DOKTORI (Ph.D.) ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

ORTOGONÁLIS POLINOMOK ZÉRUSHELYEI ÉS CHRISTOFFEL-FÜGGVÉNYEK

Varga Tamás

Témavezető:
Dr. Totik Vilmos
az MTA rendes tagja
tanszékvezető egyetemi tanár

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

Szeged, 2013

1. Bevezetés

Amikor a XIX. század végén Stieltjes bevezeti a tetszőleges mértékekhez tartozó ortogonális polinomok fogalmát, megindul azok általános vizsgálata. Ezzel a speciális családok (pl. Jacobi polinomok) konkrét tulajdonságainak megismerése mellett az ortogonális polinomok általános tulajdonságainak (aszimptotikus viselkedés, zérushelyek elhelyezkedése, eloszlása, ezeknek a mérték jellemzőivel való összefüggései, stb.) feltárása is fontos hangsúlyt kap. A tézisben ismertetett eredmények is ehhez az általános vonulathoz kapcsolódnak.

Kutatásunk kiinduló pontja Giuseppe Mastroianni és Totik Vilmos 2010-es cikke [6], amelyben $[-1, 1]$ tartójú duplázó mértékekkel foglalkoznak.

Eredményeink két csoportra oszthatóak. Az elsőben a számegyenesre koncentrált kompakt tartójú mértékekhez tartozó ortogonális polinomok szomszédos zérushelyeinek távolságára adunk kétoldali becslést olyan intervallumok fölött, melyeken a mérték rendelkezik a duplázó tulajdonsággal. Ezzel általánosítjuk Mastroianni és Totik eredményeit rámutatva, hogy azok elsősorban a mérték lokális tulajdonságain múlnak. A becslések igazolásában fontos szerep jut a Christoffel-függvényeknek és ezen keresztül a gyorsan csökkenő polinomoknak. Eszköztárunk mindvégig a valós számegyeneshez kötődik.

A második csoportban a Christoffel-függvények kerülnek középpontba. Síkbeli görbéken adunk rájuk kétoldali becsléseket, ha a kapcsolódó mérték duplázó tulajdonságú. Eredményünk jelentősége, hogy az eddigi eredményekkel ellentétben, amik feltételezték a görbe simaságát, csak kvázi-simaságot várunk el, ami lehetővé teszi, hogy sarkok fölött is kapjunk becsléseket. Alkalmazásként pontbeli becsléseket adunk a kapcsolódó ortogonális polinomokra és Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségeket létesítünk. Az igazolások során ismét fontos szerephez jutó gyorsan csökkenő polinomok mellett a konform leképezések elméletére támaszkodtunk. Utóbbi tekintetében sokat merítettünk Andrijevszkij [2, 1, 3] nem régiben megjelent cikkeiből.

A tézisben ismertetett eredményeket az alábbi cikkekben publikáltuk:

- Totik Vilmos és Varga Tamás, Non-symmetric fast decreasing polynomials and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **394** (2012), 378–390. [9]
- Varga Tamás, Uniform spacing of zeros of orthogonal polynomials for locally doubling measures, *Analysis (Munich)*, **33** (2013), 1-12. [11]
- Varga Tamás, Christoffel functions for doubling measures on quasismooth curves and arcs, *Acta Math. Hungar.*, **141** (2013), 161-184. [12]

2. Előzmények

Legyen μ kompakt és végtelen számosságú tartóval rendelkező mérték a komplex síkon. Ekkor belátható ([10, 1.1]), hogy egyértelműen létezik olyan $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ polinom-sorozat, amelyre igaz hogy π_n foka pontosan n, π_n főegyütthatója pozitív, és

$$\int \pi_m \pi_n \,\mathrm{d}\mu = \begin{cases} 1 & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{ha } m \neq n. \end{cases}$$

E polinom-sorozat tagjait a μ mértékhez tartozó *ortogonális*, pontosabban *ortonormált polinomoknak* nevezzük.

Kutatásunk során mindvégig duplázó tulajdonságú mértékekkel dolgoztunk.

Definíció. *A $[-1, 1]$ tartójú μ mérték duplázó, másként rendelkezik a duplázó tulajdonsággal, ha létezik olyan L (duplázó) konstans, hogy bármely $x \in [-1, 1]$ pontra és $\delta > 0$ számra*

$$L\mu\Big([x - \delta, x + \delta]\Big) \geq \mu\Big([x - 2\delta, x + 2\delta]\Big).$$

Az ortogonális polinomokhoz szorosan kapcsolódnak a Christoffel-függvények. Jelölje $\mathcal{P}_n$ a legföljebb n-ed fokú polinomok halmazát.

Definíció. *Legyen μ kompakt tartójú mérték a számegyenes fölött. A*

$$\lambda_n(\mu, p, x) := \inf_{\substack{q(x)=1 \\ q\in\mathcal{P}_n}} \int |q|^p \,\mathrm{d}\mu$$

függvényt a μ mértékhez tartozó p paraméterű n-edik Christoffel-függvénynek nevezzük.

Bevezetve a következő jelölést:

$$\Delta_n(x) := \frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} + \frac{1}{n^2},$$

idézzük Mastroianni és Totik gyöktávolságokra vonatkozó tételét:

Tétel [6, Theorem 1]. *Legyen μ duplázó mérték a $[-1, 1]$ intervallumon, melyhez a $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonális polinom rendszer tartozik. Ha $x_{n,0} := -1 < x_{n,1} < \cdots < x_{n,n} < x_{n,n+1} := 1$ jelöli π_n gyökeit, akkor létezik olyan A konstans, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ és $0 \leq k \leq n$ egészre teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\frac{1}{A}\Delta_n(x_{n,k}) \leq x_{n,k+1} - x_{n,k} \leq A\Delta_n(x_{n,k}). \qquad (\diamond)$$

Hangsúlyozzuk, hogy A független n-től és k-tól is. Ha megvizsgáljuk a $\Delta_n(x)$ függvényt, akkor azt láthatjuk, hogy a tétel szerint $[-1,1]$ belsejében a szomszédos gyökök távolságának nagyságrendje $1/n$ és ahogy közelítünk a végpontokhoz ez a nagyságrend fokozatosan $1/n^2$-be megy át. A zérushelyek szabályos elhelyezkedése akkor látszik igazán, ha a zérushelyeket függőlegesen felvetítjük az egységkörvonal pozitív ordinátájú részére. Ekkor a felvetített szomszédos pontok távolsága ívhosszban, vagy másként e felvetített pontokhoz tartozó középponti szögek különbsége $1/n$ nagyságrendű.

A Christoffel-függvények zérushelyeknél felvett értékeit, tehát a $\lambda_n(x_{n,k})$ értékeket, *Cotes-számoknak* vagy *Christoffel-számoknak* nevezzük. Az előző tétel felhasználásával kiderül, hogy a szomszédos Cotes-számok nagyságrendileg azonosak.

Következmény [6, Theorem 2]. *Ha μ duplázó a $[-1,1]$ intervallumon, akkor létezik olyan csak a duplázó konstanstól függő B konstans, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ és $0 \le k \le n$ egészre*

$$\frac{1}{B} \le \frac{\lambda_n(x_{n,k+1})}{\lambda_n(x_{n,k})} \le B. \tag{$\diamond\,\diamond$}$$

A két tétel eredményét teljessé teszi, hogy a bennük foglalt egyenlőtlenségek fennállása implikálja a duplázó tulajdonságot, vagyis a két tétel együttesen megfordítható.

Tétel [6, Theorem 3]. *Ha μ mérték a $[-1,1]$ intervallumon, és valamilyen A, illetve B konstansokkal teljesülnek a ($\diamond$) és ($\diamond\,\diamond$) egyenlőtlenségek minden $n \in \mathbb{N}$ és $1 \le k < n$ egészre, akkor μ duplázó mérték a $[-1,1]$ intervallumon.*

Eredményeink első fele azt mondja ki, hogy ha a mérték tartójának csak egy részén rendelkezik duplázó tulajdonsággal, akkor e részen a fenti zérustávolságokra és Cotes-számokra vonatkozó kétoldali becslés továbbra is fennáll a megfordítással együtt. Bizonyításunk követi Mastroianni és Totik gondolatmenetét, amelyben a felső becslés kiszámolásánál fontos szerep jut a már bevezetett Christoffel-függvényeknek. Ennek kapcsán a következő korábbi eredményüket használták fel:

Tétel [7, (7.14)]. *Ha μ duplázó a $[-1,1]$ intervallumon, akkor van olyan c konstans, hogy bármely $x \in [-1,1]$ pontra*

$$\frac{1}{c}\mu\Big([x-\Delta_n(x), x+\Delta_n(x)]\Big) \le \lambda_n(\mu, p, x) \le c\mu\Big([x-\Delta_n(x), x+\Delta_n(x)]\Big). \tag{$\circ$}$$

A tézis második részében ennek a tételnek általánosítását adjuk abban az értelemben, hogy a $[-1,1]$ intervallumot lecseréljük egy síkbeli kvázi-sima görbére vagy ívre.

3. Lokálisan duplázó mértékhez tartozó ortogonális polinomok gyöktávolsága

Ebben a részben feltesszük, hogy a vizsgált mérték tartója a számegyenes kompakt részhalmaza. Ha I egy intervallum a számegyenesen, akkor $2I$ jelölje a középpontjából megkétszerezett intervallumot, tehát a középpontja ugyanaz, mint az I intervallumé és hossza (Lebesgue-mértéke) annak kétszerese. Az I intervallum hosszát $|I|$-vel jelöljük.

3.1. A gyökök elrendeződése duplázó intervallumokon

Definíció. *Azt mondjuk, hogy a μ mérték az $[a, b]$ intervallumon duplázó (tulajdonságú) az $L = L(\mu, [a, b])$ duplázó konstanssal, ha $\mu([a, b]) > 0$ és*

$$\mu(2I) \leq L\mu(I)$$

valahányszor $2I \subset [a, b]$.

Már is megfogalmazhatjuk a [6, Theorem 1] lokális változatát:

3.2. Tétel.[1] *Ha a μ mérték duplázó az $[a, b]$ intervallumon, akkor bármely $\delta > 0$ számhoz létezik olyan n-től független $A = A\Big(\delta, L(\mu, [a, b])\Big)$ konstans, hogy*

$$\frac{1}{An} \leq x_{n,k+1} - x_{n,k} \leq \frac{A}{n}, \qquad k = j, j+1, \dots, l-1, \tag{*}$$

ahol $x_{n,j} < x_{n,j+1} < \cdots < x_{n,l}$ jelöli a π_n polinom $[a + \delta, b - \delta]$ intervallumba eső gyökeit.

A tétel nem feltétlenül igaz, ha az $[a + \delta, b - \delta]$ intervallumot lecseréljük az (a, b) nyílt intervallumra, például gondoljunk valamilyen Jacobi-súlyra a $[-1, 1] =: [a, b]$ intervallumon (a Jacobi-súly (által generált) mérték duplázó, így ± 1 körül $1/n^2$ nagyságrendű a távolság).

A tétel állítása „aszimptotikus nyelvezeten” is megfogalmazható. Válasszunk ki egy $x_{n,k(n)}$ gyökökből álló sorozatot az $[a + \delta, b - \delta]$ intervallumon. Ekkor

$$0 < \frac{1}{A} \leq \liminf_{n\to\infty} n(x_{n,k(n)+1} - x_{n,k(n)}) \leq \limsup_{n\to\infty} n(x_{n,k(n)+1} - x_{n,k(n)}) \leq A < \infty.$$

Ebből az alakból azonnal leolvasható, hogy eredményünk magában foglalja Y. Last és B. Simon alábbi két tételét:

3.4. Következmény [5, Theorem 8.5]. *Tegyük fel, hogy* $d\mu = w(x)d(x)$ *abszolút folytonos az* E_0

[1] Ahol fel van tüntetve a számozás, az megfelel az értekezésbeli számozásnak.

pont egy környezetében, és valamilyen $q > 0$ számmal teljesül, hogy

$$0 < \liminf_{x \to E_0} \frac{w(x)}{|x - E_0|^q} \le \limsup_{x \to E_0} \frac{w(x)}{|x - E_0|^q} < \infty.$$

Ekkor

$$\limsup_{n \to \infty} n |x_n^{(1)}(E_0) - x_n^{(-1)}(E_0)| < \infty,$$

ahol $x_n^{(1)}(E_0)$ az n-edik ortogonális polinom E_0 pontot követő legkisebb, míg $x_n^{(-1)}(E_0)$ az E_0 előtti (vagy azzal épp egybeeső) legnagyobb zérushelyét jelöli.

3.5. Következmény [5, Theorem 9.3]. *Tegyük fel, hogy $\mathrm{d}\mu = w(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}\mu_s$, ahol a μ mérték μ_s szinguláris része eltűnik az $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ intervallumon, míg a $w\,\mathrm{d}x$ abszolút folytonos részre teljesül, hogy*

$$0 < \inf_{|y - x_0| \le \delta} w(x) \le \sup_{|y - x_0| \le \delta} w(x) < \infty.$$

Ekkor bármely $\epsilon < \delta$ számra,

$$\inf_{|y - x_0| < \epsilon} \liminf_{n \to \infty} n |x_n^{(1)}(y) - x_n^{(-1)}(y)| > 0.$$

Igaz marad Mastroianni és Totik Cotes-számokra vonatkozó becslése és a megfordítás is.

3.6. Következmény. *Ha a μ mérték kompakt tartójú a számegyenesen és duplázó az $[a, b]$ intervallumon, akkor bármely $\delta > 0$ számhoz van olyan $B = B\big(\delta, L(\mu, [a, b])\big)$ konstans, hogy*

$$\frac{1}{B} \le \frac{\lambda_n(x_{n,k})}{\lambda_n(x_{n,k+1})} \le B, \tag{**}$$

valahányszor $x_{n,k}$ és $x_{n,k+1}$ a π_n polinom egymást követő két gyöke az $[a + \delta, b - \delta]$ intervallumon.

3.7. Tétel. *Ha μ kompakt tartójú mérték a számegyenesen és a hozzája tartozó ortogonális polinomok zérushelyeire minden $[a + \delta, b - \delta]$ ($\delta > 0$) alakú intervallumon teljesül (*) és (**) valamilyen (δ-tól függő) A és B konstanssal, akkor μ duplázó ezeken az intervallumokon.*

Az eddigi három tételben a kérdéses intervallum végpontjaitól távol vizsgálódtunk. Általában a végpontok körül nem is adhatunk becslést: láttuk, hogy a $[-1, 1]$ intervallumon duplázó mérték esetén a végpontok közelében $1/n^2$ a távolság; ha viszont egy mérték duplázó az $[a, b]$ intervallumon, de még az $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ intervallumon is, akkor marad az $1/n$ nagyságrendű távolság. Már ez is mutatja, hogy a végpontoknál a zérushelyek távolságának viselkedését befolyásolja az is, hogy az intervallumon kívül milyen a mérték. Kutatásunk során azt az esetet vizsgáltuk, amikor a mérték a végpontok egy féloldali környezetében eltűnik. Azt igazoltuk –ahogy vártuk is –, hogy a gyökök távolsága itt is követi a tisztán duplázó esetben látottakat, vagyis a távolság $1/n$ nagyságrendből $1/n^2$ nagyságrendbe megy át a végpontokhoz közeledve. Egyetlen eltérés csak a végpont és a végponthoz legközelebb eső gyök távolságában lehetséges. Rámutatunk, hogy egy belső végpontnál ez a távolság sokkal kisebb (pl. e^{-n}) is lehet.

Jelölje $\mathrm{supp}(\mu)$ a μ mérték tartóját.

Definíció. *Legyen μ kompakt tartójú mérték és $\mathbf{b} \in \mathrm{supp}(\mu)$. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{b}$ egy bal-végpontja μ tartójának, ha $\mu([\mathbf{b}-\alpha, \mathbf{b}]) = 0$ valamilyen $\alpha > 0$ számra és $\mu([\mathbf{b}, \mathbf{b}+\beta]) > 0$ minden $\beta > 0$ számra.*

Most már kimondhatjuk a 3.2. Tétel, a 3.6. Következmény és a 3.7. tétel végpontokhoz kapcsolódó változatát.

3.10. Tétel. *Ha $\mathbf{b}$ bal-végpontja μ tartójának és μ duplázó a $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\beta]$ intervallumon valamilyen $\beta > 0$-ra, akkor bármely $0 < \gamma < \beta$-hoz van olyan A_γ, hogy*

$$\frac{1}{A_\gamma}\left(\frac{\sqrt{x_{n,k}-\mathbf{b}}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \le x_{n,k+1}-x_{n,k} \le A_\gamma\left(\frac{\sqrt{x_{n,k}-\mathbf{b}}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \tag{$\star$}$$

teljesül valahányszor $x_{n,k}$ és $x_{n,k+1}$ az n-edik ortogonális polinom két egymást követő gyöke a $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\gamma]$ intervallumon; továbbá ha x_{n,k_0} jelöli a legkisebb $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\gamma]$ intervallumba eső zérushelyet, akkor az

$$x_{n,k_0} - \mathbf{b} \le \frac{A_\gamma}{n^2}$$

egyenlőtlenség is fennáll.

3.12. Következmény. *A 3.10. Tétel feltételei mellett bármely $0 < \gamma < \beta$-hoz van olyan B_γ konstans, hogy*

$$\frac{1}{B_\gamma} \le \frac{\lambda_n(x_{n,k})}{\lambda_n(x_{n,k+1})} \le B_\gamma \tag{$\star\,\star$}$$

teljesül valahányszor $x_{n,k}$ és $x_{n,k+1}$ az n-edik ortogonális polinom két egymást követő gyöke a $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\gamma]$ intervallumon.

$(\star)$ és $(\star\,\star)$ együttesen implikálja a duplázó tulajdonságot.

3.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy a μ kompakt tartójú mérték eltűnik a $[\mathbf{b}-\alpha, \mathbf{b}]$ intervallumon és a $(\star)$, $(\star\,\star)$ egyenlőtlenségek fennállnak minden $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\gamma]$ $(0 < \gamma < \beta)$ alakú intervallumon valamilyen megfelelő A_γ és B_γ konstansokkal. Ekkor μ duplázó ezeken az intervallumokon.*

Megjegyzés. Természetesen a „jobb-végpont" fogalmát is bevezethetnénk a bal mintájára, és akkor az előbbi tételek jobb-végpontos változatát is kimondhatjuk.

Az alábbi állítás hívja fel a figyelmet, hogy a belső végpontoknál valóban figyelnünk kell, ami a végpont és az intervallumba eső hozzá legközelebbi gyök közötti távolságot illeti:

3.25. Állítás. *Van olyan* $0 < d < 1$*, hogy ha* μ *jelöli a Lebesgue-mérték* $[-2, -1] \cup [0, d]$ *halmazra történő megszorítását és* x_{n,j_0} *az n-edik ortogonális polinom legkisebb nem negatív gyökét, akkor a természetes számoknak létezik olyan* $\{n_k\}$ *részsorozata, hogy*

$$\frac{1}{2}e^{-n_k} \leq x_{n_k,j_0} \leq 2e^{-n_k}.$$

A 3.2. Tételnek és végpontváltozatának, a 3.10. Tételnek a bizonyításában a felső becslés bizonyul nehezebbnek, amiben kulcsszerepet játszik a következő két Christoffel-függvényekre vonatkozó becslés:

3.15. Lemma. *Ha* μ *kompakt tartójú mérték a számegyenesen és duplázó tulajdonságú az* $[a, b]$ *intervallumon, akkor bármely* $\delta > 0$ *számhoz van olyan* $D = D(p, L, a, b)$*, hogy* $n > \frac{2}{\delta}$ *esetén*

$$\frac{1}{D}\mu\Big(\Big[\xi - \tfrac{1}{n}, \xi + \tfrac{1}{n}\Big]\Big) \leq \lambda_n(\mu, p, \xi) \leq D\mu\Big(\Big[\xi - \tfrac{1}{n}, \xi + \tfrac{1}{n}\Big]\Big),$$

valahányszor $\xi \in [a + \delta, b - \delta]$.

3.20. Lemma. *Legyen* $\mathbf{b}$ *bal-végpontja a* μ *mérték tartójának. Tegyük fel, hogy* μ *duplázó tulajdonságú a* $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \beta]$ *intervallumon, és legyen* $\gamma < \beta$*. Ekkor van olyan* C_γ *konstans, hogy bármely* $a \in [A, A + \gamma]$ *pontra*

$$\frac{1}{C_\gamma}\mu([a - \Delta_n(a), a + \Delta_n(a)]) \leq \lambda_n(\mu, p, a) \leq C_\gamma\mu([a - \Delta_n(a), x + \Delta_n(a)]).$$

A két rokon lemma igazolásában fontos szerepet kapnak a gyorsan csökkenő polinomok. Ezek az intervallum belsejére vonatkozó esetben rendelkezésünkre álltak [4], míg a végpont esetben igazolnunk kellett létezésüket:

Legyen ψ nem negatív jobbról folytonos és monoton növő függvény a pozitív félegyenesen, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- $\psi(0+) = 0$, és
- $\psi(x) \leq M\psi(x/2)$ valamilyen alkalmas, x-től független M konstanssal.

3.19. Tétel. [9, Theorem 2.1] *Ha*

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

akkor megadhatóak olyan C *és* c *konstansok, hogy minden* $a \in [0, 1/2]$ *számhoz és* n *pozitív* *egészhez létezik olyan legföljebb n-ed fokú $P_n = P_{n,a}$ polinom, melyre $P_n(0) = 1$, $0 \le P_n(x) \le 2$ és*

$$P_n(x) \le C \exp\left(-c\psi\left(\frac{n|x|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{a}}\right)\right), \qquad x \in [-a, 1].$$

4. Christoffel-függvények görbéken és íveken

4.1. Kétoldali becslés a Christoffel-függvényekre

Ebben a részben a (∘) kétoldali becslés általánosítását adjuk abban az értelemben, hogy az eddigi számegyenesen lévő intervallumot egy komplex síkon futó kvázi-sima göbére vagy ívre cseréljük.

Megközelítésünk szorosan kapcsolódik Andrijevszkij munkáihoz [1, 2, 3], amelyekben [7] eredményeit kiterjeszti kvázi-sima görbékre és ívekre.

A továbbiakban az általunk vizsgált Jordan-görbékről (az egységkörvonal homeomorf képei) és ívekről (a $[-1, 1]$ intervallum homeomorf képei) feltesszük, hogy rektifikálhatóak. Ha z_1 és z_2 két pontja az általunk vizsgált L görbének vagy ívnek, akkor $L(z_1, z_2)$ jelöli L-nek azt a (görbe esetén rövidebb) részívét, ami összeköti ezeket a pontokat. Az $L(z_1, z_2)$ részív ívhosszára pedig az $|L(z_1, z_2)|$ jelölést alkalmazzuk.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy az L Jordan-görbe vagy ív (Lavrentyijev értelemben) kvázi-sima, ha létezik olyan Λ_L (Lavrentyijev) konstans, hogy az*

$$|L(z_1, z_2)| \le \Lambda_L |z_1 - z_2|$$

egyenlőtlenség fennáll minden $z_1, z_2 \in L$ pontra.

A becslés megadásában fontos segédeszközünk volt a Riemann-leképezés. Legyen $\mathbb{C}_\infty$ a kiterjesztett komplex sík és jelölje Ω az L görbe vagy ív külsejét, azaz $\mathbb{C}_\infty \setminus L$ azon komponensét, amely tartalmazza ∞-t. Ekkor egyértelműen létezik olyan Φ leképezés, amely az Ω halmazt konform módon ráképezi a $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1\}$ halmazra, azaz a zárt egységkörlap külsejére, és rendelkezik a következő normalizáltsági tulajdonságokkal: $\Phi(\infty) = \infty$, illetve $\Phi'(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$ (pl. [8, Chapter 4.4]).

A Φ leképezéshez tartozó $\delta(> 0)$ szintvonal alatt az origó középpontú $1 + \delta$ sugarú körvonal Φ melletti

$$L_\delta := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = 1 + \delta\},$$

inverz képét értjük, és bevezetjük a

$$\rho_\delta(z) := \mathrm{d}(L_\delta, z) = \inf_{\zeta \in L_\delta} |z - \zeta|$$

jelölést a $z \in \mathbb{C}$ pont L_δ-tól való távolságára. A duplázó tulajdonságot eddig számegyeneshez kapcsolódóan értelmeztük, de természetes módon kiterjeszthető görbékre (ívekre) is.

Jelölje

$$B(z,\delta)=\{\zeta : |\zeta - z| \le \delta\}$$

a z középpontú δ sugarú körlapot.

Definíció. *Legyen μ mérték a komplex síkon, aminek tartója egy L kvázi-sima görbe vagy ív. μ duplázó mérték L-en, másként rendelkezik a duplázó tulajdonsággal, ha van olyan c_μ (duplázó) konstans, hogy*

$$\mu\Big(B(z,2\delta)\Big) \le c_\mu\, \mu\Big(B(z,\delta)\Big)$$

minden $z \in L$ pontra és $\delta > 0$ számra.

Tekintsünk egy irányítást L-en (pl. ha az ív-esetben ζ_1 és ζ_2 jelöli a végpontokat, akkor ζ_1-től ζ_2-ig, míg a görbe-esetben az óramutató járásával megegyező irányban); legyen $z \in L$ és $\delta > 0$, amire $\sup_{z\in L} \rho_\delta(z) < |L|/2$. Jelölje $z_{-\delta}$ azt a z-t megelőző és z_δ azt a z-t követő pontot, amelyre $|L(z_{-\delta}, z)| = \rho_\delta(z)/2$, illetve $|L(z, z_\delta)| = \rho_\delta(z)/2$. Előfordulhat az ív-esetben, hogy e pontok valamelyike nem létezik, ekkor $z_{-\delta} := \zeta_1$, illetve $z_\delta := \zeta_2$. E jelölésekkel élve legyen

$$l_\delta(z) := L(z_{-\delta}, z_\delta),$$

míg ennek mértékét

$$\upsilon_\delta(z) := \mu\Big(l_\delta(z)\Big)$$

jelölje.

Andrijevszkij eredményei lehetővé tették, hogy egy további paramétert vezessünk be a Christoffel-függvénybe. Emlékeztetünk, hogy $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú, komplex együtthatós polinomok halmazát jelöli.

Definíció. *Legyen L kvázi-sima görbe vagy ív, μ duplázó mérték L-en, $p \in [1,\infty)$ és $t \in \mathbb{R}$. A*

$$\lambda_n(\mu, p, t, z) := \inf_{\substack{p_n\in\mathcal{P}_n\\ p_n(z)=1}} \int \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^t |p_n(\zeta)|^p \,\mathrm{d}\mu(\zeta)$$

függvényt a μ mértékhez tartozó (p,t) paraméterű n-edik Christoffel-függvénynek nevezzük.

A $t = 0$ esetben a klasszikus L^p Christoffel-függvényeket kapjuk vissza.

Most már kimondhatjuk a $(\circ)$ egyenlőtlenség kvázi-sima görbékre/ívekre általunk igazolt kiterjesztését:

4.4 Tétel. *Legyen L kvázi-sima görbe vagy ív és μ duplázó mérték L-en. Ha $p \in [1,\infty)$ és $t \in \mathbb{R}$, akkor van olyan $c = c(L, c_\mu, p, t)$ konstans, hogy minden $z \in L$ pontra és $n \in \mathbb{N}$ egész számra*

$$\frac{1}{c}\,\rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \le \lambda_n(\mu, p, t, z) \le c\,\rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z). \tag{4.1}$$

4.5. Következmény. *Ugyanez az eredmény érvényes L-re, ha véges sok olyan kvázi-sima görbe vagy ív egyesítése, melyek egymás külsejében fekszenek, megjegyezve hogy ekkor $\rho_{\frac{1}{n}}$ értéke a z pontban legyen a z-t tartalmazó komponensre vonatkozó $\rho_{\frac{1}{n}}$ függvény z-beli értéke.*

Talán a $t = 0$ eset a legérdekesebb; azt mutatja, hogy az n-edik Christoffel-függvény értékének nagyságrendje a $z \in L$ pontban megegyezik $l_{\frac{1}{n}}(z)$ μ-mértékével (vö. 3.14. és 3.19. Lemma).

4.2. Következmények

4.2.1. Becslés ortogonális polinomokra

A Christoffel-függvények ortogonális polinomokkal való szoros kapcsolatát mutatja a következő összefüggés (pl. [10, Theorem 1.4]):

$$\lambda_n(\mu, 2, 0, z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |\pi_k(z)|^2},$$

amiben π_k továbbra is a μ mértékhez tartozó k-adik ortonormált polinomot jelöli. Ennek felhasználásával adódnak az alábbi következmények.

4.6. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, akkor*

$$|\pi_n(z)| \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}}$$

minden $z \in L$ pontra, ahol c a 4.4. Tételben szereplő konstans.

4.7. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, akkor*

$$\max_{0 \leq k \leq n} |\pi_k(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{c}\,\sqrt{n}\,\sqrt{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}},$$

ahol c a 4.4 Tételben szereplő konstans.

Sőt, ha tudjuk, hogy $n \cdot \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \to 0$, akkor „részlegesen" elhagyhatjuk a „max" operátort, pontosabban:

4.8. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, akkor minden olyan $z \in L$ pontra, amelyre $n \cdot \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \to 0$, megadható a természetes számok egy olyan végtelen $\mathbb{M} = \mathbb{M}$*

(z) *részhalmaza, hogy valahányszor $n \in \mathbb{M}$, mindannyiszor*

$$|\pi_n(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}}.$$

Ha az $n \cdot \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \to 0$ feltételt nem tesszük föl, akkor csak a következő gyengébb állítást sikerült belátnunk:

4.10. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, akkor bármely $z \in L$ ponthoz és $\varepsilon > 0$ számhoz van a természetes számoknak olyan végtelen $\mathbb{M} = \mathbb{M}(z, \varepsilon)$ részhalmaza, hogy minden $n \in \mathbb{M}$-re*

$$|\pi_n(z)| \geq \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}}.$$

4.2.2. Christoffel-függvények Dini-sima görbéken és íveken

Az alábbi két következményben további megszorításokat teszünk L simaságára vonatkozóan. Feltesszük, hogy a kérdéses görbe vagy ív Dini-sima vagy valamelyik pontjában rendelkezik egy Dini-sima sarokkal. Ezekben az esetekben explicit módon ki tudjuk fejezni $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$ nagyságrendjét.

Definíció. *Egy L Jordan-görbe vagy ív Dini-sima, ha van olyan differenciálható $\gamma(t)$ paraméterezése, amelynek deriváltja sehol sem nulla és Dini-folytonos, azaz, ha*

$$\omega(\delta) := \sup_{\substack{t_1, t_2 \in [0, 2\pi] \\ |t_1 - t_2| < \delta}} |\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)|$$

jelöli a derivált folytonossági modulusát, akkor

$$\int_0^\pi \frac{\omega(t)}{t} \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Azt mondjuk, hogy az L görbének *ζ-ban sarka van*, ha ζ-ban mindkét irányban léteznek a félérintők. Amikor $\beta\pi$ szögű sarokról beszélünk, akkor a félérintők által meghatározott szögtartományok közül a görbe-esetben azt vesszük figyelembe, amelyik a görbe külsejébe esik, míg az ív-esetben azt, amelyikhez a nagyobb szög tartozik. Egy sarok Dini-sima, ha van L-nek két olyan Dini-sima ζ-ban végződő részíve, amelyek ζ ($\gamma(t)$ paraméterezés szerinti) ellenkező oldalain fekszenek. Vegyük észre, ha L Dini-sima, akkor (a végpontok kivételével) L minden pontjában egy Dini-sima egyenes szög van, így a következő állítások magukban foglalják azt az esetet is, amikor L nem rendelkezik szemléletes sarokkal (minden pontjában létezik érintő).

Bevezetünk egy függvényt, ami explicit kifejezi $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$ nagyságrendjét.

$$\Delta_n(z) := \begin{cases} \frac{1}{n^\beta} & \text{ha } z \in l_{\frac{1}{n}}(\zeta) \\ \frac{|z-\zeta|^{1-\frac{1}{\beta}}}{n} & \text{ha } z \in L \setminus l_{\frac{1}{n}}(\zeta). \end{cases}$$

4.12. Tétel. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, melynek ζ-ban $\beta\pi$ szögű Dini-sima sarka van ($0 < \beta < 2$ a görbe-esetben, $1 \le \beta < 2$ az ív-esetben), akkor van olyan $\varepsilon = \varepsilon(L, \zeta) > 0$ és $c = c(L, \zeta, \varepsilon, \beta)$, hogy minden $z \in L$ pontra, amelyre $|z - \zeta| \le \varepsilon$, teljesül az*

$$\frac{1}{c}\Delta_n(z) \le \rho_{\frac{1}{n}}(z) \le c\Delta_n(z)$$

egyenlőtlenség.

Megjegyzés. Az előző lemma a végpontoknál is kimondható: ekkor azt követeljük meg, hogy a végpont az L ív egy Dini-sima részívének is végpontja, míg β helyébe 2 kerül, mintha a végpontnál 2π nagyságú szög lenne.

Ezt a lemmát az előbbi megjegyzéssel együtt a 4.4. Tétellel kombinálva azonnal megkapjuk az alábbi következményt:

4.14. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, melynek ζ-ban $\beta\pi$ szögű Dini-sima sarka van ($0 < \beta < 2$ a görbe-esetben, $1 \le \beta < 2$ az ív-esetben), akkor van olyan $\varepsilon = \varepsilon(L, \zeta) > 0$ és $c = c(L, c_\mu, p, t, \zeta, \varepsilon, \beta)$, hogy minden $z \in L$ pontra, amelyre $|z - \zeta| \le \varepsilon$, teljesül az*

$$\frac{1}{c}\,\Delta_n(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \le \lambda_n(\mu, p, t, z) \le c\,\Delta_n(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)$$

egyenlőtlenség.

Speciálisan, ha a görbe vagy ív szakaszonként Dini-sima, akkor az előbbi következmény globálisan is érvényes. Ehhez előbb megadjuk $\Delta_n(z)$ alkalmas alakját. Tegyük föl, hogy L-nek $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ (ahol ζ_1 és ζ_n továbbra is a két végpontot jelöli az ív-esetben) pontjaiban vannak a π-től különböző szögű sarkai rendre $\beta_1\pi, \ldots, \beta_n\pi$ szögekkel ($0 < \beta_i < 2$ a görbe-esetben; $\beta_i := 2$, ha $i = 1$ vagy n és $1 < \beta_i < 2$, ha $1 < i < n$ az ív-esetben). Legyen

$$\Delta_n(z) := \begin{cases} \frac{1}{n^{\beta_i}} & \text{ha } z \in l_{\frac{1}{n}}(\zeta_i) \;\; (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \frac{\prod_{i=1}^n |z-\zeta_i|^{1-\frac{1}{\beta_i}}}{n} & \text{ha } z \in L \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n l_{\frac{1}{n}}(\zeta_i)\right). \end{cases}$$

4.15. Tétel. *Ha L szakaszonként Dini-sima görbe vagy ív, akkor van olyan $c = c(L)$ konstans, hogy minden $z \in L$ pontra*

$$\frac{1}{c}\Delta_n(z) \le \rho_{\frac{1}{n}}(z) \le c\Delta_n(z).$$

4.16. Következmény. *Ha L szakaszonként Dini-sima görbe vagy ív, akkor van olyan $c = c(L, c_\mu, p, t)$ konstans, hogy az*

$$\frac{1}{c}\Delta_n(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \le \lambda_n(\mu, p, t, z) \le c\, \Delta_n(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)$$

egyenlőtlenség teljesül L bármely z pontjában.

Vegyük észre, hogy ($\circ$) megfelel az $L = [-1, 1]$ és a $t = 0$ választásnak.

4.2.3. Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségek

Ha $1 \le p < q$, akkor a Hölder-egyenlőtlenség segítségével belátható, hogy egy függvény L_p-normája felülről becsülhető L_q-normájával. Polinomok esetében a fordított irányú becslésekhez a Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségek használhatók. A 4.4. Tétel segítségével duplázó mértékre látunk be ilyen Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségeket, ha a mérték tartója kvázi-sima görbe vagy ív. Eredményünk így részben átfed Andrijevszkij egyik tételével [2, Theorem 6], amelyben –tőlünk eltérő úton– Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségeket igazolt ívhossz-mértékre pusztán csak az ív rektifikálhatóságát feltételezve. Legyen

$$M_n := \sup_{\zeta \in L} \frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)},$$

4.17. Következmény. *Ha az L kvázi-sima görbén vagy íven μ duplázó mérték és $1 \le p < q$, akkor van olyan n-től független c konstans, hogy*

$$\|p_n\|_\infty \le c M_n^{\frac{1}{p}} \|p_n\|_{\mu,p},$$

továbbá

$$M_n^{\frac{1}{q}} \|p_n\|_{\mu,q} \le c M_n^{\frac{1}{p}} \|p_n\|_{\mu,p}$$

minden legfeljebb n-ed fokú p_n polinomra.

Megjegyzés. Belátható, hogy súlyozatlan (ívhossz-mérték) estben M_n nagyságrendje n, ha L Dini-sima és n^2, ha L kvázi-sima ív. Ezért eredményünk –konstans szorzó erejéig– magában foglalja a klasszikus egységkörre, illetve a $[-1, 1]$ intervallumra vonatkozó becsléseket.

Hivatkozások

[1] V. V. Andrievskii, Weighted L_p Bernstein-type inequalities on a quasismooth curve in the complex plane, *Acta Math. Hungar.*, **135 (1–2)** (2011), 8–23.

[2] V. V. Andrievskii, Weighted Polynomial Inequalities in the Complex Plane, *J. Approx. Theory*, **164** (2012), 1165–1183.

[3] V. V. Andrievskii, Weighted Polynomial Inequalities with Doubling Weights on a Quasi-smooth Arc, *Constr. Approx.*, **36** (2011), 117–143.

[4] K. G. Ivanov; V. Totik, Fast decreasing polynomials, *Constr. Approx.* **6** (1990), no. 1, 1–20.

[5] Y. Last; B. Simon, Fine structure of the zeros of orthogonal polynomials IV. A priori bounds and clock behavior, *Comm. Pure Appl. Math.* **61** (2008), no. 4, 486–538.

[6] G. Mastroianni; V. Totik, Uniform spacing of zeros of orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **32** (2010), no. 2, 181–192.

[7] G. Mastroianni; V. Totik, Weighted polynomial inequalities with doubling and A_∞ weights, *Constr. Approx.* **16** (2000), no. 1, 37–71.

[8] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, 1995.

[9] V. Totik and T. Varga, Non-symmetric fast decreasing polynomials and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **394** (2012), 378-390.

[10] W. Van Assche, Orthogonal Polynomials in the Complex Plane and on the Real Line, *Fields Inst. Commun.Amer. Math. Soc* (1997), 211-245.

[11] T. Varga, Uniform spacing of zeros of orthogonal polynomials for locally doubling measures, *Analysis (Munich)*, **33** (2013), 1-12.

[12] T. Varga, Christoffel functions for doubling measures on quasismooth curves and arcs, *Acta Math. Hungar.*, **141** (2013), 161-184.