SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományos és Informatikai Tanszékcsoport
Informatika Doktori Iskola
Számítástudomány Alapjai Tanszék

Parciális Iterációs Elméletek

– tézisfüzet –

Hajgató Tamás

Témavezető
Dr. Ésik Zoltán

Szeged, 2014

Bevezetés

Fixpont műveletek a számítástudomány csaknem minden területén előfordulnak. Úgymint, automata és formális nyelvek elmélete, programozási nyelvek szemantikája, processz algebrák, logikai programozás, rekuzív típusok, bonyolultságelmélet, stb. A fixpont vagy iterációs művelet ekvacionális tulajdonságai legjobban a Lawvere elméletek segítségével írhatóak le, kartézi vagy co-kartézi kategóriákkal, lásd [Law63, Elg75, BE93, SP00].

Az iterációs elmélet fogalma egymástól függetlenül [BEW80a]-ben és [É80]-ben került bevezetésre azon célból, hogy leírja az iterációs művelet ekvacionális tulajdonságait iteratív és racionális algebrai elméletekben, lásd [WTWG76, Elg75]. Iteratív elméletekben az iterációs művelet fixpont egyenletek egyértelmű megoldásaival, racionális elméletekben pedig legkisebb fixpontok segítségével van definiálva. Mindkét esetben az iterációs művelet azonosságoknak ugyanazon halmazát elégíti ki. Ezen azonosságok határozzák meg az iterációs elmélet fogalmát. A [BE93, SP00] cikkben leírtak szerint egy fixpontműveletnek bármely nemtriviális modellje teljesíti az iterációs elmélet azonosságokat.

Egy iterációs elméletben az iterációs művelet egy $f : n \to n+p$ morfizmust egy $f^\dagger : n \to p$ morfizmusba visz, mely az alábbi, f által meghatározott fixpont egyenlet egy megoldását adja:

$$\xi = f \cdot \langle \xi, \mathbf{1}_p \rangle$$

a $\xi : n \to p$ változóban. Ha az elmélet el van látva némi extra struktúrával, mint például egy additív struktúrával, akkor kapcsolat írható le az iterációs művelet és bizonyos „Kleene típusú” műveletek között.

Például egy S félgyűrű feletti mátrixok elmélete el van látva additív struktúrával. Természetes feltételek mellett, [BE93], bármely mátrixok elmélete feletti iterációs művelet egyértelműen meghatároz egy csillag műveletet és meg is van határozva általa. Ez a csillag művelet egy $n \times n$-es négyzetes A mátrixot (azaz egy morfizmus $A : n \to n$) egy $n \times n$-es négyzetes A^* mátrixba visz. Az iterációs művelet tulajdonságai ekkor a csillag művelet tulajdonságaiban tükröződnek. A **2-es fejezetben**, mely a [EH09] cikkre alapszik, megmutatjuk, hogy ez az összefüggés az iterációs művelet és a csillag művelet között természetes módon általánosítható tetszőleges grove elméletekre. Ha S formális hatványsorok egy félgyűrűje akkor a szokásos parciális csillag művelet meghatároz egy parciális iterációs műveletet és meg van határozva általa. De ez nem az egyetlen példa ahol természetesebb egy parciális iterációs művelettel dolgozni mint egy totálissal, mivel (nemtriviális) iteratív elméletekben az iterációs művelet szükségképpen parciális.

A [BEW80b, É82] cikkekben (lásd még [BE93], Tétel 6.4.5) meg lett mutatva, hogy bármely iteratív elmélet melyben szerepel legalább egy „konstans" (azaz egy $1 \to 0$ morfizmus) iterációs elméletté alakítható, mely totális iterációs művelettel van ellátva.

Továbbá, az iterációs művelet totális műveletté való kiterjesztése egyedül a szóban forgó konstans megválasztásától függ, mely megoldását szolgáltatja az $1 \to 1$ identitásmorfizmus által meghatározott fixpont egyenletnek.

A **3-as fejezet** a [EH11a] cikkre alapszik. Ebben a fejezetben ezen konstrukció egy általánosítását mutatjuk be, mely parciális iteratív elméletekre alkalmazható. Mutatunk egy elegendő feltételt, mely biztosítja, hogy egy parciális iteratív elméletben a parciálisan definiált iterációs művelet kiterjeszthető totális műveletté úgy, hogy az eredményül kapott elmélet egy iterációs elmélet legyen.

Megmutatjuk, hogy ezen általános eredménynek következménye az a tétel is, miszerint olyan iteratív elméletekben, melyekben legalább egy konstans szerepel az iterációs művelet totális műveletté terjeszthető ki úgy, hogy egy iterációs elméletet kapjunk. Fő eredményünket additív struktúrával ellátott elméletekre is alkalmazzuk.

Megmutatjuk, hogy eredményeinkből következik a Mátrix Kiterjesztési Tétel [BE93] és a Grove Kiterjesztési Tétel [BE03]. Ezen elméletekre vonatkozólag a kiterjesztési tétel feltételezi, hogy bizonyos „őrzött" fixpont egyenleteknek egyértelmű megoldásai legyenek. Ekkor bizonyos feltételek mellett az iterációs művelet egyértleműen kiterjeszthető úgy, hogy minden fixpont egyenletnek egy megoldását szolgáltassa, és az eredményül kapott elmélet egy iterációs elmélet legyen. Ezen tétel egy lehetséges alkalmazási területe a Processz Algebrák területe, ahol általában őrzött fixpont egyenletek egyértelmű megoldásaival dolgozunk (cf. [Fok07]).

Az iterációs elméletek a Conway azonosságok és a csoport azonosságok (minden véges (egyszerű) csoportonként egy azonosság) segítségével axiomatizálhatóak. Lásd [É99]. Míg a csoport azonosságokra szükség van a teljességhez, néhány, automaták és formális nyelvek elméletében alkalmazott konstrukció csak a Conway azonosságokat használja.

A [BE93] könyvben egy, minden Conway elméletre alkalmazható, általános Kleene típusú tétel került igazolásra. Azonban sok érdekelt modellben az iterációs művelet csak parciálisan definiált. A **4-es fejezetben** a [EH11b] cikkre alapszik. Ebben a fejezetben egy Kleene-típusú tételt adunk parciális Conway elméletekre. Továbbá, ezen tétel néhány alkalmazását tárgyaljuk.

Az **5-ös fejezetben**, mely a [EH14] cikkre alapszik, megadjuk a szabad iterációs félgyűrűk egy leírását egy egyszerű kongruencia segítségével. Azonban, a tézis megírásának időpontjában még nem rendelkezünk eldöntési eredménnyel az iterációs félgyűrűk ekvacionális elméletére vonatkozóan.

Továbbá, az 5-ös fejezet tartalma egyelőre publikálatlan.

A cikkek melyeket a tézis megírásahoz felhasználtam [EH11b], [EH11a], [EH09] és a megjelenés előtt álló [EH14]. Jelen pillanatban még egy publikációhoz járultam hozzá, ez pedig [HH13].

Alapvető fogalmak (a tézis 1-es fejezete)

Bármely kategóriában, melynek objektumai a nemnegatív egészek $f : n \to p$ és $g : p \to q$ morfizmusok kompozícióját $f \cdot g$-vel jelöljük. A p objektumhoz tartozó identitásmorfizmust $\mathbf{1}_p$-vel jelöljük. Ha n egy nemnegatív egész, a halmazt $\{1, 2, \ldots, n\}$ $[n]$-el fogjuk jelölni. Így, $[0]$ az üres halmazt jelöli. A tézis során feltételezzük, hogy az olvasónak van némi ismerete a formális, racionális hatványsor fogalmairól. Lásd [BR10] és [BR82].

Idézzük fel, [BE93], hogy egy *(Lawvere) elmélet* alatt egy olyan T kis kategóriát értünk, melynek objektumai a nemnegatív egészek, továbbá n az 1 n-szeres önmagával való co-szorzata. Minden T elmélethez megadunk bizonyos kitüntetett $i_n : 1 \to n$, $i \in [n]$ co-szorzat injekciókat, melyeket *kitüntetett morfizmusoknak* hívunk. A co-szorzat tulajdonságból adódóan *skalár morfizmusok* minden véges $f_1, \ldots, f_n : 1 \to p$ sorozatához pontosan egy darab $f : n \to p$ morfizmus létezik, melyre $i_n \cdot f = f_i$, minden $i \in [n]$-re. Ezt a morfizmust a következőképpen jelöljük: $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. A műveletet ami impliciten adott a co-szorzat struktúrával a *párképzés* műveletének hívjuk. Például, ha $n = 0$, a párképzés művelet egy $0_p : 0 \to p$ morfizmust definiál, minden $p \geq 0$-re. Vegyük észre, hogy $\mathbf{1}_n = \langle 1_n, \ldots, n_n \rangle$ minden n nemnegatív egészre. Továbbá, mindig feltételezni fogjuk, hogy $\mathbf{1}_1 = 1_1$, hogy $\langle f \rangle = f$ teljesüljön minden $f : 1 \to p$-re. Egy T elméletet *triviálisnak* hívunk, ha $1_2 = 2_2$. Egy triviális elméletben legfeljebb egy darab $n \to p$ morfizmus létezik, minden $n, p \geq 0$-re.

Azon morfizmusokat, melyek kitüntetett morfizmusok képei a párképzés művelete mellett *bázis morfizmusoknak* hívjuk. Például, 0_n és $\mathbf{1}_n$ bázis morfizmusok. Minden $\rho : [n] \to [p]$ leképezéshez megfeleltetünk pontosan egy $n \to p$ bázis morfizmust, mely $\langle (1\rho)_p, \ldots, (n\rho)_p \rangle$, az $(1\rho)_p, \ldots, (n\rho)_p$ megkülönbötetett morfizmusok párképzés művelete melletti képe.

A co-szorzat struktúra egy *szeparált összeg* műveletet is meghatároz. Míg a párképzés művelete egy $f : n \to p$ és egy $g : m \to p$ morfizmust egy $n + m \to p$ morfizmusba visz, $f : n \to p$ és $h : m \to q$ morfizmusoknak a szeparált összeg melletti képe egy $n + m \to p + q$ morfizmus.

Azt mondjuk, hogy egy T elmélet *részelmélete* egy T' elméletnek, ha T részkategóriája T'-nek és ugyanazok a kitüntetett morfizmusai mint T-nek.

Elméletre egy alapvető példaként szolgál $\mathbf{Fun}_A$, mely az *A halmaz feletti leképezések elmélete*. Ezen elméletben az $n \to p$ morfizmusok az $f : A^p \to A^n$ leképezések. Vegyük észre a nyilak irányának megfordítását. Az $f : n \to p$ és $g : p \to q$ morfizmusok kompozícióját (mely egy $A^q \to A^n$ leképezés) jobbról balra írjuk. A kitüntetett morfizmusok a projekciók.

Legyen $S = (S, +, \cdot, 0, 1)$ egy félgyűrű [Gol99]. Az *S feletti mátrixok elmélete* $\mathbf{Mat}_S$. Az $n \to p$ morfizmusai az $n \times p$ mátrixok $S^{n \times p}$-ben. Morfizmusok kompozíciója mátrix szorzással adott. Minden $i \in [p]$-re, $p \geq 0$, az $i_p : 1 \to p$ kitüntetett morfizmus az $1 \times p$ sormátrix, melynek az i.dik pozícióján 1 szerepel és mindenhol máshol 0. $\mathbf{Mat}_S$-en értelmezett az összeadás művelet $+$, mely minden egyes $\mathbf{Mat}_S(n, p) = S^{n \times p}$ hom-seten definiált. Ismert, hogy minden egyes n-re, $(\mathbf{Mat}_S(n, n), +, \cdot, \mathbf{1}_n, 0_{n,n})$ félgyűrű, mivel két $n \times n$ mátrix szorzata is egy $n \times n$ mátrix. Továbbá, $\mathbf{Mat}_S(1, 1)$ izomorf S-el.

Σ *rangolt ábécé* alatt páronként diszjunkt $(\Sigma_n)_n$ halmazok egy családját értjük, ahol n a nemnegatív egészeken fut végig. Feltételezzük, hogy az olvasó már ismeri az $X_p = \{x_1, \ldots, x_p\}$ változók halmaza feletti (totális) Σ-*fa* fogalmát, lásd [BE93]. Az X_p feletti véges vagy végtelen Σ-fák halmazát $T_\Sigma(X_p)$ -vel jelöljük. Egy fa *valódi* akkor és csak akkor, ha nem valamelyik x_i fa. Σ-fák elméletet alkotnak: ΣTR melynek $n \to p$ morfizmusai azon fa n-esek, melyek minden komponense $T_\Sigma(X_p)$-beli. Morfizmuskompozíció az x_i változók helyébe történő helyettesítéssel van definiálva, és minden $i \in [p]$-re, az x_i fa szolgál az i.dik kitüntetett $1 \to p$ morfizmusnak. Tehát ha $t : 1 \to n$ és $t'_1, \ldots, t'_n : 1 \to p$ ΣTR-beliek, akkor $t \cdot \langle t'_1, \ldots, t'_n \rangle : 1 \to p$ az a fa, melyet úgy kapunk, hogy t'_i egy példányát helyettesítjük t minden x_i-vel címkézett csúcsa helyére, ahol $i \in [n]$. Lásd a [BE93] könyvet a részletekért. Egy fát *regulárisnak* hívunk, ha izomorfizmus erejéig véges sok részfája van. ΣTR-nak azon részelméletét, mely csak a reguláris fákból áll Σtr jelöli.

Legyen T egy elmélet. Morfizmusok egy nemüres I halmaza egy *ideál* [BE93] T-ben ha zárt a párképzés műveletére, bázismorfizmusokkal való kompozícióra balról és tetszőleges morfizmusokkal való kompozícióra jobbról. Vegyük észre, hogy minden ideál tartalmazza a 0_p morfizmusokat, minden $p \geq 0$-ra. I akkor és csak akkor *valódi* ideál, ha $\mathbf{1}_1 \notin I$.

Parciális preiterációs elmélet alatt egy olyan T elméletet értünk, mely egy kitüntetett $D(T)$ ideállal van ellátva és egy parciálisan definiált preiterációs műveletettel, melyet a következőképpen definiálunk:

$$^{\dagger} : T(n, n+p) \to T(n,p),\ n,p \geqslant 0$$

az $n \to n+p$ $D(T)$-beli morfizmusokon.

Parciális Conway elmélet alatt egy olyan parciális preiterációs elméletet értünk, mely azonosságok egy bizonyos halmazának (lásd a tézis 1.1-es fejezetét) tesz eleget. *Parciális iterációs elmélet* alatt egy olyan parciális Conway elméletet értünk, mely a *csoport azonosságoknak* tesz eleget, véges csoportonként egynek. Ezen azonosságok a tézis 1.2-es fejezetében találhatóak.

Parciális iteratív elmélet alatt egy olyan T parciális preiterációs elméletet értünk, melyre igaz, hogy minden $f : n \to n+p$ $D(T)$-beli morfizmusra, $f^{\dagger}$ az f által meghatározott

$$\xi = f \cdot \langle \xi, \mathbf{1}_p \rangle \tag{1}$$

fixpont egyenlet egyértelmű megoldása.

Ismert, [BE93] hogy minden parciális iteratív elmélet parciális iterációs elmélet is egyben. Egy parciális preiterációs elméletet *preiterációs elméletnek* hívunk, ha a kitüntetett ideál az elmélet minden morfizmusát tartalmazza. A *Conway elmélet* ill. *iterációs elmélet* fogalmát hasonlóképpen definiáljuk.

Iterációs elméletekre példák a folytonos vagy monoton függvények teljes parciális rendezések felett, ahol az iterációs művelet a *legkisebb fixpont művelettel* van definiálva. Lásd a [BE93] könyvet a részletekért.

Legyen Σ egy rangolt ábécé és jelölje T az ΣTR elméletet, vagy az $\Sigma\,$tr elméletet. Legyen $D(T)$ az az ideál mely azokból az $f : n \to p$ T-beli morfizmusokból áll, melyeknek $i_n \cdot f$ komponensei, $i \in [n]$ valódi fák. Ismert, hogy minden egyes $f : n \to n+p$ $D(T)$-beli morfizmusra az (1) egyenletnek egyértelmű megoldása van. Ezt az egyértelmű megoldást $f^{\dagger}$-el jelölve megállapíthatjuk, hogy T iteratív elmélet. Továbbá, ha Σ_0 nem üres, tehát létezik legalább egy morfizmus $T(1,0)$-ban, akkor $\perp : 1 \to 0$ tetszőleges választása mellett a parciális iterációs művelet *egyértelműen* kiterjeszthető egy totális iterációs műveletté úgy, hogy T iterációs elmélet legyen. Lásd a [BEW80a], [É82] cikkeket vagy a [BE93] könyvet.

Tfh Σ tartalmaz egy 0 rangú betűt, jelöljük ezt $\perp$-al. Ekkor bármely skalár morfizmus ΣTR-ban vagy egy kitüntetett morfizmus, vagy a következő alakba írható: $\perp_{1,p} = \perp \cdot 0_p : 1 \to p$. Adott $f : n \to n+p$, teljesül, hogy $f^{\dagger} = f^n \cdot \langle \perp_{n,p}, \mathbf{1}_p \rangle$, ahol $\perp_{n,p} = \langle \perp_{1,p}, \ldots, \perp_{1,p} \rangle : n \to p$, $f^0 = \mathbf{1}_n \oplus 0_p$ and $f^{k+1} = f \cdot \langle f^k, 0_n \oplus \mathbf{1}_p \rangle$. Jelölje $\perp$TR ezt a Conway elméletet. Ismert, hogy $\perp$TR iniciális Conway elmélet (és iniciális iterációs elmélet).

Legyen $T = \mathbf{Mat}_S$ egy mátrix elmélet. Tfh $I = (I(n,p))_{n,p}$ morfizmusok egy halmaza, mely tartalmazza a $0_{n,p}$ morfizmusokat, zárt az összeadásra és bal- ill. jobb oldalról bármely T-beli morfizmussal való kompozícióra. Ekkor azt mondjuk, hogy I egy *kétoldalú ideál* T-ban. T-nek minden kétoldalú ideálja meghatározza S egy kétoldalú ideálját [Gol99] és meg van határozva általa. Ugyanis ha I T-nek egy kétoldalú ideálja akkor $I(1,1)$ S-nek egy kétoldalú ideálja. Valamint ha I_0 S-nek egy kétoldalú ideálja, akkor azon mátrixok halmaza, melyekben csak I_0-beli számok szerepelnek T egy kétoldalú ideálja.

Tfh a mátrix emlélet $\mathbf{Mat}_S$ Conway elmélet is egyben. Ekkor az iterációs művelet meghatároz egy *csillag műveletet* ami egy $A : n \to n$ mátrixot egy $A^* : n \to n$ mátrixba visz a következő módon:

$$A^* \;=\; \begin{pmatrix} A & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}^\dagger .$$

Ennek következtében S egy csillag $^* : S \to S$ művelettel van ellátva. Ekkor az iterációs művelet tulajdonságai tükröződnek a csillag művelet tulajdonságaiban. Például a fixpont azonosság megfelel az $A^* = AA^* + \mathbf{1}_n$, $A : n \to n$ azonosságnak. Továbbá a dupla iterációs azonosság megfelel az

$$(A + B)^* = A^*(BA^*)^*$$

azonosságnak és a kompozíció azonosság megfelel az

$$(AB)^* = 1 + A(BA)^*B$$

azonosságnak, ahol mindkét azonosságban $A, B : n \to n$.

Ismert, hogy a csillag művelet meghatároz és egyértelműen meghatározott egy $^* : S \to S$ művelet által. Továbbá, S, ellátva ezzel a csillag művelettel egy *Conway félgyűrű*, vagy egy *iterációs félgyűrű* [BE93, É99] amennyiben T egy iterációs elmélet.

A [BEK08] cikket követve a *parciális Conway félgyűrűnek* hívunk egy S félgyűrűt, mely egy kitüntetett kétoldalú I ideállal van ellátva és egy $^* : I \to S$ művelettel melyre a következőek teljesülnek:

$$\begin{aligned} (a + b)^* &= a^*(ba^*)^*, \quad a, b \in I, \\ (ab)^* &= 1 + a(ba)^*b, \quad a \in I \text{ vagy } b \in I. \end{aligned}$$

A csillag művelet ekkor kiterjeszthető I feletti négyzetes mátrixokra a jól ismert mátrix formulát használva, lásd a tézis 1.2.1-es fejezetét. Legyen $T = \mathbf{Mat}_S$ és jelölje $D(T)$ az azon mátrixokból álló ideált, melyek csak I-beli elemeket tartalmaznak. Ekkor T, a felül definiált iterációs művelettel ellátva (amely az $n \to n + p$ in $D(T)$, $n, p \geq 0$ morfizmusokon értelmezett) egy parciális Conway elmélet. Ha $I = S$, T egy Conway elmélet. *Parciális iterációs félgyűrű* alatt olyan parciális Conway félgyűrűt értünk, mely azonosságok egy bizonyos halmazának tesz eleget, véges csoportonként egy azonosságnak [BE09]. Ha S egy parciális iterációs félgyűrű akkor $T = \mathbf{Mat}_S$ a fent definiált $D(T)$-vel parciális iterációs elmélet.

S feletti *csillag kongruencia* alatt egy félgyűrű kongruenciát értünk, mely megőrzi a parciálisan definiált csillag műveletet, azaz minden $a, b \in I$-re, valahányszor a ekvivalens b-vel, a^* is ekvivalens b^*-vel.

Idézzük fel, hogy $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle\Delta^*\rangle\rangle$ jelöli a nemnegatív egészek félgyűrűje feletti racionális hatványsorok félgyűrűjét. $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle\Delta^*\rangle\rangle$ a szokásos csillag művelettel egy példa parciális iterációs félgyűrűre. Többet is el lehet mondani. A következő tétel a [BE09] cikkből való. Az $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle\Delta^*\rangle\rangle$ parciális iterációs félgyűrű szabad a parciális iterációs félgyűrűk kategóriájában.

Egy *grove elmélet* [BE93] alatt egy olyan elméletet értünk, mely a $+ : 1 \to 2$ és $\# : 1 \to 0$ konstansokkal van felruházva. Megköveteljük, hogy a következő egyenlőségek teljesüljenek:

$$\begin{aligned} 1_2 + 2_2 &= 2_2 + 1_2, \\ (1_3 + 2_3) + 3_3 &= 1_3 + (2_3 + 3_3), \\ 1_1 + 0_{1,1} &= 1_1. \end{aligned}$$

A fenti egyenlőségek a következőképpen értelmezhetőek. Tegyük fel, hogy $f, g : 1 \to p$ morfizmusok egy grove elméletben. Legyen

$$f + g = + \cdot \langle f, g \rangle.$$

Továbbá, tetszőleges $f = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle, g = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle : n \to p$ morfizmuskra legyen

$$f + g = \langle f_1 + g_1, \ldots, f_n + g_n \rangle.$$

Azt mondjuk, hogy egy T grove elmélet *részgrove elmélete* a T' grove elméletnek, ha T részelmélete T'-nek és ugyanazok a $+$ és $\#$ konstansai, mint T'-nek.

A definícióból Következik, hogy minden $n, p \geq 0$ esetén $(T(n,p), +, 0_{n,p})$ egy kommutatív monoid. Továbbá,

$$\begin{aligned} (f + g) \cdot h &= (f \cdot h) + (g \cdot h), \\ 0_{m,n} \cdot f &= 0_{m,p}, \end{aligned}$$

minden $f, g : n \to p$ és $h : p \to q$ morfizmusokra. Vegyük észre, hogy a bal oldali disztributivitás nem feltétlenül teljesül.

Grove elméletekre példa az összes $\mathbf{Mat}_S$ mátrix elmélet. $\mathbf{Mat}_S$-ben a $+$ morfizmus az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} : 1 \to 2$$

mátrix és # az egyetlen $1 \to 0$ mátrix.

Egy grove elméletet, mely (parciális) Conway elmélet *(parciális) Conway grove elméletnek* hívunk. Egy grove elméletet, mely (parciális) iterációs elmélet *(parciális) iterációs grove elméletnek* hívunk.

Tfh L egy teljes háló, melynek legkisebb eleme $\perp$. Következik, hogy minden L^n direkt hatvány teljes háló. Idézzük fel, hogy egy $L^p \to L^n$ függvény *folytonos* [Sco72, BE93] ha megőrzi a (nemüres) irányított halmazok szuprémumát. Legyen $\mathbf{Cont}_L$ az L feletti folytonos függvények elmélete. Ekkor $\mathbf{Cont}_L$ azon részelmélete $\mathbf{Fun}_L$-nek, melyet a folytonos függvények határoznak meg.

Jelölje $+$ a következő leképezést $L^2 \to L$, $(x, y) \mapsto x \vee y$, ahol $x \vee y$ a szuprémuma $\{x, y\}$-nek. Következik, hogy bármely $f, g : 1 \to p$ morfizmusokra $f + g$ az az $L^p \to L$ leképezés, mely $x \in L^p$-et $f(x) \vee g(x)$-be viszi. Továbbá, jelöle # a legkisebb elemet $\perp$-ot, melyet most $L^0 \to L$ függvényként értelmezünk. Ekkor $\mathbf{Cont}_L$ grove elmélet. Vegyük észre, hogy minden n, p-re, az $0_{n,p}$ morfizmus az az $L^p \to L^n$ leképezés amely minden $z \in L^p$-et to $\perp_n$-ba viszi, azaz L^n legkisebb elemébe.

A $\mathbf{Lang}_\Sigma$ elméletnek $1 \to p$ morfizmusai az $L \subseteq T_\Sigma(X_p)$ Σ-fanyelvek. Továbbá, az $n \to p$ morfizmusai pedig nyelv n-esek, melyek komponensei $1 \to p$ morfizmusok. Legyen $L : 1 \to p$ és $L' = (L'_1, \ldots, L'_p) : p \to q$. Ekkor $L \cdot L'$ azon $T_\Sigma(X_q)$-beli fák halmaza, melyek OI-helyettesítéssel [ES77, ES78] kaphatóak, azaz azon t fák halmaza, melyekhez létezik $s \in L$ fa úgy, hogy t előáll s-ből úgy, hogy s-nek minden $i \in [p]$-re, az x_i-vel címkézett leveleit helyettesítjük L'_i-beli fákkal oly módon, hogy x_i különböző előfordulásait különböző L'_i-beli fákkal helyettesíthetjük. A kitüntetett i_n morfizmusok a $\{x_i\}$ alakú nyelvek és a $+$ ill. # morfizmus az $\{x_1, x_2\}$ ill. $\varnothing$, halmaz. Ekkor az következik, hogy az összeadás az elemenkénti unió és bármely $0_{n,p}$ minden egyes komponense $\varnothing$.

Általánosított csillag (a tézis 2-es fejezete)

Ezen fejezet tartalma a [EH09] cikkben került publikálásra.

Láttuk, hogy mátrix elméletekben az iterációs művelet meghatároz és egyértelműen meghatározott egy csillag művelet által. Minden mátrix elmélet grove elmélet is, de vannak olyan grove elméletek, amelyek nem mátrix elméletek. Ebben a fejezetben olyan grove elméleteket fogunk vizsgálni, melyek iterációs művelettel vannak ellátva és olyan grove elméleteket, melyek egy „általánosított csillag” művelettel vannak ellátva és megmutatjuk, hogy természetesen adódó feltételek mellett összefüggés van közöttük egy kategóriák izomorfizmusa révén. Az így adódó izomorfizmust használhatjuk arra, hogy leírjuk a kapcsolatot az iterációs művelet és az általánosított csillag művelet között. Azonban ezt az izomorfizmust közvetlenül az iterációs elmélet azonosságaira használva túl bonyolult azonosságokat kapunk. A 2-es fejezetben az iterációs elméletek azonosságainak olyan ekvivalens formáit adjuk meg, melyek az általánosított csillag művelet használják az iterációs művelet helyett. Az ekvivalencia feltétele, hogy néhány egyszerű feltétel teljesüljön. Ugyanis némely ekvivalencia csak akkor áll fenn, ha feltesszük, hogy a paraméter azonosság teljesül. Ez nem okoz gondot az alkalmazások tekintetében, hiszen minden jó tulajdonságokkal rendelkező iterációs művelet teljesíti ezt az azonosságot. Például ha az általánosított csillag fixpont azonosság teljesül (lásd a 2-es fejezetet), akkor minden $f : n \to n+p$ morfizmusra $f^{\otimes}$ egy megoldása a következő fixpont egyenletnek

$$\xi = f \cdot \langle \xi, 0_n \oplus \mathbf{1}_p \rangle + (\mathbf{1}_n \oplus 0_p)$$

a $\xi : n \to n + p$ változóban. Ha $p = 0$ ez az egyenlet leegyszerűsödik a következő alakra

$$\xi = f \cdot \xi + \mathbf{1}_n.$$

A 2.1-es, 2.2-es és 2.3-as fejezetek illusztrálják, hogy az iterációs művelet és az általánosított csillag közötti összefüggés grove elméletek esetén jó tulajdonságokkal bír és természetes. A 2.1-es fejezetben bevezetjük a *Conway ill. iterációs csillag elmélet* fogalmát. A definíciók egy azonnali következménye, hogy az iterációs csillag elméletek kategóriája izomorf az iterációs elméletek kategóriájával.

Conway elméletekben a csoport azonosságok egy egyszerű implikációból következnek, melyet a *funktoriális iterációs implikációnak* nevezünk. A 2.1-es fejezetben kettő verzióját adjuk a funktroiális iterációs implikációnak, melyek az általánosított csillag művelettel vannak kifejezve. A 2.2-es fejezetben bevezetjük a *rendezett iterációs grove elmélet* fogalmát: egy iterációs grove elmélet akkor és csak akkor *rendezett*, ha létezik egy parciális rendezés minden hom-seten, amely meg van őrizve a kompozíció és a párképzés művelete által. Továbbá, megköveteljük, hogy minden p-re a $0_{1,p}$ morfizmus legyen a legkisebb $1 \to p$ morfizmus. Ugyanebben a fejezetben a fixpont indukciósémának (lásd [Par69, É97]) egy ekvivalens megfogalmazását adjuk, mely az általánosított csillagot használja.

Iterációs term alatt olyan termet értünk, mely a szokásos módon épül fel olyan szimbólumokból, amelyek morfizmusokat jelölnek preiterációs grove elméletekben, valamint olyan szimbólumokból melyek a kitüntetett morfizmusokat, a kartézi műveleteket, az összeg és a preiterációs műveleteket jelölik. A *csillag term* fogalmát hasonlóképpen definiáljuk. Minden preiterációs vagy csillag termnek van egy n forrása és egy p célja, és a morfizmus változók minden kiértékelése mellett a szóban forgó term egy $n \to p$

morfizmussá értékelődik ki bármely preiterációs vagy általánosított csillag elméletben. $t, t' : n \to p$ termek közötti $t = t'$ egyenlőség vagy $t \leq t'$ egyenlőtlenség alatt egy formális egyenlő(tlen)séget értünk. Egy preiterációs grove elméletben vagy általánosított csillag elméletben vett érvényessége vagy kielégíthetősége egy egyenlő(tlen)ségnek a szokásos módon van definiálva.

A 2.3-as fejezetben újrafogalmazzuk a [É00] cikk főbb eredményeit grove elméleteket és az általánosított csillag műveletet használva. Egy ilyen eredmény [É00]-ból a következő:

Egy egyenlő(tlen)ség iterációs termek között akkor és csak akkor teljesül minden $\mathbf{Cont}_L$ elméletben, ahol L egy teljes háló, ha minden rendezett iterációs grove elméletben teljesül, melyek eleget tesznek a következő egyenlőségnek: $+^\dagger = \mathbf{1}_1$.

Ez az egyenlőség így is írható: $(1_2 + 2_2)^\dagger = \mathbf{1}_1$. A megelőző fejezetekben szereplő eredmények következményeképpen ezt kapjuk:

Egy egyenlőség csillag termek között akkor és csak akkor teljesül minden $\mathbf{Cont}_L$ elméletben, ahol L egy teljes háló, ha minden rendezett iterációs csillag elméletben teljesül, melyre igaz, hogy $\mathbf{1}_1{}^\otimes = \mathbf{1}_1$.

Ugyanebben a fejezetben egy másik [É00]-beli eredményt is átfogalmazunk. Ez az eredmény:

Egy egyenlőség iterációs termek között akkor és csak akkor teljesül minden $\mathbf{Cont}_L$ elméletben, ha minden olyan rendezett grove elméletben teljesül, mely idempotens és kielégíti a fixpont azonosságot (vagy annak skalár verzióját), a paraméter azonosságot és a fixpont indukciósémát.

És ugyanez általánosított csillaggal:

Egy egyenlőség csillag termek között akkor és csak akkor teljesül mindent $\mathbf{Cont}_L$ elméletben, ha minden rendezett általánosított csillag elméletben teljesül, mely idempotens és kielégíti az általánosított csillag fixpont azonosságot, az általánosított csillag paraméter azonosságot, és az általánosított csillag fixpont indukciósémát.

Az utolsó két eredmény monoton függvényekre is teljesül, nem csak folytonos függvényekre.

Tegyük fel, hogy S egy *folytonos monoid*, azaz egy kommutatív monoid $S = (S, +, 0)$ felruházva egy $\leq$ parciális rendezéssel úgy, hogy $(S, \leq)$ egy teljes parciális rendezés, melynek legkisebb eleme 0. Ekkor minden nemüres irányított halmaz szuprémuma létezik és az összeadás művelet megőrzni a szuprémumot (és ezért monoton is).

Jelölje $\mathbf{Cont}_S$ az S feletti folytonos függvények elméletét. Ugyanúgy iterációs elmélet, mint $\mathbf{Cont}_L$, ahol L egy teljes háló. De ha S nem egy idempotens monoid, akkor $\mathbf{Cont}_S$ nem feltétlenül idempotens. Vegyük észre, hogy a [Boz99], [Kui00] cikkektől eltérően nem követelünk meg bármilyen linearitási feltételt maguktól a függvényektől.

A következő eredmények [É02]-ben kerültek igazolásra. Itt azokkal a fogalmakkal fejeztük ki őket, amelyekkel a tézisben dolgoztunk.

Egy egyenlő(tlen)ség iterációs termek között akkor és csak akkor teljesül az összes $\mathbf{Cont}_S$ elméletben, ahol S egy folytonos monoid, ha teljesül minden rendezett iterációs grove elméletben, mely teljesíti a következőeket: $(1_3+2_3+3_3)^{\dagger\dagger} = (1_2+2_2)^\dagger$ és $(1_2+2_2)^\dagger \cdot (f+g) = ((1_2+2_2)^\dagger \cdot f) + ((1_2+2_2)^\dagger \cdot g)$.

Egy egyenlő(tlen)ség iterációs termek között akkor és csak akkor teljesül az összes $\mathbf{Cont}_S$ elméletben, ha teljesül minden rendezett iterációs grove elméletben, mely kielégíti a (skalár) fixpont azonosságot, a paraméter azonosságot és a fixpont indukciósémát, valamint a következő egyenlőségeknek tesz eleget: $(1_3+2_3+3_3)^{\dagger\dagger} = (1_2+2_2)^\dagger$ és $(1_2+2_2)^\dagger \cdot (f+g) = ((1_2+2_2)^\dagger \cdot f) + ((1_2+2_2)^\dagger \cdot g)$.

Egy egyenlő(tlen)ség iterációs termek között akkor és csak akkor teljesül az összes $\mathbf{Cont}_S$ elméletben, ha teljesül minden rendezett iterációs grove elméletben, melyben teljesül $\mathbf{1}_1{}^{\otimes\otimes} = \mathbf{1}_1{}^{\otimes}$ vagy ha minden rendezett általánosított csillag elméletben teljesül, mely kielégíti az általánosított csillag verzióit a (skalár) fixpont azonosságnak, a paraméter azonosságnak, a fixpont indukciósémának, valamint a következő egyenlőségeket: $\mathbf{1}_1{}^{\otimes\otimes} = \mathbf{1}_1{}^{\otimes}$ és $\mathbf{1}_1{}^{\otimes} \cdot (f+g) = (\mathbf{1}_1{}^{\otimes} \cdot f) + (\mathbf{1}_1{}^{\otimes} \cdot g)$.

Iterációs Kiterjesztési Tétel (a tézis 3-as fejezete)

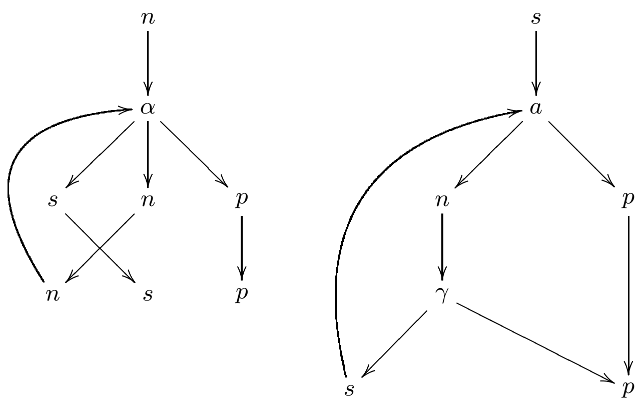
Ezen fejezetben foglaltak a [EH11a] cikkben kerültek publikálásra.

Ebben a fejezetben megadunk egy elegendő feltételt, mely biztosítja, hogy egy parciális iteratív elméletben az iterációs művelet totális műveletté terjeszthető ki úgy, hogy eredményül egy Conway vagy iterációs elméletet kapjunk.

Legyen T egy parciális preiterációs elmélet, melyen értelmezett iterációs műveletet ^{†_D}-nek jelöljük és a $D(T)$-beli $f : n \to n+p$ morfizmusokon értelmezett. Továbbá legyen T_0 egy részelmélete T-nek. Tegyük fel, hogy T_0 egy preiterációs elmélet a következő iterációs művelettel:

$$ {}^{\dagger_0} : T_0(n, n+p) \to T_0(n,p), \qquad\qquad n,p \geq 0. $$

Egy $(\alpha, a) : n \to q$ s súlyú *deskriptor* a következőekből áll. Egy $\alpha : n \to s+q$ T_0-beli morfizmus és egy $a : s \to q$ $D(T)$-beli morfizmus. Az $|(\alpha,a)|$ a $\alpha \cdot \langle a, \mathbf{1}_q \rangle$ T-beli morfizmust jelöli és az (α,a) *viselkedésének* hívjuk. Továbbá, legyen minden $(\alpha,a) : n \to n+p$ s súlyú deskriptora $(\alpha,a)^\wedge$ a



1. ábra. γ szerepel bal oldalon és c a jobb oldalon.

következő deskriptor: $(\gamma, c) : n \to p$ melynek súlya s és ahol

$$\begin{aligned} \gamma &= (\alpha \cdot (\pi_{n,s} \oplus \mathbf{1}_p))^{\dagger_0} : n \to s + p, \\ c &= (a \cdot \langle \gamma, 0_s \oplus \mathbf{1}_p \rangle)^{\dagger_D} : s \to p, \end{aligned}$$

lásd az 1-es ábrát. Itt $\pi_{n,s}$ jelöli a következő bázis morfizmust:

$$\langle 0_n \oplus \mathbf{1}_s, \mathbf{1}_n \oplus 0_s \rangle : s + n \to n + s,$$

ahol $n, s \geqslant 0$.

Idézzük fel, hogy minden T parciális iteratív elmélet egyben parciális iterációs elmélet is melynek az iterációs művelete a következő fixpont egyenlet egyértelmű megoldását adja: $\xi = f \cdot \langle \xi, \mathbf{1}_p \rangle$, ahol $f : n \to n + p$ $D(T)$-beli. Alább ezt a műveletet ^{†_D}-vel fogjuk jelölni. Az iterációs kiterjesztési tétel a következőképpen hangzik:

Tétel 1 *Legyen T egy parciális iteratív elmélet, mely egyben parciális preiterációs elmélet is az ^{†_D} művelettel, mely az $f : n \to n + p$ $D(T)$-beli morfizmusokon értelmezett. Tegyük fel, hogy a következőek teljesülnek:*

1.1. T_0 részelmélete T-nek és egy Conway elmélet a következő művelettel

$$^{\dagger_0} : T_0(n, n+p) \to T_0(n, p)$$

$n, p \geq 0$.

1.2. Minden $n \to p$ T-beli morfizmus felírható $\alpha \cdot \langle a, \mathbf{1}_p \rangle$ alakban, ahol $\alpha : n \to s + p$ T_0-beli és $a : s \to p$ $D(T)$-beli.

1.3. Minden $\alpha : n \to s+n+p$, $\alpha' : n \to r+n+p$ T_0*-beli és* $a : s \to n+p$, $a' : r \to n+p$ $D(T)$*-beli morfizmusokra igaz:*

$$|(\alpha, a)| = |(\alpha', a')| \quad \Longrightarrow \quad |(\alpha, a)^\wedge| = |(\alpha', a')^\wedge|$$

azaz,

$$\alpha \cdot \langle a, \mathbf{1}_{n+p}\rangle = \alpha' \cdot \langle a', \mathbf{1}_{n+p}\rangle \quad \Longrightarrow \quad \gamma \cdot \langle c, \mathbf{1}_p\rangle = \gamma' \cdot \langle c', \mathbf{1}_p\rangle$$

ahol

$$(\gamma, c) = (\alpha, a)^\wedge \quad \text{és} \quad (\gamma', c') = (\alpha', a')^\wedge$$

Ekkor a ^{†_0} *és* ^{†_D} *műveletek egyértelműen kiterjeszthetőek egy totálisan definiált műveletté:* $^\dagger : T(n, n+p) \to T(n,p)$ *úgy, hogy* T †*-el felruházva egy Conway elmélet. Továbbá, ha* T_0 *iterációs elmélet, akkor* T *iterációs elmélet.*

A 3.2-es fejezetben az Iterációs Kiterjesztési Tétel néhány következményét tekintjük. Az első következményben kicseréljük a 1.3-as feltételét az Iterációs Kiterjesztési Tételnek egy olyan feltételre, mely a szimuláció fogalmán [BE93] alapszik, mely sok alkalmazásban előfordul.

Egy $f : n \to p$ morfizmust egy T nemtriviális elméletben *ideál* morfizmusnak hívunk, ha egyetlen $i_n \cdot f$, $i \in [n]$ komponense sem egy kitüntetett morfizmus. *Iteratív elmélet* [Elg75] alatt olyan nemtriviális T parciális iterációs elméletet értünk, melyre igaz, hogy $D(T)$ az összes ideál morfizmust tartalmazza. Tehát, minden iteratív elmélet olyan parciális iterációs elmélet, melyben az iterációs művelet az $n \to n+p$ ideál morfizmusokon értelmezett.

A 3.3.1-es fejezetben megmutatjuk, hogy a következő [BEW80b]-ben ill. [É82]-ben szereplő tétel egy speciális esete az Iterációs Kiterjesztési Tételnek.

Tegyük fel, hogy T egy iteratív elmélet és $\perp : 1 \to 0$. Ekkor egyértelmű módja létezik annak, hogy egy iterációs műveletet T-n úgy definiáljunk, hogy T Conway elmélet legyen és $\mathbf{1}_1{}^\dagger = \perp$. Továbbá, ezzel az iterációs művelettel ellátva T egy iterációs elmélet.

A 3.3.2 és 3.3.3 fejezetekben megmutatjuk, hogy az Iterációs Kiterjesztési Tétel általánosítása a Mátrix Kiterjesztési Tételnek, mely a [BE93] könyvben található a 323-335 oldalakon, és a grove elméletekre vonatkozó kiterjesztési tételnek, mely [BE03]-ban található. A bizonyítás során azt mutatjuk meg, hogy a Mátrix (vagy grove) Kiterjesztési Tétel feltételeiből következnek az Iterációs Kiterjesztési Tétel feltételei. A félgyűrűkre vonatkozó Mátrix Kiterjesztési Tétel a következő:

Tétel 2 *Legyen S egy félgyűrű az I_0 kétoldalú ideállal. Tegyük fel a következőeket:*

2.1. S_0 részfélgyűrűje S-nek és egy Conway félgyűrű a ^{*_0} csillag művelettel.

2.2. Minden egyes $a \in I_0$ és $b \in S$ esetén, az $x = ax + b$ egyenletnek egyértelmű megoldása van S-ben.

2.3. Minden $s \in S$ felírható $s = x + a$ alakban valamely $x \in S_0$-re és $a \in I_0$-ra.

2.4. Minden $x, x' \in S_0$-re és $a, a' \in I_0$-ra, ha $x + a = x' + a'$ akkor $x = x'$ és $a = a'$.

Ekkor a ^{*_0} művelet egyértelműen kiterjeszthető egy $^* : S \to S$ csillag műveletté úgy, hogy S egy Conway félgyűrű legyen. Ha S_0 iterációs félgyűrű, akkor S is iterációs félgyűrű.

A 2-es tétel alkalmazásait [BE93] és [BE09] is tárgyalta. Itt csak egy következményt említünk meg, mely a [BE93] könyvből való.

Következmény 3 *Ha S iterációs félgyűrű, akkor $S\langle\langle\Delta^*\rangle\rangle$, a Δ ábécé feletti, S-beli együtthatókkal bíró formális hatványsorok félgyűrűje iterációs félgyűrű. Ugyanez teljesül $S^{rat}\langle\langle\Delta^*\rangle\rangle$-ra, mely csak a racionális hatványsorokat tartalmazza.*

Legyen T egy grove elmélet és T_0 a T egy részgrove elmélete. Tegyük fel, hogy T_0 mátrix elmélet. Vegyük észre, hogy ha egy $D(T)$ ideál zárt a T_0-beli morfizmusokkal balról való kompozícióra, akkor tetszőleges $f, g : n \to p$ $D(T)$-beli morfizmusokra $f + g \in D(T)$ és $0_{n,p} \in D(T)$. Egy $D(T)$ ideált T_0-*ideálnak* hívunk, ha zárt a T_0-beli morfizmusokkal balról való kompozícióra.

A grove elméletekre vonatkozó kiterjesztési tétel a következő:

Tétel 4 *Legyen T egy grove elmélet és T_0 egy részgrove elmélete T-nek, és egy mátrix elmélet. Továbbá, tegyük fel, hogy a következőek teljesülnek:*

4.1. $D(T)$ egy T_0-ideál.

4.2. Minden T-beli morfizmus egyértelműen felírható $\alpha + a$ alakban, valamely α T_0-beli és a $D(T)$-beli morfizmusokra.

4.3. Minden $\alpha : n \to p$ T_0-beli és $f, g : p \to q$ T-beli morfizmusoka

$$\alpha \cdot (f + g) = (\alpha \cdot f) + (\alpha \cdot g).$$

4.4. *T_0 Conway elmélet a következő művelettel:*

$$^{\dagger_0} : T_0(n, n+p) \to T_0(n,p), \qquad\qquad n,p \geq 0.$$

4.5. *Minden $\alpha : n \to p$ T_0-beli és $a : n \to n+p$ $D(T)$-beli morfizmusokra, az $\xi = ((0_n \oplus \alpha) + a) \cdot \langle \xi, \mathbf{1}_p \rangle$ fixpont egyenletnek egyértelmű megoldása van.*

Ekkor egyetlen módja van a † T feletti művelet definiálásának úgy, hogy a definíció kiterjessze a ^{†_0} műveletet és T Conway elmélet legyen. Ha T_0 iterációs elmélet, T is az.

A grove elméletekre vonatkozó kiterjesztési tétel egy következménye a következő, lásd [BE03]. Idézzük fel, hogy egy S-beli együtthatókkal rendelkező $1 \to p$ formális fasor alatt egy $T_\Sigma(X_p) \to S$ leképezést értünk. Azaz egy olyan leképezést, mely egy Σ-fát S egy elemébe viszi. [EK03].

Következmény 5 *Legyen S egy tetszőleges Conway félgyűrű. Az S-beli együtthatókkal rendelkező formális fasorok Conway grove elméletet alkotnak, melynek részgrove elmélete a racionális fasorok elmélete, mely szintén Conway grove elmélet. Ha S iterációs félgyűrű akkor mindkét szóban forgó elmélet iterációs grove elmélet.*

Kleene Tétel Parciális Conway Elméletekre (a tézis 4-es fejezete)

Ebben a fejezetben egy Kleene-típusú tételt adunk, mely parciális Conway elméletekre vonatkozik és néhány alkalmazását tárgyaljuk. Ezen fejezet tartalma a [EH11b] cikkben került publikálásra.

Legyen T egy parciális preiterációs elmélet, T_0 egy részelmélete T-nek és legyen A skalár, $D(T)$-beli morfizmusok egy halmaza. $A(T_0)$ jelöli azon $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle : n \to p$, $n, p \geq 0$ morfizmusok halmazát, melyre igaz, hogy minden f_i kompozíciója egy A-beli morfizmusnak egy T_0-beli morfizmussal. Ekkor $0_p \in A(T_0)$ minden $p \geq 0$-ra. Vegyük észre, hogy ha T_0 egyenlő T-vel, akkor $A(T_0)$ az a legszűkebb T-beli ideál, mely tartalmazza az A-beli morfizmusokat, és ha A $D(T)$-beli skalár morfizmusok egy halmaza, akkor $A(T_0) = D(T)$, T-nek minden T_0 részelméletére.

Azt mondjuk, hogy (T_0, A) *iteráció kompatibilis*, ha minden $\alpha : n \to s+n+p$ T_0-beli és $a : s \to s+n+p$ $A(T_0)$-beli morfizmusokra, $s, n, p \geq 0$-re

$$\alpha \cdot \langle a^\dagger, \mathbf{1}_{n+p} \rangle \in D(T) \Longrightarrow \alpha \cdot \langle a, 0_s \oplus \mathbf{1}_{n+p} \rangle \in A(T_0).$$

Ez a feltétel teljesül egy T parciális preiterációs elméletben, ha (T_0, A) *erősen iteráció kompatibilis*:

1. Minden $\alpha : n \to p \in T_0$-ra és $a : p \to g \in A(T_0)$-ra $\alpha \cdot a \in A(T_0)$, azaz, ha $A(T_0)$ balról zárt a T_0-beli morfizmusokkal való kompozícióra.
2. Ha $\alpha \cdot \langle f, \mathbf{1}_p \rangle \in D(T)$ valamely $\alpha : n \to m + p \in T_0$-ra és $f : m \to p \in D(T)$-re, akkor $\alpha = \beta \oplus 0_p$ valamely $\beta : n \to m$ T_0-beli morfizmusra.

Amikor azt írjuk, hogy (T_0, A) *bázis*, azt értjük, hogy a T_0 elmélet a T elmélet egy részelmélete, az A halmaz pedig $D(T)$-beli skalár morfizmusok egy halmaza. Bevezetjük a prezentáció fogalmát:
Egy (T_0, A) bázis feletti, $n \to p$, s dimenziójú *prezentáció* alatt egy rendezett párt értünk:

$$D = (\alpha, a) : n \to p,$$

ahol $\alpha : n \to s + p$ T_0-beli és $a : s \to s + p$ $A(T_0)$-beli.

D viselkedése a következő T-beli morfizmus:

$$|D| = \alpha \cdot \langle a^\dagger, \mathbf{1}_p \rangle : n \to p.$$

A 4.1-es fejezetben minden D és E prezentációkhoz definiálunk egy $\langle D, E \rangle : n + m \to p$ prezentációt és egy $D \cdot E : n \to q$ prezentációt. Továbbá definiáljuk a $D^\dagger : n \to p$ prezentációt azon feltevés mellett, hogy (T_0, A) iteráció kompatibilis vagy $T_0 \subseteq D(T)$ zárt az iteráció műveletre.

Ezt követően igazoljuk a következőeket: $\langle |D|, |E| \rangle = |\langle D, E \rangle|$, $|D| \cdot |E| = |D \cdot E|$ és azt, hogy ha (T_0, A) iteráció kompatibilis vagy $T_0 \subseteq D(T)$ zárt az iteráció műveletre, akkor $|D|^\dagger = |D^\dagger|$.

Ezeket az eredményeket felhasználva megkapjuk a következő Kleene - típusú tételt parciális Conway elméletekre.

Tétel 6 *Legyen T egy parciális Conway elmélet és (T_0, A) bázis. Tegyük fel, hogy (T_0, A) iteráció kompatibilis vagy $T_0 \subseteq D(T)$ zárt az iteráció műveletre. Ekkor egy f morfizmust akkor és csak akkor tartalmaz T azon legszűkebb parciális Conway részelmélete, mely T_0-át és A-t tartalmazza, ha f valamely (T_0, A) feletti prezentáció viselkedése.*

A fenti tételben a *parciális Conway részelmélet* fogalmát a következőképpen értjük. Legyenek T, T' parciális Conway elméletek. Azt mondjuk, hogy T a T' *parciális Conway részelmélete*, ha T részelmélete T'-nek és T kitüntetett ideálja megkapható T' kitüntetett ideáljának T-beli morfizmusokra való megszorításából. További feltétel még, hogy a T feletti iterációs művelet megkapható T' iterációs műveletének T-beli morfizmusokra való megszorításából.

A 4.2-es fejezetben a Kleene tétel alábbi következményét is igazoljuk:

Következmény 7 *Tegyük fel, hogy T parciális Conway elmélet és (T_0, A) bázis, valamint T_0 mátrix elmélet. Tegyük fel, hogy a következő két feltételből valamelyik teljesül:*

1. *Minden $x : 1 \to p$ T_0-beli és $f : 1 \to p \in D(T)$ morfizmusokra, ha $x + f \in D(T)$ akkor $x = 0_{1,p}$. Továbbá, minden $x : 1 \to 1 \in T_0$-ra és $a, b : 1 \to p \in A(T_0)$-ra $x \cdot a \in A(T_0)$ és $a + b \in A(T_0)$.*

2. *Minden $x : 1 \to 1 \in T_0$-ra x^* definiált és T_0-beli.*

Ekkor egy $f : n \to p$ morfizmust akkor és csak akkor tartalmaz azon legszűkebb parciális Conway részgrove elmélete T-nek amely T_0-t és A-t tartalmazza, ha f valamely (T_0, A) feletti prezentáció viselkedése.

A fenti tételben a *parciális Conway részgrove elmélet* fogalmát a következőképpen értjük. Legyenek T, T' parciális Conway grove elméletek. Azt mondjuk, hogy T a T' *parciális Conway részgrove elmélete*, ha T részgrove elmélete T'-nek és egyben parciális Conway részelmélete is.

A 4.3-as fejezetben a parciális Conway elméletekre vonatkozó Kleene tétel néhány alkalmazását is tárgyaljuk. Ezen tétel alkalmazásával Kleene-típusú tételt kapunk fákra, (biszimuláció erejéig) szinkronizációs fákra, súlyozott faautomatákra és Büchi automatákra vonatkozólag. Továbbá megmutatjuk, hogy Schützenberger tétele, lásd [Sch61, Sch62] vagy [KS85] az eredményünk egy következménye.

Parciális és totális iterációs félgyűrűk (a tézis 5-ös fejezete)

Ebben a fejezetben a szabad iterációs félgyűrűk egy leírását adjuk meg egy egyszerű kongruencia alkalmazásával.

Idézzük fel, hogy $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle(\Delta+\{\bot\})^*\rangle\rangle$ a nemnegatív egészek félgyűrűje feletti racionális hatványsorok félgyűrűjét jelöli. A racionális hatványsorok itt $\Delta + \{\bot\}$ ábécé felett értelmezettek, mely Δ és $\{\bot\}$ ábécék direkt összege.

Először kiterjesztjük a szokásos parciális csillag műveletet az $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle(\Delta + \{\bot\})^*\rangle\rangle$ félgyűrűn egy totális műveletté a következő módon:

$$1^* = \bot$$

és minden $n = 2, 3, \ldots$-ra

$$n^* = \bot^*$$

és minden valódi $p \in \mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle(\Delta + \{\bot\})^*\rangle\rangle$-re és $n = 1, 2, 3, \ldots$-ra

$$(n + p)^* = (n^* p)^* n^*. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy a csillag (2)-ben jól definiált, mivel n^*p valódi hatványsor, ugyanis p is valódi.

Legyen θ a legszűkebb csillag kongruencia az $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\!\langle(\Delta + \{\perp\})^*\rangle\!\rangle$ parciális iterációs félgyűrűn úgy, hogy

$$(\perp + 1)\,\theta\,\perp \tag{3}$$

és

$$(\perp + \perp)\,\theta\,\perp. \tag{4}$$

Jelölje F_Δ azt a csillag félgyűrűt, melyet úgy kapunk, hogy az $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\!\langle(\Delta + \{\perp\})^*\rangle\!\rangle$ félgyűrűt leosztjuk θ-val.

Megjegyzés 8 θ a legszűkebb csillag kongruencia az $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\!\langle(\Delta + \{\perp\})^*\rangle\!\rangle$ félgyűrűn úgy, hogy

$$(\perp^k + \perp^m)\,\theta\,\perp^{\max\{k,m\}} \tag{5}$$

minden $k, m \geqslant 0$-ra.

Tétel 9 *Az F_Δ iterációs félgyűrű szabadon generált Δ által az iterációs félgyűrűk kategóriájában.*

Publikációk

A tézis megírása során a következő cikkek kerültek felhasználásra:

[EH09] Zoltán Ésik and Tamás Hajgató. Iteration grove theories with applications. In Symeon Bozapalidis and George Rahonis, editors, *Algebraic Informatics*, volume 5725 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 227-249. Springer-Verlag, 2009.

[EH11a] Zoltán Ésik and Tamás Hajgató. Dagger extension theorem. *Mathematical Structures in Computer Science*, 21(5):1035–1066, 2011.

[EH11b] Zoltán Ésik and Tamás Hajgató. Kleene theorem in partial Conway theories with applications. In Werner Kuich and George Rahonis, editors, *Algebraic Foundations in Computer Science*, volume 7020 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 72–93. Springer-Verlag, 2011.

[EH14] Zoltán Ésik and Tamás Hajgató. On the structure of free iteration semirings. *Publikálásra benyújtva*, 2014.

A tézis megírása során a következő publikáció nem került felhasználásra:

[HH13] Masahito Hasegawa and Tamás Hajgató. Traced *-autonomous categories are compact closed. *Theory and Applications of Categories*, 28(7): 206 – 212, 2013.

Irodalomjegyzék

[BE93] Stephen L. Bloom and Zoltán Ésik. *Iteration Theories: The Equational Logic of Iterative Processes*. Springer-Verlag, 1993.

[BE03] Stephen L. Bloom and Zoltán Ésik. An extension theorem with an application to formal tree series. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 8:145–185, 2003.

[BE09] Stephen L. Bloom and Zoltán Ésik. Axiomatizing rational power series over natural numbers. *Information and Computation/Information and Control*, 207:793–811, 2009.

[BEK08] Stephen L. Bloom, Zoltán Ésik, and Werner Kuich. Partial Conway and iteration semirings. *Fundamenta Informaticae*, 86(1,2):19–40, April 2008.

[BEW80a] Stephen L. Bloom, Calvin C. Elgot, and Jesse B. Wright. Solutions of the iteration equation and extensions of the scalar iteration operation. *SIAM Journal on Computing*, 9:25–45, 1980.

[BEW80b] Stephen L. Bloom, Calvin C. Elgot, and Jesse B. Wright. Vector iteration in pointed iterative theories. *SIAM Journal on Computing*, 9:525–540, 1980.

[Boz99] Symeon Bozapalidis. Equational elements in additive algebras. *Theory Computing Systems*, 32(1):1–33, 1999.

[BR82] Jean Berstel and Christophe Reutenauer. Recognizable formal power series on trees. *Theoretical Computer Science*, 18:115–148, 1982.

[BR10] Jean Berstel and Christophe Reutenauer. *Noncommutative Rational Series with Applications*. Cambridge University Press, 2010.

[É80] Zoltán Ésik. Identities in iterative and rational algebraic theories. In *Computational Linguistics and Computer Languages, XIV:183–207*, 1980.

[É82] Zoltán Ésik. On generalized iterative algebraic theories. In *Computational Linguistics and Computer Languages, XV:95–110*, 1982.

[É97] Zoltán Ésik. Completeness of Park induction. *Theoretical Computer Science*, 177:217–283, 1997.

[É99] Zoltán Ésik. Group axioms for iteration. *Information and Computation/Information and Control*, 148:131–180, 1999.

[É00] Zoltán Ésik. Axiomatizing the least fixed point operation and binary supremum. In Peter Clote and Helmut Schwichtenberg, editors, *CSL*, volume 1862 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 302–316. Springer-Verlag, 2000.

[É02] Zoltán Ésik. Continuous additive algebras and injective simulations of synchronization trees. *Journal of Computer and System Sciences*, 12(2):271–300, 2002.

[EH09] Zoltán Ésik and Tamás Hajgató. Iteration grove theories with applications. In Symeon Bozapalidis and George Rahonis, editors, *Algebraic Informatics*, volume 5725 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 227–249. Springer-Verlag, 2009.

[EH11a] Zoltán Ésik and Tamás Hajgató. Dagger extension theorem. *Mathematical Structures in Computer Science*, 21(5):1035–1066, 2011.

[EH11b] Zoltán Ésik and Tamás Hajgató. Kleene theorem in partial Conway theories with applications. In *Algebraic Foundations in Computer Science*, volume 7020 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 72–93. Springer-Verlag, 2011.

[EH14] Zoltán Ésik and Tamás Hajgató. On the structure of free iteration semirings. *Submitted for publication*, 2014.

[EK03] Zoltán Ésik and Werner Kuich. Formal tree series. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 8:219–285, 2003.

[Elg75] Calvin C. Elgot. Monadic computation and iterative algebraic theories. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 80:175–230, 1975.

[ES77] Joost Engelfriet and Erik Meineche Schmidt. IO and OI. I. *Journal of Computer and System Sciences*, 15(3):328–353, 1977.

[ES78] Joost Engelfriet and Erik Meineche Schmidt. IO and OI. II. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(1):67–99, 1978.

[Fok07] Wan Fokkink. *Introduction to process algebra*. Springer-Verlag, 2007.

[Gol99] Jonathan S. Golan. *Semirings and their applications*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[HH13] Masahito Hasegawa and Tamás Hajgató. Traced *-autonomous categories are compact closed. *Theory and Applications of Categories*, 28(7):206 – 212, 2013.

[KS85] Werner Kuich and Arto Salomaa. *Semirings, Automata and Languages*. Springer-Verlag, 1985.

[Kui00] Werner Kuich. *Linear systems of equations and automata on distributive multioperator monoids.*, pages 247–256. Klagenfurt: Verlag Johannes Heyn, 2000.

[Law63] F. William Lawvere. Functorial semantics of algebraic theories. *Proceedings of The National Academy of Sciences*, 50:869–872, 1963.

[Par69] David Park. Fixpoint induction and proofs of program properties. In D. Michie B. Meltzer, editor, *Machine Intelligence*, volume 5. University Press, Edinburgh, 1969.

[Sch61] Marcel P. Schützenberger. On the definition of a family of automata. *Information and Computation/Information and Control*, 4:245–270, 1961.

[Sch62] Marcel P. Schüutzenberger. On a theorem of R. Jungen. *Proceedings of The American Mathematical Society*, 13, 1962.

[Sco72] Dana Scott. Continuous lattices, toposes, algebraic geometry and logic. In F. William Lawvere, editor, *Proceedings of the 1971 Dalhousie conference*, volume 274 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 97–136. Springer-Verlag, 1972.

[SP00] Alex K. Simpson and Gordon D. Plotkin. Complete axioms for categorical fixed-point operators. In *Logic in Computer Science*, pages 30–41, 2000.

[WTWG76] Jesse B. Wright, James W. Thatcher, Eric G. Wagner, and Joseph A. Goguen. Rational algebraic theories and fixed-point solutions. In *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 147–158, 1976.