ψ leképezés definíciója hosszú folyamat, lemmák jelzik konstrukciónk fontosabb állomásait (2.8–2.10. Lemma). A lényegi lépés előkészítéseként egy egyszerű technikai átalakítást és egy „tömörítési" eljárást hajtunk végre, melynek eredménye egy $\mathcal{H} \to \mathcal{E}_3^*$ bijekció, ahol az $\mathcal{E}_3^*$ halmaz azon (címkézett, általánosított) utakat tartalmazza, amelyek rendelkeznek a következő három tulajdonsággal:

(i) A $(0,1)$ pontból indulva a $(2n,1)$ vagy $(2n,-1)$ pontban végződnek;

(ii) minden párosadik lépésük vagy $(1,\pm 3)$ „hosszú" lépés, vagy az 1,2,3 címkék valamelyikével ellátott $(1,\pm 1)$ „rövid" lépés (és minden páratlanadik lépésük címkézetlen rövid lépés);

(iii) soha nem lépnek az x-tengelyre (de „átugorhatják" azt).

Látni fogjuk, hogy $\mathcal{E}_3^*$ és $\mathcal{D}_4$ útjainak 1,2,3 címkéitől bizonyos értelemben eltekinthetünk. Jelölje $\mathcal{E}^*$ az $\mathcal{E}_3^*$-beli utakból a címkék elhagyásával nyert utak halmazát, és legyen $\mathcal{D}_2$ a $\mathcal{D}_4$-beli utakból az 1,2,3 címkék elhagyásával nyert *jelölt Dyck-utak* halmaza. Tehát $\mathcal{E}^*$ azon $(0,1) \rightsquigarrow (2n,\pm 1)$ (címkézetlen) utakat tartalmazza, amelyek soha nem lépnek rá az x-tengelyre, továbbá a hagyományos $(1,\pm 1)$ rövid lépéseken túl tartalmazhatnak $(1,\pm 3)$ hosszú lépéseket is, kizárólag páros pozíciókban; $\mathcal{D}_2$ pedig azon $2n$ hosszú Dyck-utak halmaza, amelyekben minden párosadik lépés vagy jelölt (0 címkéjű) vagy jelöletlen (címkézetlen). Meggondolható, hogy a hiányzó $\mathcal{E}_3^* \to \mathcal{D}_4$ bijekció megkonstruálásához elegendő egy alábbi tulajdonságú $\mathcal{E}^* \to \mathcal{D}_2$ bijekciót megadni:

2.10. Lemma. (Hajnal–Nagy [1]) *Létezik olyan $\phi\colon \mathcal{E}^* \to \mathcal{D}_2$ bijekció, hogy minden $E \in \mathcal{E}^*$ útra a $\phi(E)$ jelölt Dyck-útban ugyanannyi jelölt lépés van, mint ahány hosszú lépés szerepel E-ben.*

Ez a bijektív bizonyítás kulcslemmája. Két fő fázisból áll az $\mathcal{E}^* \ni E \mapsto \phi(E)$ konverziónk. Először E-ben lecseréljük az x-tengelyt átugró hosszú lépéseket jelölt (rövid) lépésekre, és az eredetileg x-tengely alatt haladó részek x-tengelyre való tükrözésével elérjük, hogy a kapott E^+ út végig szigorúan az x-tengely fölött haladjon. (Ez az egyszerűbb rész.) Megmutatjuk, hogy a szóba jöhető E^+ utak mindegyike felépíthető egyszerű struktúrájú „építőelemekből”, mely felépítés a Dyck-utaknak megfeleltethető zárójelsorozatok zárójelpárokká bontásának egy kiterjesztése. A második fázisban az E^+ út építőelemeit átalakítjuk egy előre meghatározott eljárás szerint, és az így kapott ($\mathcal{D}_2$-beli) jelölt Dyck-utat rendeljük hozzá E-hez.

A bizonyítás részleteiből kiolvasható két következmény:

2.11. Következmény. (Hajnal–Nagy [1]) *Jelölje $\mathcal{E}^*(n)$ azon $(0,1) \rightsquigarrow (2n, \pm 1)$ (címkézetlen) utak halmazát, amelyek soha nem lépnek az x-tengelyre, és a páros pozíciókban állhatnak hosszú lépések is. (Ez a korábbi $\mathcal{E}^*$ halmaz, csak megjelenítjük n-et a jelölésben.)*

a) *Az $\mathcal{E}^*(n)$-beli utak száma $2^n C_n$.*
b) *Azon $\mathcal{E}^*(n)$-beli utak száma, amelyekben k hosszú lépés van, $\binom{n}{k} C_n$.*
c) *Speciálisan, azon $\mathcal{E}^*(n)$-beli utak száma, amelyekben n hosszú lépés van (tehát váltakozva követik egymást rövid és hosszú lépések), C_n.*
d) *$n \geq 1$ esetén a C_n Catalan-szám megszámolja azon $(0,0) \rightsquigarrow (n,1)$ utakat, amelyek megengedett lépései $(1, \pm 1)$ és $(1, \pm 2)$, továbbá a kezdőpontot leszámítva soha nem lépnek az x-tengelyre.*

2.12. Következmény. *Jelölje $\mathcal{E}'(n)$ azon $(0,1)$-ból induló, $2n$ hosszú (címkézetlen) utak halmazát, amelyek soha nem lépnek az x-tengelyre, és a páros pozíciókban állhatnak hosszú lépések is.*

a) *Az $\mathcal{E}'(n)$-beli utak száma $2^n B_n$.*
b) *Azon $\mathcal{E}'(n)$-beli utak száma, amelyekben k hosszú lépés van, $\binom{n}{k} B_n$.*

A 2.4. alfejezetben az eddigiek néhány további következményét ismertetjük. (Ezen eredmények esetén is a kombinatorikus bizonyításokon van a hangsúly, generátorfüggvényekkel nem nehéz őket belátni.) Először egy technikai jellegű konvolúciós formulát bizonyítunk, melyből rekurzív módon levezethető a Shapiro-azonosság (2.4) ekvivalens alakja.

2.14. Lemma. (Nagy [2]) *Tetszőleges rögzített n esetén*

$$2 \cdot \sum_{i+j+k=n} C_{2i} C_{2j} B_{2k} = B_{2n+1},$$

ahol az i, j, k futó indexek nemnegatív egészek.

A 2.15. tétel c) pontjában meghatározzuk a páros indexű B_n számok konvolúciójának zárt alakját is:

$$\sum_{k=0}^{n} B_{2k}B_{2n-2k} = \frac{16^n + 4^n B_n}{2}.$$

Ennek egy ekvivalens megfogalmazását, a középső binomiális együtthatók alternáló konvolúciós formuláját látjuk be kombinatorikus módon:

2.16. Tétel. (Spivey [13], Nagy [2])

$$\sum_{k=0}^{n} B_{2k}B_{2n-2k} - \sum_{k=0}^{n-1} B_{2k+1}B_{2n-2k-1} = 4^n B_n.$$

Utak kettős leszámlálásával igazoljuk a

$$\sum_{k=0}^{n} B_{2k}B_{2n-2k} - \sum_{k=0}^{n-1} B_{2k+1}B_{2n-2k-1} = \sum_{k=0}^{n} C_{2k}B_{2n-2k}$$

alakot, mellyel visszavezetjük a problémát (2.4)-re. Bizonyításunk tehát más utat követ, mint Spivey 2012-ben közzétett elegáns bizonyítása [13], mely véletlen színezett permutációk segítségével érvel.

A 2.5. alfejezetben két sejtést fogalmazunk meg számítógépes vizsgálataink alapján. Ezek kimondásához szükségünk lesz a következő jelölésre, melyet a páros-metsző utak halmazához hasonlóan definiált útosztályok leírására használunk: Egy $b_0, b_1, \ldots, b_n$ 0-1-2 sorozatra jelölje $\mathcal{P}[b_0 b_1 \ldots b_n]$ azon $2n$ hosszú, origóból induló (hagyományos) utak halmazát, amelyek elkerülik a $\{(2i, 0) : b_i = 0\}$ halmaz összes pontját, ugyanakkor a $\{(2i, 0) : b_i = 2\}$ halmaz legalább egy pontjára rálépnek. Első sejtésünk a 2.7. Lemma általánosítása (mindkét alpontban az első egyenlőség a kérdéses, a második egyszerű):

2.19. Sejtés. (Hajnal–Nagy [1])

a) $\left|\mathcal{P}[(1^k0^k)^{n-1}1^k2^k]\right| = \left|\mathcal{P}[10^{n-1}21^{2kn-n-1}]\right| = 4^{2kn-n-1}2C_{n-1}$,

b) $\left|\mathcal{P}[(1^k0^k)^n]\right| = \left|\mathcal{P}[10^n1^{2kn-n-1}]\right| = 4^{2kn-n-1}B_n$.

A két alpont ekvivalenciáját is megmutatjuk, így elegendő lenne az egyiket igazolni. Második sejtésünkben hasonló a $\mathcal{P}$ úthalmazt definiáló „tiltássorozat”, és a sejtett elemszám is:

2.20. Sejtés.

a) $\left|\mathcal{P}[1(1^k0^{k+1})^{n-1}1^k2^{k+1}]\right| = \left|\mathcal{P}[10^{n-1}21^{2kn}]\right| = 4^{2kn}2C_{n-1}$,

b) $\left|\mathcal{P}[1(1^k0^{k+1})^n]\right| = \left|\mathcal{P}[10^n1^{2kn}]\right| = 4^{2kn}B_n$.

3. Diszkrét véletlen séták egy konvexitási tulajdonsága

A 3. fejezetben szimmetrikus véletlen sétákkal foglalkozunk. A kutatás előzménye egy síkbeli harmonikus mértékekre vonatkozó 2012-beli folytonos eredmény [6], melynek új, diszkrét megközelítéssel dolgozó bizonyítását publikáltuk Totik Vilmossal [4]. (A harmonikus analízisben fontos szerepet betöltő harmonikus mértékek [8] definiálhatók Brown-mozgás segítségével, a Brown-mozgás pedig approximálható diszkrét véletlen sétákkal.) A benyújtott [4] publikáció diszkrét, kombinatorikus eredményeit dolgozza fel a fejezet, ezenfelül ismertetjük a Szalai Attilával közösen elért általánosításokat [3].

Bevezetjük a szükséges fogalmakat. A $\mathbb{Z}^2$*-beli séta* egy $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots$ véges vagy végtelen pontsorozat $\mathbb{Z}^2$-ben ($Q_i \in \mathbb{Z}^2$), ahol a $Q_{i+1} - Q_i$ vektor a $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ vektorok (lépések) valamelyike, minden i-re. (Analóg módon definiáljuk a $\mathbb{Z}^d$-beli sétákat is: d dimenzióban $2d$ megengedett lépés van, a standard bázisvektorok, és azok ellentettjei.) Az adott Q_0 kezdőpontú (szimmetrikus) *véletlen séta* egy olyan Q_0 kezdőpontú végtelen séta, melynek lépéseit véletlenül, uniform módon választjuk meg, egymástól függetlenül. A fejezet alaperedménye a [4] publikáció főlemmája:

3.1. Tétel. (Nagy–Totik [4]) *Legyen p_k annak a valószínűsége, hogy a $(0,1)$ pontból induló $\mathbb{Z}^2$-beli véletlen séta a $(k,0)$ pontban lép először az x-tengelyre ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor a $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ sorozat konvex, vagyis $p_k \leq \frac{1}{2}(p_{k-1}+p_{k+1})$ teljesül $k \geq 1$ esetén.*

A 3.2. alfejezetben ismertetjük a tétel egy elemi, számolásmentes bizonyítását. A p_k valószínűség kiszámításánál nyilvánvalóan elegendő a séták első x-tengelymetszetig tartó szakaszával foglalkozni, ezért bevezetjük a következő elnevezéseket és jelöléseket: Azt mondjuk, hogy egy (véges, nem véletlen) $(k_1,h) \rightsquigarrow (k_2,0)$ séta *pozitív*, ha a végpontját leszámítva mindig az x-tengely fölött tartózkodik. $\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1,h)}$-vel jelöljük a $(k_1,h) \rightsquigarrow (k_2,0)$ pozitív séták halmazát, a $\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1,h)}[l]$ halmaz pedig ezen séták közül az l hosszúakat tartalmazza, ahol egy séta *hossza* a lépései száma. A p_k valószínűséghez hozzájáruló sétákat első lépésük, és az első x-tengelymetszetig tartó szakaszuk szerint osztályozva könnyen látható, hogy a 3.1. Tétel bizonyításához elegendő a következőt megmutatni:

3.2. Lemma. (Nagy–Totik [4]) *Bármely k egész számra létezik hossztartó $\mathcal{W}_k^{(0,2)} \to \mathcal{W}_k^{(1,1)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,1)}$ injektív leképezés. Vagyis tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ és $l \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\left|\mathcal{W}_k^{(0,2)}[l]\right| \leq \left|\mathcal{W}_k^{(1,1)}[l]\right| + \left|\mathcal{W}_k^{(-1,1)}[l]\right|.$$

Bizonyításként megadunk egy egyszerű injekciót, amely egy $\mathcal{W}_k^{(0,2)}$-beli séta képét vagy bizonyos jobbra és felfelé lépések felcserélésével, vagy bizonyos jobbra és lefelé lépések felcserélésével állítja elő. (Geometriailag „látványosabb” injekciót várakozásainkkal ellentétben nem találtunk.) Ezenkívül vázoljuk a 3.1. Tétel további bizonyítási módjainak kezdő lépéseit: Totik Vilmos eredeti megoldását, mely Fourier-együtthatók vizsgálatára vezet, illetve két „számolós” kombinatorikus gondolatmenetet a 3.2. Lemma igazolására.

A 3.3. alfejezetben megvizsgáljuk a magasabb kezdőpontból indított véletlen séták x-tengellyel vett első metszéspontjának eloszlását konvexitás szempontjából, és analóg eredményre jutunk:

3.3. Tétel. (Nagy–Szalai [3]) *Jelölje p_k^h annak a valószínűségét, hogy a $(0,h)$ pontból induló $\mathbb{Z}^2$-beli véletlen séta a $(k,0)$ pontban lép először az x-tengelyre, és legyen $h \geq 2$ rögzített. Ekkor a $\left(p_k^h\right)_{k=h-2}^{\infty}$ sorozat konvex, vagyis $p_k^h \leq \frac{1}{2}\left(p_{k-1}^h + p_{k+1}^h\right)$ teljesül $k \geq h-1$ esetén.*

A $h=1$ esethez hasonló megfontolások után megállapítjuk, hogy elegendő a 3.2. Lemma alábbi megfelelőjét igazolni:

3.4. Lemma. (Nagy–Szalai [3]) *Legyen adott $h \geq 2$ és $k \geq h-1$. Ekkor létezik hossztartó, injektív $\mathcal{W}_k^{(0,h-1)} \cup \mathcal{W}_k^{(0,h+1)} \to \mathcal{W}_k^{(1,h)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,h)}$ leképezés. Vagyis tetszőleges $l \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\left|\mathcal{W}_k^{(0,h-1)}[l]\right| + \left|\mathcal{W}_k^{(0,h+1)}[l]\right| \leq \left|\mathcal{W}_k^{(1,h)}[l]\right| + \left|\mathcal{W}_k^{(-1,h)}[l]\right|.$$

A bizonyításban egy $W \in \mathcal{W}_k^{(0,h-1)} \cup \mathcal{W}_k^{(0,h+1)}$ séta képét attól függően definiáljuk, hogy a $(h,0)$, $(h,2h)$, $(-h,2h)$ és $(-h,0)$ csúcsok által meghatározott négyzet valamelyik átlójára, vagy valamelyik oldalára lép-e először W. Az egyszerűbb eset az, amikor valamelyik átlóra; ilyenkor egy tükrözést hajtunk végre. Abban az esetben, amikor valamelyik négyzetoldalra lép először W (ez csak a felső oldal lehet), akkor a következő segédlemma által megadott injekció felhasználásával határozzuk meg W képét úgy, hogy összességében egy 3.4. Lemmát igazoló leképezést definiálunk. A segédlemma a 3.2. Lemma általánosítása, a bizonyítása is analóg módon történik:

3.5. Lemma. (Nagy–Szalai [3]) *Tetszőleges olyan h,k,m egészekre, melyekre $h \geq 1$ és $-h < m < h$, létezik hossztartó $\mathcal{W}_k^{(m,2h)} \to \mathcal{W}_k^{(h,h+m)} \cup \mathcal{W}_k^{(-h,h-m)}$ injekció.*

A probléma folytonos változata azt sugallja, hogy a 3.3. Tétel nem éles. Ezért megvizsgáljuk, hogy módszerünkkel (a 3.4. Lemma erősítésével) tudunk-e $(h-2)$-nél kisebb küszöbértéktől kezdve konvexitást bizonyítani valamely h-ra, illetve konkávitást tudunk-e igazolni valamely intervallumon. A válasz nemleges, ennél kifinomultabb megközelítés kell. Azonban eközben önmagukban is érdekes eredményekhez jutunk, amelyeknek nem látjuk egyszerű kombinatorikus okát. (Csak számolással tudjuk igazolni őket, mely azon alapul, hogy az n hosszú $(a,b) \rightsquigarrow (c,d)$ pozitív séták száma felírható zárt alakban [7] és [9] szerint, lásd 3.7. Lemma.) A kapott eredmények a következők:

3.6. Tétel. (Nagy–Szalai [3]) *Legyen $h \geq 2$ és k rögzített, valamint jelölje rendre V_l, illetve F_l azon l hosszú, $\mathcal{W}_k^{(0,h)}$-beli séták számát, amelyek kezdő lépése vízszintes (balra vagy jobbra lépés), illetve függőleges (felfelé vagy lefelé lépés). Ekkor*

- $l = h^2 - k^2$ *esetén* $V_l = F_l$;
- $l \geq h^2 - k^2$ *esetén* $V_l \geq F_l$;
- $l \leq h^2 - k^2$ *esetén* $V_l \leq F_l$.

Továbbá, ha $l \neq h^2 - k^2$, akkor $V_l = F_l$ csak $V_l = F_l = 0$ esetén fordulhat elő, azaz csak akkor, ha l olyan, hogy $\mathcal{W}_k^{(0,h)}[l] = \emptyset$.

3.9. Lemma. (Nagy–Szalai [3]) *Legyen $h \geq 2$ és k rögzített, valamint jelölje J_l (illetve L_l) azon l hosszú, $\mathcal{W}_k^{(0,h)}$-beli séták számát, amelyek kezdő lépése jobbra lépés (illetve lefelé lépés). Ekkor*

- $l = (h-k)(2h-1)$ *esetén* $J_l = L_l$;
- $l \geq (h-k)(2h-1)$ *esetén* $J_l \geq L_l$;
- $l \leq (h-k)(2h-1)$ *esetén* $J_l \leq L_l$.

Továbbá, ha $l \neq (h-k)(2h-1)$, akkor $J_l = L_l$ csak $J_l = L_l = 0$ esetén fordulhat elő.

A 3.4. alfejezetben a probléma magasabb dimenziós változatát tárgyaljuk. A sorozatok konvexitásának megfelelője a (diszkrét) szubharmonikusság lesz: Azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ diszkrét függvény (lokálisan) *szubharmonikus* a $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n$ pontban, ha

$$f(\boldsymbol{k}) \leq \frac{1}{2n} \sum_{\boldsymbol{j} \in N(\boldsymbol{k})} f(\boldsymbol{j}),$$

ahol $N(\boldsymbol{k})$ a $\boldsymbol{k}$ pont $\mathbb{Z}^n$-beli szomszédainak halmaza, azaz a standard bázisvektorokat $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$-nel jelölve, $N(\boldsymbol{k}) := \{\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{e_i} : i = 1, \ldots, n\}$.

A következő valószínűségeket vizsgáljuk tetszőleges rögzített $d \geq 2$ dimenzióban: Adott $h \in \mathbb{N}$ és $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ esetén legyen $p_{\boldsymbol{k}}^h$ annak az eseménynek a valószínűsége, hogy $\mathbb{Z}^d$-ben a $(0, \ldots, 0, h)$ pontból induló véletlen séta a $(k_1, \ldots, k_{d-1}, 0)$ pontban lép először az $x_d = 0$ hipersíkra. A 3.1. Tétel magasabb dimenziós megfelelője a következő tétel, melyet Totik Vilmos bizonyított:

3.10. Tétel. (Nagy–Totik [4]) *A $\mathbb{Z}^{d-1} \ni \boldsymbol{k} \mapsto p_{\boldsymbol{k}}^1$ függvény szubharmonikus minden $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ pontban.*

A tétel visszavezethető a síkbeli esetre. Analóg módon kapjuk a 3.3. Tétel magasabb dimenziós változatát:

3.11. Tétel. (Nagy–Szalai [3]) *A $\mathbb{Z}^{d-1} \ni \boldsymbol{k} \mapsto p_{\boldsymbol{k}}^h$ függvény szubharmonikus a $[h-1, \infty)^{d-1} \cap \mathbb{Z}^{d-1}$ halmaz pontjaiban tetszőleges rögzített $h \geq 2$ esetén.*

Az értekezés alapját képező publikációk

[1] P. Hajnal & G. V. Nagy: A bijective proof of Shapiro's Catalan convolution, *Electron. J. Combin.* **21** (2014), Issue 2, Paper #P2.42, 1–10.

[2] G. V. Nagy: A combinatorial proof of Shapiro's Catalan convolution, *Adv. in Appl. Math.* **49** (2012), 391–396.

[3] G. V. Nagy & A. Szalai: On the convexity of a hitting distribution for discrete random walks, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, *elfogadva* (2014).

[4] G. V. Nagy & V. Totik: A convexity property of discrete random walks, *benyújtva* (2014).

Hivatkozások

[5] G. E. Andrews: On Shapiro's Catalan convolution, *Adv. in Appl. Math.* **46** (2011), 15–24.

[6] D. Benko, P. Dragnev & V. Totik: Convexity of harmonic densities, *Rev. Mat. Iberoam.* **28** (2012), 947–960.

[7] W. Breckenridge, H. Gastineau-Hills, A. Nelson, P. Bos, G. Calvert & K. Wehrhahn: Lattice paths and Catalan numbers, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **1** (1991), 41–55.

[8] J. B. Garnett & D. E. Marshall: *Harmonic measure*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[9] R. K. Guy, C. Krattenthaler & B. E. Sagan: Lattice paths, reflections, & dimension-changing bijections, *Ars Combin.* **34** (1992), 3–15.

[10] T. Koshy: *Catalan numbers with applications*, Oxford University Press, Oxford, 2009.

[11] W. Nichols: A path bijection, *Amer. Math. Monthly* **94** (1987), 465–466.

[12] L. W. Shapiro: Problem E2903, *Amer. Math. Monthly* **88** (1981), 619.

[13] M. Z. Spivey: Combinatorial interpretation of the alternating convolution of the central binomial coefficients, 2012.
http://mikespivey.wordpress.com/2012/03/16/altconvcentralbinom/

[14] R. P. Stanley: Bijective proof problems, 2009.
http://www-math.mit.edu/~rstan/bij.pdf

[15] R. P. Stanley: Catalan addendum, 2013.
http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf

[16] R. P. Stanley: *Enumerative combinatorics, Vol. 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.